Случайные процессы. Прикладной поток.

Практическое задание 7

Правила:

- Выполненную работу нужно отправить на почту `probability.diht@yandex.ru`, указав тему письма "`[СП17] Фамилия Имя - Задание 7`". Квадратные скобки обязательны, внутри них пробела быть не должно. Вместо `Фамилия Имя` нужно подставить свои фамилию и имя.
- Прислать нужно ноутбук и его pdf-версию. Названия файлов должны быть такими: `7.N.ipynb` и `7.N.pdf`, где `N` - ваш номер из таблицы с оценками.
- При проверке могут быть запущены функции, которые отвечают за генерацию траекторий винеровского процесса.

In [358]:

```
import numpy as np
import pandas as pd
from scipy.stats import norm
from scipy.stats import uniform
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline

import re
from io import StringIO

from sklearn.metrics import mean_squared_error
from sklearn.linear_model import LinearRegression

import warnings
warnings.simplefilter('ignore')
```

Регрессия на гауссовских процессах

Напомним задачу регрессии. Пусть имеется некоторая функциональная зависимость $y = f(x)$. Для ее оценки проводится серия испытаний в точках $x_1, \ldots, x_n$, в которых получаются значения $Y_i = f(x_i) + \varepsilon_i$, где ε_i --- случайная ошибка измерений. Задача состоит в том, чтобы по этим наблюдениям оценить зависимость f. В курсе статистики мы рассматривали случай линейных функций. Теперь рассмотрим случай, когда f является траекторией некоторого стационарного гауссовского процесса.

Внимание! Далее происходит смена обозначений на принятые в случайных процессах. Буква x меняется на t, а буква y меняется на x.

Пусть $X = (X_t, t \in \mathbb{R})$ --- стационарный гауссовский процесс с нулевой функцией среднего и ковариационной функцией $R(t) = cov(X_t, X_0)$. Даны его измерения $x_1, \ldots, x_n$ в моменты времени $t_1, \ldots, t_n$ соответственно. Тогда условное распределение X_t при условии $X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_n} = x_n$ является нормальным со средним $r^T C^{-1} \overrightarrow{x}$ и дисперсией $R(0) - r^T C^{-1} r$, где $C = \Big(R(t_i - t_j)\Big)_{i,j}$, $r = (R(t - t_1), \ldots, R(t - t_n))^T$, $\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$.

Байесовской оценкой общего вида значения процесса в момент времени t является условное распределение X_t при условии .... В качестве точечной оценки обычно берут условное математическое ожидание $\mathsf{E}\left(X_t \,\middle|\, X_{t_1} = x_1,\ \ldots,\ X_{t_n} = x_n\right)$. Кроме того, для каждого t можно построить доверительный интервал для величины X_t, зная условную дисперсию.

Предположим, что для каждого t построен доверительный интервал для X_t уровня доверия 0.95. Верно ли, что $\mathsf{P}(\exists t : \text{истинное значение } X_t \text{ не попало в свой доверительный интервал}) \leqslant 0.05$?

Нет, естли построен доверительный интервал для X_t, это означает что вероятность попадания X_t в него равна 0.95, а не попадания соответственно 0.05. Тогда $\mathsf{P}(\exists t : \text{истинное значение } X_t \text{ не попало в свой доверительный интервал}) = 1 - \mathsf{P}(\forall t : \text{истинное значение } X_t \text{ попало в свой доверительный интервал}) \to 1$

Напишите класс регрессии на гауссовских процессах. Интерфейс похож на интерфейс библиотеки `scikit-learn`.

Наш класс будет работать для времени из $\mathbb{R}^d$, а не $\mathbb{R}$. Почему так можно сделать на основе решенной задачи?

Координаты независимы

При написании класса пользуйтесь `numpy.matrix` для работы с матрицами, либо операцией `@` для объектов `numpy.array`.

In [2]:
```
class GaussianProcessRegression:

    def __init__(self, cov_function):
        self.cov_function = cov_function


    def fit(self, T, X):
        ''' "Обучение" модели регрессии.
                T --- np.array, размерность (n, d): моменты времени,
                      в которые проведены измерения
                X --- np.array, размерность n: полученные значения про
        '''
        self.fit_times = T

        x = np.tile(T, (len(T), 1, 1))
        y = np.transpose(x, (1, 0, 2))
        self.inv_c = self.cov_function(x - y)
        self.inv_c = np.linalg.inv(self.inv_c)

        self.mean_coeff = self.inv_c @ X

        return self


    def predict(self, T):
        ''' Оценка значения процесса.
                T --- np.array, размерность (n, d): моменты времени,
                      в которые нужно оценить значения.

            Возвращает:
                values --- np.array, размерность n: предсказанные
                           значения процесса
                sigma --- np.array, размерность n: соответствующая дис
        '''

        r = self.cov_function(np.tile(np.transpose([T], (1, 0, 2)),
                                      (len(self.fit_times), 1))\
                                       - self.fit_times)
        values = r @ self.mean_coeff
        sigma  = self.cov_function(np.zeros_like(T[0]))\
                 - np.sum(r @ self.inv_c * r, axis=1)

        return values, sigma
```

Зададим какую-нибудь простую функцию $f(t)$

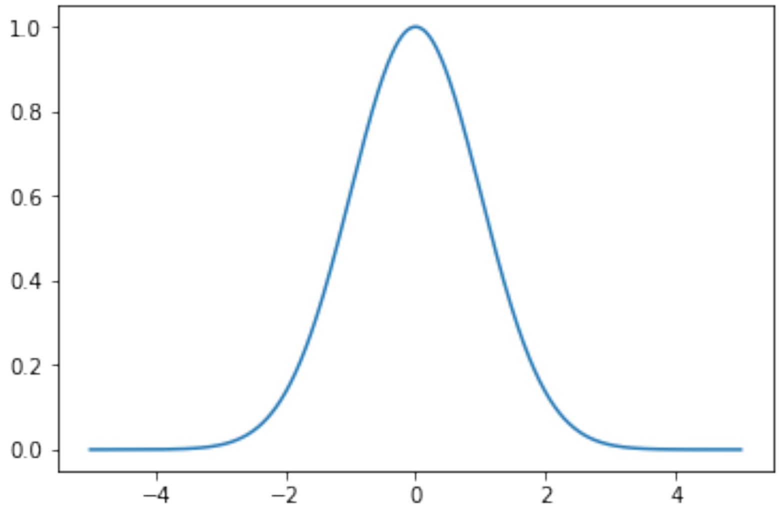
In [4]:
```
def calc_f(t, a=0.2, b=0.5, c=2):
    return np.log(1 + t) + a * t + b * np.sin(c * t)
```

И ковариационную функцию

$$R(t) = a\ exp\left(\frac{\|t\|^2}{2s^2}\right),$$

- $t \in \mathbb{R}^d$
- $a, s > 0$ --- параметры

In [7]:
```
def exp_cov(t, a=1, s=1):
    return a * np.exp(-(t ** 2).sum(axis=-1) / (2 * s ** 2))

grid = np.linspace(-5, 5, 1001)
plt.figure(figsize=(6, 4))
plt.plot(grid, exp_cov(grid.reshape((-1, 1))))
plt.show()
```

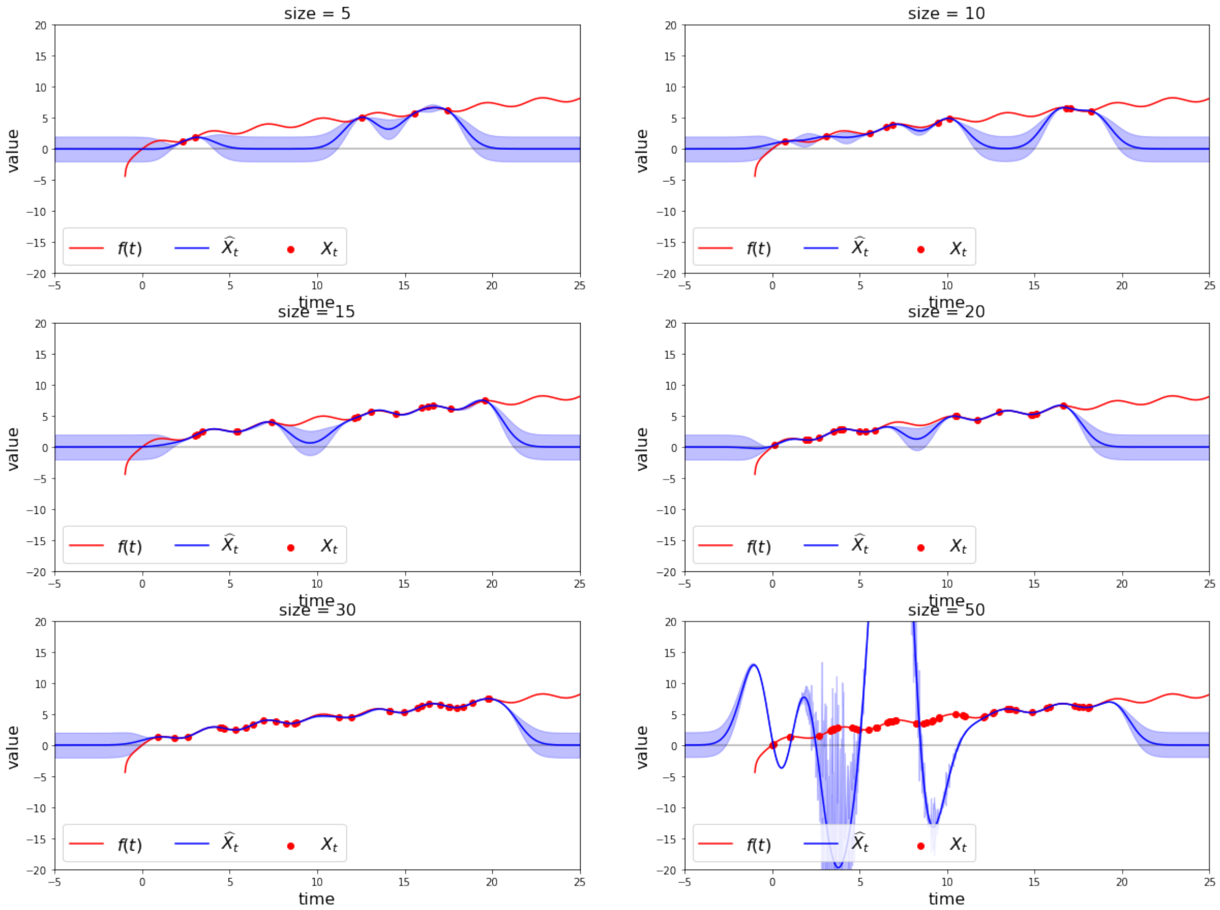


Проведем эксперименты. Зададим гауссовский процесс $(X_t, t \in \mathbb{R})$ в виде $X_t = f(t) + \sigma\varepsilon_t$, где $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{R})$ --- гауссовский белый шум, то есть все ε_t независимы и имеют стандартное нормальное распределение.

В качестве моментов времени $t_1, \ldots, t_n$ гененируем несколько точек на прямой. Для начала возьмем $\sigma = 0$, что соответствует отсутствию погрешности измерений. Выполните код ниже.

In [115]:
```
plt.figure(figsize=(20, 15))

# size --- количество наблюдаемых данных
for i, size in enumerate([5, 10, 15, 20, 30, 50]):

    # Генерация данных
    T = uniform(loc=0, scale=20).rvs(size=size)
    X = calc_f(T)

    # Сначала выполните код в этой ячейке с закомментированной строчкой
    # Затем скопируйте код в новую ячейку, раскомментируйте строчку и
    # X += norm(0, 0.3).rvs(X.shape)
```

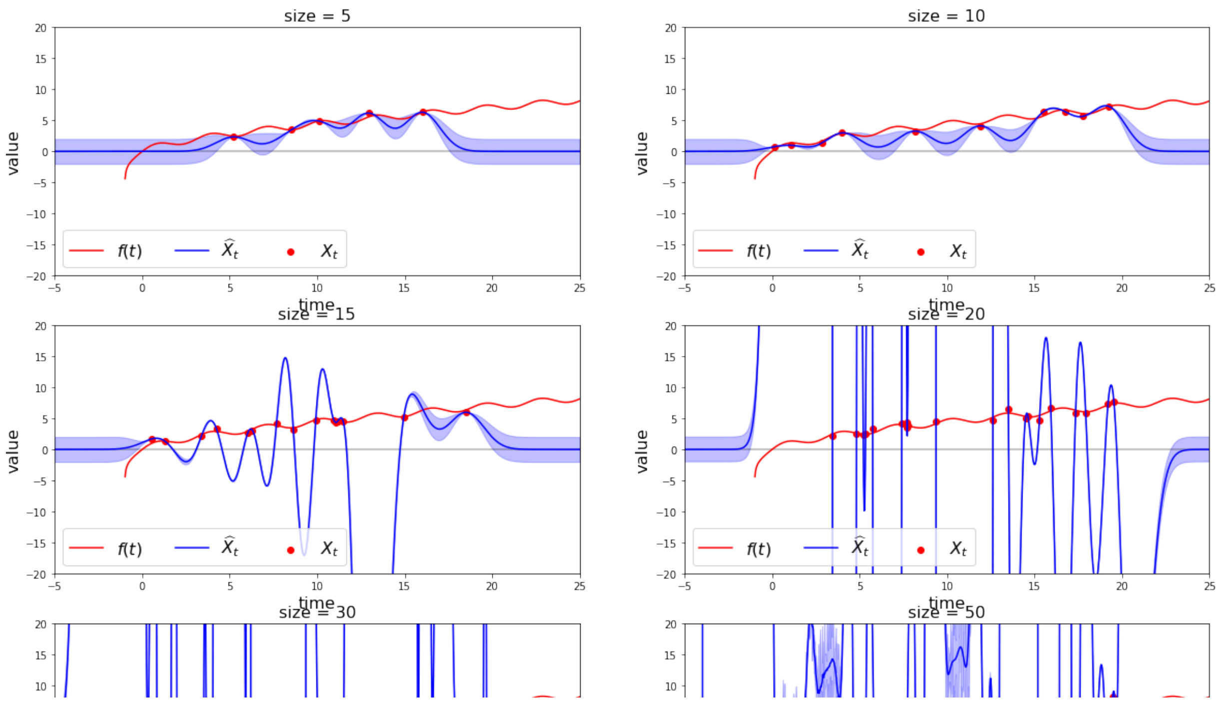
```
    # Применение регрессии
    gpr = GaussianProcessRegression(exp_cov).fit(T.reshape((-1, 1)), X
    grid = np.linspace(-5, 25, 1000).reshape((-1, 1))
    predict, sigma = gpr.predict(grid)
    grid, predict, sigma = np.array(grid).ravel(), predict, sigma

    # Построение графиков
    plt.subplot(3, 2, i + 1)
    plt.plot(grid, calc_f(grid), color='red', label='$f(t)$')
    plt.plot(grid, predict, color='blue', label='$\widehat{X}_t$')
    plt.fill_between(grid, predict + 2 * sigma, predict - 2 * sigma,
                     color='blue', alpha=0.25)
    plt.scatter(T, X, color='red', label='$X_t$')
    plt.hlines(0, -5, 25, alpha=0.3)
    plt.xlim((-5, 25))
    plt.ylim((-20, 20))
    plt.title('size = {}'.format(size), fontsize=16)
    plt.xlabel('time', fontsize=16)
    plt.ylabel('value', fontsize=16)
    plt.legend(loc=3, ncol=3, fontsize=16)

plt.show()
```

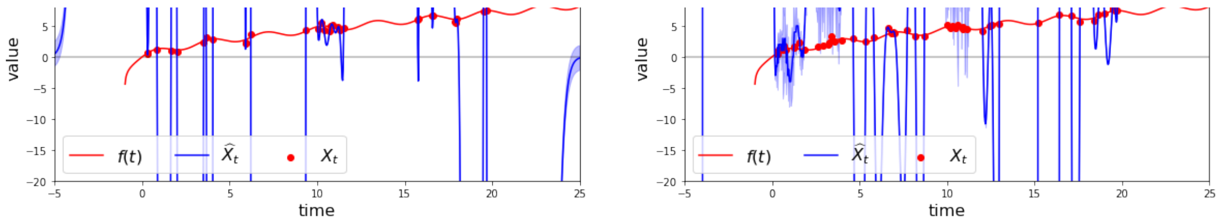


Теперь предположим, что измерения проводятся с погрешностью, то есть $\sigma > 0$. Скопируйте код выше в новую ячейку, раскомментируйте строчку кода и запустите.

In [74]:
```
plt.figure(figsize=(20, 15))
```

```
# size --- количество наблюдаемых данных
for i, size in enumerate([5, 10, 15, 20, 30, 50]):

    # Генерация данных
    T = uniform(loc=0, scale=20).rvs(size=size)
    X = calc_f(T)

    # Сначала выполните код в этой ячейке с закомментированной строчко
    # Затем скопируйте код в новую ячейку, раскомментируйте строчку и 
    X += norm(0, 0.3).rvs(X.shape)

    # Применение регрессии
    gpr = GaussianProcessRegression(exp_cov).fit(T.reshape((-1, 1)), X
    grid = np.linspace(-5, 25, 1000).reshape((-1, 1))
    predict, sigma = gpr.predict(grid)
    grid, predict, sigma = np.array(grid).ravel(), predict, sigma

    # Построение графиков
    plt.subplot(3, 2, i + 1)
    plt.plot(grid, calc_f(grid), color='red', label='$f(t)$')
    plt.plot(grid, predict, color='blue', label='$\widehat{X}_t$')
    plt.fill_between(grid, predict + 2 * sigma, predict - 2 * sigma,
                     color='blue', alpha=0.25)
    plt.scatter(T, X, color='red', label='$X_t$')
    plt.hlines(0, -5, 25, alpha=0.3)
    plt.xlim((-5, 25))
    plt.ylim((-20, 20))
    plt.title('size = {}'.format(size), fontsize=16)
    plt.xlabel('time', fontsize=16)
    plt.ylabel('value', fontsize=16)
    plt.legend(loc=3, ncol=3, fontsize=16)

plt.show()
```



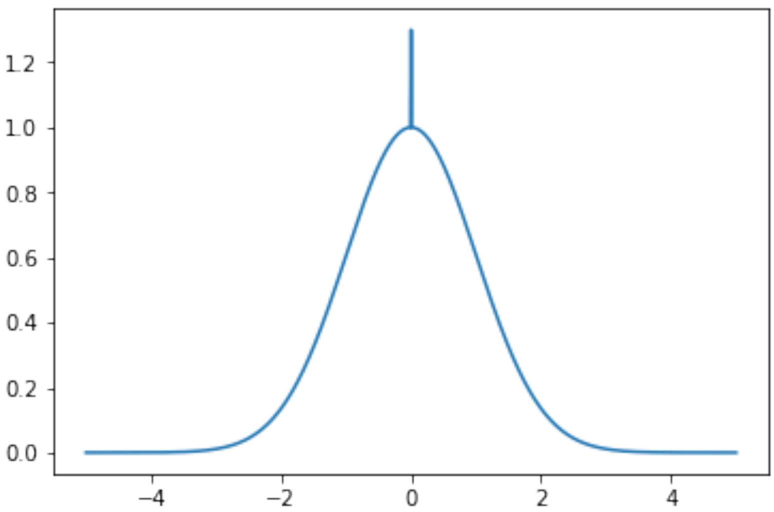


Почему получается так плохо? Что нужно сделать, чтобы это исправить (обратите внимание на ковариационную функцию)?

Необходимо добавить $\sigma^2\delta\left(X, X_0\right)$, поскольку $\delta\left(X, X_0\right)$ прибавить не получится, можно приблизить линиями

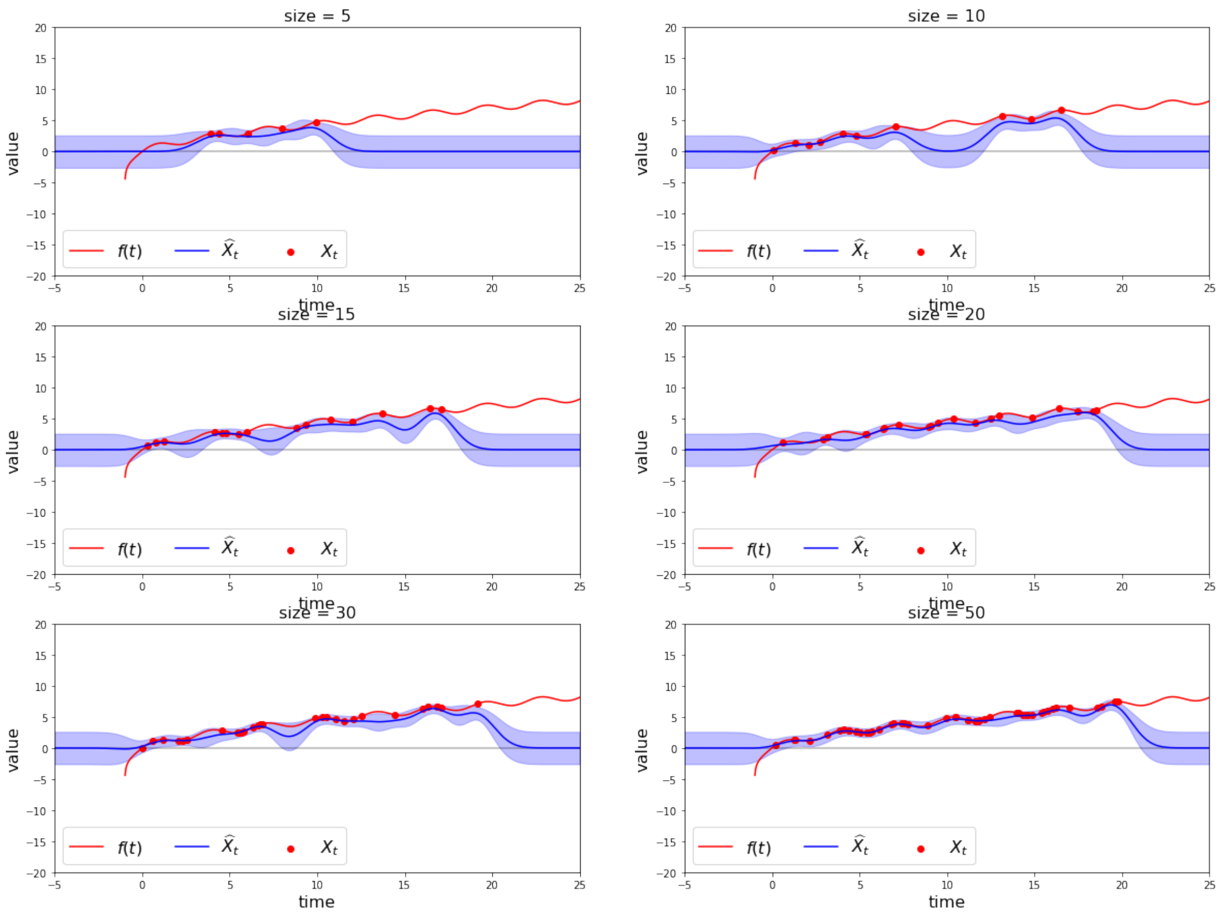
Исправьте это.

In [335]:
```
def exp_cov(t, a=1, s=1):
    len_t = (t ** 2).sum(axis=-1)

    delta = np.zeros_like(len_t, dtype=np.float64)
    small = len_t < 10e-12
    delta[small] = -np.abs(10**12 * len_t[small]) + 1

    return a * np.exp(-len_t / (2 * s ** 2)) + 0.3 * delta

grid = np.linspace(-5, 5, 1001)
plt.figure(figsize=(6, 4))
plt.plot(grid, exp_cov(grid.reshape((-1, 1))))
plt.show()
```

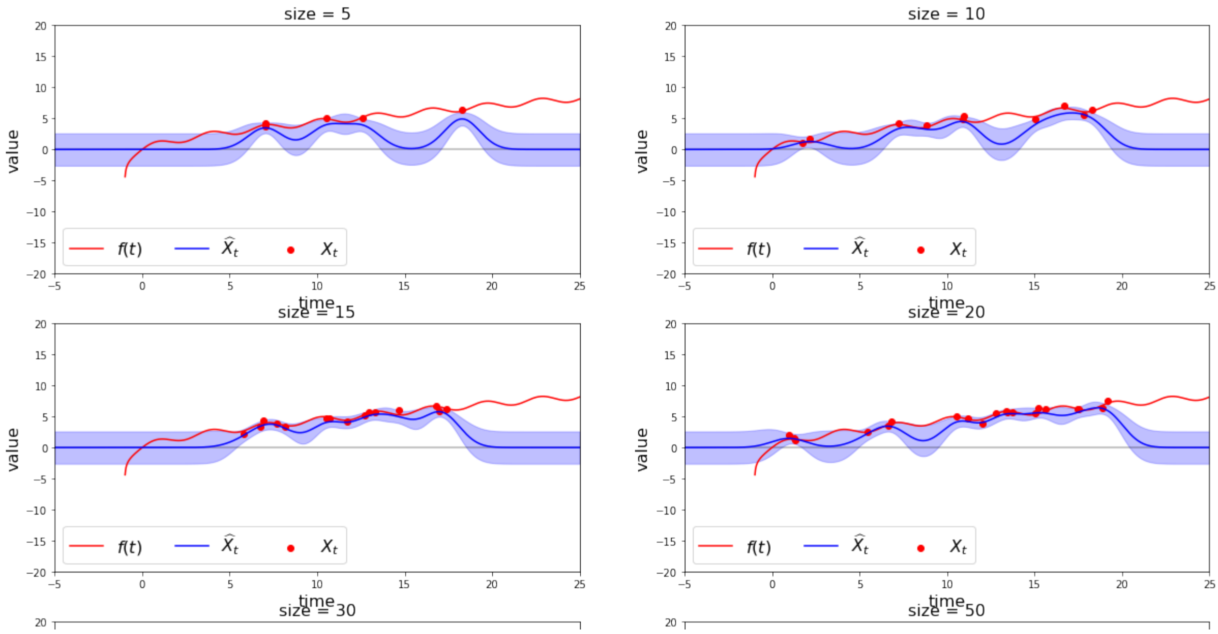


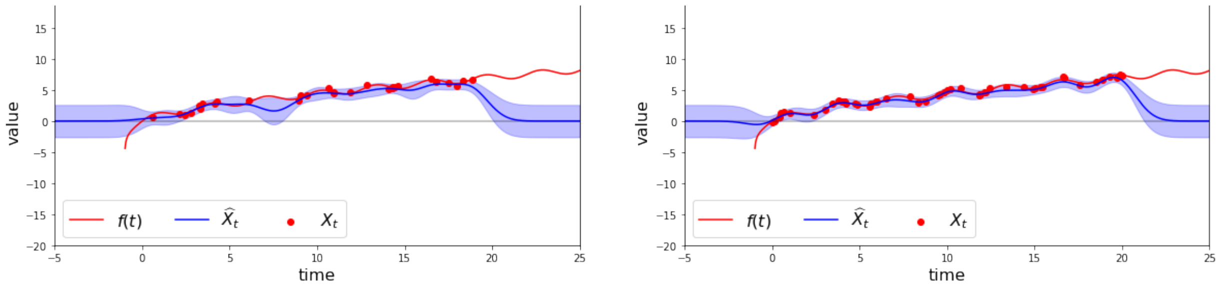
In [336]:
```
plt.figure(figsize=(20, 15))

# size --- количество наблюдаемых данных
for i, size in enumerate([5, 10, 15, 20, 30, 50]):

    # Генерация данных
    T = uniform(loc=0, scale=20).rvs(size=size)
```

```
    X = calc_f(T)

    # Сначала выполните код в этой ячейке с закомментированной строчко
    # Затем скопируйте код в новую ячейку, раскомментируйте строчку и 
    # X += norm(0, 0.3).rvs(X.shape)

    # Применение регрессии
    gpr = GaussianProcessRegression(exp_cov).fit(T.reshape((-1, 1)), X
    grid = np.linspace(-5, 25, 1000).reshape((-1, 1))
    predict, sigma = gpr.predict(grid)
    grid, predict, sigma = np.array(grid).ravel(), predict, sigma

    # Построение графиков
    plt.subplot(3, 2, i + 1)
    plt.plot(grid, calc_f(grid), color='red', label='$f(t)$')
    plt.plot(grid, predict, color='blue', label='$\widehat{X}_t$')
    plt.fill_between(grid, predict + 2 * sigma, predict - 2 * sigma,
                     color='blue', alpha=0.25)
    plt.scatter(T, X, color='red', label='$X_t$')
    plt.hlines(0, -5, 25, alpha=0.3)
    plt.xlim((-5, 25))
    plt.ylim((-20, 20))
    plt.title('size = {}'.format(size), fontsize=16)
    plt.xlabel('time', fontsize=16)
    plt.ylabel('value', fontsize=16)
    plt.legend(loc=3, ncol=3, fontsize=16)

plt.show()
```



In [337]:
```
plt.figure(figsize=(20, 15))

# size --- количество наблюдаемых данных
for i, size in enumerate([5, 10, 15, 20, 30, 50]):

    # Генерация данных
    T = uniform(loc=0, scale=20).rvs(size=size)
    X = calc_f(T)

    # Сначала выполните код в этой ячейке с закомментированной строчко
    # Затем скопируйте код в новую ячейку, раскомментируйте строчку и
    X += norm(0, 0.3).rvs(X.shape)

    # Применение регрессии
    gpr = GaussianProcessRegression(exp_cov).fit(T.reshape((-1, 1)), X
    grid = np.linspace(-5, 25, 1000).reshape((-1, 1))
    predict, sigma = gpr.predict(grid)
    grid, predict, sigma = np.array(grid).ravel(), predict, sigma

    # Построение графиков
    plt.subplot(3, 2, i + 1)
    plt.plot(grid, calc_f(grid), color='red', label='$f(t)$')
    plt.plot(grid, predict, color='blue', label='$\widehat{X}_t$')
    plt.fill_between(grid, predict + 2 * sigma, predict - 2 * sigma,
                     color='blue', alpha=0.25)
    plt.scatter(T, X, color='red', label='$X_t$')
    plt.hlines(0, -5, 25, alpha=0.3)
    plt.xlim((-5, 25))
    plt.ylim((-20, 20))
    plt.title('size = {}'.format(size), fontsize=16)
    plt.xlabel('time', fontsize=16)
    plt.ylabel('value', fontsize=16)
    plt.legend(loc=3, ncol=3, fontsize=16)

plt.show()
```





Почему стало лучше?

При первом варианте не верно считалась кореляция между величинами, когда мы это поправили все встало на свои места

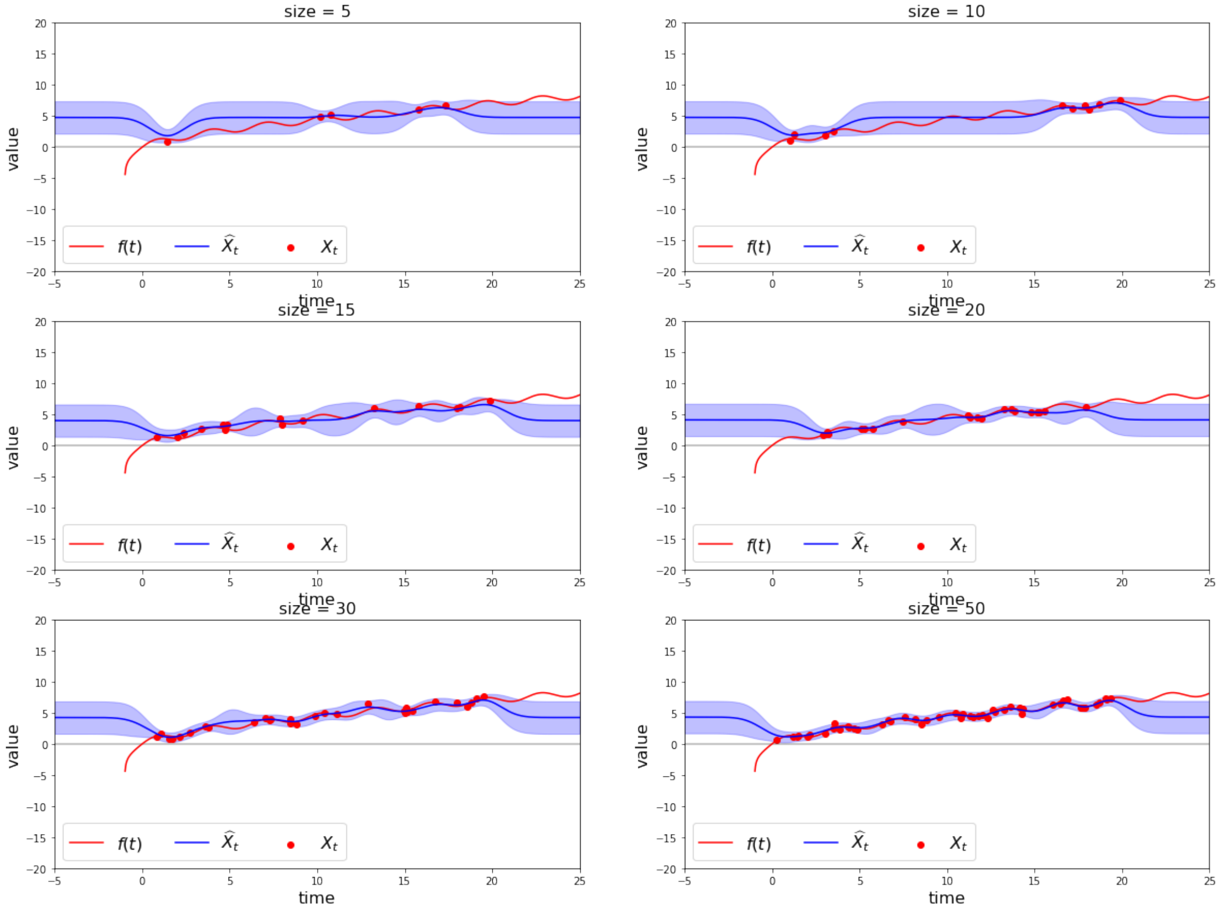
Однако, это все равно не поясняет, почему в самом первом случае (при $\sigma = 0$) мог наблюдаться похожий эффект. В чем его причина?

Когда в тестовую выборку попадались близко стоящие значения

Пойдем теперь дальше. Вспомним наше предположение о том, что математическое ожидание равно нулю, хотя на самом деле это не так. Давайте это исправим. В примере выше перед применением регрессии вычтете среднее значение, а после --- добавьте обратно.

In [338]:
```
plt.figure(figsize=(20, 15))

# size --- количество наблюдаемых данных
for i, size in enumerate([5, 10, 15, 20, 30, 50]):

    # Генерация данных
    T = uniform(loc=0, scale=20).rvs(size=size)
    X = calc_f(T)

    # Сначала выполните код в этой ячейке с закомментированной строчко
    # Затем скопируйте код в новую ячейку, раскомментируйте строчку и 
    X += norm(0, 0.3).rvs(X.shape)

    mean = np.mean(X)

    # Применение регрессии
    gpr = GaussianProcessRegression(exp_cov).fit(T.reshape((-1, 1)), X
    grid = np.linspace(-5, 25, 1000).reshape((-1, 1))
    predict, sigma = gpr.predict(grid)
    grid, predict, sigma = np.array(grid).ravel(), predict + mean, sig

    # Построение графиков
    plt.subplot(3, 2, i + 1)
    plt.plot(grid, calc_f(grid), color='red', label='$f(t)$')
    plt.plot(grid, predict, color='blue', label='$\widehat{X}_t$')
    plt.fill_between(grid, predict + 2 * sigma, predict - 2 * sigma,
                     color='blue', alpha=0.25)
```

```
    plt.scatter(T, X, color='red', label='$X_t$')
    plt.hlines(0, -5, 25, alpha=0.3)
    plt.xlim((-5, 25))
    plt.ylim((-20, 20))
    plt.title('size = {}'.format(size), fontsize=16)
    plt.xlabel('time', fontsize=16)
    plt.ylabel('value', fontsize=16)
    plt.legend(loc=3, ncol=3, fontsize=16)

plt.show()
```

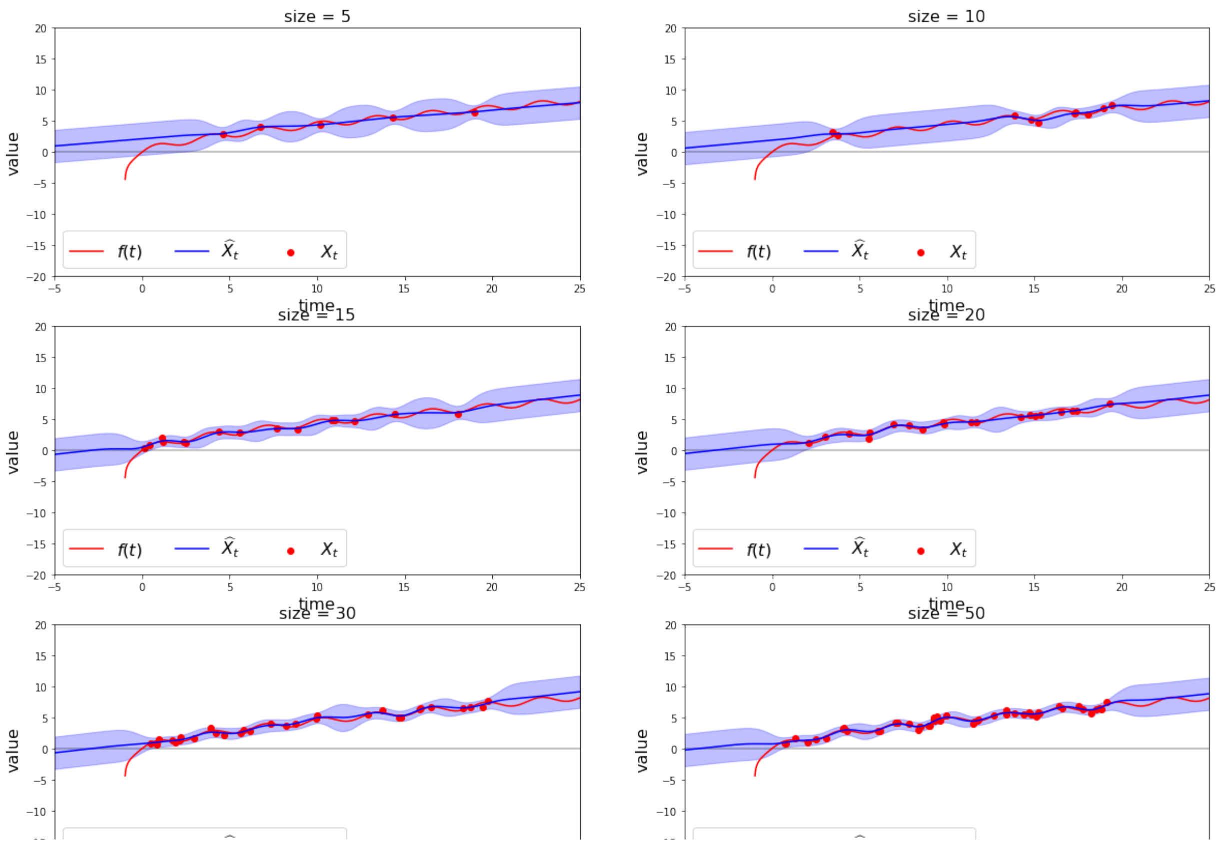


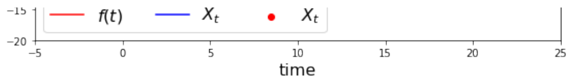
Лучше, но все равно чего-то не хватает. Может, приблизить линейной регрессией?

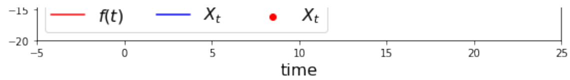
Проделайте аналогичные действия, построив сначала линейную регрессию, затем вычев ее значения из точек данных перед применением регрессии на гауссовских процессах, а после --- добавив обратно значения линейной регрессии для всех точек, в которых вы хотите построить предсказания.

In [339]:
```
plt.figure(figsize=(20, 15))

# size --- количество наблюдаемых данных
for i, size in enumerate([5, 10, 15, 20, 30, 50]):

    # Генерация данных
    T = uniform(loc=0, scale=20).rvs(size=size)
    X = calc_f(T)
```

```
    # Сначала выполните код в этой ячейке с закомментированной строчко
    # Затем скопируйте код в новую ячейку, раскомментируйте строчку и
    X += norm(0, 0.3).rvs(X.shape)

    LR = LinearRegression()
    LR.fit(list(zip(np.ones_like(T), T)), X)

    # Применение регрессии
    gpr = GaussianProcessRegression(exp_cov).fit(T.reshape((-1, 1)), X
    grid = np.linspace(-5, 25, 1000).reshape((-1, 1))
    predict, sigma = gpr.predict(grid)
    grid, predict, sigma = np.array(grid).ravel(), predict, sigma
    predict += LR.predict(list(zip(np.ones_like(grid), grid)))

    # Построение графиков
    plt.subplot(3, 2, i + 1)
    plt.plot(grid, calc_f(grid), color='red', label='$f(t)$')
    plt.plot(grid, predict, color='blue', label='$\widehat{X}_t$')
    plt.fill_between(grid, predict + 2 * sigma, predict - 2 * sigma,
                     color='blue', alpha=0.25)
    plt.scatter(T, X, color='red', label='$X_t$')
    plt.hlines(0, -5, 25, alpha=0.3)
    plt.xlim((-5, 25))
    plt.ylim((-20, 20))
    plt.title('size = {}'.format(size), fontsize=16)
    plt.xlabel('time', fontsize=16)
    plt.ylabel('value', fontsize=16)
    plt.legend(loc=3, ncol=3, fontsize=16)

plt.show()
```



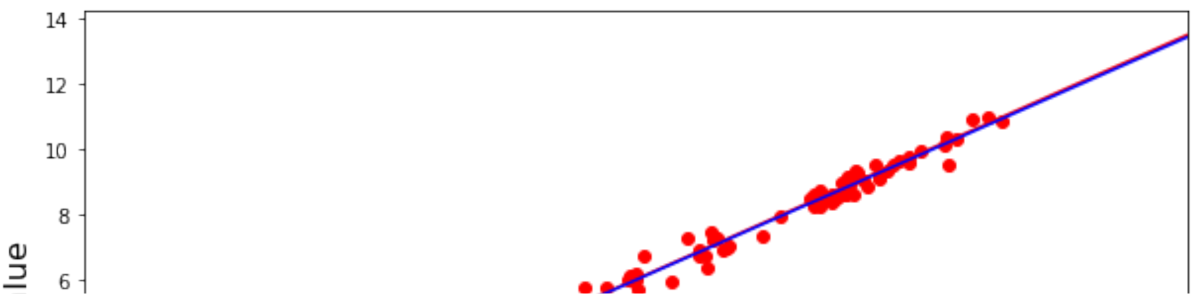


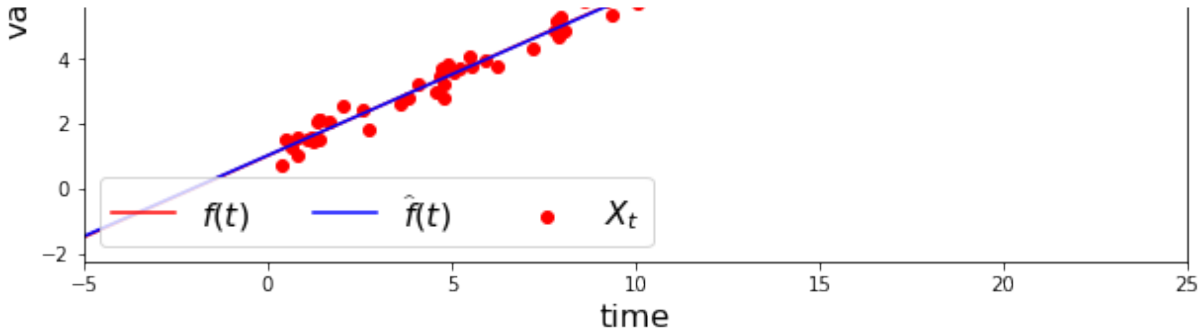


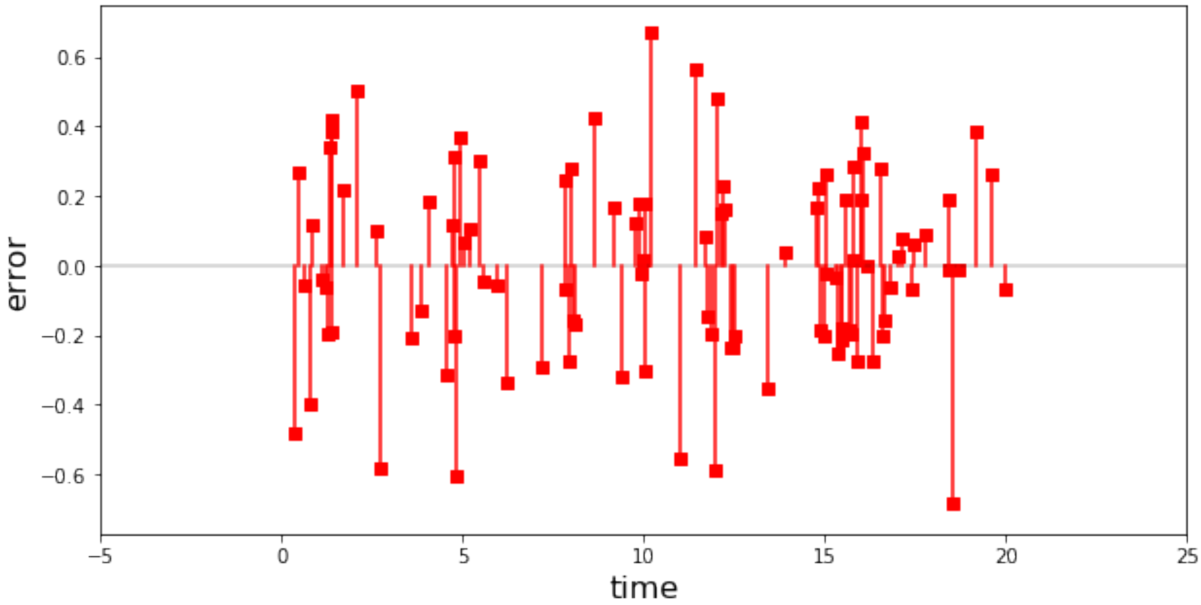
Разберемся подробнее в том, что происходит.

Допустим, мы хотим приблизить простую линейную функцию. Построим график выборки и график предсказаний с помощью линейной регрессии. Построим так же график ошибок, то есть точек $X_{t_i} - \widehat{f}(t_i)$, где $\widehat{f}$ --- линейная регрессия.

In [340]:
```
def f_lin(x):
    return x / 2 + 1

T = uniform(loc=0, scale=20).rvs(size=100).reshape((-1, 1))
X = f_lin(T)
X += norm(0, 0.3).rvs(X.shape)

LR = LinearRegression()
LR.fit(list(zip(np.ones_like(T.ravel()), T.ravel())), X.ravel())

grid = np.linspace(-5, 25, 1000).reshape((-1, 1))
predict = LR.predict(list(zip(np.ones_like(grid.ravel()), grid.ravel()

# График выборки и линейной регресии
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(grid, f_lin(grid), color='red', label='$f(t)$')
plt.plot(grid, predict, color='blue', label='$\widehat{f}(t)$')
plt.scatter(T, X, color='red', label='$X_t$')
plt.xlim((-5, 25))
plt.xlabel('time', fontsize=16)
plt.ylabel('value', fontsize=16)
plt.legend(loc=3, ncol=3, fontsize=16)
plt.show()

# График ошибок
plt.figure(figsize=(10, 5))
for i in range(len(T)):
    plt.plot([T[i], T[i]], [0, X[i] - LR.predict([1, T[i]])], color='r
    plt.scatter(T[i], X[i] - LR.predict([1, T[i]]), marker='s', color=
plt.hlines(0, -5, 25, alpha=0.2)
plt.xlim((-5, 25))
plt.xlabel('time', fontsize=16)
plt.ylabel('error', fontsize=16)
plt.show()
```







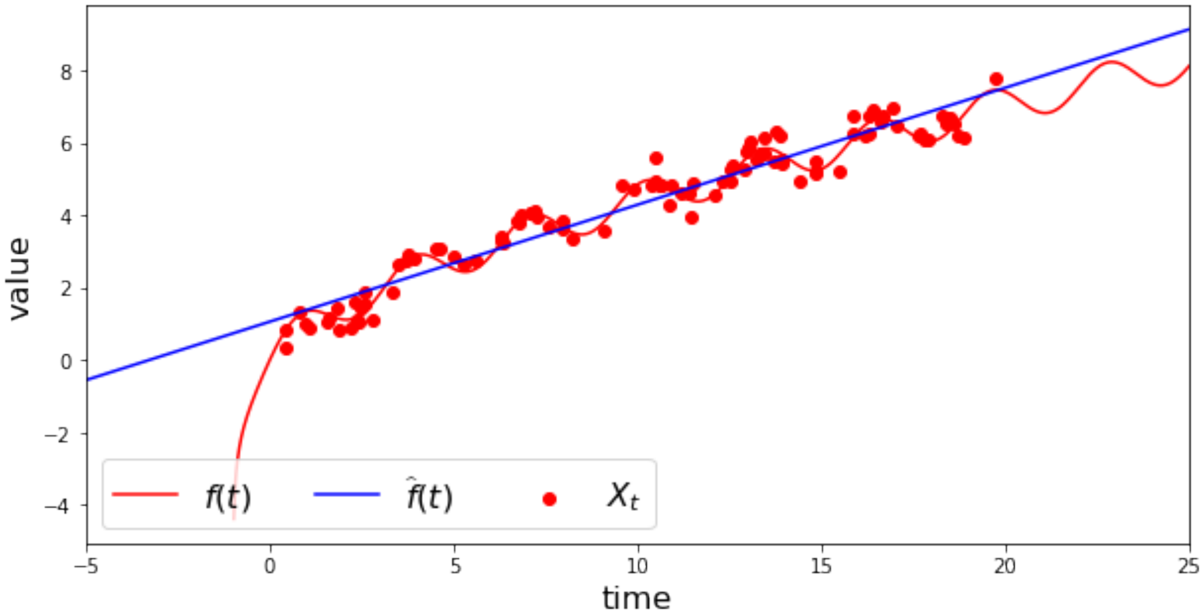
Что можно сказать про остатки?

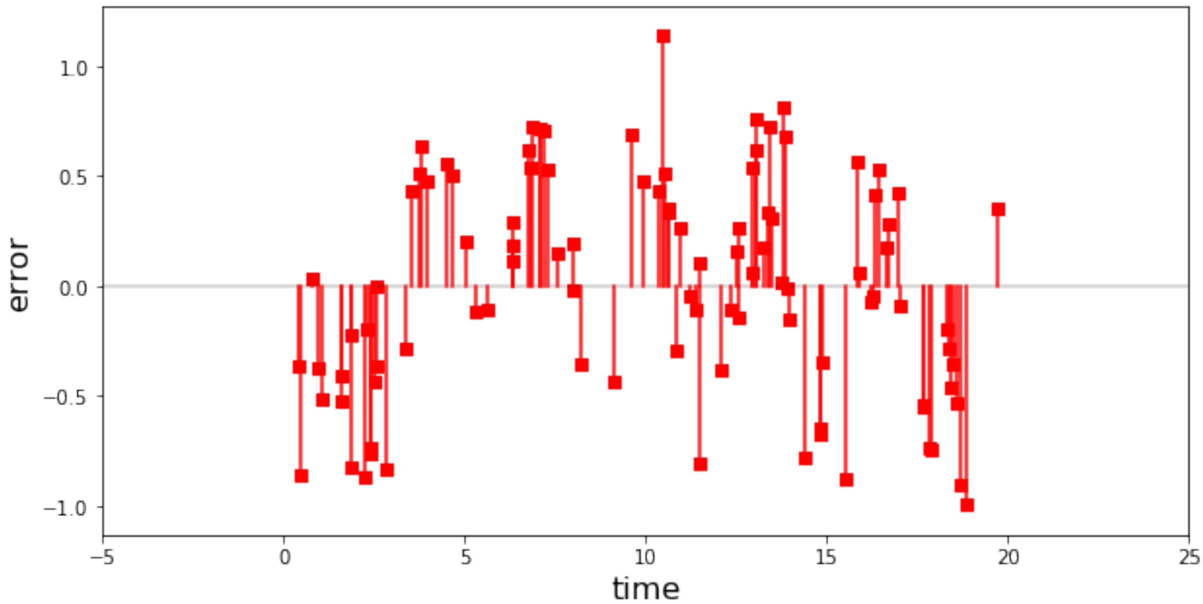
Они распределены относительно проямой равномерно

Теперь посмотрим на функцию, с которой мы имели дело ранее.

In [341]:
```
T = uniform(loc=0, scale=20).rvs(size=100).reshape((-1, 1))
X = calc_f(T)
X += norm(0, 0.3).rvs(X.shape)

LR = LinearRegression()
LR.fit(list(zip(np.ones_like(T.ravel()), T.ravel())), X.ravel())

grid = np.linspace(-5, 25, 1000).reshape((-1, 1))
predict = LR.predict(list(zip(np.ones_like(grid.ravel()), grid.ravel()

# График выборки и линейной регресии
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(grid, calc_f(grid), color='red', label='$f(t)$')
plt.plot(grid, predict, color='blue', label='$\widehat{f}(t)$')
plt.scatter(T, X, color='red', label='$X_t$')
plt.xlim((-5, 25))
plt.xlabel('time', fontsize=16)
plt.ylabel('value', fontsize=16)
```

```
plt.legend(loc=3, ncol=3, fontsize=16)
plt.show()

# График ошибок
plt.figure(figsize=(10, 5))
for i in range(len(T)):
    plt.plot([T[i], T[i]], [0, X[i] - LR.predict([1, T[i]])], color='re
    plt.scatter(T[i], X[i] - LR.predict([1, T[i]]), marker='s', color=
plt.hlines(0, -5, 25, alpha=0.2)
plt.xlim((-5, 25))
plt.xlabel('time', fontsize=16)
plt.ylabel('error', fontsize=16)
plt.show()
```



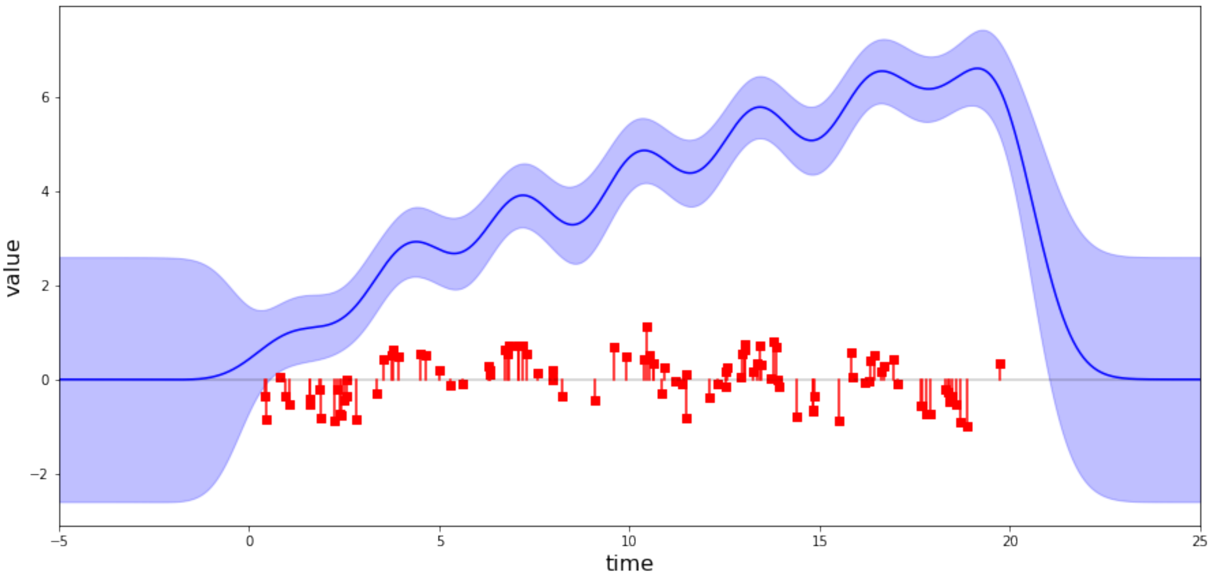


Что тут с остатками?

А в этом случае распределены переодически

Давайте приближать эту зависимость в остатках регрессией на основе гауссовских процессах.

In [342]:
```
gpr = GaussianProcessRegression(exp_cov).fit(T.reshape((-1, 1)), X)
grid = np.linspace(-5, 25, 1000).reshape((-1, 1))
predict, sigma = gpr.predict(grid)
grid, predict, sigma = np.array(grid).ravel(), predict.ravel(), sigma.:

plt.figure(figsize=(15, 7))
plt.plot(grid, predict, color='blue')
plt.fill_between(grid, predict + 2 * sigma, predict - 2 * sigma,
                 color='blue', alpha=0.25)
for i in range(len(T)):
    plt.plot([T[i], T[i]], [0, X[i] - LR.predict([1, T[i]])], color='r
    plt.scatter(T[i], X[i] - LR.predict([1, T[i]]), marker='s', color=
plt.hlines(0, -5, 25, alpha=0.2)
plt.xlim((-5, 25))
plt.xlabel('time', fontsize=16)
plt.ylabel('value', fontsize=16)
plt.show()
```



Сделайте подробные выводы.

При помощи гауссовской регрессии можно приближать не линейные функции с их ошибкой не зная самой зависимости зависимости, также как оказалось бывает полезным для начала приблизить линейной регрессией, а затем уже приближать остатки.

Рассмотрим теперь гауссовский процесс $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$, заданный как $X_t = t + W_{t+1} - W_t$, где $(W_t, t \in \mathbb{R}_+)$ --- винеровский процесс. Сгенерируйте данные в соответствии с этой моделью. Для генерации винеровского процесса используйте код из предыдущего задания. По этим данным постройте комбинацию линейная регрессия + регрессия на гауссовских процессах, как в примерах выше. Как и раньше, проведите эксперимент для различного объема данных.

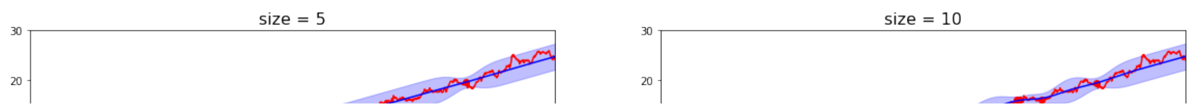
In [343]:
```
class WinerProcess:
    def __init__(self, precision=10000):
        self.n = precision
        self.xi = []
        self.start = []
        self.end = []
        self.ns = np.linspace(0,
                              int(np.log(precision)) + 1,
                              int(np.log(precision)) + 2)
        self.midval = 2 ** (-self.ns / 2 - 1)
        self.lens = 2 ** (-self.ns - 1)

    def _add_one(self):
        if len(self.xi):
            start = self.end[-1]
        else:
            start = 0
        self.xi += [np.array(norm.rvs(size=self.n))]
        self.start += [start]
        self.end += [start + self.xi[-1][0]]

    def _create(self, t):
        while len(self.xi) < t + 1:
            self._add_one()

    def _get(self, xi, t):
        ks = (2 ** self.ns * (t + 1)).astype(int)
        aa = 2**(-self.ns) * ks - 1
        mid = aa + 2 ** (-self.ns - 1)
        ans = np.zeros(len(mid))
        ans[t < mid] = self.midval[t < mid] * \
                       (t - aa[t < mid])
        ans[t >= mid] = self.midval[t>=mid] *        \
                        (1 - (t - mid[t >= mid]) /  \
                         self.lens[t>=mid])

        while (ks[-1] >= self.n):
            ks = ks[:-1]
            ans = ans[:-1]
        res = t * xi[0] + (xi[ks] * ans).sum()
        return res


    def __getitem__(self, times):
        if type(times) is float:
            times = [times]
        times = np.array(times)
        seg = times.astype(int)
        self._create(seg.max())
```

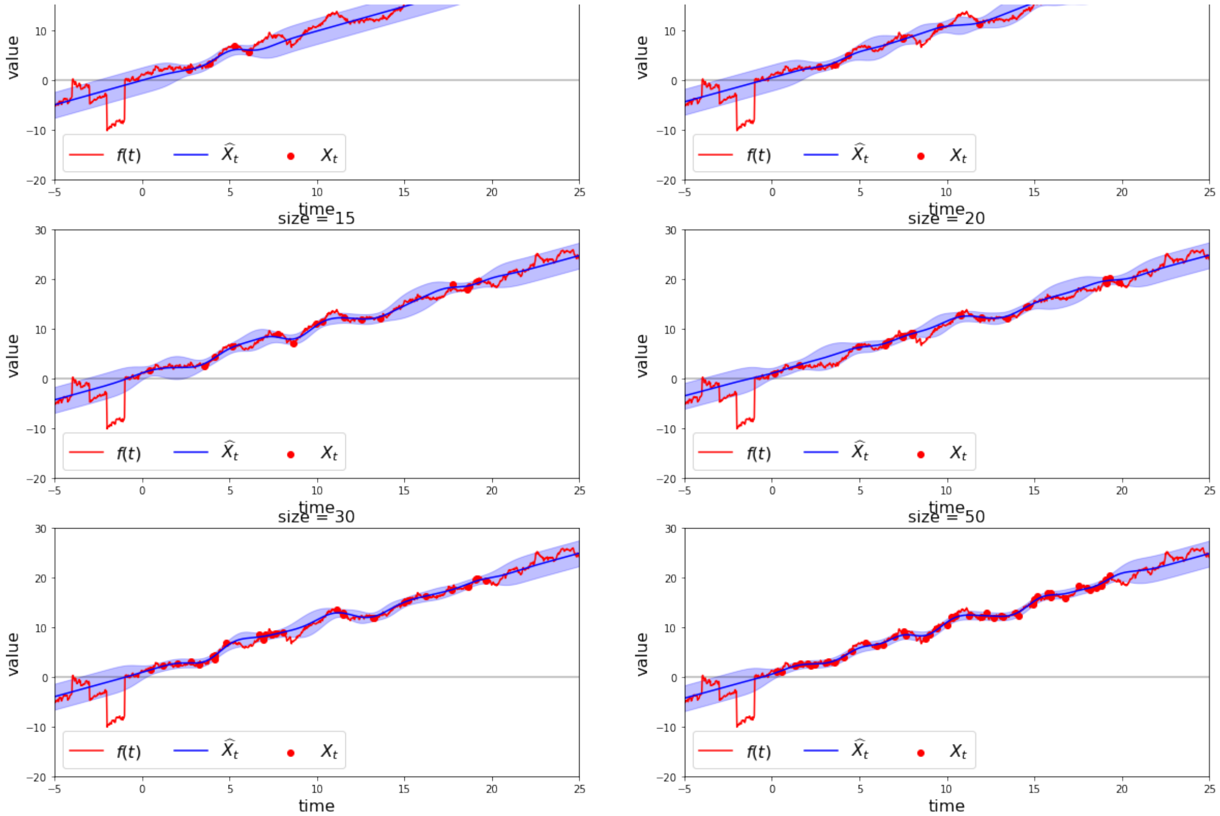
```
        return [self.start[int(times[i])] + \
                self._get(self.xi[int(times[i])], times[i] - \
                          int(times[i])) \
                for i in range(len(times))]
```

In [344]:
```
def get_f(winer_process, t):
    return t + winer_process[t + 1] - winer_process[t]
```

In [345]:
```
winer_process = WinerProcess()
```

In [346]:
```
plt.figure(figsize=(20, 15))

# size --- количество наблюдаемых данных
for i, size in enumerate([5, 10, 15, 20, 30, 50]):

    # Генерация данных
    T = uniform(loc=0, scale=20).rvs(size=size)
    X = get_f(winer_process, T)

    # Сначала выполните код в этой ячейке с закомментированной строчко
    # Затем скопируйте код в новую ячейку, раскомментируйте строчку и 
    X += norm(0, 0.3).rvs(X.shape)

    LR = LinearRegression()
    LR.fit(list(zip(np.ones_like(T), T)), X)

    # Применение регрессии
    gpr = GaussianProcessRegression(exp_cov).fit(T.reshape((-1, 1)), X
    grid = np.linspace(-5, 25, 1000).reshape((-1, 1))
    predict, sigma = gpr.predict(grid)
    grid, predict, sigma = np.array(grid).ravel(), predict, sigma
    predict += LR.predict(list(zip(np.ones_like(grid), grid)))

    # Построение графиков
    plt.subplot(3, 2, i + 1)
    plt.plot(grid, get_f(winer_process, grid), color='red', label='$f(
    plt.plot(grid, predict, color='blue', label='$\widehat{X}_t$')
    plt.fill_between(grid, predict + 2 * sigma, predict - 2 * sigma,
                     color='blue', alpha=0.25)
    plt.scatter(T, X, color='red', label='$X_t$')
    plt.hlines(0, -5, 30, alpha=0.3)
    plt.xlim((-5, 25))
    plt.ylim((-20, 30))
    plt.title('size = {}'.format(size), fontsize=16)
    plt.xlabel('time', fontsize=16)
    plt.ylabel('value', fontsize=16)
    plt.legend(loc=3, ncol=3, fontsize=16)

plt.show()
```





Скачайте датасет [Yacht Hydrodynamics (http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Yacht+Hydrodynamics)](http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Yacht+Hydrodynamics). Задача состоит в том, чтобы для парусных яхт предсказать остаточное сопротивление на единицу массы смещения от размеров яхты и ее скорости. Рассмотрим зависимость величины `Residuary resistance` от `Froude number`. Постройте приближение этой зависимости с помощью комбинации линейной регрессии и регрессии на гауссовских процессах. Посчитайте ошибку предсказания и сравните ее с ошибкой предсказания с помощью простой линейной регрессии. Для линейной регрессии можно взять так же вторую и третью степень величины `Residuary resistance`.

In [347]:

```
def trim_spaces(source):
    ''' Убирает повторяющиеся пробелы
          - source --- исходная строка
        return --- строка без повторяющихся пробелов
    '''
    return re.sub("[ \t\r\f\v]+", " ", source).strip()

with open("yacht_hydrodynamics.txt", "r") as data_file:
    source = data_file.read()

data = pd.read_csv(StringIO(trim_spaces(source)),
                   names=['Longitudinal position',
                          'Prismatic coefficient',
                          'Length-displacement ratio',
                          'Beam-draught ratio',
                          'Length-beam ratio',
                          'Froude number',
                          'Residuary resistance'],
                   sep=' ')

data.head()
```

Out[347]:

	Longitudinal position	Prismatic coefficient	Length-displacement ratio	Beam-draught ratio	Length-beam ratio	Froude number	Residuary resistance
0	-2.3	0.568	4.78	3.99	3.17	0.125	0.11
1	-2.3	0.568	4.78	3.99	3.17	0.150	0.27
2	-2.3	0.568	4.78	3.99	3.17	0.175	0.47
3	-2.3	0.568	4.78	3.99	3.17	0.200	0.78
4	-2.3	0.568	4.78	3.99	3.17	0.225	1.18

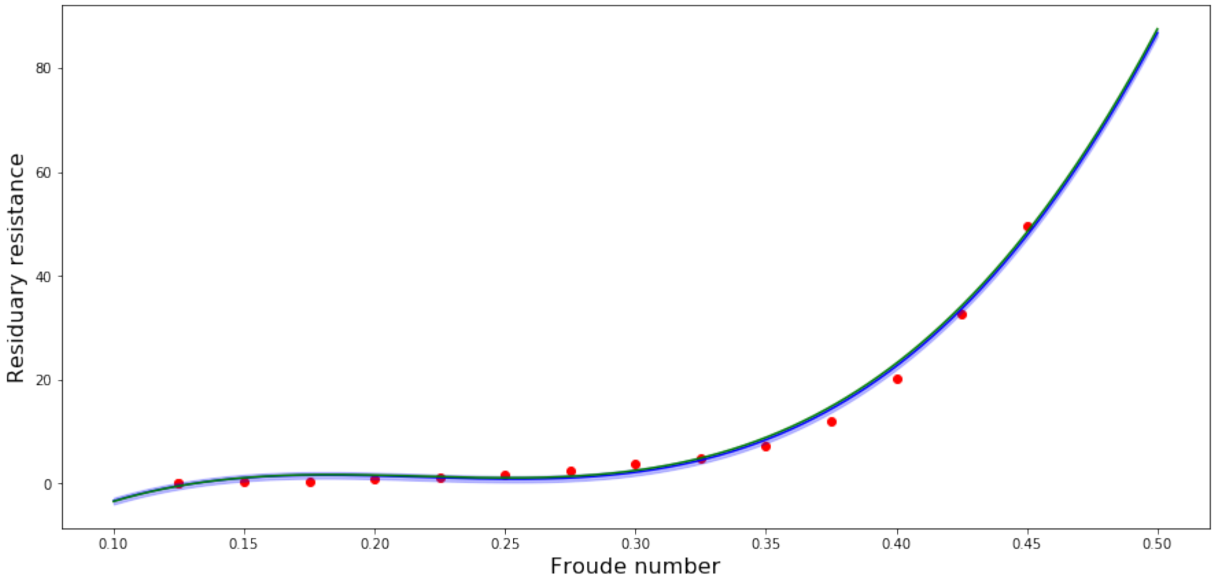
In [349]:

```
train_data = data.loc[::2]
test_data = data.loc[1::2]
```

In [353]:

```
LR = LinearRegression().fit(list(zip(train_data['Froude number'],
                                     train_data['Froude number']**2,
                                     train_data['Froude number']**3)),
                            train_data['Residuary resistance'])
GPR = GaussianProcessRegression(exp_cov).fit(train_data[['Longitudinal
                                                         'Prismatic co
                                                         'Length-displ
                                                         'Beam-draught
                                                         'Length-beam
                                                         'Froude numbe
                        train_data['Residuary resistance'].values - \
                        LR.predict(list(zip(train_data['Froude number'
                                            train_data['Froude number'
                                            train_data['Froude number'
```

```
plt.figure(figsize=(15, 7))
plt.scatter(data.loc[:14]['Froude number'], data.loc[:14]['Residuary r

grid = np.linspace(0.1, 0.5, 1000)
row = data.loc[0]
times = list(zip(np.full(len(grid), row['Longitudinal position']),
                 np.full(len(grid), row['Prismatic coefficient']),
                 np.full(len(grid), row['Length-displacement ratio']),
                 np.full(len(grid), row['Beam-draught ratio']),
                 np.full(len(grid), row['Length-beam ratio']),
                 grid))
predict, sigma = GPR.predict(times)
predict += LR.predict(list(zip(grid,
                               grid ** 2,
                               grid ** 3)))
plt.plot(grid, predict, color='blue')
plt.fill_between(grid, predict + 2 * sigma, predict - 2 * sigma,
                 color='blue', alpha=0.25)

plt.plot(grid, LR.predict(list(zip(grid, grid**2, grid**3))), color='g

plt.xlabel('Froude number', fontsize=16)
plt.ylabel('Residuary resistance', fontsize=16)
plt.show()
```



In [360]:
```
lr_predict = LR.predict(list(zip(test_data['Froude number'],
                                 test_data['Froude number'] ** 2,
                                 test_data['Froude number'] ** 3)))
grp_predict, sigma = GPR.predict(test_data[['Longitudinal position',
                                            'Prismatic coefficient',
                                            'Length-displacement ratio
                                            'Beam-draught ratio',
                                            'Length-beam ratio',
                                            'Froude number']].values) 
print("Linear Regression error:",
      mean_squared_error(test_data['Residuary resistance'], lr_predict
print("Gaussian Process Regression error:",
      mean_squared_error(test_data['Residuary resistance'], grp_predic
```

```
Linear Regression error: 6.15444989766
Gaussian Process Regression error: 5.45109354743
```

Ошибка получилась меньше

Дополнительно вы можете попробовать реализацию (http://scikit-learn.org/stable/modules/classes.html#module-sklearn.gaussian_process) регрессии на гауссовских процессах в `sklearn`.

In [ ]: