Случайные процессы

24 марта 2015 г.

Содержание

1 Введение. Историческая справка

Теория вероятностей: математический анализ случайных экспериментов.
Теория случайных процессов: случайный эксперимент + фактор времени.

Предпосылки к изучению

- 1827, Р. Броун — броуновское движение частиц в воде $\Rightarrow$ процесс броуновского движения
- 1903, Л. Башелье — колебания курсов бумаг на бирже $\Rightarrow$ процесс броуновского движения
- 1906, А.А. Марков — анализ комбинаций гласных и согласных в романе «Евгений Онегин» $\Rightarrow$ марковские цепи
- 1903, Ф. Лундберг — модель деятельности страховой компании $\Rightarrow$ пуассоновский процесс
- 1873, Ф. Гальтон, Г. Ватсон — анализ вымирания аристократических фамилий в Великобритании $\Rightarrow$ ветвящиеся процессы
- Начало XX века, А. Эрланг — изучение загрузки телефонных сетей $\Rightarrow$ теория массового обслуживания

2 Первые определения

2.1 Терминология

Определение 2.1. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, а $(E, \mathscr{E})$ — измеримое пространство. Отображение $\xi : \Omega \to E$ называется *случайным элементом*, если оно измеримо, т.е.

$$\forall B \in \mathscr{E} \quad \xi^{-1}(B) = \{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathscr{F}.$$

Если $E = \mathbb{R}$, то X называется *случайной величиной.*
Если $E = \mathbb{R}^n$, то X называется *случайным вектором.*

Определение 2.2. Пусть T — некоторое множество. Тогда набор $X = (X_t, t \in T)$ случайных элементов $X_t(\omega)$, заданных на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ для $\forall t \in T$, называется *случайной функцией* на множестве T.

Замечание. *Вообще говоря, области значений у X_t могут быть различны.*

На X можно смотреть как на функцию двух переменных: $X(t, \omega)$.

Определение 2.3. При фиксированном $\omega = \omega_0$ функция

$$\tilde{X}_{\omega_0}(t) = X_t(\omega)\Big|_{\omega=\omega_0}$$

на T называется *траекторией* или *реализацией* случайной функции $X = (X_t, t \in T)$.

Определение 2.4.

- Если $T \subset \mathbb{R}$, то случайную функцию будем называть *случайным процессом.*
- Если $T = [a, b], (a, b), [a, +\infty), \mathbb{R}$, то процесс X называется процессом *с непрерывным временем.*
- Если $T \subset \mathbb{Z}$, то процесс X называется процессом с *дискретным* временем.
- Если $T \subset \mathbb{R}^d, d > 1$, то процесс X называется *случайным полем.*

Замечание. *Далее всюду будем использовать термин «случайный процесс».*

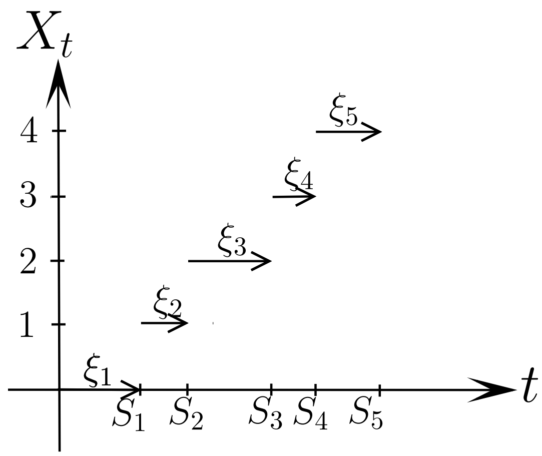
2.2 Примеры

1. $X_t(\omega) = \xi(\omega) \cdot f(t)$, где $\xi(\omega)$ — случайная величина, $f(t)$ — детерминированная функция на T.

2. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — независимые случайные векторы размерности m. Тогда процесс с дискретным временем $(S_n, n \in \mathbb{Z}_+)$
$$S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, n \in \mathbb{N},\ S_0 = 0$$
называется *случайным блужданием.*

   Физическая модель: прыжки кузнечика.

3. Пусть $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\xi_n \geqslant 0$, $\xi_n \neq const$ п.н., $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $S_0 = 0$. Тогда процесс
$$X_t = \sup\{n : S_n \leqslant t\}, t \geqslant 0$$
называется *процессом восстановления.*



Лемма 2.1. *Процесс восстановления конечен почти наверное.*

Доказательство. Пусть сначала $\mathsf{E}\xi_i > 0, \mathsf{E}\xi_i < +\infty\ \forall i$.

Если $X_t = +\infty$, то $S_n \leqslant t\ \forall n \in \mathbb{N}$.
$$\{X_t = +\infty\} = \Big\{ \sup\{n : S_n \leqslant t\} = +\infty \Big\} = \{S_n \leqslant t\ \forall n\} =$$
$$= \Big| \text{т.к. } \{S_n \leqslant t\} \supset \{S_{n+1} \leqslant t\} \Big| =$$
$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{S_n \leqslant t\}.$$

Значит, из теоремы о непрерывности вероятностной меры:
$$\mathsf{P}(X_t = +\infty) = \lim_{n \to +\infty} \mathsf{P}(S_n \leqslant t).$$

Положим $a = \mathsf{E}\xi_i$. Тогда по УЗБЧ:
$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} a \ \Rightarrow\ \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{d}} a.$$

Тогда
$$\mathsf{P}(S_n \leqslant t) = \mathsf{P}\left(\frac{S_n}{n} \leqslant \frac{t}{n}\right) \leqslant \Big|\text{при больших } n\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{P}\left(\frac{S_n}{n} \leqslant \frac{a}{2}\right) \to \Big|\text{из сходимости по распределению}\Big| \to \mathsf{P}\left(a \leqslant \frac{a}{2}\right) = 0.$$

Значит, для любого фиксированного $t > 0$ $\mathsf{P}(X_t = +\infty) = 0$. Заметим, что X_t возрастающий процесс $\Rightarrow \mathsf{P}(\exists t : X_t = +\infty) \leqslant \mathsf{P}(\exists n : X_n = +\infty) \leqslant \sum_n \mathsf{P}(X_n = \infty) = 0$.

Если же $\mathsf{E}\xi_i = +\infty$, то рассмотрим $\tilde{\xi}_i = \min(\xi_i, c)$ такую, что $0 < \mathsf{E}\tilde{\xi}_i < +\infty$.

Тогда $X_t \leqslant \tilde{X}_t$, где $\tilde{X}_t$ — процесс восстановления $\tilde{\xi}_i$, откуда $\mathsf{P}(\exists t : X_t = +\infty) = \mathsf{P}(\exists t : \tilde{X}_t = +\infty) = 0$. □

Где может возникнуть процесс восстановления? Физическая модель — «Модель перегорания лампочки». ξ_n — случайная величина, равная времени работы лампочки, X_t — сколько раз пришлось заменить лампочку к моменту времени t.

4. Модель страхования Крамера-Лундберга

   Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $(X_t, t \geqslant 0)$ — процесс восстановления, построенный по ним. Пусть $\{\eta_m, m \in \mathbb{N}\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, независимые с $\{\xi_n\}$, а $y_0, c > 0$ — константы. Тогда
$$Y_t = y_0 + c \cdot t - \sum_{k=1}^{X_t} \eta_k,\ t \geqslant 0$$
   — модель страхования Крамера-Лундберга.

   Смысл параметров

   - y_0 — начальный капитал;
   - c — скорость поступления страховых взносов;
   - ξ_n — время между $(n-1)$-й и n-й выплатой;
   - $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ — время n-й выплаты;
   - η_n — размер n-й выплаты;
   - X_t — число выплат к моменту времени $t > 0$;
   - $\sum\limits_{k=1}^{X_t} \eta_k$ — общий размер выплат к этому моменту времени;
   - Y_t — текущий капитал компании.

3 Случайное блуждание на прямой

Определение 3.1. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathsf{P}(\xi_n = 1) = p$, $\mathsf{P}(\xi_n = -1) = 1 - p = q$.
Тогда процесс $(S_n, n \in \mathbb{Z}_+)$, $S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, называется *простейшим случайным блужанием на прямой.*
Если $p = q = \frac{1}{2}$, то блуждание называется *симметричным.*

Вопросы:

- вероятность возвращения в ноль;
- каково распределение первого момента возвращения в ноль;
- среднее время в нуле;
- геометрия траектории.

3.1 Возвращение в ноль

Какова вероятность $\mathsf{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0) = ?$

Вероятность каждой траектории, приходящей в 0 в момент времени $2n$, равна $(pq)^n$. Под траекторией будет понимать вектор $(\xi_1, \dots, \xi_{2n}), \xi_i \in \{\pm 1\}$.

Определение 3.2. Траектория $(\xi_1, \ldots, \xi_{2n})$ длины $2n$ называется *положительной*, если

$$\sum_{i=1}^{k} \xi_i > 0, \ \forall k < 2n, \ \text{ и } \sum_{i=1}^{2n} \xi_i = 0.$$

Число таких траекторий обозначим через $\tilde{C}_n$.

Наблюдение. $\mathsf{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0) = 2 \cdot \tilde{C}_n \cdot (pq)^n$.

Определение 3.3. Траектория $(\xi_1, \ldots, \xi_{2n})$ длины $2n$ называется *неотрицательной*, если

$$\sum_{i=1}^{k} \xi_i \geqslant 0, \ \forall k < 2n, \ \text{ и } \sum_{i=1}^{2n} \xi_i = 0.$$

Число таких траекторий обозначим через C_n.

Утверждение 3.1. $\tilde{C}_n = C_{n-1}$.

Доказательство. Пусть $(\xi_1, \ldots, \xi_{2n})$ — положительная траектория длины $2n$. Тогда

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_{2n} = 0 - \underbrace{\sum_{i=1}^{2n-1} \xi_i}_{>0} = -1.$$

Легко видеть, что $(\xi_2, \ldots, \xi_{2n-1})$ — это неотрицательная траектория длины $2n-2$.

Наоборот, если $(\xi_2, \ldots, \xi_{2n-1})$ — неотрицательна, то $(1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n-1}, \xi_{2n})$ — положительная траектория.

Таким образом, построили биекцию между положительными траекториями длины $2n$ и неотрицательными длины $2n-2$. □

Утверждение 3.2. *Пусть* $C_0 = 1$. *Тогда* $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_k \cdot C_{n-1-k}$.

Доказательство. Пусть дана неотрицательная траектория длины $2n$. Обозначим через $2k$ — первый момент возвращения в ноль. Соответствующих траекторий $\tilde{C}_k \cdot C_{n-k}$. Суммируя по k:

$$C_n = \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{C}_k \cdot C_{n-k} + \tilde{C}_n = \Big| C_0 = 1 \Big| = \sum_{k=1}^{n} \tilde{C}_k \cdot C_{n-k} = \Big| t = k-1 \Big| = \sum_{t=0}^{n-1} \tilde{C}_{t+1} \cdot C_{n-1-t} =$$
$$= \Big| \text{Утверждение 3.1} \Big| = \sum_{t=0}^{n-1} C_t \cdot C_{n-1-t}.$$

□

Вывод: C_n — это числа Каталана. $C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$.

Производящая функция: $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n t^n = \frac{1}{2t}(1 - \sqrt{1-4t}), |t| \leqslant \frac{1}{4}$.

Теорема 3.1 (распределение момента возвращения в ноль)**.**

$$\mathsf{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0) = \frac{1}{2n-1} C_{2n}^n (pq)^n$$

Доказательство.

$$\mathsf{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0) = 2\tilde{C}_n (pq)^n = \Big| \text{Утверждение 3.1} \Big| =$$
$$= 2C_{n-1}(pq)^n = \frac{2}{n} C_{2n-2}^{n-1} (pq)^n =$$
$$= \frac{n^2}{2n(2n-1)} \frac{2}{n} C_{2n}^n (pq)^n = \frac{1}{2n-1} C_{2n}^n (pq)^n.$$

□

Теорема 3.2 (о вероятности возвращения в ноль)**.**

$$\mathsf{P}(\{S_n, n \geqslant 1\} \text{ *вернется в ноль*}) = 1 - |p-q|.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(\{S_n, n \geqslant 1\} \text{ вернется в } 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{2n} = 0) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 2\tilde{C_n}(pq)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2C_{n-1}(pq)^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2C_n(pq)^{n+1} = 2pq \cdot \sum_{n=0}^{\infty} C_n(pq)^n = 2pq \cdot f(pq) \\
&= 2pq\frac{1}{2pq}(1 - \sqrt{1-4pq}) = \Big| \text{ т.к. } 1 = (p+q)^2 \Big| = \\
&= 1 - \sqrt{(p-q)^2} = 1 - |p-q|.
\end{aligned}$$

□

Следствие 3.1. *Симметричное случайное блуждание на прямой возвратно с вероятностью 1.*

3.2 Среднее время нахождения в нуле

Пусть $(S_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — простейшее симметричное случайное блуждание на прямой. Обозначим через $L_n(0)$ число нулей в последовательности $\{S_0, S_1 \ldots, S_n\}$.

Вопрос. *Какова асимптотика* $\mathsf{E}L_n(0) \sim ?$

Лемма 3.1.

$$\mathsf{E}L_n(0) = \mathsf{E}|S_{n+1}|.$$

Доказательство. Рассмотрим $|S_{n+1}|$:

$$|S_{n+1}| = |S_n + \xi_{n+1}| = \begin{cases} S_n + \xi_{n+1}, & S_n > 0 \\ 1, & S_n = 0 \\ -(S_n + \xi_{n+1}), & S_n < 0 \end{cases}$$

Тогда $|S_{n+1}| = (S_n + \xi_{n+1})\mathrm{I}\{S_n > 0\} + \mathrm{I}\{S_n = 0\} - (S_n + \xi_{n+1})\mathrm{I}\{S_n < 0\} = \mathrm{I}\{S_n = 0\} + (S_n + {} + \xi_{n+1})\operatorname{sign}(S_n)$.

Отсюда $|S_{n+1}| = \mathrm{I}\{S_n = 0\} + |S_n| + \xi_{n+1}\operatorname{sign}(S_n) = \Big|\text{применяем равенство много раз}\Big| = {} = \sum\limits_{k=0}^{n}(\mathrm{I}\{S_k = 0\} + \xi_{k+1}\operatorname{sign}(S_k)) = L_n(0) + \sum\limits_{k=0}^{n}\xi_{k+1}\operatorname{sign}(S_k)$.

Берем матожидание от обеих частей равенства: $\mathsf{E}|S_{n+1}| = \mathsf{E}L_n(0) + \sum\limits_{k=0}^{n}\mathsf{E}(\xi_{k+1}\operatorname{sign}(S_k)) = {} = \mathsf{E}L_n(0) + \sum\limits_{k=0}^{n}\mathsf{E}\xi_{k+1}\mathsf{E}\operatorname{sign}(S_k) = \mathsf{E}L_n(0)$. □

Согласно ЦПТ, $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \eta \sim \mathcal{N}(0,1)$.

По теореме о наследовании сходимости $\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} |\eta|, \eta \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Вопрос. *Верно ли следующее?*

$$\mathsf{E}\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \to \mathsf{E}|\eta| = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}|x|e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Определение 3.4. Семейство случайных величин $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ называется *равномерно интегрируемым*, если

$$\lim_{c \to +\infty} \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathsf{E}(|\xi_\alpha|\,\mathrm{I}\{|\xi_\alpha| \geqslant c\}) = 0.$$

Смысл определения: «хвосты» распределения равномерно малы:

$$\sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} \int\limits_{|\xi_\alpha|\geqslant c} |\xi_\alpha| dF_{\xi_\alpha}(x) \underset{c\to+\infty}{\to} 0.$$

Теорема 3.3 (б/д). *Пусть* $\{\xi_n, n\in\mathbb{N}\}$ *— неотрицательные случайные величины,* $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$. *Тогда*

$$\mathsf{E}\xi_n \to \mathsf{E}\xi \iff \{\xi_n, n\in\mathbb{N}\} \text{ равномерно интегрируемо.}$$

Замечание. *Если сходимость* $\xrightarrow{p}$ *или* $\xrightarrow{п.н.}$, *то равномерная интергрируемость* $\Leftrightarrow \xi_n \xrightarrow{L_1} \xi$.

Теорема 3.4 (достаточное условие равномерной интегрируемости). *Пусть* $\{\xi_n, n\in\mathbb{N}\}$ *— последовательность случайных величин,* $G(t), t\geqslant 0$, *— неотрицательная функция на* $\mathbb{R}_+$ *такая, что* $\frac{G(t)}{t}\to+\infty$ *при* $t\to+\infty$ *и* $\sup\limits_n \mathsf{E}G(|\xi_n|)<+\infty$.

Тогда последовательность ξ_n *равномерно интегрируема.*

Доказательство. Положим $M = \sup\limits_n \mathsf{E}G(|\xi_n|)$.

$\forall\varepsilon>0$ выберем a так, что $\frac{M}{a}<\varepsilon$.

Возьмем $c>0$ такую, что $\frac{G(t)}{t}\geqslant a\ \forall t\geqslant c$. Тогда $\forall t\geqslant c, \forall n\in\mathbb{N}:$

$$\mathsf{E}(|\xi_n|\mathrm{I}\{|\xi_n|\geqslant t\}) \leqslant \mathsf{E}\left(\frac{G(|\xi_n|)}{a}\mathrm{I}\{|\xi_n|\geqslant t\}\right) \leqslant \mathsf{E}\frac{G(|\xi_n|)}{a} \leqslant \frac{M}{a} < \varepsilon.$$

Значит, $\{\xi_n, n\in\mathbb{N}\}$ равномерно интегрируема. □

Теорема 3.5 (среднее время в нуле).

$$\mathsf{E}L_n(0) \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}.$$

Доказательство. Согласно лемме, $\mathsf{E}L_n(0) = \mathsf{E}|S_{n+1}|$. Значит, достаточно проверить, что $\mathsf{E}|S_n| \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$.

Мы знаем, что $\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} |\eta|,\ \eta\sim\mathcal{N}(0,1)$.

Покажем, что последовательность $\{\eta_n = \frac{|S_n|}{\sqrt{n}}\}$ равномерно интегрируема. Положим $G(t) = t^2$, $\frac{G(t)}{t}\to+\infty$.

$$\mathsf{E}G(\eta_n) = \mathsf{E}\left(\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{\mathsf{E}S_n^2}{n} = \Big|\text{т.к. } \mathsf{E}S_n = 0\Big| = \frac{\mathsf{D}\,S_n}{n} = \frac{\mathsf{D}(\xi_1+\dots+\xi_n)}{n} = 1.$$

Согласно достаточному условию получили, что последовательность η_n равномерно интегрируема. Тогда по теореме о связи сходимости по распределению и сходимости в среднем (теореме 3.3) получаем, что

$$\mathsf{E}\eta_n \to \mathsf{E}|\eta| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (\eta\sim\mathcal{N}(0,1)).$$

В итоге

$$\mathsf{E}L_n(0) = \mathsf{E}|S_{n+1}| \sim \sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi}} \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}.$$

□

3.3 Закон повторного логарифма

Пусть $(S_n, n\in\mathbb{Z}_+)$ — простейшее симметричное случайное блуждание на прямой.

Теорема 3.6 (закон повторного логарифма).

$$\mathsf{P}\left(\varlimsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}} = 1\right) = 1.$$

Заметим сразу:

Следствие.

$$\mathsf{P}\left(\varliminf_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}} = -1\right) = 1.$$

Доказательство следствия. Рассмотрим $X_n = -S_n$ — простейшее симметричное случайное блуждание $\Leftrightarrow$ по ЗПЛ:

$$\text{п.н. } 1 = \varlimsup_n \frac{X_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}} = \varlimsup_n \frac{-S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}} = -\varliminf_n \frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}}.$$

□

<u>Смысл ЗПЛ</u>: $\forall\varepsilon > 0$ с вероятностью 1 траектория (начиная с некоторого $n_0 = n_0(\varepsilon, \omega)$) случайного блуждания находится между $\pm(1+\varepsilon)\sqrt{2n\ln\ln n}$. В то же время она бесконечно много раз выскакивает из области между $\pm(1-\varepsilon)\sqrt{2n\ln\ln n}$.

<u>Подготовка к доказательству.</u>

Обозначим $\varphi(n) = \sqrt{2n\ln\ln n}$. Заметим, что

1.

$$\left\{\varlimsup_n \frac{S_n}{\varphi(n)} \leqslant 1\right\} = \left\{\lim_n \sup_{m\geqslant n} \frac{S_m}{\varphi(m)} \leqslant 1\right\} =$$

$$= \left\{\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) : \sup_{n\geqslant n_0(\varepsilon)} \frac{S_n}{\varphi(n)} \leqslant 1+\varepsilon\right\} =$$

$$= \{\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) : \forall n \geqslant n_0(\varepsilon) \quad S_n \leqslant (1+\varepsilon)\cdot\varphi(n)\} =$$

$$= \{\forall\varepsilon > 0 \text{ событие } \{S_n > (1+\varepsilon)\cdot\varphi(n)\} \text{ произошло лишь для конечного числа значений } n\}\,; \tag{1}$$

2.

$$\left\{\varlimsup_n \frac{S_n}{\varphi(n)} \geqslant 1\right\} = \left\{\lim_n \sup_{m\geqslant n} \frac{S_m}{\varphi(m)} \geqslant 1\right\} =$$

$$= \left\{\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_1(\varepsilon) : \sup_{n\geqslant n_1(\varepsilon)} \frac{S_n}{\varphi(n)} \geqslant 1-\varepsilon\right\} =$$

$$= \{\forall\varepsilon > 0 \text{ событие } \{S_n \geqslant (1-\varepsilon)\cdot\varphi(n)\} \text{ произошло для бесконечного числа } n\}\,. \tag{2}$$

Вспомним курс теорвера:

> **Определение 3.5.** Пусть $\{A_n\}$ — последовательность событий. Тогда $\{\{A_n\}\text{ б.ч.}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m\geqslant n} A_m$ — произошло бесконечное число событий среди последовательности A_n.
>
> **Лемма 3.2** (Бореля—Кантелли)**.**
>
> *1. Если* $\sum_n \mathsf{P}(A_n) < \infty$*, то* $\mathsf{P}(\{A_n\}\text{ б.ч.}) = 0$.
>
> *2. Если* $\sum_n \mathsf{P}(A_n) = \infty$ *и* $\{A_n\}$ *независимы, то* $\mathsf{P}(\{A_n\}\text{ б.ч.}) = 1$.

Воспользуемся этой леммой. Из (1) и (2) вытекает, что для доказательства ЗПЛ нужно показать:

$$\sum_n \mathsf{P}(S_n \geqslant (1+\varepsilon)\cdot\varphi(n)) < \infty.$$

Тогда по лемме Бореля-Кантелли:

$$\mathsf{P}(\forall\varepsilon > 0 : \{S_n > (1+\varepsilon)\varphi(n)\} \text{ произошло лишь для конечного числа значений } n) = 1.$$

$$\Rightarrow \mathsf{P}\left(\varlimsup_n \frac{S_n}{\varphi(n)} \leqslant 1\right) = 1.$$

В другую сторону хочется аналогичного:

$$\mathsf{P}\left(\forall\varepsilon > 0 : \{S_n > (1-\varepsilon)\cdot\varphi(n)\} \text{ б.ч.}\right) = 1$$
$$\Rightarrow \mathsf{P}\left(\overline{\lim_n}\frac{S_n}{\varphi(n)} \geqslant 1\right) = 1,$$

что сложнее, так как независимости S_n нет. Зато независимы приращения $S_n - S_k$ для $n > k$, чем мы в итоге и воспользуемся.

<u>**Проблема**</u>: как оценить вероятность $\mathsf{P}(S_n > t)$?

Теорема 3.7 (Берри-Эссеена)**.** *Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathsf{E}|\xi_n|^3 < +\infty$. Обозначим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, а $F_n(x)$ — функция распределения $\frac{S_n - \mathsf{E}S_n}{\sqrt{\mathsf{D}\,S_n}}$. Тогда $\exists c > 0$, т.ч.*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant c\cdot\frac{\mathsf{E}|\xi_1 - \mathsf{E}\xi_1|^3}{\sqrt{n}},$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения $\mathcal{N}(0,1)$.

Для сравнения: по ЦПТ $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1) \quad \Rightarrow \quad F_{S_n/\sqrt{n}}(x) \to \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

Утверждение 3.3. $1 - \Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int\limits_{x}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy = e^{-\frac{x^2}{2}(1+o(1))}$, *где $o(1) \to 0$ при $x \to +\infty$.*

Доказательство.

$$1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{x}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy.$$

При больших x и $y \geqslant x$, так как $x - \frac{x^2}{2}$ убывает, то $y - \frac{y^2}{2} \leqslant x - \frac{x^2}{2}$, значит:

$$-\frac{y^2}{2} = y - \frac{y^2}{2} - y \leqslant x - \frac{x^2}{2} - y.$$

Тогда, с одной стороны:

$$1 - \Phi(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{x-\frac{x^2}{2}}\underbrace{\int\limits_{x}^{+\infty} e^{-y}dy}_{e^{-x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

С другой стороны:

$$1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{x}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{x}^{x+1} e^{-\frac{y^2}{2}}dy + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{x+1}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+1)^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}(1+o(1))},$$

откуда получаем условие утверждения. □

Следствие. $\mathsf{P}(S_n > t) = e^{-\frac{t^2}{2n}(1+o(1))} + O\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Доказательство. $\mathsf{P}(S_n > t) = \mathsf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > \frac{t}{\sqrt{n}}\right)$

Но функция распределения $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ близка к $\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ по теореме Берри-Эссеена:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_{S_n/\sqrt{n}} - \Phi(x)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Значит, $\mathsf{P}(S_n > t) = 1 - \Phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = e^{-\frac{t^2}{2n}(1+o(1))} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, где $o(1) \to 0$ при $\frac{t}{\sqrt{n}} \to \infty$. □

Лемма 3.3. *Пусть $\eta_1, \ldots, \eta_n$ — независимые случайные величины с симметричным распределением ($\eta_i \stackrel{d}{=} -\eta_i$), $X_n = \eta_1 + \cdots + \eta_n$. Тогда* $\mathsf{P}\left(\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} X_k \geqslant a\right) \leqslant 2\,\mathsf{P}(X_n \geqslant a)$.

Доказательство. Обозначим $A_k = \{X_j < a, \forall j < k; X_k \geqslant a\}$ и пусть $A = \left\{\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} X_k \geqslant a\right\}$ и $B = \{X_n \geqslant a\}$.

Если выполнено A_k и $X_n \geqslant X_k$, то выполнено B. Отсюда $\{A_k \cap B\} \supset \{A_k \cap \{X_n \geqslant X_k\}\}$. Значит

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(A_k \cap B) \geqslant \mathsf{P}(A_k \cap \{X_n \geqslant X_k\}) =& \\ = \mathsf{P}(A_k \cap \{\eta_{k+1} + \cdots + \eta_n \geqslant 0\}) &= \left| A_k \text{ и } \eta_i, i > k, \text{ независимы} \right| = \\ = \mathsf{P}(A_k) \cdot \mathsf{P}(\eta_{k+1} + \cdots + \eta_n \geqslant 0).&\end{aligned}$$

Но, в силу симметричности распределений вероятностей $\eta_1, \ldots, \eta_n$:

$$\mathsf{P}(\eta_{k+1} + \cdots + \eta_n < 0) = \mathsf{P}(\eta_{k+1} + \cdots + \eta_n > 0) \leqslant \mathsf{P}(\eta_{k+1} + \cdots + \eta_n \geqslant 0).$$

Значит,

$$\mathsf{P}(\eta_{k+1} + \cdots + \eta_n \geqslant 0) \geqslant \frac{1}{2},$$

и

$$\mathsf{P}(A_k \cap B) \geqslant \frac{1}{2}\,\mathsf{P}(A_k).$$

Получаем, что

$$\mathsf{P}(B) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(A_k \cap B) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(A_k) = \frac{1}{2}\,\mathsf{P}(A),$$

откуда и следует утверждение леммы. □

Доказательство закона повторного логарифма.

1. Пусть $\varepsilon > 0$ фиксированно.

   Положим $A_n = \{S_n > (1+\varepsilon)\sqrt{2n \ln\ln n}\}$. Хотим показать, что $\mathsf{P}(\{A_n\} \text{ б.ч.}) = 0$.

   Обозначим $\lambda = 1+\varepsilon, n_k = \lambda^k, k \in \mathbb{N}$. Считаем, что $k > k_0$, где $\ln\ln k_0$ определен. Введем событие:

$$B_k = \{\exists n \in (n_k, n_{k+1}] : S_n > \lambda\sqrt{2n \ln\ln n}\}.$$

   Легко видеть, что

$$\{\{A_n\} \text{ б.ч.}\} = \{\{B_n\} \text{ б.ч.}\}.$$

   Оценим вероятность B_k:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(B_k) &\leqslant \mathsf{P}\left(\max_{n_k < n \leqslant n_{k+1}} S_n > \lambda\sqrt{2n_k \ln\ln n_k}\right) \leqslant \mathsf{P}\left(\max_{n \leqslant n_{k+1}} S_n > \lambda\sqrt{2n_k \ln\ln n_k}\right) \leqslant \left|\text{Лемма 3.3}\right| \leqslant \\ &\leqslant 2\,\mathsf{P}(S_{[n_{k+1}]} > \lambda\sqrt{2n_k \ln\ln n_k}) = \left|\text{Следствие из утверждения 3.3}\right| = \\ &= 2\exp\left(-\frac{\lambda^2 2n_k \ln\ln n_k}{2[n_{k+1}]}(1+o(1))\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{[n_{k+1}]}}\right) = \left|n_k = \lambda^k, [n_{k+1}] \sim \lambda^{k+1}\right| = \\ &= 2e^{-\lambda \ln k(1+o(1))} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda^{k+1}}}\right) = 2k^{-\lambda(1+o(1))} + O\left(\frac{1}{\sqrt{(1+\varepsilon)^{k+1}}}\right).\end{aligned}$$

   Ряд $\sum\limits_k k^{-\lambda} < \infty$ при $\lambda > 1$, ряд $\sum\limits_k O\left(\frac{1}{(\sqrt{1+\varepsilon})^{k+1}}\right) < \infty$, так как $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} < 1$, значит, ряд $\sum\limits_k \mathsf{P}(B_k)$ сходится. Тогда, раз $\{\{A_n\} \text{ б.ч.}\} = \{\{B_n\} \text{ б.ч.}\}$, по лемме Бореля-Кантелли:

$$\mathsf{P}(\{B_n\} \text{ б.ч.}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathsf{P}(\{A_n\} \text{ лишь для конечного числа событий}) = 1 \text{ и, по (1),}$$

$$\mathsf{P}\left(\varlimsup_n \frac{S_n}{\sqrt{2n \ln\ln n}} \leqslant 1\right) = 1.$$

2. Нужно показать, что для произвольного $\varepsilon > 0$ с вероятностью единица $S_n \geqslant (1-\varepsilon)\sqrt{2n\ln\ln n}$ для бесконечно многих n.

   Применим п. 1 к последовательности $\{-S_n, n \in \mathbb{N}\}$. Тогда получим, что для всех n, за исключением, быть может, конечного их числа, (P-п.н.) $-S_n \leqslant 2\sqrt{2n\ln\ln n}$.[1]

   Пусть $N \in \mathbb{N}$ — большое фиксированное число, $\lambda = 1-\varepsilon > 0, n_k = N^k$. Тогда при достаточно больших k

$$S_{n_{k-1}} \geqslant -2\sqrt{2n_{k-1}\ln\ln n_{k-1}},$$

   или

$$S_{n_k} \geqslant Y_k - 2\sqrt{2n_{k-1}\ln\ln n_{k-1}},$$

   где $Y_k = S_{n_k} - S_{n_{k-1}}$.

   Введем событие

$$C_k = \{Y_k \geqslant \lambda\sqrt{2n_k\ln\ln n_k} + 2\sqrt{2n_{k-1}\ln\ln n_{k-1}}\}.$$

   Получается, если доказать, что $\{C_k \text{ б.ч.}\}$, то вместе с последним неравенством это даст, что (P-п.н.) $S_{n_k} \geqslant \lambda\sqrt{2n\ln\ln n}$ также для бесконечно многих k. Кроме того, события C_k задаются приращениями $S_{n_k} - S_{n_{k-1}}$, а значит, независимы между собой, как и нужно для применения леммы Бореля-Кантелли.

   Возьмем некоторое $\lambda' \in (\lambda, 1)$. Тогда найдется такое $N > 1$, что для всех k

$$\lambda'\sqrt{2(n_k - n_{k-1})\ln\ln n_k} \geqslant \lambda\sqrt{2n_k\ln\ln n_k} + 2\sqrt{2n_{k-1}\ln\ln n_{k-1}},$$

   так как $n_k = N^k$.

   Покажем, что $\sum\limits_k \mathsf{P}(C_k) = +\infty$:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(C_k) &\geqslant \mathsf{P}(Y_k \geqslant \lambda'\sqrt{2(n_k - n_{k-1})\ln\ln n_k}) = \\
&= \mathsf{P}(S_{n_k} - S_{n_{k-1}} \geqslant \lambda'\sqrt{2(n_k - n_{k-1})\ln\ln n_k}) = \\
&= \left|\text{Следствие 3.3 для } S_{n_k - n_{k-1}} \overset{d}{=} S_{n_k} - S_{n_{k-1}}\right| = \\
&= \exp\left(-\frac{\lambda'^2 2(n_k - n_{k-1})\ln\ln n_k}{2(n_k - n_{k-1})}(1+o(1))\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{N^k}}\right) = \\
&= e^{-\lambda'^2\ln k(1+o(1))} + O\left(\frac{1}{N^{k/2}}\right) = \left|\lambda' < 1\right| = \\
&= \underbrace{k^{-(1-\delta)^2(1+o(1))}}_{\text{расходится}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{N^{k/2}}\right)}_{\text{сходится}}.
\end{aligned}$$

   Тогда по лемме Бореля-Кантелли $\mathsf{P}(\{C_k\} \text{ б.ч.}) = 1$.

   Значит,

$$\mathsf{P}(\{S_{n_k} \geqslant \lambda\sqrt{2n_k\ln\ln n_k}\} \text{ б.ч.}),$$

   и

$$\mathsf{P}\left(\overline{\lim_n}\frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}} \geqslant 1\right) = 1.$$

Объединяя п.1 и п.2, получаем условие теоремы. □

4 Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона

Возможно, перед прочтением доказательств из данной темы стоит повторить свойства условного математического ожидания, параграф 8.1.

[1] Знаем, что $-S_n \leqslant (1+\varepsilon)\sqrt{2n\ln\ln n}$, поэтому можем взять $\varepsilon = 1$.

4.1 Определение

Физическая модель: В дискретные моменты времени частицы распадаются на случайное количество таких же частиц. Число потомков каждой частицы имеет одно и то же распределение.

Математическая модель: Пусть ξ — случайная величина со значениями в $\mathbb{Z}_+$. $\{\xi_k^{(n)}, k, n \in \mathbb{N}\}$ — набор независимых случайных величин с тем же распределением, что и ξ. Определим

$$X_0 = 1, X_1 = \xi_1^{(1)}, X_n = \sum_{k=1}^{X_{n-1}} \xi_k^{(n)}.$$

Определение 4.1. Процесс $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ называется *ветвящимся процессом Гальтона-Ватсона* с законом размножения частиц ξ.

- X_n — число частиц в n-м поколении,
- $\xi_k^{(n)}$ — число потомков k-й частицы из $(n-1)$-ого поколения.

Вопрос: какова вероятность вырождения ветвящегося процесса?

4.2 Производящие функции

Определение 4.2. Пусть ξ — случайная величина. Тогда ее *производящей функцией*[2] называется

$$\varphi_\xi(z) = \mathsf{E} z^\xi, \ z \in \mathbb{R}.$$

Свойства производящих функций

1. $\varphi_\xi(1) = 1$;
2. $\varphi'_\xi(1) = \mathsf{E}\xi$;
3. Если ξ и η независимы, то $\varphi_{\xi+\eta}(z) = \varphi_\xi(z) \cdot \varphi_\eta(z)$;

Если ξ принимает значения в $\mathbb{Z}_+$, то имеются дополнительные свойства:

4. $\varphi_\xi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k\, \mathsf{P}(\xi = k)$ — степенной ряд, сходящийся абсолютно и равномерно в области $\{|z| < 1\}$;
5. $\varphi_\xi(0) = \mathsf{P}(\xi = 0)$;
6. $\varphi_\xi(z)$ непрерывно дифференцируема бесконечное число раз в области $\{|z| < 1\}$;
7. $\mathsf{P}(\xi = k) = \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k}{dz^k}\varphi_\xi(z)\right)\Big|_{z=0}$.

Пусть далее $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — ветвящийся процесс с законом размножения частиц ξ.

Лемма 4.1.

$$\varphi_{X_{n+1}}(z) = \varphi_{X_n}(\varphi_\xi(z)).$$

Доказательство. Рассмотрим $\varphi_{X_{n+1}}(z) = \mathsf{E} z^{X_{n+1}} = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}(z^{X_{n+1}} | X_n)\right)$.

$$\mathsf{E}\left(z^{X_{n+1}} | X_n = m\right) = \mathsf{E}\left(z^{\sum\limits_{k=1}^{X_n} \xi_k^{(n+1)}} \middle| X_n = m \right) = \mathsf{E}\left(z^{\sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k^{(n+1)}} \middle| X_n = m \right) =$$

$$= \left| \text{т.к. } \xi_k^{(n+1)} \text{ и } X_n \text{ независимы} \right| = \mathsf{E} z^{\sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k^{(n+1)}} =$$

$$= \left| \text{т.к. } \xi_k^{(n+1)} \overset{d}{=} \xi, \text{т.е. } \mathsf{E} z^{\xi_k^{(n+1)}} = \varphi_\xi(z), \text{ и } \xi_k^{(n+1)} \text{ независимы} \right| =$$

$$= (\varphi_\xi(z))^m.$$

[2] А знакомая нам *характеристическая функция* — это вовсе даже $\varphi_\xi(z) = \mathsf{E} e^{iz\xi}$. Буков им мало...

Отсюда $\mathsf{E}(z^{X_{n+1}}|X_n) = (\varphi_\xi(z))^{X_n}$, значит

$$\varphi_{X_{n+1}}(z) = \mathsf{E}(\varphi_\xi(z))^{X_n} = \varphi_{X_n}(\varphi_\xi(z)).$$

$\square$

Следствие.

1. $\varphi_{X_n}(z) = \underbrace{\varphi_\xi(\varphi_\xi(\ldots\varphi_\xi(}_{n \text{ раз}}z)\ldots));$

2. $\varphi_{X_{n+1}}(z) = \varphi_\xi(\varphi_{X_n}(z)).$

   Доказательство. Применяем индуктивно лемму 4.1:

$$\varphi_{X_{n+1}}(z) = \underbrace{\varphi_\xi(\varphi_\xi(\ldots\varphi_\xi(}_{n+1 \text{ раз}}z)\ldots)) = \varphi_\xi(\varphi_{X_n}(z))$$

$\square$

4.3 Вероятность вырождения процесса

Обозначим $q_n = \mathsf{P}(X_n = 0) = \mathsf{P}(\text{процесс выродился к моменту времени } n)$,
$q = \mathsf{P}(\text{процесс выродился}) = \mathsf{P}(\exists n : X_n = 0)$.

Лемма 4.2.

$$q_n \leqslant q_{n+1} \;\; \text{и} \;\; q = \lim_n q_n.$$

Доказательство. $\{X_n = 0\} \subset \{X_{n+1} = 0\} \Rightarrow q_n \leqslant q_{n+1}$.

Но $\mathsf{P}(\exists n : X_n = 0) = \mathsf{P}\left(\bigcup\limits_n \{X_n = 0\}\right) = \Big|\text{по непрерывности вероятностной меры}\Big| =$
$= \lim\limits_n \mathsf{P}(X_n = 0) = \lim\limits_n q_n.$ $\square$

Лемма 4.3. *Вероятность вырождения q является решением уравнения*

$$s = \varphi_\xi(s).$$

Доказательство.

$$q \leftarrow q_n = \mathsf{P}(X_n = 0) = \varphi_{X_n}(0) = \varphi_\xi(\varphi_{X_{n-1}}(0)) = \varphi_\xi(q_{n-1}) \to \varphi_\xi(q).$$

$\square$

Вопрос: что делать, если на $[0,1]$ решений несколько?
Т.к. $\varphi_\xi(1) = 1$, всегда есть решение $s = 1$.

Теорема 4.1 (о вероятности вырождения)**.** *Пусть ξ такая, что $\mathsf{P}(\xi = 1) \neq 1$. Обозначим $\mu = \mathsf{E}\xi$ (может быть $\mu = +\infty$). Тогда*

1. *Если $\mu \leqslant 1$, то уравнение $s = \varphi_\xi(s)$ имеет только одно решение $s = 1$ на $[0,1]$. В этом случае $q = 1$.*

2. *Если $\mu > 1$, то уравнение $s = \varphi_\xi(s)$ имеет единственное решение $s_0 \in [0,1)$. В этом случае $q = s_0$.*

Доказательство.

1. Пусть $\mu \leqslant 1$. Рассмотрим производную $\varphi'_\xi(s) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} ks^{k-1}\mathsf{P}(\xi = k)$ для $s \in [0,1]$. Заметим, что эта функция строго возрастает на $[0,1]$ (поскольку каждое слагаемое строго возрастает) и положительна везде кроме 0. Действительно, если $\varphi'_\xi(s) = 0$ для $s > 0$, то $\mathsf{P}(\xi = k) = 0 \; \forall k \geqslant 1$. Но тогда $\mathsf{P}(\xi = 0) = 1$ и $q = 1$.

   Тогда для $s \in (0,1)$:

$$\varphi_\xi(1) - \varphi_\xi(s) = \varphi'_\xi(\theta)(1 - s), \text{ где } \theta = \theta(s) \in (s, 1).$$

   Но $0 < \varphi'_\xi(\theta) < \varphi'_\xi(1) = \mu \leqslant 1$, так как производная строго возрастает. Значит,

$$1 - \varphi_\xi(s) < 1 - s \text{ при } s \in [0,1).$$

   Тогда $\forall s \in [0,1) \; s < \varphi_\xi(s) \;\Rightarrow\; q = 1$. Решений, отличных от 1, нет.

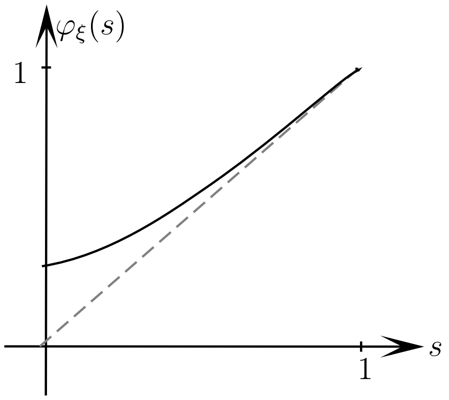


Рис. 1: $\mu \leqslant 1$

2. Пусть теперь $\mu > 1$. Рассмотрим
$$\varphi''_\xi(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)s^{k-2}\,\mathsf{P}(\xi = k) \text{ для } s \in [0,1).$$
Функция строго возрастает и положительна на $(0,1)$.

Действительно, если вдруг $\varphi''_\xi(s) = 0$, то $\forall k \geqslant 2\ \mathsf{P}(\xi = k) = 0$, значит, $\xi \leqslant 1$ п.н., и $\mathsf{E}\xi = \mu \leqslant 1$, что противоречит условию.

Тогда $\varphi'_\xi(s)$ возрастает на $[0,1)$. Рассмотрим
$$f(s) = s - \varphi_\xi(s).$$
Имеем: $f'(s) = 1 - \varphi'_\xi(s), f''_s = -\varphi''_\xi(s) < 0$.

Так как $f'(0) = 1 - \varphi'_\xi(0) = 1 - \mathsf{P}(\xi = 1) > 0$ и $f'(1) = 1 - \varphi'_\xi(1) = 1 - \mu < 0$. Значит, $\exists! s_1 \in (0,1) : f'(s_1) = 0$.

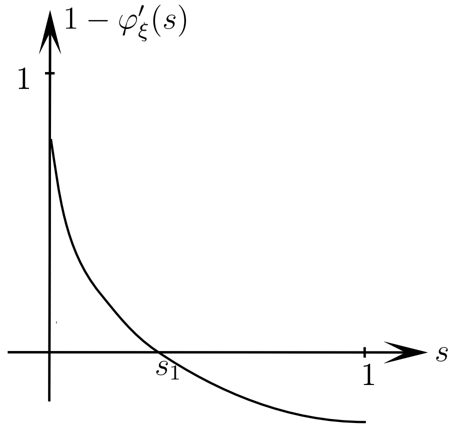


Рис. 2: $\mu > 1$

Как устроен $s - \varphi_\xi(s)$?

1) Если $0 - \varphi_\xi(0) = 0 - \mathsf{P}(\xi = 0) = 0$, то $\mathsf{P}(\xi = 0) = 0$ и $q = 0$.

2) Если $0 - \varphi_\xi(0) < 0$, то $\mathsf{P}(\xi = 0) > 0$.

   Тогда $\exists! s_0 \in (0, s_1)$ такой, что $s_0 = \varphi_\xi(s_0)$. Заметим, что при $s < s_0$ выполнено, что $\varphi_\xi(s) > s$, а при $s > s_0$, $\varphi_\xi(s) < s$.

   Где лежат точки q_n?

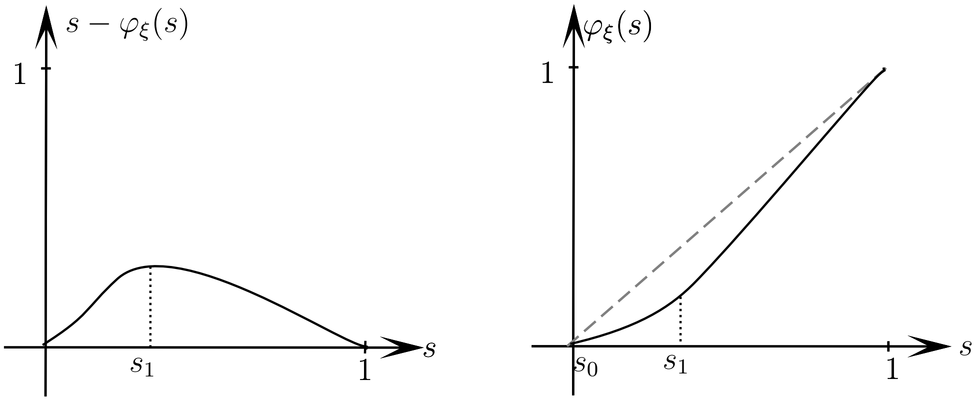


Рис. 3: $\mu > 1, 0 - \varphi_\xi(0) = 0$

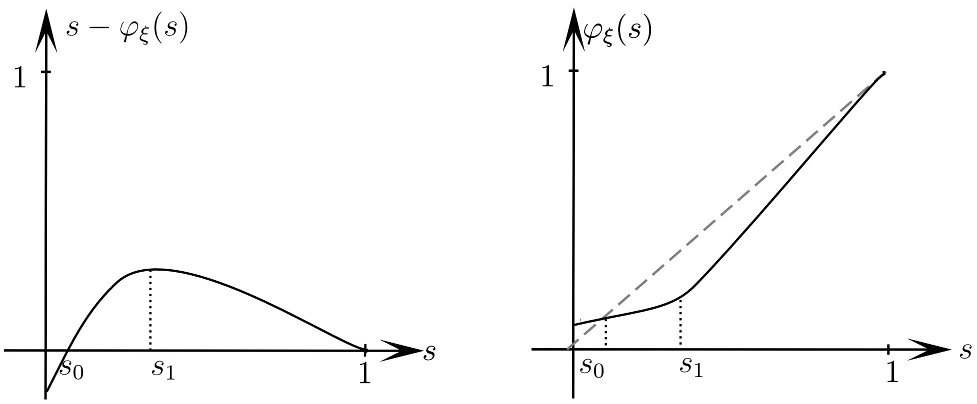


Рис. 4: $\mu > 1, 0 - \varphi_\xi(0) < 0$

Так как $\varphi_\xi(s)$ строго возрастает и

$$q_n = \mathsf{P}(X_n = 0) = \mathsf{P}(X_{n-1} = 0) + \mathsf{P}(X_{n-1} \neq 0, X_n = 0) =$$
$$= q_{n-1} + \sum_{m=1}^{\infty} \mathsf{P}(X_{n-1} = m) \cdot (\mathsf{P}(\xi = 0))^m.$$

Вероятности в сумме, как мы получили, положительны, значит, $q_{n-1} < q_n$ и $q_n = \varphi_\xi(q_{n-1}) < \varphi_\xi(q_n)$.

Тогда получаем, что $\forall n \; q_n \leqslant s_0$ и $q \leqslant s_0$ как предел q_n. Но q — решение уравнения $s = \varphi_\xi(s)$, значит, $q = s_0$.

$\square$

Вывод: вероятность вырождения — это наименьший корень уравнения $s = \varphi_\xi(s)$ из отрезка $[0, 1]$.
Интерпретация: если среднее число потомков меньше 1, то процесс обречен на вымирание. Иначе есть ненулевая вероятность того, что мы будем живы до бесконечности.

5 Конечномерные распределения случайных процесов

Пусть $(X_t, t \in T)$ — случайный процесс на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, и $\forall t \in T \; X_t$ принимает значения в $(S_t, \mathscr{B}_t)$.

Определение 5.1. Множество $S = \underset{t\in T}{\times} S_t$ называется *пространством траекторий* случайного процесса X. ($\underset{t\in T}{\times} S_t$ — декартово произведение).

Формально,

$$S = \{y = (y(t), t \in T) : \forall t \in T \ y(t) \in S_t\}.$$

Определение 5.2. Для $\forall t \in T$ и $B_t \in \mathscr{B}_t$ введем *элементарный цилиндр* с основанием B_t:

$$C(t, B_t) = \{y \in S : y(t) \in B_t\}.$$

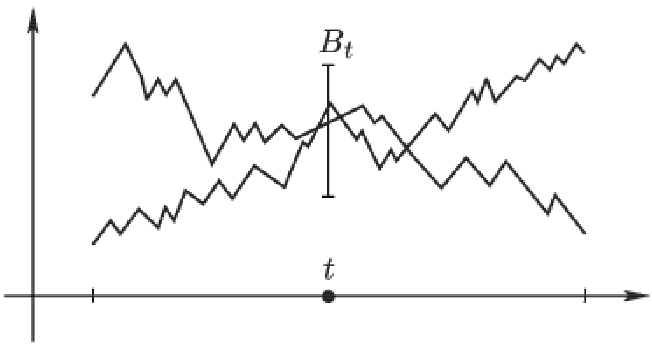


Рис. 5: Образно говоря, $C(t, B_t)$ состоит из тех функций $y(t)$, которые *в точке* t проходят через ворота B_t.

Определение 5.3. Минимальная σ-алгебра $\mathscr{B}_T$, содержащая все эти элементарные цилиндры, называется *цилиндрической σ-алгеброй* на S.

Формально,

$$\mathscr{B}_T = \sigma\{C(t, B_t) : t \in T, B_t \in \mathscr{B}_t\}.$$

Для $\mathscr{B}_T$ используется также обозначение $\bigotimes\limits_{t \in T} \mathscr{B}_t$.

Тогда $(S, \mathscr{B}_T)$ — измеримое пространство.

Значит, на $X = (X_t, t \in T)$ можно смотреть как на один случайный элемент со значениями в $(S, \mathscr{B}_T)$: каждому $\omega \in \Omega$ сопоставляется целая траектория $\tilde{X}_\omega(\cdot)$ (см. определение 2.3). Разберемся с вопросом измеримости такого отображения.

Лемма 5.1. *$X = (X_t, t \in T)$ является случайным процессом на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, т.е. семейство $X = (X_t, t \in T)$ есть семейство $\mathscr{F}|\mathscr{B}_t$ -измеримых случайных элементов $X_t, t \in T \Leftrightarrow$*
$\Leftrightarrow \mathbf{X} : \Omega \to S$, заданное как

$$\mathbf{X}(\omega) := \tilde{X}_\omega(\cdot),$$

является $\mathscr{F}|\mathscr{B}_T$ -измеримым отображением.

> **Лемма** (достаточное условие измеримости отображения)**.** *Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $(E, \mathscr{E})$ — измеримое пространство, $\mathcal{M} \subset \mathscr{E}$ — подсистема такая, что $\sigma(\mathcal{M}) = \mathscr{E}$. Пусть $X : \Omega \to E$. Если $\forall B \in \mathcal{M} \quad X^{-1}(B) \in \mathscr{F}$, то X является случайным элементом, т.е.*
>
> $$\forall B \in \mathscr{E} \quad X^{-1}(B) \in \mathscr{F}.$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Надо доказать, что $\forall t$ X_t — случайный элемент со значениями в $(S_t, \mathscr{B}_t)$.

$\forall B_t \in \mathscr{B}_t$:

$$X_t^{-1}(B_t) = \{\omega : X_t(\omega) \in B_t\} = \{\omega : \mathbf{X}(\omega) \in C(t, B_t)\} = \mathbf{X}^{-1}(C(t, B_t)) \in \mathscr{F},$$

т.к. $\mathbf{X}$ измерим.

($\Rightarrow$) Воспользуемся достаточным условием измеримости, взяв $\mathcal{M}$ — множество всех элементарных цилиндров.
Тогда $\sigma(\mathcal{M}) = \mathscr{B}_T$ — цилиндрическая σ-алгебра,
$$\mathbf{X}^{-1}(C(t, B_t)) = \{\omega : \mathbf{X}(\omega) \in C(t, B_t)\} = \{\omega : X_t(\omega) \in B_t\} = X_t^{-1}(B_t) \in \mathscr{F},$$
т.к. X_t — случайный элемент.

□

Замечание. *Лемма устанавливает эквивалентное определение случайного процесса как единого случайного элемента со значениями в пространстве траекторий, измеримого относительно цилиндрической σ-алгебры.*

Определение 5.4. *Распределением* P_X случайного процесса $X = (X_t, t \in T)$ называется вероятностная мера на $(S, \mathscr{B}_T)$ такая, что
$$\forall B \in \mathscr{B}_T \quad \mathsf{P}_X(B) = \mathsf{P}(X \in B).$$

Это определение удобно только в том случае, когда «время» конечно. Для счетного (или тем более континуального) «времени» это определение очень трудно для понимания.

Определение 5.5. Пусть $X = (X_t, t \in T)$ — случайный процесс, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall t_1, \dots, t_n \in T$ пусть $\mathsf{P}_{t_1,\dots,t_n}$ обозначает распределение вектора $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$. Тогда набор вероятностных мер $\{\mathsf{P}_{t_1,\dots,t_n} : n \in \mathbb{N}, t_i \in T\}$ называется *набором конечномерных распределений* случайного процесса X, а сами $\mathsf{P}_{t_1,\dots,t_n}$ называются конечномерными распределениями X.

> Напоминание: $\mathsf{P}_{t_1,\dots,t_n}$ — вероятностная мера на $(S_{t_1} \times \dots \times S_{t_n}; \mathscr{B}_{t_1} \otimes \dots \otimes \mathscr{B}_{t_n})$, определенная по правилу, что $\forall B \in \mathscr{B}_{t_1} \otimes \dots \otimes \mathscr{B}_{t_n}$
> $$\mathsf{P}_{t_1,\dots,t_n}(B) = \mathsf{P}((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B).$$

Лемма 5.2. *Пусть X и Y — случайные процессы с одинаковым временем, имеющие одно и то же пространство траекторий $(S, \mathscr{B}_T)$. Тогда их конечномерные распределения совпадают $\Leftrightarrow \mathsf{P}_X = \mathsf{P}_Y$.*

> **Теорема** (Каратеодори, о продолжении меры)**.** *Пусть Ω — некоторое множество, $\mathscr{A}$ — алгебра на нем, P_σ — вероятностая мера на $(\Omega, \mathscr{A})$. Тогда $\exists!$ вероятностная мера P на $(\Omega, \sigma(\mathscr{A}))$ являющаяся продолжением меры P_σ, т.е $\forall A \in \mathscr{A} \quad \mathsf{P}_\sigma(A) = \mathsf{P}(A)$.*

Доказательство. Рассмотрим $\forall n$ $\forall t_1, \dots, t_n \in T$ $\forall B_{t_1}, \dots, B_{t_n}, B_{t_i} \in \mathscr{B}_{t_i}$ конечные цилиндры (не элементарные!) в S:
$$C(t_1, \dots, t_n; B_{t_1}, \dots, B_{t_n}) = \{y \in S : y(t_i) \in B_{t_i} \; \forall i = \overline{1, n}\}$$
Это пересечение каких-то элементарных цилиндров. Фактически, мы фиксируем значения случайного процесса в нескольких моментах времени, а не только в одном, как это делалось в случае элементарного цилиндра.

Свойства цилиндров

- Пересечение цилиндров дает цилиндр.
- Всевозможные конечные объединения непересекающихся цилиндров образуют алгебру $\mathscr{A}$:
  - Пустое множество лежит в алгебре, достаточно взять $C(t_1; \varnothing)$;
  - Если $A \in \mathscr{A}$, $A = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_k$, где $C_i = C(t_1^{(i)}, \dots, t_n^{(i)}; B_{t_1^{(i)}}, \dots, B_{t_n^{(i)}})$ — конечный цилиндр, то $\overline{A} = \overline{C_1} \sqcap \dots \sqcap \overline{C_k}$, где $\overline{C_i} = C(t_1^{(i)}, \dots, t_n^{(i)}; \overline{B}_{t_1^{(i)}}, \dots, \overline{B}_{t_n^{(i)}})$ — также конечный цилиндр. Значит, $\overline{A}$ образовано конечным пересечением конечных цилиндров, т.е. $\overline{A}$ тоже конечный цилиндр, $\overline{A} \in \mathscr{A}$.

  – Если $A, B \in \mathscr{A}$, то их объединение можно представить как конечное объединение непересекающихся цилиндров (пересечение и разность пересекающихся цилиндров можно сделать отдельными цилиндрами), т.е. $A \cup B \in \mathscr{A}$.

- $\sigma(\mathscr{A})$ — цилиндрическая σ-алгебра.

($\Rightarrow$) Из теоремы Каратеодори о продолжении вероятностной меры следует, что достаточно проверить, что P_X и P_Y совпадают на элементах алгебры $\mathscr{A}$. При этом, так как элементы $\mathscr{A}$ представимы в виде конечного объединения непересекающихся цилиндров, а вероятностная мера аддитивна, проверять нужно только их совпадение на произвольных конечных цилиндрах.

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}_X(C(t_1,\dots,t_n;B_{t_1},\dots,B_{t_n})) &= \mathsf{P}(X\in C(t_1,\dots,t_n;B_{t_1},\dots,B_{t_n})) = \\
&= \mathsf{P}(X_{t_1}\in B_{t_1},\dots,X_{t_n}\in B_{t_n}) = \\
&= \mathsf{P}^X_{t_1,\dots,t_n}(B_{t_1}\times\dots\times B_{t_n}) = \\
&= \Big|\text{т.к. конечномерные распределения совпадают}\Big| = \\
&= \mathsf{P}^Y_{t_1,\dots,t_n}(B_{t_1}\times\dots\times B_{t_n}) = \\
&= \mathsf{P}_Y(C(t_1,\dots,t_n;B_{t_1},\dots,B_{t_n})).
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Рассмотрим $\forall n\forall t_1,\dots,t_n\in T, \forall B\in\mathscr{B}_{t_1}\otimes\dots\otimes\mathscr{B}_{t_n}$,

$$C(t_1,\dots,t_n;B) = \{y\in S : (y(t_1),\dots,y(t_n))\in B\}.$$

Легко видеть, что $C(t_1,\dots,t_n;B)\in\mathscr{B}_T$. Значит,

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}^X_{t_1,\dots,t_n}(B) &= \mathsf{P}\left((X_{t_1},\dots,X_{t_n})\in B\right) = \\
&= \mathsf{P}(X\in C(t_1,\dots,t_n;B) = \\
&= \mathsf{P}_X(C(t_1,\dots,t_n;B)) = \\
&= \Big|\mathsf{P}_X = \mathsf{P}_Y\Big| = \\
&= \mathsf{P}_Y(C(t_1,\dots,t_n;B)) = \\
&= \mathsf{P}^Y_{t_1,\dots,t_n}(B),
\end{aligned}$$

т.е. конечномерные распределения X и Y совпадают.

□

Вопрос. *Существует ли процесс с заданными конечномерными распределениями?*

Пусть $\mathsf{P}_{t_1,\dots,t_n}, n\in\mathbb{N}, t_1,\dots,t_n\in T$ — конечномерное распределение $(X_t, t\in T)$.

Лемма 5.3 (условия симметрии и согласованности). *Пусть $X = (X_t, t\in T)$ — случайный процесс с конечномерными распределениями $\{\mathsf{P}_{t_1,\dots,t_n} : n\in\mathbb{N}, t_1,\dots,t_n\in T\}$. Тогда выполнены условия симметрии* (1) *и согласованности* (2)*:*

1. $\forall B_1,\dots,B_n, B_i\in\mathscr{B}_{t_i}$, $\forall\sigma$ *— перестановки множества* $\overline{1,n}$ *выполнено:*
$$\mathsf{P}_{t_1,\dots,t_n}(B_{t_1}\times\dots\times B_{t_n}) = \mathsf{P}_{t_{\sigma(1)}\dots t_{\sigma(n)}}(B_{t_{\sigma(1)}}\times\dots\times B_{t_{\sigma(n)}}).$$
2. $\forall B_1,\dots,B_n, B_i\in\mathscr{B}_{t_i}$
$$\mathsf{P}_{t_1,\dots,t_{n+1}}(B_{t_1}\times\dots\times B_{t_n}\times S_{t_{n+1}}) = \mathsf{P}_{t_1,\dots,t_n}(B_{t_1}\times\dots\times B_{t_n}).$$

Доказательство.

1. $\mathsf{P}_{t_1,\dots,t_n}(B_{t_1}\times\dots\times B_{t_n}) = \mathsf{P}(X_{t_1}\in B_{t_1},\dots,X_{t_n}\in B_{t_n})$ — перестановка событий в пересечении не меняет вероятности.
2. Событие $\{X_{t_{n+1}}\in S_{t_{n+1}}\} = \Omega$ тривиальное, поэтому оно ничего не добавляет в пересечение.

□

Замечание. *В наборах $(t_1,\dots,t_n)$, индексирующих меры $\mathsf{P}_{t_1,\dots,t_n}$, имеет смысл рассматривать только* не совпадающие *между собой точки $t_1,\dots,t_n$. Дело в том, что в противном случае* *можно было бы осуществить редукцию к более «короткому» вектору, состоящему из различных точек $t_k \in T$, например,*

$$\mathsf{P}_{t,t}(B' \times B'') = \mathsf{P}(X_t \in B', X_t \in B'') = \mathsf{P}(X_t \in B' \cap B'') = \mathsf{P}_t(B' \cap B'').$$

Пусть теперь X — действительный процесс, т.е. $(S_t, \mathscr{B}_t) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))\ \forall t \in T$.

Теорема 5.1 (Колмогорова о существовании случайного процесса, б/д)**.** *Пусть T — некоторое множество, $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t_1, \dots, t_n \in T$ задана вероятностная мера $\mathsf{P}_{t_1,\dots,t_n}$ на $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$, причем для системы $\{\mathsf{P}_{t_1,\dots,t_n}\}$ выполнены условия симметрии и согласованности. Тогда $\exists$ вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ и действительный случайный процесс $(X_t, t \in T)$ на нем такой, что $\{\mathsf{P}_{t_1,\dots,t_n}\}$ — это его конечномерные распределения.*

Идея: Вероятностная мера в $\mathbb{R}^n$ однозначно определяется своей характеристической функцией.

Теорема 5.2 (условия симметрии и согласованности для характеристических функций)**.** *Пусть T — некоторое множество, $\forall n\ \forall t_1, \dots, t_n \in T$ задана вероятностная мера $\mathsf{P}_{t_1,\dots,t_n}$ на $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ с х.ф. $\varphi_{t_1,\dots,t_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Тогда $\{\mathsf{P}_{t_1,\dots,t_n}, n \in \mathbb{N}, t_i \in T\}$ обладают условиями симметрии и согласованности $\Leftrightarrow$ выполнены:*

1. *$\forall$ перестановки σ : $\varphi_{t_1,\dots,t_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \varphi_{t_{\sigma(1)},\dots,t_{\sigma(n)}}(\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)})$,*
2. *$\varphi_{t_1,\dots,t_{n+1}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n, 0) = \varphi_{t_1,\dots,t_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.*

Следствие 5.1 (случай $T \subseteq \mathbb{R}$)**.** *Пусть $T \subset \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t_1 < \dots < t_n \in T$ задана вероятностная мера $\mathsf{P}_{t_1,\dots,t_n}$ с х.ф. $\varphi_{t_1,\dots,t_n}$ в $\mathbb{R}^n$.*

Тогда если $\forall n\ \forall t_1 < \dots < t_n \in T\ \forall m \in \overline{1, n}$:

$$\varphi_{t_1,\dots,t_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\Big|_{\lambda_m = 0} = \varphi_{t_1,\dots,t_{m-1},t_{m+1},\dots,t_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n),$$

то существует процесс $(X_t, t \in T)$ такой, что $\forall\ t_1, \dots, t_n \quad (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{d}{=} \mathsf{P}_{t_1,\dots,t_n}$.

Доказательство. Пусть $s_1, \dots, s_n \in T, s_i \neq s_j$. Тогда определим $\mathsf{P}_{s_1,\dots,s_n}$ следующим образом:

$$\mathsf{P}_{s_1,\dots,s_n}(B_1, \dots, B_n) = \mathsf{P}_{t_1,\dots,t_n}(B_{\sigma(1)}, \dots, B_{\sigma(n)}),$$

где $t_i = s_{\sigma(i)}$ такие, что $t_1 < \dots < t_n$.

Проверим, что такой набор мер удовлетворяет условиям симметрии и согласованности для х.ф.

Условие симметрии дано по построению (т.к. мера для любого набора $s_1, \dots, s_n \in T$ равна мере их перестановки в порядке возрастания). Проверим согласованность.

$$\begin{aligned}
\varphi_{s_1,\dots,s_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\Big|_{\lambda_n = 0} &= \Big|\text{Пусть } t_i = s_{\sigma(i)}, t_1 < \dots < t_n, \text{ пусть } t_m = s_{\sigma(n)}, \lambda_m = \lambda_{\sigma(n)}\Big| = \\
&= \varphi_{t_1,\dots,t_n}(\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)})\Big|_{\lambda_{\sigma(n)} = 0} = \\
&= \Big|\text{условие следствия}\Big| = \\
&= \varphi_{t_1,\dots,t_{m-1},t_{m+1},\dots,t_n}(\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(m-1)}, \lambda_{\sigma(m+1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)}) = \\
&= \Big|\text{обратная перестановка } \sigma^{-1}, \text{ по построению}\Big| = \\
&= \varphi_{s_1,\dots,s_{n-1}}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}).
\end{aligned}$$

Построение $\varphi_{s_1,\dots,s_n}$ и проверка условия согласованности проводится аналогично, если есть совпадающие $s_i = s_j$. По теореме Колмогорова искомый процесс существует. □

Замечание. *В обратную сторону все получается по теореме Колмогорова и условиям симметрии и согласованности для х.ф.*

6 Процессы с независимыми приращениями

6.1 Определение и критерий существования

Определение 6.1. Действительный процесс $(X_t, t \geqslant 0)$ называется *процессом с независимыми приращениями*, если $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall\, 0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n$ случайные величины $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ независимы в совокупности.

Замечание. *Процессы с независимыми приращениями и временем $T = \mathbb{N}$ — случайные блуждания.*

Теорема 6.1 (Критерий существования процессов с независимыми приращениями)**.**
Пусть $\forall\, 0 \leqslant s < t$ задано $Q_{s,t}$ — распределение вероятностей на $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ с характеристической функцией $\varphi_{s,t}$. Тогда процесс $(X_t, t \geqslant 0)$ с независимыми приращениями такой, что

$$X_t - X_s \stackrel{d}{=} Q_{s,t} \quad \forall\, 0 \leqslant s < t, \text{ и } X_0 \stackrel{d}{=} Q_0$$

существует $\Leftrightarrow\ \forall\, 0 \leqslant s < u < t$:

$$\varphi_{s,t}(\tau) = \varphi_{s,u}(\tau) \cdot \varphi_{u,t}(\tau).$$

При этом распределение вероятностей Q_0 величины X_0 может быть выбрано каким угодно.

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть $(X_t, t \geqslant 0)$ существует. Тогда $\forall\ s < u < t$

$$\varphi_{s,t}(\tau) = \varphi_{X_t - X_s}(\tau) = \varphi_{X_t - X_u + X_u - X_s}(\tau) = \Big| X_t - X_u \text{ и } X_u - X_s \text{ независимы} \Big| =$$
$$= \varphi_{X_t - X_u}(\tau) \cdot \varphi_{X_u - X_s}(\tau) = \varphi_{u,t}(\tau) \cdot \varphi_{s,u}(\tau).$$

($\Leftarrow$) 1. Предположим, что удалось построить вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ и $(X_t, t \geqslant 0)$ с указанными свойствами на нем. Посмотрим, как будет выглядеть характеристическая функция его конечномерных распределений.

Зафиксируем $0 < t_1 < \cdots < t_n$ и рассмотрим вектор $\xi = (X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \ldots, X_{t_1} - X_0, X_0)^T$.

Тогда в силу предположенной независимости приращений X_t (а, значит, и компонент ξ):

$$\varphi_\xi(\lambda_n, \ldots, \lambda_0) = \varphi_{X_{t_n} - X_{t_{n-1}}}(\lambda_n) \cdot \ldots \cdot \varphi_{X_{t_1} - X_0}(\lambda_1) \cdot \varphi_{X_0}(\lambda_0) =$$
$$= \varphi_{t_{n-1}, t_n}(\lambda_n) \cdot \ldots \cdot \varphi_{0, t_1}(\lambda_1) \cdot \varphi_0(\lambda_0),$$

где φ_0 — характеристическая фукция Q_0.

Теперь положим $\eta = (X_{t_n}, \ldots, X_0)^T, \lambda = (\lambda_n, \ldots, \lambda_0)^T$.

Тогда $\eta = A\xi$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Значит,

$$\varphi_\eta(\lambda_n, \ldots, \lambda_0) = \mathsf{E} e^{i\langle \eta, \lambda \rangle} = \mathsf{E} e^{i\langle A\xi, \lambda \rangle} =$$
$$= \mathsf{E} e^{i\langle \xi, A^T\lambda \rangle} = \varphi_\xi(A^T \lambda) =$$
$$= \varphi_{t_{n-1}, t_n}(\lambda_n) \cdot \varphi_{t_{n-2}, t_{n-1}}(\lambda_{n-1} + \lambda_n) \cdot \ldots \cdot \varphi_{0, t_1}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) \cdot \varphi_0(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n). \quad (*)$$

2. Итак, *предположив* существование искомого процесса X_t, мы выяснили, какие характеристические функции должны иметь его конечномерные распределения. Теперь «забудем», что процесс существует.

Зададим характеристическую функцию $\varphi_{t_n, \ldots, t_1, 0}(\lambda_n, \lambda_{n-1}, \ldots, \lambda_0)$ для $0 < t_1 < \cdots < t_n$ по формуле ($*$).

Определим $\varphi_{t_n, \ldots, t_1}(\lambda_n, \ldots, \lambda_1) = \varphi_{t_n, \ldots, t_1, 0}(\lambda_n, \ldots, \lambda_1, 0)$.

Покажем, что набор характеристических функций $\{\varphi_{t_n,\dots,t_1}(\lambda_n,\dots,\lambda_1):$
$0 \leqslant t_1 < \dots < t_n\}$ удовлетворяет следствию из теоремы Колмогорова. Для этого достаточно показать, что $\forall n$:

$$\varphi_{t_n,\dots,t_1}(\lambda_n,\dots,\lambda_1)\Big|_{\lambda_m=0} = \varphi_{t_n,\dots t_{m+1},t_{m-1},\dots,t_1}(\lambda_n,\dots,\lambda_{m+1},\lambda_{m-1},\dots,\lambda_1).$$

При $m=1$ и $t_1=0$ всё получается по построению.

Пусть $t_m > 0$. Тогда

$$\varphi_{t_n,\dots,t_1,0}(\lambda_n,\dots,\lambda_1,\lambda_0)\Big|_{\lambda_m=0} = \Big|\text{формула } (*)\Big| =$$
$$= \varphi_{t_{n-1},t_n}(\lambda_n)\cdot\ldots\cdot\varphi_{t_m,t_{m+1}}(\lambda_{m+1}+\dots+\lambda_n)\cdot$$
$$\cdot\varphi_{t_{m-1},t_m}(\underbrace{\lambda_m}_{=0}+\lambda_{m+1}+\dots+\lambda_n)\cdot\ldots\cdot\varphi_0(\lambda_0+\dots+\lambda_{m-1}+\lambda_{m+1}+\dots+\lambda_n) =$$
$$= \Big|\lambda_m+\lambda_{m+1}+\dots+\lambda_n = \lambda_{m+1}+\dots+\lambda_n,$$
$$\text{значит, по условию теоремы } \varphi_{t_{m-1},t_m}(\tau)\cdot\varphi_{t_m,t_{m+1}}(\tau) = \varphi_{t_{m-1},t_{m+1}}(\tau)\Big| =$$
$$= \varphi_{t_{n-1},t_n}(\lambda_n)\cdot\ldots\cdot\varphi_{t_{m-1},t_{m+1}}(\lambda_{m+1}+\dots+\lambda_n)\cdot\ldots\cdot\varphi_0(\lambda_0+\dots+\lambda_{m-1}+\lambda_{m+1}+\dots+\lambda_n) =$$
$$= \Big|\text{формула } (*)\Big| =$$
$$= \varphi_{t_n,\dots t_{m+1},t_{m-1},\dots,t_1,0}(\lambda_n,\dots,\lambda_{m+1},\lambda_{m-1},\dots,\lambda_1,\lambda_0).$$

Таким образом, доказано условие согласованности. Получаем, что по следствию из теоремы Колмогорова существует случайный процесс $(X_t, t \geqslant 0)$ такой, что $\varphi_{t_n,\dots,t_1}$ — характеристическая функция $(X_{t_n},\dots,X_{t_1})$.

Из построения по формуле $(*)$ следует, что X_t будет иметь независимые приращения и $\forall 0 \leqslant s < t$

$$X_t - X_s \overset{d}{=} Q_{s,t},\ X_0 \overset{d}{=} Q_0.$$

□

6.2 Пуассоновский процесс

Определение 6.2. Случайный процесс $(N_t, t \geqslant 0)$ называется *пуассоновским процессом интенсовности* $\lambda > 0$, если

1. $N_0 = 0$ п.н.;
2. N_t имеет независимые приращения;
3. $N_t - N_s \sim \mathrm{Pois}(\lambda(t-s)),\ \forall t > s \geqslant 0$.

Утверждение 6.1. *Пуассоновский процесс существует.*

Доказательство. Рассмотрим $\varphi_{s,t}$ — х.ф. $\mathrm{Pois}(\lambda(t-s))$. Тогда

$$\varphi_{s,t}(\tau) = \Big|\text{упр.}\Big| = e^{\lambda(t-s)(e^{i\tau}-1)}$$

Отсюда видно, что $\forall s < u < t$:

$$\varphi_{s,u}(\tau)\cdot\varphi_{u,t}(\tau) = \varphi_{s,t}(\tau).$$

Значит, по критерию существования процессов с независимыми приращениями пуассоновский процесс существует. □

Свойства траекторий

Наблюдения:

1. Траектории целочисленные: $N_t \sim \mathrm{Pois}(\lambda t) \Rightarrow N_t \in \mathbb{Z}_+,\ t \geqslant 0$.
2. Траектории неубывающие: $N_t - N_s \geqslant 0,\ t > s$.

Вопрос.

1. *Каков возможный размер скачков?*
2. *Каково распределение моментов скачков?*

На эти вопросы отвечает следующая теорема:

Теорема 6.2 (явная конструкция пуассоновского процесса)**.** *Пусть* $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— независимые одинаково распределенные,* $\xi_i \sim \exp(\lambda), \lambda > 0,\ S_0 = 0, S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$.

Тогда процесс восстановления:

$$X_t = \sup\{n : S_n \leqslant t\}$$

является пуассоновским процессом интенсивности λ.

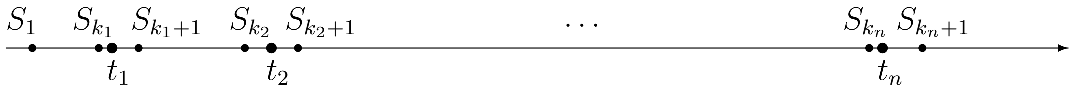
Доказательство. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и $0 < t_1 < \dots < t_n$.
Рассмотрим случайный вектор $(S_1, \dots, S_m)$. Он имеет плотность:

$$\mathrm{p}_{S_1,\dots,S_m}(x_1, \dots, x_m) = \mathrm{p}_{\xi_1,\dots,\xi_m}(x_1, x_2 - x_1, \dots, x_m - x_{m-1}) = \Big|\xi_i \sim \exp(\lambda)\Big| =$$
$$= \prod_{k=1}^{m} \lambda e^{-\lambda(x_k - x_{k-1})} \mathrm{I}\{x_k > x_{k-1}\} = \lambda^m e^{-\lambda x_m} \mathrm{I}\{0 < x_1 < \dots < x_m\}.$$

Возьмем $k_n \geqslant \dots \geqslant k_1, k_i \in \mathbb{Z}_+$. Рассмотрим

$$\mathsf{P}(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = k_n - k_{n-1}, \dots, X_{t_2} - X_{t_1} = k_2 - k_1, X_{t_1} = k_1).$$

Что такое $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$? Это количество скачков (чисел S_k), которые совершает процесс на отрезке времени от t_{n-1} до t_n:



Считаем:

$$\mathsf{P}\Big(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = k_n - k_{n-1}, \dots, X_{t_2} - X_{t_1} = k_2 - k_1, X_{t_1} = k_1\Big) =$$
$$= \mathsf{P}\Big(\{S_1, \dots, S_{k_1}\} \in (0, t_1], \{S_{k_1+1}, \dots, S_{k_2}\} \in (t_1, t_2], \dots, \{S_{k_{n-1}+1}, \dots, S_{k_n}\} \in (t_{n-1}, t_n], S_{k_n+1} > t_n\Big) =$$
$$= \int\limits_{\substack{(x_1,\dots,x_{k_n+1}) \in \mathbb{R}_+^{k_n+1} \\ x_1,\dots,x_{k_1} \in (0,t_1] \\ \dots \\ x_{k_{n-1}+1},\dots,x_{k_n} \in (t_{n-1},t_n] \\ x_{k_n+1} > t_n}} \cdots \int \mathrm{p}_{S_1,\dots,S_{k_n+1}}(x_1, \dots, x_{k_n+1}) dx_1 \dots dx_{k_n+1} =$$
$$= \Big|\text{Из найденного выражения для плотности (считаем } t_0 = k_0 = 0)\Big| =$$
$$= \lambda^{k_n+1} \underbrace{\int\limits_{t_n}^{+\infty} e^{-\lambda x_{k_n+1}} dx_{k_n+1}}_{=\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t_n}} \prod_{i=1}^{n} \underbrace{\int\limits_{\substack{x_{k_{i-1}+1},\dots,x_{k_i} \in (t_{i-1},t_i] \\ x_{k_{i-1}+1} < \dots < x_{k_i}}} \cdots \int dx_{k_{i-1}+1} \dots dx_{k_i}}_{=\frac{(t_i - t_{i-1})^{(k_i - k_{i-1})}}{(k_i - k_{i-1})!}} =$$
$$= \lambda^{k_n} e^{-\lambda t_n} \prod_{i=1}^{n} \frac{(t_i - t_{i-1})^{(k_i - k_{i-1})}}{(k_i - k_{i-1})!} =$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{(\lambda(t_i - t_{i-1}))^{(k_i - k_{i-1})}}{(k_i - k_{i-1})!} e^{-\lambda(t_i - t_{i-1})}.$$

Отсюда следует, что $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_1}$ независимы, причем $X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \sim \mathrm{Pois}(\lambda(t_i - t_{i-1}))$. □

Следствие 6.1 (свойства траекторий N_t)**.**

1. *С вероятностью 1 все скачки* N_t *имеют размер ровно 1;*

2. *Пусть Y_n — момент n-ого скачка N_t.*
Тогда $Y_n \sim \Gamma(\lambda, n)$, с плотностью — $\frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \mathrm{I}\{x > 0\}$;

3. *$Y_n - Y_{n-1}, n \in \mathbb{N}$ — независимые, $\sim \exp(\lambda)$ случайные величины.*

Доказательство. Пусть X_t — явная конструкция из теоремы.

(1) P(у N_t есть скачок размера $\geqslant 2$) $= \mathsf{P}$(у X_t есть скачок размера $\geqslant 2$) $= \mathsf{P}(\exists n : S_n = S_{n+1}) = \mathsf{P}(\exists n : \xi_n = 0) = 0$, т.к. все ξ_n имеют абсолютно непрерывное распределение.

(2) и (3) выполнены для X_t (явной конструкции) по построению $\Rightarrow$ верны и для N_t (пуассоновского процесса с тем же параметром λ).

□

7 Винеровский процесс

Изучим подробнее другого представителя процессов с независимыми приращениями.

7.1 Гауссовские случайные процессы

Определение. Случайный вектор $\xi = \xi_1, \dots, \xi_n$ называется *гауссовским* (или нормальным), если его х.ф. имеет вид

$$\varphi_\xi(t) = e^{i\langle a,t\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma t,t\rangle},$$

где $a \in \mathbb{R}^n$, а $\Sigma \in Mat(n \times n)$ — симметрическая и неотрицательно определенная. В этом случае пишут $\xi \sim \mathcal{N}(a, \Sigma)$.

Теорема (три эквивалентных определения)**.**

1. *Вектор $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ гауссовский;*
2. *$\xi = A\eta + b$, где $A \in Mat(n \times m)$, $b \in \mathbb{R}^m$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$, $\eta_i \sim \mathcal{N}(0,1)$, независимые;*
3. *$\forall \tau \in \mathbb{R}^n$случайная величина $\langle \tau, \xi\rangle$ имеет одномерное нормальное распределение.*

Свойства гауссовских векторов

1. Смысл параметров: если $\xi \sim \mathcal{N}(a, \Sigma)$, то $a = \mathsf{E}\xi$, $\Sigma = \mathsf{D}\,\xi$ — матрица ковариаций.
2. Если ξ гауссовский, то $A\xi$ гауссовский для всех матриц соответствуещего размера (т.е. линейное преобразование гауссовского вектора также является гауссовским вектором).
3. Если $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \sim \mathcal{N}(a, \Sigma)$, то $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы в совокупности $\Leftrightarrow$ Σ диагональна $\Leftrightarrow$ $\xi_1, \dots, \xi_n$ некоррелированы.

Определение 7.1. Действительный случайный процесс $(X_t, t \in T)$ называется *гауссовским*, если все его конечномерные распределения гауссовские, т.е.

$$\forall n\ \forall t_1, \dots, t_n \in T \text{ случайный вектор } (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \text{ — гауссовский.}$$

Покажем, как можно построить гауссовский процесс. Для этого нам потребуются следующие определения.

Определение 7.2. Пусть $(X_t, t \in T)$ — действительный случайный процесс. Он называется *L^2-процессом*, если $\forall t \in T$ $\mathsf{E}|X_t^2| < +\infty$.

В этом случае:

- Функция $a(t) = \mathsf{E}X_t, t \in T$ называется *функцией среднего* процесса X_t.
- Функция $R(s,t) = \mathrm{cov}(X_s, X_t)$ называется *ковариационной функцией* процесса X_t.

- Функция $K(s,t) = \mathsf{E}X_sX_t$ называется *корреляционной функцией* процесса X_t.

Замечание. *Так как распределение гауссовского вектора однозначно определяется его матожиданием и матрицей ковариаций, то конечномерные распределения гауссовского процесса определяются функцией среднего и ковариационной функцией.*

Определение 7.3. Функция $f(x,y), x, y \in T$ называется *неотрицательно определенной* на $T \times T$, если $\forall n\ \forall t_1, \dots, t_n \in T\ \forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}$ выполнено:

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(t_i, t_j) z_i z_j \geqslant 0$$

Заметим, что:

Утверждение 7.1. *Ковариационная и корреляционная функции любого случайного процесса являются неотрицательно определенными и симметричными.*

Доказательство.

1. Рассмотрим $K(s,t) = \mathsf{E}X_sX_t$.
   Пусть фиксированы $n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in T, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}$. Тогда
   $$\sum_{i,j=1}^{n} K(t_i,t_j) z_i z_j = \sum_{i,j=1}^{n} \mathsf{E}X_{t_i}X_{t_j} z_i z_j = \mathsf{E}\sum_{i,j=1}^{n} (z_iX_{t_i})(z_jX_{t_j}) = \mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} z_iX_{t_i}\right)^2 \geqslant 0.$$
   Значит, $K(s,t)$ — неотрицательно определена.
2. Пусть $R(s,t) = \operatorname{cov}(X_s, X_t) = \mathsf{E}(X_s - \mathsf{E}X_s)(X_t - \mathsf{E}X_t)$.
   Тогда $R(s,t)$ — корреляционная функция для процесса $Y_t = X_t - \mathsf{E}X_t$. Значит, $R(s,t)$ тоже неотрицательно определена.
   Их симметричность очевидна.

□

Пафос в том, что этих условий на ковариационную функцию $R(s,t)$ достаточно для получения конкретного гауссовского процесса с нужными нам свойствами:

Теорема 7.1 (о существовании гауссовских процессов)**.**
Пусть T — некоторое множество, $a(t)$ — функция на T и $R(s,t)$ — симметричная и неотрицательно определенная функция на $T \times T$.

Тогда существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ и гауссовский процесс $(X_t, t \in T)$ на нем такой, что $\forall s,t \in T$

$$a(t) = \mathsf{E}X_t \text{ и } R(s,t) = \operatorname{cov}(X_s, X_t).$$

Доказательство. Для $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall t_1, \dots, t_n \in T$ введем

$$a_{t_1,\dots,t_n} = \Big(a(t_1), \dots, a(t_n)\Big) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\Sigma_{t_1,\dots,t_n} = \Big\|R(t_i,t_j)\Big\|_{i,j=\overline{1,n}} \in Mat(n \times n).$$

Тогда $\Sigma_{t_1,\dots,t_n}$ — симметричная и неотрицательно определенная матрица.

Рассмотрим характеристическую функцию $\mathcal{N}(a_{t_1,\dots,t_n}, \Sigma_{t_1,\dots,t_n})$:

$$\varphi_{t_1,\dots,t_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = e^{i\langle a_{t_1,\dots,t_n}, \vec{\lambda}\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma_{t_1,\dots,t_n}\vec{\lambda}, \vec{\lambda}\rangle}.$$

Покажем, что набор $\{\varphi_{t_1,\dots,t_n}\}$ удовлетворяет условиям симметрии и согласованности.

Симметрия очевидна, т.к.

$$\langle a_{t_1,\dots,t_n}, \vec{\lambda}\rangle = \sum_{i=1}^{n} a(t_i)\lambda_i,$$

$$\langle \Sigma_{t_1,\dots,t_n}\vec{\lambda}, \vec{\lambda}\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} R(t_i,t_j)\lambda_i\lambda_j.$$

не меняются при перестановке индексов.

Если мы полагаем $\lambda_n = 0$, то

$$\langle a_{t_1,\dots,t_n}, \vec{\lambda}\rangle\Big|_{\lambda_n=0} = \langle a_{t_1,\dots,t_{n-1}}, (\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1})\rangle,$$

$$\langle \Sigma_{t_1,\dots,t_n}\vec{\lambda}, \vec{\lambda}\rangle\Big|_{\lambda_n=0} = \langle \Sigma_{t_1,\dots,t_{n-1}}(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}), (\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1})\rangle,$$

т.е. $\varphi_{t_1,\dots,t_n}(\vec{\lambda})\Big|_{\lambda_n=0} = \varphi_{t_1,\dots,t_{n-1}}(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1})$.

Доказано условие согласованности.

По теореме Колмогорова $\exists(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ и случайный процесс $(X_t, t\in T)$ на нем такой, что $\varphi_{t_1,\dots,t_n}$ — характеристическая функция $(X_{t_1},\dots,X_{t_n})$.

Тогда X_t — гауссовский процесс, и $a(t) = \mathsf{E}X_t$ — функция среднего X_t, а $R(s,t) = \operatorname{cov}(X_s, X_t)$. □

7.2 Процесс броуновского движения (винеровский процесс)

Определение 7.4. Случайный процесс $(W_t, t\geqslant 0)$ называется *винеровским* (процессом броуновского движения), если

1. $W_0 = 0$ п.н.;
2. W_t имеет независимые приращения;
3. $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s), \quad \forall t\geqslant s\geqslant 0$.

Утверждение 7.2. *Винеровский процесс существует.*

Доказательство. Пусть $\varphi_{s,t}(\tau)$ — х.ф. $\mathcal{N}(0,t-s), t\geqslant s$. Тогда

$$\varphi_{s,t}(\tau) = e^{-\frac{1}{2}\tau^2(t-s)} = e^{-\frac{1}{2}\tau^2(t-u+u-s)}.$$

Значит, $\forall s<u<t$:

$$\varphi_{s,t}(\tau) = \varphi_{s,u}(\tau)\cdot\varphi_{u,t}(\tau).$$

По критерию существования процессов с независимыми приращениями винеровский процесс существует. □

Теорема 7.2 (эквивалентное определение W_t)**.**
Процесс $(W_t, t\geqslant 0)$ является винеровским $\Leftrightarrow$

1. *W_t гауссовский;*
2. *$\mathsf{E}W_t = 0\ \forall t\geqslant 0$;*
3. *$\operatorname{cov}(W_s, W_t) = \min(s,t)$.*

Доказательство.

(⇒) Пусть W_t — винеровский процесс. Заметим, что $W_t\sim\mathcal{N}(0,t) \Rightarrow \mathsf{E}W_t = 0$. Посчитаем ковариационную функцию. Пусть $t\geqslant s$:

$$\operatorname{cov}(W_s,W_t) = \operatorname{cov}(W_s, W_t - W_s + W_s) = \Big|\text{билинейность ковариации}\Big| =$$
$$= \operatorname{cov}(W_t - W_s, W_s) + \operatorname{cov}(W_s,W_s) = \Big|W_t - W_s \text{ и } W_s \text{ независимы}\Big| = 0 + \mathsf{D}\,W_s = s.$$

Рассуждая аналогично, получаем, что в общем случае $\operatorname{cov}(W_t,W_s) = \min(t,s)$.

Пусть $0\leqslant t_1\leqslant\dots\leqslant t_n$. Обозначим $\xi = (W_{t_1},\dots,W_{t_n})$. Вектор $\eta = (W_{t_1}, W_{t_2}-W_{t_1},\dots,W_{t_n}-W_{t_{n-1}})$ имеет (по определению винеровского процесса) независимые нормальные компоненты $\Rightarrow \eta$ — гауссовский вектор. Очевидно, $\xi = A\eta$, где $A = \begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\1&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$,

значит, ξ также является гауссовским.

$\Rightarrow$ (т.к. произвольные конечные приращения процесса гауссовские) W_t — гауссовский процесс.

($\Leftarrow$) 1. Почему такой процесс существует? По теореме о существовании гауссовских процессов достаточно проверить, что $\min(s,t)$ — неотрицательно определенная на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ функция.

Для этого можно заметить, что $\min(s,t)$ — это ковариационная функция для пуассоновского процесса интенсивности 1. Значит, она неотрицательно определена по утверждению 7.1.

С другой стороны, можно попробовать доказать неотрицательную определенность в лоб:

Пусть $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+,\ z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\sum_{i,j=1}^{n} \min(t_i, t_j) z_i z_j =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int\limits_0^\infty \mathrm{I}_{[0,t_i]}(x) \mathrm{I}_{[0,t_j]}(x) dx \right) z_i z_j =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(\sum_{i,j=1}^{n} (z_i \mathrm{I}_{[0,t_i]}(x))(z_j \mathrm{I}_{[0,t_j]}(x)) \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(\sum_{i=1}^{n} z_i \mathrm{I}_{[0,t_i]}(x) \right)^2 dx \geqslant 0.$$

2. Таким образом, пусть у нас есть гауссовский процесс W_t с нулевой функцией среднего и ковариационной функцией $\mathrm{cov}(W_s, W_t) = \min(s,t)$. Покажем, что он удовлетворяет определению винеровского процесса.

(1) Заметим, что $\mathsf{E} W_t = 0, \mathsf{D}\, W_t = \min(t,t) = t \Rightarrow \mathsf{D}\, W_0 = 0, \mathsf{E} W_0 = 0$
$\Rightarrow W_0 = 0$ п.н.

(2) Пусть $0 \leqslant t_1 \leqslant \dots \leqslant t_n$ фиксированы. Рассмотрим

$$\xi = (W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$$
$$\eta = (W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$$

По условию η — гауссовский вектор. Но ξ тоже гауссовский как линейное преобразование гауссовского вектора. Значит, для независимости компонент ξ достаточно проверить, что они некоррелированны.

Пусть $k < j$. Тогда

$$\mathrm{cov}(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}, W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) =$$
$$= \mathrm{cov}(W_{t_k}, W_{t_j}) - \mathrm{cov}(W_{t_{k-1}}, W_{t_j}) - \mathrm{cov}(W_{t_k}, W_{t_{j-1}}) + \mathrm{cov}(W_{t_{k-1}}, W_{t_{j-1}}) =$$
$$= t_k - t_k - t_{k-1} + t_{k-1} = 0.$$

$\Rightarrow W_t$ имеет независимые приращения.

(3) Пусть $t > s$. Тогда $W_t - W_s$ — нормальная случайная величина. У неё $\mathsf{E}(W_t - W_s) = = \mathsf{E} W_t - \mathsf{E} W_s = 0$.

$$\Rightarrow\ \mathsf{D}(W_t - W_s) = \left| \text{т.к. матожидание равно нулю} \right| = \mathrm{cov}(W_t - W_s, W_t - W_s) =$$
$$= \mathrm{cov}(W_t, W_t) + \mathrm{cov}(W_s, W_s) - 2\mathrm{cov}(W_t, W_s) =$$
$$= \min(t,t) + \min(s,s) - 2\min(t,s) = |t > s| = t - 2s + s = t - s.$$

Значит, $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.

Значит, W_t — винеровский.

□

7.3 Непрерывность траекторий W_t

Определение 7.5. Процесс $(Y_t, t \in T)$ называется *модификацией* процесса $(X_t, t \in T)$, если
$$\forall t \in T \quad \mathsf{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

В этом случае говорят, что процесс X_t эквивалентен процессу Y_t.

Теорема 7.3 (Колмогорова о непрерывной модификации, б/д)**.**
Пусть $(X_t, t \in [a, b])$ — случайный процесс.
Если $\exists\, c, \alpha, \varepsilon > 0$ такие, что $\forall t, s \in [a, b]$:
$$\mathsf{E}|X_t - X_s|^\alpha \leqslant c|t - s|^{1+\varepsilon},$$
то у X_t существует модификация Y_t, все траектории которой непрерывны.

Следствие 7.1. *У $(W_t, t \geqslant 0)$ существует непрерывная модификация.*

Доказательство. Заметим, что раз $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s), t \geqslant s$, то
$$\mathsf{E}|W_t - W_s|^4 = \left|\tau := \frac{W_t - W_s}{\sqrt{t - s}} \sim \mathcal{N}(0, 1)\right| = \mathsf{E}\tau^4 (t - s)^2 = 3(|t - s|)^2.$$

$\Rightarrow$ по теореме Колмогорова у W_t существует непрерывная модификация на любом конечном отрезке. Построим тогда непрерывную модификацию на всей числовой прямой.

Пусть $W_t^{(n)}$ — непрерывная модификация W_t на отрезке $[n, n + 1]$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Рассмотрим процесс
$$X_t(\omega) = \{W_t^{(n)}(\omega), t \in [n, n + 1)\}.$$

Разрывы траекторий у X_t возможны только в целых точках.

Но $W_{n+1}^{(n)}$ и $W_{n+1}^{(n+1)}$ — модификации W_{n+1}, значит,
$$\mathsf{P}(W_{n+1}^{(n)} = W_{n+1}) = \mathsf{P}(W_{n+1}^{(n+1)} = W_{n+1}) = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathsf{P}(W_{n+1}^{(n)} = W_{n+1}^{(n+1)}) = 1.$$

Значит, P(траектория X_t разрывна) $= 0$, т.е. даже если обрезать разрывные траектории, процесс останется модификацией W_t.

Обозначим новый процесс за
$$\tilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} X_t(\omega), & \text{если } \forall n\; W_{n+1}^{(n)}(\omega) = W_{n+1}^{(n+1)}(\omega), \\ 0, & \text{если } \exists n\; W_{n+1}^{(n)}(\omega) \neq W_{n+1}^{(n+1)}(\omega). \end{cases}$$

Такой процесс имеет все траектории непрерывными и является модификацией W_t. □

Замечание. *Условие $\varepsilon > 0$ в теореме Колмогорова существенно.*

Доказательство. Пусть $(N_t, t \geqslant 0)$ — пуассоновский процесс. Тогда
$$\mathsf{E}|N_t - N_s| = \lambda|t - s|.$$

Значит, N_t удовлетворяет условию теоремы Колмогорова с $\varepsilon = 0$. Но траектории N_t разрывны почти наверное на всем $\mathbb{R}_+$ и разрывны с положительной вероятностью на любом конечном отрезке. □

Замечание. *Если X_t — гауссовский процесс, $\mathsf{E}X_t = 0$, то в теореме Колмогорова достаточно условия*
$$\mathsf{E}|X_t - X_s|^\alpha \leqslant c|t - s|^\varepsilon.$$

Теорема 7.4 (Пэли, Зигмунд, Винер, б/д)**.** *С вероятностью 1 траектории винеровского процесса не дифференцируемы ни в одной точке $\mathbb{R}_+$.*

7.4 Закон повторного логарифма для W_t

Теорема 7.5 (Закон повторного логарифма для W_t)**.**

$$\mathsf{P}\left(\limsup_{t\to+\infty}\frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}}=1\right)=1,$$

где $\limsup\limits_{t\to+\infty} f(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\sup\limits_{s\geqslant t} f(s)\right)$.

Следствие 7.2.

$$\mathsf{P}\left(\liminf_{t\to+\infty}\frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}}=-1\right)=1.$$

Доказательство. Рассмотрим $X_t=-W_t$ — тоже винеровский процесс. Но
$\liminf\limits_{t\to+\infty}\frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}}=\liminf\limits_{t\to+\infty}\frac{-X_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}}=-\limsup\limits_{t\to+\infty}\frac{X_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}}=\Big|\text{ЗПЛ}\Big|=-1$ п.н. □

ЗПЛ означает, что с вероятностью 1, начиная с некоторого момента $t_0=t_0(\varepsilon,\omega)$ траектория W_t находится внутри области, ограниченной кривыми $\pm(1+\varepsilon)\sqrt{2t\ln\ln t}$. В то же время $\forall\varepsilon>0$ траектория бесконечно много раз в обе стороны выходит из области, ограниченной кривыми $\pm(1-\varepsilon)\sqrt{2t\ln\ln t}$, после момента времени T.

Следствие 7.3 (локальный ЗПЛ)**.**

$$\mathsf{P}\left(\limsup_{t\to+0}\frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}}=1\right)=1$$

и

$$\mathsf{P}\left(\liminf_{t\to+0}\frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}}=-1\right)=1,$$

где

$$\limsup_{t\to+0} f(t)=\lim_{t\to+0}\sup_{s\leqslant t} f(s).$$

Доказательство. Рассмотрим процесс $B_t=t\cdot W_{\frac{1}{t}}\mathrm{I}\{t>0\}$. Покажем, что B_t — винеровский.

1. $\forall t_1,\dots,t_n\geqslant 0$ вектор $(B_{t_1},\dots,B_{t_n})$ является линейным преобразованием гауссовского вектора $\left(W_{\frac{1}{t_1}},\dots,W_{\frac{1}{t_n}}\right)$. Значит, $(B_{t_1},\dots,B_{t_n})$ — гауссовский вектор. Тогда B_t — гауссовский процесс.
2. $\mathsf{E}B_t=0\ \forall t\geqslant 0$.
3. $\mathrm{cov}(B_t,B_s)=\mathrm{cov}(tW_{\frac{1}{t}},sW_{\frac{1}{s}})=ts\min(\frac{1}{t},\frac{1}{s})=\frac{ts}{\max(t,s)}=\min(t,s)$.

Значит, по теореме об эквивалентном определении B_t — винеровский процесс. Тогда

$$\limsup_{t\to+0}\frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}}=\left|s=\frac{1}{t}\right|=\limsup_{s\to+\infty}\frac{W_{\frac{1}{s}}}{\sqrt{2\frac{1}{s}\ln\ln s}}=$$

$$=\limsup_{s\to+\infty}\frac{sW_{\frac{1}{s}}}{\sqrt{2s\ln\ln s}}=\limsup_{s\to+\infty}\frac{B_s}{\sqrt{2s\ln\ln s}}=1 \text{ п.н. по ЗПЛ.}$$

Заменой W_t на $-W_t$ получаем, что

$$\mathsf{P}\left(\liminf_{t\to+0}\frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}}=-1\right)=1.$$ □

7.5 Марковские моменты

Определение 7.6. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство. Множество σ-алгебр $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t, t \in T)$ называется *фильтрацией*, (или *потоком σ-алгебр*) на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, если

$$\forall s < t, \ s, t \in T: \quad \mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}.$$

Определение 7.7. Случайный процесс $(X_t, t \in T)$ называется *согласованным* с фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t, t \in T)$, если $\forall t \in T$ X_t является $\mathscr{F}_t$-измеримым, то есть

$$\sigma(X_t) = \mathscr{F}_{X_t} \subset \mathscr{F}_t$$

> Напоминание: Пусть ξ — случайная величина. Тогда
> $$\mathscr{F}_\xi = \left\{\xi^{-1}(B) = \{\xi \in B\} : B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\right\}$$
> — *σ-алгебра, порожденная ξ.*

Определение 7.8. Пусть $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathscr{A}\}$ — набор случайных величин. Тогда σ-алгеброй, *порожденной* этим набором, называется минимальная σ-алгебра, содержащая все σ-алгебры $\mathscr{F}_{\xi_\alpha}$, т.е.

$$\tilde{\mathscr{F}} = \sigma(\xi_\alpha, \alpha \in \mathscr{A}) := \sigma\left(\bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} \mathscr{F}_{\xi_\alpha}\right).$$

Определение 7.9. *Естественной фильтрацией* процесса $(X_t, t \in T), T \subset \mathbb{R}$, называется $\mathbb{F}^X = (\mathscr{F}_t^X, t \in T)$, где

$$\mathscr{F}_t^X = \sigma(X_s, \ s \leqslant t, s \in T).$$

Наблюдение. Любой процесс согласован со своей естественной фильтрацией.

Определение 7.10. Отображение $\tau : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$ называется *марковским моментом* относительно фильтрации $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t, t \in T)$ на $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, если $\forall t \in T$ выполнено

$$\{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t.$$

Если, к тому же, выполнено $P(\tau < +\infty) = 1$, то τ называется *моментом остановки* относительно $\mathbb{F}$.

Пример 1. $(X_n, n \in \mathbb{N})$ — действительный случайный процесс. Тогда $\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$

$$\tau_B = \min\{n : X_n \in B\}$$

является марковским моментом относительно $\mathbb{F}^X$.

Доказательство.

$$\{\tau_B \leqslant n\} = \bigcup_{k=1}^{n} \underbrace{\{X_k \in B\}}_{\in \mathscr{F}_k^X \subset \mathscr{F}_n^X} \in \mathscr{F}_n^X$$

□

Неформальный смысл: Пусть τ — случайный момент наступления некоторого события в процессе $(X_t, t \in T)$.

Тогда τ — марковский момент, если для $\forall \tilde{t} \in T$ можно однозначно сказать, наступило уже τ к моменту времени $\tilde{t}$ или еще нет (то есть $\tau \leqslant \tilde{t}$ или $\tau > \tilde{t}$?), зная лишь значения процесса X_t до момента времени $\tilde{t}$ включительно.

Замечание. *Отсюда видно, что Пример 1 легко испортить:*

$$\tau_B = \min\{n : X_{n+1} \in B\}$$

не марковский момент (даже зная, что будет в момент времени $n+1$, сказать, что происходит в момент n ($X_n \in B$ или $X_n \notin B$), однозначно не получится).

Замечание. *Стоит отметить, что*

- *($T = [0, +\infty]$) Если τ — марковский момент относительно фильтрации $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t, t \in T)$, то для любого $t \geqslant 0$*
$$\{\tau = t\} = \{\tau \leqslant t\} \setminus \{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t,$$
поскольку для $t > 0$ имеем $\{\tau < t\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{\tau \leqslant t - k^{-1}\} \in \bigcup\limits_{k \geqslant 1/t} \mathscr{F}_{t-k^{-1}} \subset \mathscr{F}_t$. ($\{\tau \leqslant t - k^{-1}\} = \varnothing$, если $t < k^{-1}$).

- *($T = \mathbb{N}$) Когда $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_n, n \in \mathbb{N})$, определение марковского момента τ равносильно тому, что*
$$\{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Определение 7.11. Пусть τ — марковский момент относительно $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t, t \in T)$. Тогда
$$\mathscr{F}_\tau := \{A \in \mathscr{F} : \forall t \in T \quad \{\tau \leqslant t\} \cap A \in \mathscr{F}_t\}.$$

Наблюдение.

1. $\mathscr{F}_\tau$ — σ-алгебра, $\mathscr{F}_\tau \subset \mathscr{F}$.
2. τ — измерима относительно $\mathscr{F}_\tau$.
3. Если $\tau = t = const$, то $\mathscr{F}_\tau = \mathscr{F}_t$.

7.6 Строго марковское свойство винеровского процесса и принцип отражения

Теорема 7.6 (Марковское свойство W_t)**.** *Пусть $(W_t, t \geqslant 0)$ — винеровский процесс. Тогда $\forall a > 0$ процесс*
$$X_t = W_{t+a} - W_a$$
является винеровским и не зависит от $\mathscr{F}_a^W$.

Доказательство. Упражнение. □

Хотим большего.

Вопрос. *На какую случайную величину можно заменить a?*

Теорема 7.7 (Строго марковское свойство W_t)**.** *Пусть $(W_t, t \geqslant 0)$ — винеровский процесс, τ — момент остановки относительно $\mathbb{F}^W$. Тогда*
$$X_t = W_{t+\tau} - W_\tau$$
является винеровским процессом и не зависит от $\mathscr{F}_\tau$

Утверждение 7.3.

1. *Пусть ξ и η — случайные векторы из $\mathbb{R}^m$.*
   Если $\forall f$ — ограниченной непрерывной, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, выполнено
$$\mathsf{E} f(\xi) = \mathsf{E} f(\eta),$$
   то $\xi \stackrel{d}{=} \eta$.
2. *Пусть ξ — случайный вектор, A — событие. Если $\forall f$ — ограниченной, непрерывной:*
$$\mathsf{E} f(\xi) \mathrm{I_A} = \mathsf{E} f(\xi)\, \mathsf{P}(A),$$
   то ξ и A независимы.

Доказательство.

1. По определению характеристической функции: $\varphi_\xi(\lambda) = \mathsf{E} e^{i\langle \xi, \lambda \rangle} = \mathsf{E} \cos\langle \xi, \lambda \rangle + i \mathsf{E} \sin\langle \xi, \lambda \rangle$, поэтому, т.к.
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^m \quad \begin{aligned} \mathsf{E} \cos\langle \xi, \lambda \rangle &= \mathsf{E} \cos\langle \eta, \lambda \rangle, \\ \mathsf{E} \sin\langle \xi, \lambda \rangle &= \mathsf{E} \sin\langle \eta, \lambda \rangle. \end{aligned}$$
   получаем, что х.ф. ξ и η совпадают. $\Rightarrow \xi \stackrel{d}{=} \eta$.

2. Легко проверить, что х.ф. случайного вектора $(\xi,\ \mathrm{I}_{\mathrm{A}})$ распадается в произведение х.ф. ξ и I_{A}.

   $\Rightarrow \xi$ и I_{A} независимы.

$\square$

Доказательство строго марковского свойства.

I. Покажем, что W_τ является случайной величиной.

   1. Для $\forall n \in \mathbb{N}$ введем
   $$\tau_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^n} \mathrm{I}\left\{\tfrac{k-1}{2^n} < \tau \leqslant \tfrac{k}{2^n}\right\}.$$
   Тогда τ_n — случайная величина. В силу того, что τ — момент остановки, $\tau_n \downarrow \tau$ п.н.

   2. $W_{\tau_n} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} W_{\frac{k}{2^n}} \mathrm{I}\left\{\tau_n = \tfrac{k}{2^n}\right\} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} W_{\frac{k}{2^n}} \mathrm{I}\left\{\tfrac{k-1}{2^n} < \tau \leqslant \tfrac{k}{2^n}\right\}$ — случайная величина.

   В силу непрерывности траекторий W_t
   $$W_{\tau_n} \to W_\tau \text{ п.н.}$$
   Следовательно, W_τ является случайной величиной, как предел последовательности случайных величин.

   3. τ_n — тоже марковский момент относительно $\mathbb{F}^W$, поскольку $\forall t \geqslant 0$:
   $$\{\tau_n \leqslant t\} = \left\{\tau \leqslant k_0 2^{-n} \leqslant t\right\} \in \mathscr{F}^W_{k_0 2^{-n}} \subset \mathscr{F}^W_t, (k_0 = \max\{k : k2^{-n} \leqslant t\}).$$

II. Проверим, что теорема выполнена для τ_n.

Введем $Y^n_t(\omega) = W_{t+\tau_n(\omega)}(\omega) - W_{\tau_n(\omega)}(\omega)$.

(При $\omega \in \{\tau = \infty\}$ $\quad Y^n_t(\omega) = 0$).

Надо показать, что $\forall m\ \forall t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$:
$$(Y^n_{t_1}, \ldots, Y^n_{t_m}) \stackrel{d}{=} (W_{t_1}, \ldots, W_{t_m}),$$
и что $(Y^n_{t_1}, \ldots, Y^n_{t_m})$ не зависит от любого события $A \in \mathscr{F}_\tau$.

Пусть $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — непрерывная ограниченная функция и $A \in \mathscr{F}_\tau$. Рассмотрим
$$\begin{aligned}
\mathsf{E} f(Y^n_{t_1}, \ldots, Y^n_{t_m}) \mathrm{I}_{\mathrm{A}} &= \mathsf{E} f(W_{t_1+\tau_n} - W_{\tau_n}, \ldots, W_{t_m+\tau_n} - W_{\tau_n}) \mathrm{I}_{\mathrm{A}} = \\
&= \mathsf{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty} f(W_{t_1+\frac{k}{2^n}} - W_{\frac{k}{2^n}}, \ldots, W_{t_m+\frac{k}{2^n}} - W_{\frac{k}{2^n}}) \mathrm{I}_{\mathrm{A}} \mathrm{I}\left\{\tau_n = \tfrac{k}{2^n}\right\}\right] = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\mathsf{E} f(W_{t_1+\frac{k}{2^n}} - W_{\frac{k}{2^n}}, \ldots, W_{t_m+\frac{k}{2^n}} - W_{\frac{k}{2^n}}) \mathrm{I}\left\{\left\{\tau_n = \tfrac{k}{2^n}\right\} \cap A\right\}\right].
\end{aligned}$$

Согласно марковскому свойству вектор
$$(W_{t_1+\frac{k}{2^n}} - W_{\frac{k}{2^n}}, \ldots, W_{t_m+\frac{k}{2^n}} - W_{\frac{k}{2^n}})$$
не зависит от $\mathscr{F}^W_{k/2^n}$ и распределен так же, как и $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_m})$. Покажем, что $\{\tau_n = \frac{k}{2^n}\} \cap A$ является элементом $\mathscr{F}^W_{k/2^n}$:

$$\left\{\tau_n = \frac{k}{2^n}\right\} \cap A = \left\{\frac{k-1}{2^n} < \tau \leqslant \frac{k}{2^n}\right\} \cap A = \underbrace{\left\{\frac{k-1}{2^n} < \tau \leqslant \frac{k}{2^n}\right\}}_{\in \mathscr{F}^W_{k/2^n}} \cap \underbrace{\left(\left\{\tau \leqslant \frac{k}{2^n}\right\} \cap A\right)}_{\in \mathscr{F}^W_{k/2^n}} \in \mathscr{F}^W_{k/2^n}.$$

Тогда получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\mathsf{E}f(W_{t_1+\frac{k}{2^n}}-W_{\frac{k}{2^n}},\dots,W_{t_m+\frac{k}{2^n}}-W_{\frac{k}{2^n}})\mathrm{I}\left\{\left\{\tau_n=\tfrac{k}{2^n}\right\}\cap A\right\}\Big]=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{E}f(W_{t_1+\frac{k}{2^n}}-W_{\frac{k}{2^n}},\dots,W_{t_m+\frac{k}{2^n}}-W_{\frac{k}{2^n}})\cdot\mathsf{E}\mathrm{I}\left\{\left\{\tau_n=\tfrac{k}{2^n}\right\}\cap A\right\}=$$

$$=\Big|\text{марковское свойство}\Big|=$$

$$=\mathsf{E}f(W_{t_1},\dots,W_{t_m})\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{E}\mathrm{I}_{\mathrm{A}}\mathrm{I}\left\{\tau\leqslant\tfrac{k}{2^n}\right\}=$$

$$=\mathsf{E}f(W_{t_1},\dots,W_{t_m})\,\mathsf{P}(A).$$

Если $A=\Omega$, то

$$\mathsf{E}f(Y^n_{t_1},\dots,Y^n_{t_m})=\mathsf{E}f(W_{t_1},\dots,W_{t_m}).$$

Значит, по утверждению 7.3 $(Y^n_{t_1},\dots,Y^n_{t_m})\overset{d}{=}(W_{t_1},\dots,W_{t_m})$, т.е. Y^n_t — винеровский процесс.

Более того, $\forall A\in\mathscr{F}_\tau$ $\forall f$:

$$\mathsf{E}f(Y^n_{t_1},\dots,Y^n_{t_m})\mathrm{I}_{\mathrm{A}}=\mathsf{E}f(Y^n_{t_1},\dots,Y^n_{t_m})\,\mathsf{P}(A),$$

то есть Y^n_t не зависит от $\mathscr{F}_\tau$.

III. Завершение доказательства (предельный переход)

Зафиксируем $t_1,\dots,t_m\in\mathbb{R}_+$.

Тогда $(Y^n_{t_1},\dots,Y^n_{t_m})\xrightarrow{\text{п.н.}}(X_{t_1},\dots,X_{t_m})$, т.к. $\tau_n\to\tau$ п.н. и траектории W_t непрерывны.

Тогда $\forall f$ — ограниченной, непрерывной:

$$f(Y^n_{t_1},\dots,Y^n_{t_m})\xrightarrow{\text{п.н.}}f(X_{t_1},\dots,X_{t_m}).$$

Отсюда, для $\forall A\in\mathscr{F}_\tau$:

$$\mathsf{E}f(X_{t_1},\dots,X_{t_m})\mathrm{I}_{\mathrm{A}}=\Big|\text{теорема Лебега 7.8}\Big|=\lim_{n\to+\infty}\mathsf{E}f(Y^n_{t_1},\dots,Y^n_{t_m})\mathrm{I}_{\mathrm{A}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\mathsf{E}f(Y^n_{t_1},\dots,Y^n_{t_m})\,\mathsf{P}(A)=\Big|\text{пункт II}\Big|=$$

$$=\mathsf{E}f(W_{t_1},\dots,W_{t_m})\,\mathsf{P}(A).$$

Следовательно, X_t не зависит от $\mathscr{F}_\tau$ и является винеровским процессом.

□

Теорема 7.8 (Лебега о мажорируемой сходимости)**.** *Пусть $\{\xi_n,n\in\mathbb{N}\}$ — последовательность случайных величин таких, что $\xi_n\xrightarrow{\text{п.н.}}\xi$ и для $\forall n:|\xi_n|\leqslant\eta$, причем $\mathsf{E}\eta$ конечно.*

Тогда $\mathsf{E}\xi=\lim\limits_n\mathsf{E}\xi_n$ и, более того, $\mathsf{E}|\xi_n-\xi|\to0$ (т.е. $\xi_n\xrightarrow{L^1}\xi$).

Теорема 7.9 (Принцип отражения, б/д)**.** *Пусть $(W_t,t\geqslant0)$ — винеровский процесс, τ — момент остановки относительно $\mathbb{F}^W$. Тогда процесс*

$$Z_t=\begin{cases}W_t, & t\leqslant\tau\\ 2W_\tau-W_t, & t>\tau\end{cases}$$

является винеровским.

Применим две этих теоремы к конкретному марковскому моменту.

Нас будет интересовать $\tau_x=\inf\{t:W_t=x\}$ — первый момент времени достижения уровня $x\in\mathbb{R}$.

Лемма 7.1. *τ_x — момент остановки относительно $\mathbb{F}^W$.*

Доказательство. Считаем, что траектории W_t непрерывны и $x \geqslant 0$. Рассмотрим

$$\{\tau_x > t\} = \Big|\text{непрерывность траекторий}\Big| = \{\forall s \leqslant t : W_s < x\} =$$
$$= \Big|\text{опять непрерывность}\Big| = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{\forall s \leqslant t : W_s \leqslant x - \frac{1}{k}\right\} =$$
$$= \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{\substack{s\in\mathbb{Q}\\ s\leqslant t}}\underbrace{\left\{W_s \leqslant x - \frac{1}{k}\right\}}_{\in\mathscr{F}_s^W\subset\mathscr{F}_t^W} \in \mathscr{F}_t^W.$$

Значит, раз $\{\tau_x > t\} = \Omega \setminus \{\tau_x \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t^W$, то τ_x — марковский момент.

Из ЗПЛ следует, что с вероятностью 1 траектория W_t растет вверх неограниченно $\Rightarrow$ найдется такое t, что $W_t = x$. Значит, $\mathsf{P}(\tau_x < +\infty) = 1$. □

Следствие 7.4. *Для τ_x выполняется строго марковское свойство и принцип отражения.*

Следствие 7.5. *$M_t = \max\limits_{s\leqslant t} W_s$ является случайной величиной, измеримой относительно $\mathscr{F}_t^W$, причем*

$$\{M_t \geqslant x\} = \{\tau_x \leqslant t\},\ x > 0.$$

Теорема 7.10 (совместное распределение M_t и W_t)**.** *Для $\forall x, y, t \geqslant 0$ выполнено:*

$$\mathsf{P}(W_t < y - x, M_t \geqslant y) = \mathsf{P}(W_t > y + x).$$

Доказательство. Если $y = 0$, то всё очевидно:

$$\mathsf{P}(W_t < -x) = \mathsf{P}(W_t > x) \text{ —симметричность } W_t.$$

Для $y > 0$ рассмотрим момент остановки

$$\tau_y = \inf\{t : W_t = y\}.$$

Введем отраженный процесс

$$Z_t = \begin{cases} W_t, & t \leqslant \tau_y \\ 2W_{\tau_y} - W_t, & t > \tau_y \end{cases}$$

Согласно принципу отражения это тоже винеровский процесс. Для него можно рассмотреть

$$\sigma_y = \inf\{t : Z_t = y\}.$$

Тогда, очевидно, $(W_t, \tau_y) \stackrel{d}{=} (Z_t, \sigma_y)$.

$$\Rightarrow \mathsf{P}(W_t < y - x,\ M_t \geqslant y) = \Big|\text{Следствие 7.5}\Big| = \mathsf{P}(W_t < y - x,\ \tau_y \leqslant t) = \mathsf{P}(Z_t < y - x,\ \sigma_y \leqslant t) =$$
$$= \Big|\text{Но } \tau_y = \sigma_y\text{, т.к. } Z_t = W_t \text{ при } t < \tau_y \text{ и, значит, уровня } y \text{ не достигает}\Big| =$$
$$= \mathsf{P}(Z_t < y - x,\ \tau_y \leqslant t) = \Big|\text{определение } Z_t\Big| =$$
$$= \mathsf{P}(2W_{\tau_y} - W_t < y - x,\ \tau_y \leqslant t) = \Big|\text{т.к. } W_{\tau_y} = y\Big| =$$
$$= \mathsf{P}(W_t > y + x,\ \tau_y \leqslant t) = \mathsf{P}(W_t > y + x,\ M_t \geqslant y) =$$
$$= \Big|\text{т.к. } x \geqslant 0\Big| = \mathsf{P}(W_t > y + x).$$

□

Следствие (теорема Башелье)**.**

$$M_t \stackrel{d}{=} |W_t|.$$

Доказательство.

$$\mathsf{P}(M_t \geqslant y) = \mathsf{P}(M_t \geqslant y,\ W_t < y) + \mathsf{P}(M_t \geqslant y,\ W_t \geqslant y) =$$
$$= \Big|\text{теорема с } x = 0 \text{ для первой вероятности, } \{W_t \geqslant y\} \subset \{M_t \geqslant y\} \text{ для второй}\Big| =$$
$$= \mathsf{P}(W_t > y) + \mathsf{P}(W_t \geqslant y) = 2\,\mathsf{P}(W_t \geqslant y) = \mathsf{P}(|W_t| \geqslant y).$$

□

Упражнение 1. Найти плотность τ_y и $\mathsf{E}\tau_y$.

8 Мартингалы

8.1 Напоминание: условное математическое ожидание

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, ξ — случайная величина на нем. $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ — под-σ-алгебра.

Определение. *Условным математическим ожиданием* ξ относительно под-σ-алгебры $\mathscr{G}$ называется случайная величина $\mathsf{E}(\xi|\mathscr{G})$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1. $\mathsf{E}(\xi|\mathscr{G})$ является $\mathscr{G}$-измеримой;
2. $\forall A \in \mathscr{G} \quad \mathsf{E}(\xi \mathrm{I}_\mathrm{A}) = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}(\xi|\mathscr{G})\mathrm{I}_\mathrm{A}\right)$.

Свойства условного математического ожидания

1. Линейность
$$\mathsf{E}(a\xi + b\eta|\mathscr{G}) = a\mathsf{E}(\xi|\mathscr{G}) + b\mathsf{E}(\eta|\mathscr{G}).$$
2. Если ξ является $\mathscr{G}$-измеримой, то
$$\mathsf{E}(\xi|\mathscr{G}) = \xi.$$
3. Если $\xi \leqslant \eta$, то
$$\mathsf{E}(\xi|\mathscr{G}) \leqslant \mathsf{E}(\eta|\mathscr{G}).$$
4. Если ξ независима с $\mathscr{G}$, то
$$\mathsf{E}(\xi|\mathscr{G}) = \mathsf{E}\xi.$$
5. Формула полной вероятности
$$\mathsf{E}\left(\mathsf{E}(\xi|\mathscr{G})\right) = \mathsf{E}\xi.$$
6. Телескопическое свойство
Если $\mathscr{G}_1 \subset \mathscr{G}_2$ — две под-σ-алгебры, то
$$\mathsf{E}\left(\mathsf{E}(\xi|\mathscr{G}_1)\Big|\mathscr{G}_2\right) = \mathsf{E}(\xi|\mathscr{G}_1).$$
$$\mathsf{E}\left(\mathsf{E}(\xi|\mathscr{G}_2)\Big|\mathscr{G}_1\right) = \mathsf{E}(\xi|\mathscr{G}_1).$$
7. Пусть $\eta - \mathscr{G}$-измерима. Тогда
$$\mathsf{E}(\xi\eta|\mathscr{G}) = \eta\mathsf{E}(\xi|\mathscr{G}).$$

Обозначения:

1. η — случайная величина, тогда $\mathsf{E}(\xi|\eta) := \mathsf{E}(\xi|\sigma(\eta))$.
2. $\mathsf{P}(A|\mathscr{G}) := \mathsf{E}(\mathrm{I}_\mathrm{A}|\mathscr{G})$,
$\mathsf{P}(A|\eta) := \mathsf{E}(\mathrm{I}_\mathrm{A}|\eta)$.

Условные распределения

Определение. Условным математическим ожиданием ξ при условии $\eta = y$ называется любая такая функция $\mathsf{E}(\xi|\eta = y) = \varphi(y)$, что
$$\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \quad \mathsf{E}(\xi \mathrm{I}\{\eta \in B\}) = \int\limits_B \varphi(y)\,\mathsf{P}_\eta(dy).$$

Теорема. *Если* $\mathsf{E}|\xi| < +\infty$, *то* $\mathsf{E}(\xi|\eta = y)$ *существует и единственно* P_η*-п.н.*

Если найдем функцию $\mathsf{E}(\xi|\eta = y) = \varphi(y)$, то найдем и УМО: $\mathsf{E}(\xi|\eta) = \varphi(\eta)$.

Определение. *Условным распределением* ξ при условии $\eta = y$ называется вероятностная мера Q на $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ такая, что

$$Q(B) = \mathsf{P}(\xi \in B | \eta = y).$$

Понятно, что

$$\forall A, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \quad \mathsf{P}(\xi \in B | \eta \in A) = \int\limits_A \mathsf{P}(\xi \in B | \eta = y) \, \mathsf{P}_\eta(dy).$$

Тогда получаем такое полезное свойство:

$$\mathsf{P}(\xi \in B) = \mathsf{P}(\xi \in B | \eta \in \mathbb{R}) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathsf{P}(\xi \in B | \eta = y) \, \mathsf{P}_\eta(dy) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathsf{P}(\xi \in B | \eta = y) p_\eta(y) dy.$$

Определение. Если условное распределение имеет плотность $f_{\xi|\eta}(x|y)$, то она называется *условной плотностью* ξ относительно η:

$$\mathsf{P}(\xi \in B | \eta = y) = \int\limits_B f_{\xi|\eta}(x|y) dx.$$

Лемма. *Если существует условная плотность $f_{\xi|\eta}(x|y)$, то для любой борелевской функции $g(x)$ выполнено:*

$$\mathsf{E}(g(\xi) | \eta = y) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x) f_{\xi|\eta}(x|y) dx.$$

Теорема. *Пусть у (ξ, η) есть совместная плотность $f_{\xi,\eta}(x, y)$. Тогда*

$$f_{\xi|\eta}(x|y) = \frac{f_{\xi,\eta}(x, y)}{f_\eta(y)}$$

является условной плотностью ξ относительно η.

Еще пригодится такое свойство: если X и Y независимы, то

$$\mathsf{E}(f(X, Y) | Y = y) = \mathsf{E}(f(X, y)).$$

8.2 Определение, примеры и основные свойства

Пусть $T \subset \mathbb{R}$.

Определение 8.1. Процесс $(X_t, t \in T)$ называется *мартингалом относительно фильтрации* $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t, t \in T)$, если

1. X_t согласован с $\mathbb{F}$;
2. X_t является L^1-процессом, т.е. $\forall t \in T \quad \mathsf{E}|X_t| < +\infty$;
3. $\mathsf{E}(X_t | \mathscr{F}_s) = X_s$ п.н. $\forall s \leqslant t, \ s, t \in T$.

Если вместо (3) выполнено:

$$\mathsf{E}(X_t | \mathscr{F}_s) \geqslant X_s \quad \forall s \leqslant t, \ s, t \in T, \tag{3'}$$

то X_t называется *субмартингалом.*

Если же вместо (3) выполнено:

$$\mathsf{E}(X_t | \mathscr{F}_s) \leqslant X_s \quad \forall s \leqslant t, \ s, t \in T, \tag{3''}$$

то X_t называется *супермартингалом.*

Замечание. *Заметим, что условие (3) эквивалентно тому, что при всех $s, t \in T, s \leqslant t$, и любом $A \in \mathscr{F}_s$ имеет место равенство*

$$\int\limits_A X_t d\,\mathsf{P} = \int\limits_A X_s d\,\mathsf{P}.$$

Свойство субмартингальности переформулируется аналогично с заменой знака равенства «=» на знак «⩾». Это следует из второго свойства из определения условного матожидания:

$$\mathsf{E}(X_t \mathrm{I}_\mathrm{A}) = \mathsf{E}(\mathsf{E}(X_t|\mathscr{F}_s)\mathrm{I}_\mathrm{A}) = (\geqslant)\ \mathsf{E}(X_s \mathrm{I}_\mathrm{A}). \tag{3'''}$$

Условие (3) влечет, очевидно, соотношение $\mathsf{E}X_t = \mathsf{E}X_s\ \forall s,t \in T$.

Лемма 8.1 (критерий мартингальности для процессов с независимыми приращениями)**.** *Пусть* $(X_t, t \in T)$ *—* L^1*-процесс, имеющий независимые приращения.*

Тогда X_t *— мартингал относительно своей естественной фильтрации* $\Leftrightarrow$ $\mathsf{E}(X_t) = const$.

Доказательство. Пусть X_t с независимыми приращениями.

Раз приращения независимы, то $X_t - X_s$ не зависит от $\mathscr{F}_s^X = \sigma(X_u,\ u \leqslant s, u \in T)$. Значит, при $t > s$:

$$\mathsf{E}(X_t|\mathscr{F}_s^X) = \mathsf{E}(X_t - X_s + X_s|\mathscr{F}_s^X) =$$
$$= \mathsf{E}(\underbrace{X_t - X_s|\mathscr{F}_s^X}_{\text{независимы}}) + \mathsf{E}(\underbrace{X_s|\mathscr{F}_s^X}_{\text{измерим}}) = \mathsf{E}(X_t - X_s) + X_s \stackrel{?}{=} X_s.$$

Т.е. $\mathsf{E}(X_t|\mathscr{F}_s^X) = X_s \ \Leftrightarrow\ \mathsf{E}X_t = \mathsf{E}X_s \quad \forall s,t \in T$. □

Замечание. Мартингалами *(без указания фильтрации) будем называть мартингалы относительно их естественной фильтрации.*

Примеры. 1. Винеровский процесс W_t — мартингал.

2. $(S_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — случайное блуждание, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n,\ \xi_i$ — независимые случайные величины, $\mathsf{E}|\xi_i| < +\infty$.

   Тогда S_n — мартингал $\Leftrightarrow$ $\forall i\ \mathsf{E}\xi_i = 0$.

3. Пуассоновский процесс N_t — субмартингал, процесс $N_t - \mathsf{E}N_t$ — мартингал.

4. Пусть $\xi_n,\ n \in \mathbb{N}$ — независимые неотрицательно определенные случайные величины, $S_n = \xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_n$. Тогда S_n — мартингал $\Leftrightarrow$ $\mathsf{E}\xi_i = 1\ \forall i$.

5. Пусть ξ — случайная величина, $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t, t \in T)$ — фильтрация, $\mathsf{E}|\xi| < +\infty$. Тогда
$$X_t = \mathsf{E}(\xi|\mathscr{F}_t)$$
мартингал относительно $\mathbb{F}$ (такие мартингалы называются *мартингалами Леви*).

   Доказательство. Пусть $t > s$.
$$\mathsf{E}(X_t|\mathscr{F}_s) = \mathsf{E}\Big(\mathsf{E}(\xi|\mathscr{F}_t)\Big|\mathscr{F}_s\Big) = \Big|\text{т.к. } \mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t, \text{ телескопическое свойство}\Big| =$$
$$= \mathsf{E}(\xi|\mathscr{F}_s) = X_s.$$
□

Утверждение 8.1. *Пусть* $(X_t, t \in T)$ *— мартингал относительно* $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t, t \in T), h(x)$ *— выпуклая книзу функция. Тогда*
$$Y_t = h(X_t)$$
— субмартингал относительно $\mathbb{F}$.

Доказательство. Воспользуемся неравенством Йенсена для условного матожидания, аналогичным неравенству для матожидания из курса теорвера:
$$\mathsf{E}(Y_t|\mathscr{F}_s) = \mathsf{E}(h(X_t)|\mathscr{F}_s) \geqslant \Big|\text{неравенство Йенсена}\Big| \geqslant h(\mathsf{E}(X_t|\mathscr{F}_s)) = h(X_s) = Y_s.$$ □

Замечание. *Если* $T = \mathbb{Z}_+$, *то* $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ *— мартингал относительно* $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ $\Leftrightarrow$ $\forall n\ \mathsf{E}(X_n|\mathscr{F}_{n-1}) = X_{n-1}$.

8.3 Разложение Дуба

Определение 8.2. Процесс $(X_n, n \in \mathbb{N})$ является *предсказуемым* относительно фильтрации $(\mathscr{F}_n, n \in \mathbb{N})$, если X_n измерим относительно $\mathscr{F}_{n-1}$.

Теорема 8.1 (разложение Дуба)**.** *Пусть $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — L^1-процесс, согласованный с фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_n, n \in \mathbb{Z}_+)$. Тогда $\exists!$ разложение вида*

$$X_n = M_n + A_n,$$

где M_n — мартингал относительно $\mathbb{F}$, $(A_n, n \in \mathbb{N})$ — предсказуемый процесс относительно $\mathbb{F}$, а $A_0 = 0$ п.н.

Доказательство.

1. (единственность) Докажем сначала единственность разложения. Пусть $X_n = M_n + A_n$. Возьмем УМО относительно $\mathscr{F}_{n-1}$:
$$\mathsf{E}(X_n|\mathscr{F}_{n-1}) = \mathsf{E}(\underbrace{M_n|\mathscr{F}_{n-1}}_{\text{мартингал}}) + \mathsf{E}(\underbrace{A_n|\mathscr{F}_{n-1}}_{\text{измерим}}) = M_{n-1} + A_n = (X_{n-1} - A_{n-1}) + A_n.$$
Отсюда, т.к. X_{n-1} измерим относительно $\mathscr{F}_{n-1}$:
$$A_n - A_{n-1} = \mathsf{E}(X_n - X_{n-1}|\mathscr{F}_{n-1}) = \mathsf{E}(\Delta X_n|\mathscr{F}_{n-1}).$$
Значит, раз $A_0 = 0$,
$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}(\Delta X_k|\mathscr{F}_{k-1}) \qquad (*)$$
Получаем, что разложение для $(A_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ единственно, т.е. и разложение X_n единственно.

2. (существование) Докажем-таки теперь существование разложения. Определим A_n по формуле $(*)$. Тогда A_n измерим относительно $\mathscr{F}_{n-1}$ $\Rightarrow$ A_n — предсказуемый процесс.
Положим $M_n = X_n - A_n$ и покажем, что это мартингал.
$$\begin{aligned}\mathsf{E}(M_n|\mathscr{F}_{n-1}) &= \mathsf{E}(X_n - A_n|\mathscr{F}_{n-1}) = \mathsf{E}(X_n|\mathscr{F}_{n-1}) - A_n = \Big|\text{формула } (*)\Big| = \\ &= \mathsf{E}(X_n|\mathscr{F}_{n-1}) - A_{n-1} - \mathsf{E}(\Delta X_n|\mathscr{F}_{n-1}) = \\ &= \mathsf{E}(\underbrace{X_n - (X_n - X_{n-1})|\mathscr{F}_{n-1}}_{=X_{n-1} - \mathscr{F}_{n-1}\text{-измеримый}}) - A_{n-1} = X_{n-1} - A_{n-1} = M_{n-1}.\end{aligned}$$
Значит, M_n — мартингал, выходит, разложение существует.

□

Следствие. *$(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — субмартингал относительно $\mathbb{F}$ $\Leftrightarrow$ в его разложении Дуба последовательность A_n является неубывающей.*

8.4 Теорема об остановке

Теорема 8.2 (об остановке)**.** *Пусть $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — L^1-процесс, согласованный с фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_n, n \in \mathbb{Z}_+)$. Тогда X_n — мартингал (субмартингал) относительно $\mathbb{F}$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\forall \tau, \sigma$ — ограниченных марковских моментов относительно $\mathbb{F}$ таких, что $\tau \leqslant \sigma$ п.н., выполнено:*

$$\mathsf{E}X_\tau = (\leqslant)\ \mathsf{E}X_\sigma.$$

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть $\tau \leqslant \sigma \leqslant m$ п.н. — марковские моменты относительно $\mathbb{F}$. Тогда $\mathsf{E}X_\tau$ конечно:
$$\mathsf{E}|X_\tau| \leqslant \sum_{i=0}^{m} \mathsf{E}|X_i| < +\infty.$$

Теперь пусть $l \leqslant m$. Рассмотрим

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(X_\tau \mathrm{I}\{\tau = l\}) &= \mathsf{E}(X_l \mathrm{I}\{\tau = l\}) = \mathsf{E}(X_l \mathrm{I}\{\tau = l, \sigma \geqslant l\}) = \\
&= \mathsf{E}(X_l \mathrm{I}\{\tau = l, \sigma = l\}) + \mathsf{E}(X_l \mathrm{I}\{\tau = l, \sigma \geqslant l+1\}) = (\leqslant) \left|(\text{суб})\text{мартингал}\right| = (\leqslant) \\
&= (\leqslant)\ \mathsf{E}(X_l \mathrm{I}\{\tau = l, \sigma = l\}) + \mathsf{E}\left(\mathsf{E}(X_{l+1}|\mathscr{F}_l)\mathrm{I}\{\tau = l, \sigma \geqslant l+1\}\right) = \\
&= \left|\mathrm{I}\{\tau = l, \sigma \geqslant l+1\}\ \text{является } \mathscr{F}_l\text{-измеримым, т.к. } \tau, \sigma \text{ — марковские моменты}\right| = \\
&= \mathsf{E}(X_l \mathrm{I}\{\tau = l, \sigma = l\}) + \mathsf{E}\left(\mathsf{E}(X_{l+1}\mathrm{I}\{\tau = l, \sigma \geqslant l+1\}|\mathscr{F}_l)\right) = \\
&= \left|\text{формула полной вероятности}\right| = \\
&= \mathsf{E}(X_l \mathrm{I}\{\tau = l, \sigma = l\}) + \mathsf{E}(X_{l+1} \mathrm{I}\{\tau = l, \sigma \geqslant l+1\}) = \\
&= \sum_{k=l}^{l+1} \mathsf{E}(X_k \mathrm{I}\{\tau = l, \sigma = k\}) + \mathsf{E}(X_{l+1} \mathrm{I}\{\tau = l, \sigma \geqslant l+2\}) = (\leqslant) \\
&= (\leqslant)\ \left|\ldots\text{повторяем много раз}\right| = (\leqslant) \\
&= (\leqslant)\ \sum_{k=l}^{m} \mathsf{E}(X_k \mathrm{I}\{\tau = l, \sigma = k\}) + \underbrace{\mathsf{E}(X_m \mathrm{I}\{\tau = l, \underbrace{\sigma \geqslant m+1}_{=\varnothing}\})}_{=0} = \\
&= \sum_{k=l}^{m} \mathsf{E}(X_k \mathrm{I}\{\tau = l, \sigma = k\}) = \sum_{k=l}^{m} \mathsf{E}(X_\sigma \mathrm{I}\{\tau = l, \sigma = k\}) = \\
&= \mathsf{E}(X_\sigma \mathrm{I}\{\tau = l, \sigma \geqslant l\}) = \mathsf{E}(X_\sigma \mathrm{I}\{\tau = l\}).
\end{aligned}$$

Суммируя по l от 0 до m, получаем

$$\mathsf{E}X_\tau = (\leqslant)\ \mathsf{E}X_\sigma.$$

($\Leftarrow$) Пусть $k < n$. Надо показать, что

$$\mathsf{E}(X_n|\mathscr{F}_k) = (\geqslant)\ X_k.$$

Пусть $A \in \mathscr{F}_k$ — фиксировано. Рассмотрим

$$\tau_A(\omega) = \begin{cases} k, & \omega \in A \\ n, & \omega \notin A \end{cases}$$

Покажем, что τ_A — марковский момент относительно $\mathbb{F}$.

$$\{\tau_A \leqslant t\} = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } t < k & \in \mathscr{F}_t \\ A, & \text{если } k \leqslant t < n & \in \mathscr{F}_t, \text{ т.к. } A \in \mathscr{F}_t \\ \Omega, & \text{если } t \geqslant n & \in \mathscr{F}_t \end{cases}$$

Значит, τ_A — ограниченный марковский момент.
Положим $\tau = \tau_A, \sigma = n \Rightarrow \tau \leqslant \sigma$.

$$\Rightarrow\ \mathsf{E}X_\tau = (\leqslant)\mathsf{E}X_\sigma.$$

$$\Leftrightarrow\ \mathsf{E}X_k\mathrm{I}_\mathrm{A} + \mathsf{E}X_n\mathrm{I}_{\bar{\mathrm{A}}} = (\leqslant)\ \mathsf{E}X_n = \mathsf{E}X_n\mathrm{I}_\mathrm{A} + \mathsf{E}X_n\mathrm{I}_{\bar{\mathrm{A}}}.$$

Получается, $\forall A \in \mathscr{F}_k$ выполнено:

$$\mathsf{E}(X_k\mathrm{I}_\mathrm{A}) = (\leqslant)\ \mathsf{E}(X_n\mathrm{I}_\mathrm{A}) = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}(X_n|\mathscr{F}_k)\mathrm{I}_\mathrm{A}\right).$$

Т.к. X_k и $\mathsf{E}(X_n|\mathscr{F}_k)$ являются измеримыми относительно $\mathscr{F}_k$, то, согласно свойству (3"') из замечания к определению мартингалов:

$$X_k = (\leqslant)\ \mathsf{E}(X_n|\mathscr{F}_k)\ \text{п.н.}$$

т.е. X_n — (суб)мартингал относительно $\mathbb{F}$.

□

Замечание. *Ограниченность τ и σ в теореме по существу.*

Доказательство. Пусть $(S_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — простейшее симметричное случайное блуждание. Определим:

$$\tau = \min\{n : S_n = 1\},$$
$$\sigma = \min\{n : S_n = 2\}$$

— марковские моменты.

Тогда по ЗПЛ τ и σ — моменты остановки, $\tau \leqslant \sigma$. Но

$$\mathsf{E}S_\tau = 1 < 2 = \mathsf{E}S_\sigma.$$

(Моменты неограниченные, поэтому теорему и нельзя было применять) □

Следствие (из теоремы об остановке)**.** *Пусть* $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ *— мартингал относительно* $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_n, n \in \mathbb{Z}_+)$, τ *— момент остановки относительно* $\mathbb{F}$*, причем* $\exists c > 0$ *такая, что*

$$\forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad |X_{\tau\wedge n}| \leqslant c.$$

Тогда $\mathsf{E}X_\tau = \mathsf{E}X_0$.

Доказательство. Рассмотрим $\tau_n = \tau \wedge n$ $(\tau \wedge n := \min\{\tau, n\})$. Тогда τ_n — ограниченный марковский момент относительно $\mathbb{F}$. По теореме об остановке:

$$\mathsf{E}X_{\tau_n} = \mathsf{E}X_0,$$

т.к. $\tau_n \geqslant 0$.

При $n \to +\infty, X_{\tau_n} \overset{\text{п.н.}}{\to} X_\tau$.

При этом $|X_{\tau_n}| \leqslant c \;\Rightarrow\;$ по теореме Лебега:

$$\mathsf{E}X_{\tau_n} \to \mathsf{E}X_\tau.$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathsf{E}X_\tau = \mathsf{E}X_0}$. □

8.5 Пример применения: задача о разорении игрока

См. семинары или Булинский-Ширяев стр. 119.

8.6 Непрерывное время

Определение 8.3. Функция $\tau : \Omega \to [0, +\infty]$ называется *опциональным моментом* относительно фильтрации $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t, t \geqslant 0)$, если

$$\forall t \geqslant 0 \quad \{\omega : \tau(\omega) < t\} \in \mathscr{F}_t.$$

Пример 2. Пусть $(X_t, t \geqslant 0)$ — процесс с непрерывными справа траекториями, а $G \subset \mathbb{R}$ — открытое множество. Тогда

$$\tau = \inf\{t : X_t \in G\}$$

является опциональным моментом относительно $\mathbb{F}^X$.

Теорема 8.3 (теорема об остановке для непрерывного времени, б/д)**.** *Пусть* $(X_t, t \geqslant 0)$ *— мартингал относительно* $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t, t \geqslant 0)$ *с непрерывными справа траекториями. Тогда* $\forall\, \tau, \sigma :$ $\tau \leqslant \sigma$ *— ограниченных опциональных моментов относительно* $\mathbb{F}$ *выполнено*

$$\mathsf{E}X_\tau = \mathsf{E}X_\sigma.$$

9 Марковские процессы

9.1 Эквивалентные определения и свойства

Пусть $T \subset \mathbb{R}$. Хотим построить процесс, который не зависит от своей истории.

Определение 9.1. Действительный процесс $(X_t, t \in T)$ называется *марковским* относительно фильтрации $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t, t \geqslant 0)$, если X_t согласован с $\mathbb{F}$ и $\forall s \leqslant t$ $(s, t \in T)$, и $\forall f$ — ограниченной борелевской функции выполнено:

$$\mathsf{E}\big(f(X_t)\big|\mathscr{F}_s\big) = \mathsf{E}\big(f(X_t)\big|X_s\big).$$

Марковскими процессами без указания фильтрации будем звать марковские процессы относительно их естественной фильтрации.

Вопрос. *Какие процессы являются марковскими?*

Теорема 9.1 (эквивалентные определения).
Следующие свойства эквивалентны:

1. $(X_t, t \in T)$ *— марковский процесс;*
2. $\forall m\ \forall s_1 < \dots < s_m < s < t\ \forall f$ *— ограниченной борелевской функции:*
$$\mathsf{E}\big(f(X_t)\big|X_s, X_{s_m}, \dots, X_{s_1}\big) = \mathsf{E}\big(f(X_t)\big|X_s\big);$$
3. $\forall m\ \forall s_1 < \dots < s_m < s < t\ \forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$:
$$\mathsf{P}\left(X_t \in B\big|X_s, X_{s_m}, \dots, X_{s_1}\right) = \mathsf{P}\left(X_t \in B\big|X_s\right).$$

Доказательство.

(1) $\Rightarrow$ (2) Заметим, что
$$\sigma(X_s, X_{s_1}, \dots, X_{s_m}) \subset \sigma(X_u, u \leqslant s) = \mathscr{F}_s^X,$$
$$\sigma(X_s, X_{s_1}, \dots, X_{s_m}) \supset \sigma(X_s).$$

Значит, можем воспользоваться телескопическим свойством УМО: в равенстве $\mathsf{E}(f(X_t)|\mathscr{F}_s^X) = \mathsf{E}(f(X_t)|X_s)$, беря УМО относительно $\sigma(X_s, X_{s_1}, \dots, X_{s_m})$, получаем:
$$\begin{array}{ccc} \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left(f(X_t)|\mathscr{F}_s^X\right)|X_s, X_{s_1}, \dots, X_{s_m}\right) & = & \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left(f(X_t)|X_s\right)|X_s, X_{s_1}, \dots, X_{s_m}\right) \\ \| & & \| \\ \mathsf{E}(f(X_t)|X_s, X_{s_1}, \dots, X_{s_m}) & = & \mathsf{E}\left(f(X_t)|X_s\right). \end{array}$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Нужно показать, что $\mathsf{E}(f(X_t)|\mathscr{F}_s^X) = \mathsf{E}(f(X_t)|X_s)$. То есть нужно проверить, что случайная величина $\mathsf{E}(f(X_t)|X_s)$ является условным математическим ожиданием случайной величины $f(X_t)$ относительно $\mathscr{F}_s^X$. Раз она очевидно измерима относительно $\mathscr{F}_s^X$, остается доказать второе свойство из определения УМО: $\forall A \in \mathscr{F}_s^X$
$$\mathsf{E}(f(X_t)\mathrm{I}_\mathrm{A}) = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}(f(X_t)|X_s)\mathrm{I}_\mathrm{A}\right) \tag{$*$}$$

> **Определение.** Система $\mathcal{M}$ подмножеств Ω называется π-системой, если $\forall A, B \in \mathcal{M}$ выполнено $A \cap B \in \mathcal{M}$.
>
> **Определение.** Система $\mathcal{L}$ подмножеств Ω называется λ-системой, если
> 1. $\Omega \in \mathcal{L}$;
> 2. Если $A, B \in \mathcal{L}$ и $A \subset B$, то $B \setminus A \in \mathcal{L}$;
> 3. Если последовательность $\{A_n\}_{n=1}^\infty$, $A_n \in \mathcal{L}\ \forall n$, удовлетворяет условию $A_n \uparrow A$ (т.е. $A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$ и $A = \bigcup\limits_n A_n$), то $A \in \mathcal{L}$.
>
> **Теорема** (о монотонных классах). *Пусть $\mathcal{M}$ — π-система на Ω. Тогда $\lambda(\mathcal{M}) = \sigma(\mathcal{M})$.*

Рассмотрим $\mathcal{L} = \{A \in \mathscr{F}_s^X : (*) \text{ выполнено}\}$. Покажем, что $\mathcal{L}$ – λ-система.

1. $\Omega \in \mathcal{L}$?
Так как
$$\mathsf{E}(f(X_t)\mathrm{I}_\Omega) = \mathsf{E}(f(X_t)) = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}(f(X_t)|X_s)\right).$$
то из формулы полной вероятности получаем, что $\Omega \in \mathcal{L}$.
2. $A, B \in \mathcal{L}$ и $A \subset B$, то $B \setminus A \in \mathcal{L}$?
Так как $\mathrm{I}_{\mathrm{B}\setminus\mathrm{A}} = \mathrm{I}_\mathrm{B} - \mathrm{I}_\mathrm{A}$, то по линейности УМО $(*)$ выполнена для $B \setminus A$. Значит, $B \setminus A \in \mathcal{L}$.
3. $A_n \uparrow A, A_n \in \mathcal{L}\ \forall n \Rightarrow A \in \mathcal{L}$?
Имеем: $\mathrm{I}_{\mathrm{A_n}} \uparrow \mathrm{I}_\mathrm{A}$ п.н. $\Rightarrow$ $f(X_t)\mathrm{I}_{\mathrm{A_n}} \xrightarrow{\text{п.н.}} f(X_t)\mathrm{I}_\mathrm{A}$.

При этом $f(X_t)$ ограничена. Поэтому по теореме Лебега

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{E}f(X_t)\mathrm{I}_{\mathrm{A_n}} & = & \mathsf{E}\left(\mathsf{E}(f(X_t)|\mathscr{F}_s)\mathrm{I}_{\mathrm{A_n}}\right) \\ \downarrow^{n\to+\infty} & & \downarrow^{n\to+\infty} \\ \mathsf{E}f(X_t)\mathrm{I}_{\mathrm{A}} & = & \mathsf{E}\left(\mathsf{E}(f(X_t)|\mathscr{F}_s)\mathrm{I}_{\mathrm{A}}\right). \end{array}$$

Значит, $A \in \mathcal{L}$.

Введем $\mathcal{M} = \Big\{\{X_s \in B, X_{s_1} \in B_1, \dots, X_{s_m} \in B_m\} : m \in \mathbb{N}, s_1 < \dots < s_m < s;\ s, s_i \in \in T,\ B, B_1, \dots, B_m \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\Big\}$.

По условию $\mathsf{E}(f(X_t)|X_s) = \mathsf{E}(f(X_t)|X_s, X_{s_1}, \dots, X_{s_m})$, тогда (по второму свойству из определения УМО $\mathsf{E}(f(X_t)|X_s, X_{s_1}, \dots, X_{s_m})$) $\forall A \in \mathcal{M}$ выполнено $(*)$, т.е. $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$.

Но $\mathcal{M}$ является π-системой (пересечение элементов из $\mathcal{M}$ есть элемент $\mathcal{M}$).

Тогда по теореме о монотонных классах получаем, что $\sigma(\mathcal{M}) \subset \mathcal{L}$. Но $\sigma(\mathcal{M}) = \mathscr{F}_s^X$, т.е. $\mathcal{L} = \mathscr{F}_s^X$ и $(*)$ выполнена $\forall A \in \mathscr{F}_s^X$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Достаточно взять $f(x) = \mathrm{I}\{X \in B\}$.

(3) $\Rightarrow$ (2) Пусть $f(x)$ — ограниченная борелевская функция, $|f(x)| \leqslant C$.

Рассмотрим

$$f_n(x) = \sum_{k:|\frac{k}{n}|\leqslant C+1} \frac{k-1}{n} \mathrm{I}\left\{\tfrac{k-1}{n} < f(x) \leqslant \tfrac{k}{n}\right\}.$$

Тогда $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{n}$.

Обозначим $B_{k,n} := \left\{x : \frac{k-1}{n} < f(x) \leqslant \frac{k}{n}\right\}$.

Имеем:

$$\Big|\mathsf{E}(f(X_t)|X_s, X_{s_1}, \dots, X_{s_m}) - \mathsf{E}(f(X_t)|X_s)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big|\text{заменяем } f \text{ на } f_n\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{n} + \Big|\mathsf{E}(f_n(X_t)|X_s, X_{s_1}, \dots, X_{s_m}) - \mathsf{E}(f_n(X_t)|X_s)\Big| =$$

$$= \frac{2}{n} + \left|\sum_{k:|\frac{k}{n}|\leqslant C+1} \frac{k-1}{n}\Big(\mathsf{P}(X_t \in B_{k,n}|X_s, X_{s_1}, \dots, X_{s_m}) - \mathsf{P}(X_t \in B_{k,n}|X_s)\Big)\right| =$$

$$= \Big|\text{условие (3)}\Big| = \frac{2}{n} + 0 \to 0, n \to +\infty.$$

$$\Rightarrow\ \mathsf{E}(f(X_t)|X_s, X_{s_1}, \dots, X_{s_m}) = \mathsf{E}\left(f(X_t)|X_s\right).$$

□

Пример 3. Ветвящийся процесс является марковским.

Доказательство.

$$\mathsf{P}(X_n = j|X_{n-1} = m, \dots, X_1 = a) = \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_i^{(n)} = j|X_{n-1} = m, \dots, X_1 = a\right) =$$

$$= \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{m} \xi_i^{(n)} = j|X_{n-1} = m, \dots, X_1 = a\right) =$$

$$= \Big|\xi_i^{(n)} \text{ не зависят от } X_k,\ k \leqslant n-1\Big|$$

$$= \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{m} \xi_i^{(n)} = j\right) = \Big|\text{аналогично}\Big| =$$

$$= \mathsf{P}(X_n = j|X_{n-1} = m).$$

Значит, $\mathsf{P}(X_n = j|X_{n-1}, \dots, X_1) = \mathsf{P}(X_n = j|X_{n-1})$. □

Теорема 9.2. *Процессы с независимыми приращениями являются марковскими.*

Доказательство. Пусть $(X_t, t \in T)$ — процесс с независимыми приращениями, $t > s > s_1 > \dots > s_m,\ t, s, s_i \in T$ и f — ограниченная борелевская функция. Тогда

$$\begin{gathered}\mathsf{E}(f(X_t)|X_s = y, X_{s_1} = y_1, \dots, X_{s_m} = y_m) = \\ = \mathsf{E}(f(X_t - X_s + X_s)|X_s = y, X_{s_1} = y_1, \dots, X_{s_m} = y_m) = \\ = \mathsf{E}(f(X_t - X_s + y)|X_s = y, X_{s_1} = y_1, \dots, X_{s_m} = y_m) = \\ = \Big|(X_t - X_s) \text{ и } \sigma\{X_s, X_{s_1}, \dots, X_{s_m}\} = \sigma\{X_{s_1}, X_{s_2} - X_{s_1}, \dots, X_s - X_{s_m}\} \text{ независимы}\Big| = \\ = \mathsf{E}f(X_t - X_s + y).\end{gathered}$$

Аналогично, $\mathsf{E}(f(X_t)|X_s = y) = \mathsf{E}f(X_t - X_s + y)$.

Значит, $\mathsf{E}(f(X_t)|X_s, X_{s_1}, \dots, X_{s_m}) = \mathsf{E}(f(X_t)|X_s)$ и X_t — марковский процесс. □

Следствие 9.1. *Винеровский, пуассоновский процессы, случайное блуждание являются марковскими процессами.*

Вопрос. *Когда гауссовские процессы являются марковскими?*

Утверждение 9.1. *Если (ξ, η) — гауссовский вектор, то* $\mathsf{E}(\xi|\eta) = \mathsf{E}\xi + (\eta - \mathsf{E}\eta)\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\mathsf{D}\eta}$.

Доказательство. Доказывалось на матстате. □

Теорема 9.3 (критерий марковости для гауссовских процессов)**.** *Пусть $(X_t, t \in T)$, $T \subseteq \mathbb{R}$, — гауссовский процесс с ковариационной функцией $R(s,t)$. Тогда X_t марковский $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\ \forall s \leqslant u \leqslant t,\ u, s, t \in T$, выполнено*

$$R(s,u) \cdot R(u,t) = R(s,t) \cdot R(u,u).$$

Доказательство. Считаем, что $\mathsf{E}X_t = 0$, так как функция среднего не влияет на марковость и на ковариационную функцию.

($\Rightarrow$) Пусть X_t марковский. Тогда при $s \leqslant u \leqslant t$ для любой ограниченной борелевской функции $f(x)$:

$$\mathsf{E}(f(X_t)|X_u, X_s) = \mathsf{E}(f(X_t)|X_u).$$

Рассмотрим $f_n(x) = x\mathrm{I}\{|x| \leqslant n\}$ — ограниченную борелевскую такую, что

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow f_n(X_t) \to X_t$ п.н. и $|f_n(X_t)| \leqslant |X_t|$.

По теореме Лебега для условного математического ожидания:

$$\begin{array}{ccc}\mathsf{E}(f_n(X_t)|X_u, X_s) & = & \mathsf{E}(f_n(X_t)|X_u) \\ \downarrow^{\text{п.н.}} & & \downarrow^{\text{п.н.}} \\ \mathsf{E}(X_t|X_u, X_s) & = & \mathsf{E}(X_t|X_u).\end{array}$$

Согласно утверждению,

$$\mathsf{E}(X_t|X_u) = \frac{R(u,t)}{R(u,u)}X_u.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\frac{R(s,t)}{R(s,s)}X_s &= \mathsf{E}(X_t|X_s) = \mathsf{E}\Big(\mathsf{E}(X_t|X_u, X_s)\Big|X_s\Big) = \\ &= \mathsf{E}\Big(\mathsf{E}(X_t|X_u)\Big|X_s\Big) = \mathsf{E}\left(\frac{R(u,t)}{R(u,u)}X_u\Big|X_s\right) = \\ &= \frac{R(u,t)}{R(u,u)} \cdot \frac{R(u,s)}{R(s,s)}X_s.\end{aligned}$$

Следовательно, $R(s,t) = \frac{R(s,u)\cdot R(u,t)}{R(u,u)}$.

($\Leftarrow$) Пусть $s_1 < \dots < s_n < s < t,\ s_i, s, t \in T$.

Рассмотрим вектор

$$\left(X_t - \frac{R(s,t)}{R(s,s)}X_s, X_s, X_{s_n}, \dots, X_{s_1}\right).$$

Этот вектор является гауссовским, причем $\forall s_i \leqslant s$:

$$\operatorname{cov}\left(X_t - \frac{R(s,t)}{R(s,s)}X_s, X_{s_i}\right) = R(t,s_i) - \frac{R(s,s_i)\cdot R(s,t)}{R(s,s)} = 0.$$

по условию. Это означает, что $X_t - \frac{R(s,t)}{R(s,s)}X_s$ независим с остальными компонентами вектора. Отсюда, $\forall f$ — ограниченной борелевской функции:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(f(X_t)|X_s = y,\dots,X_{s_1} = y_1) &= \mathsf{E}\left(f\Big(X_t - \frac{R(s,t)}{R(s,s)}X_s + \frac{R(s,t)}{R(s,s)}X_s\Big)\Big|X_s = y,\dots,X_{s_1} = y_1\right) = \\
&= \mathsf{E}\left(f\Big(X_t - \frac{R(s,t)}{R(s,s)}X_s + \frac{R(s,t)}{R(s,s)}y\Big)\Big|X_s = y,\dots,X_{s_1} = y_1\right) = \\
&= \Big|\text{независимость от условия}\Big| = \\
&= \mathsf{E}\left(f\Big(X_t - \frac{R(s,t)}{R(s,s)}X_s + \frac{R(s,t)}{R(s,s)}y\Big)\right).
\end{aligned}$$

С другой стороны, $\mathsf{E}(f(X_t)|X_s = y)$ равно тому же самому.

Следовательно, $\mathsf{E}(f(X_t)|X_s, X_{s_n},\dots,X_{s_1}) = \mathsf{E}(f(X_t)|X_s)$, т.е. X_t — марковский процесс.

□

Определение 9.2. Пусть $T \subset \mathbb{R}$. Функция $P(s,x,t,B)$, где $s,t \in T, s \leqslant t, x \in \mathbb{R}, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, называется *переходной вероятностью*, если

1. При фиксированных s,x,t $P(s,x,t,\cdot)$ является вероятностной мерой на $\mathbb{R}$.
2. При фиксированных s,t,B функция $P(s,\cdot,t,B)$ является борелевской.
3. При $t = s$
$$P(s,x,s,B) = \delta_x(B) = \mathrm{I}\{x \in B\}.$$
4. При $s \leqslant u \leqslant t,\ s,u,t \in T,\ x \in \mathbb{R},\ B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ выполняется *уравнение Колмогорова-Чепмена*:
$$P(s,x,t,B) = \int\limits_{\mathbb{R}} P(s,x,u,dy)\cdot P(u,y,t,B).$$

Определение 9.3. Марковский процесс $(X_t, t \in T)$ *обладает переходной вероятностью* $P(s,x,t,B)$, если

$$\mathsf{P}(X_t \in B|X_s = x) = P(s,x,t,B)$$

P_{X_s}-п.н. относительно x (т.е. *почти для всех* x из распределения P_{X_s} на $\mathbb{R}$).

Смысл определения: у марковского процесса с переходной вероятностью существует «хороший» (в смысле сформулированных свойств 1-4) вариант условного распределения, стоящего в левой части равенства.

Утверждение 9.2. *Функция* $\mathsf{P}(X_t \in B|X_s = x)$ *марковского процесса* X_t *обладает свойствами 1-4 почти для всех* x *по мере* P_{X_s}.

Доказательство. Свойства 1-3 следуют из свойств условных распределений. Докажем четвертое свойство.

Обозначим $P(s,x,t,B) = \mathsf{P}(X_t \in B|X_s = x)$.

Для $s \leqslant u \leqslant t$:

$$\begin{aligned}
P(s,X_s,t,B) &= \mathsf{P}(X_t \in B|X_s) = \mathsf{E}(\mathrm{I}\{X_t \in B\}|X_s) = \\
&= \Big|\text{Телескопическое свойство}\Big| = \mathsf{E}(\mathsf{E}(\mathrm{I}\{X_t \in B\}|X_u, X_s)|X_s) = \\
&= \Big|X_t - \text{марковский процесс}\Big| = \mathsf{E}(\mathsf{E}(\mathrm{I}\{X_t \in B\}|X_u)|X_s) = \\
&= \mathsf{E}(\mathsf{P}(X_t \in B|X_u)|X_s) = \mathsf{E}(P(u,X_u,t,B)|X_s).
\end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned}
P(s,x,t,B) &= \mathsf{E}(P(u,X_u,t,B)|X_s=x) = \\
&= \Big| Q \text{ — условное распределение } X_u \text{ относительно } X_s = x \Big| = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} P(u,y,t,B)Q(dy) = \\
&= \Big| \text{т.к. } Q(A) = \mathsf{P}(X_u \in A | X_s = x) = P(s,x,u,A) \Big| = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} P(u,y,t,B) \cdot P(s,x,u,dy) \quad (\mathsf{P}_{X_s}\text{-п.н.}).
\end{aligned}$$

Получаем, что для *произвольных* марковских процессов имеет место лишь *ослабленный* вариант свойства 4, справедливый не для *всех* $x \in \mathscr{X}$, а лишь для *почти всех* $x \in \mathscr{X}$ (по мере P_{X_s}). □

Определение 9.4. Если переходная вероятность $P(s,x,t,B)$ имеет вид

$$P(s,x,t,B) = \int\limits_B p(s,x,t,y)dy,$$

то $p(s,x,t,y)$ называется *переходной плотностью.*

Упражнение 2. Найти переходную плотность у W_t.

9.2 Марковские цепи с дискретным временем

Пусть $\mathscr{X}$ состоит из не более чем счетного числа (занумерованных) точек. Отождествим каждую точку $x_i \in \mathscr{X}$ с её номером i, при этом будем считать, что i пробегает либо конечное множество $\{0,1,\ldots,r\}$, либо счетное $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Определение 9.5. Процесс $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ со значениями в $\mathscr{X}$ называется *марковской цепью*, если $\forall n,k \ \forall m \ \forall k_1 < \cdots < k_m < k < n \ \forall a_1,\ldots,a_m,i,j \in \mathscr{X}$ выполнено (*марковское свойство*):

$$\mathsf{P}(X_n = j | X_k = i, X_{k_m} = a_m, \ldots, X_{k_1} = a_1) = \mathsf{P}(X_n = j | X_k = i)$$

всегда, когда $\mathsf{P}(X_k = i, X_{k_m} = a_m, \ldots, X_{k_1} = a_1) > 0$.

Смысл определения: «Будущее» (т.е. X_n) и «прошлое» $(X_{k_m},\ldots,X_{k_1})$ независимые при фиксированном «настоящем» (X_k).

Упражнение 3 (Эквивалентное определение)**.** $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — марковская цепь $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ \forall n \ \forall a_0,\ldots,a_n \in \mathscr{X}$

$$\mathsf{P}(X_n = a_n | X_{n-1} = a_{n-1},\ldots,X_0 = a_0) = \mathsf{P}(X_n = a_n | X_{n-1} = a_{n-1})$$

всегда, когда $\mathsf{P}(X_{n-1} = a_{n-1},\ldots,X_0 = a_0) > 0$.

Наблюдение. Марковская цепь — это марковский процесс с не более чем счетным числом значений.

Пусть $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — марковская цепь.

Теорема 9.4 (о независимости будущего и прошлого)**.**
Пусть $a_0,\ldots,a_n \in \mathscr{X}$, обозначим

$$\begin{aligned}
A &= \{X_n = a_n, \ldots, X_{k+1} = a_{k+1}\}, && \text{(«Будущее»)}\\
B &= \{X_k = a_k\}, && \text{(«Настоящее»)}\\
C &= \{X_{k-1} = a_{k-1}, \ldots, X_0 = a_0\}. && \text{(«Прошлое»)}
\end{aligned}$$

Тогда $\mathsf{P}(AC|B) = \mathsf{P}(A|B) \cdot \mathsf{P}(C|B)$.

Доказательство. Рассмотрим вероятность

$$\mathsf{P}(ABC) = \mathsf{P}(X_n = a_n, \ldots, X_0 = a_0) = \Big|\text{формула умножения вероятностей}\Big| =$$
$$= \mathsf{P}(X_n = a_n | X_{n-1} = a_{n-1}, \ldots, X_0 = a_0) \cdot \mathsf{P}(X_{n-1} = a_{n-1} | X_{n-2} = a_{n-2}, \ldots, X_0 = a_0) \cdot \ldots$$
$$\ldots \cdot \mathsf{P}(X_{k+1} = a_{k+1} | X_k = a_k, \ldots, X_0 = a_0) \cdot \mathsf{P}(X_k = a_k, X_{k-1} = a_{k-1}, \ldots, X_0 = a_0) =$$
$$= \Big|\text{марковское свойство}\Big| =$$
$$= \left[\prod_{j=k+1}^{n} \mathsf{P}(X_j = a_j | X_{j-1} = a_{j-1})\right] \mathsf{P}(BC).$$

Совершенно аналогично,

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(X_n = a_n, \ldots, X_k = a_k) = \left[\prod_{j=k+1}^{n} \mathsf{P}(X_j = a_j | X_{j-1} = a_{j-1})\right] \mathsf{P}(B).$$

Значит, $\mathsf{P}(ABC) = \frac{\mathsf{P}(AB)}{\mathsf{P}(B)} \cdot \mathsf{P}(BC)$.

Разделим обе части на $\mathsf{P}(B)$:

$$\mathsf{P}(AC|B) = \mathsf{P}(A|B) \cdot \mathsf{P}(C|B).$$ □

Определение 9.6.

- Множество значений цепи $\mathscr{X}$ называется *фазовым пространством*.
- Условные вероятности
$$p_{ij}(k,n) := \mathsf{P}(X_n = j | X_k = i)$$
называются *переходными вероятностями* марковской цепи.
- $\mathbb{P}(k,n) = \big\| p_{ij}(k,n) \big\|_{i,j \in \mathscr{X}}$ — *матрица переходных вероятностей.*
- $\Pi(0) = \big(p_j(0),\ j \in \mathscr{X}\big)$ — строка, где $p_j(0) = \mathsf{P}(X_0 = j)$ — *начальное распределение цепи.*
- $\Pi(n) = \big(p_j(n),\ j \in \mathscr{X}\big)$, где $p_j(n) = \mathsf{P}(X_n = j)$ — *распределение цепи в момент времени n.*

Определение 9.7. Марковская цепь называется *однородной*, если $p_{ij}(k,n)$ зависит только от $i, j, n-k$, т.е.

$$p_{ij}(k,n) = p_{ij}(0, n-k) =: p_{ij}(n-k).$$

Примеры.

1. Простейшее случайное блуждание:
$$\mathsf{P}(S_n = j | S_{n-1} = i, S_{n-2} = a_{n-2}, \ldots, S_1 = a_1) =$$
$$= \mathsf{P}(S_{n-1} + \xi_n = j | S_{n-1} = i, S_{n-2} = a_{n-2}, \ldots, S_1 = a_1) =$$
$$= \mathsf{P}(\underbrace{\xi_n = j - i | S_{n-1} = a_{n-1}, S_{n-2} = a_{n-2}, \ldots, S_1 = a_1}_{\text{независимы}}) = \mathsf{P}(\xi_n = j - i),$$
которая не зависит от n, т.к. все ξ_k — одинаково распределенные. Значит, это однородная марковская цепь.

2. Ветвящиеся процессы
$$\mathsf{P}(X_n = j | X_{n-1} = i, \ldots, X_1 = a_1) =$$
$$= \mathsf{P}(\sum_{k=1}^{X_{n-1}} \xi_k^{(n)} = j | X_{n-1} = i, \ldots, X_1 = a_1) =$$
$$= \mathsf{P}(\sum_{k=1}^{i} \xi_k^{(n)} = j)$$
— не зависит от n. Значит, это однородная марковская цепь.

Лемма 9.1 (уравнение Колмогорова-Чепмена)**.** *В однородной марковской цепи*

$$p_{ij}(k+l) = \sum_{\alpha \in \mathscr{X}} p_{i\alpha}(k) \cdot p_{\alpha j}(l).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
p_{ij}(k+l) &= \mathsf{P}(X_{k+l} = j | X_0 = i) = \\
&= \sum_{\alpha \in \mathscr{X}} \mathsf{P}(X_{k+l} = j, X_k = \alpha | X_0 = i) = \\
&= \sum_{\alpha \in \mathscr{X}} \mathsf{P}(X_{k+l} = j | X_k = \alpha, X_0 = i) \cdot \mathsf{P}(X_k = \alpha | X_0 = i) = \\
&= \Big| \text{марковское свойство} \Big| = \\
&= \sum_{\alpha \in \mathscr{X}} \mathsf{P}(X_{k+l} = j | X_k = \alpha) \cdot \mathsf{P}(X_k = \alpha | X_0 = i) = \\
&= \sum_{\alpha \in \mathscr{X}} p_{i\alpha}(k) \cdot p_{\alpha j}(l).
\end{aligned}$$

□

Обозначения:

- $\mathbb{P}(k) = \|p_{ij}(k)\|_{i,j \in \mathscr{X}}$,
- $\mathbb{P} = \mathbb{P}(1)$,
- $p_{ij} = p_{ij}(1)$ — переходные вероятности за один шаг.

Следствие.

1. $\mathbb{P}(k+l) = \mathbb{P}(k) \cdot \mathbb{P}(l)$.

2. $\mathbb{P}(k) = \mathbb{P}^k$.

3. $\Pi(k+l) = \Pi(k) \cdot \mathbb{P}(l)$.

4. $\Pi(k) = \Pi(0) \cdot \mathbb{P}^k$.

Доказательство.

1. Из уравнения Колмогорова-Чепмена (9.1) в матричной форме.
2. Следует из 1).
3. По формуле полной вероятности:
$$p_j(k+l) = \mathsf{P}(X_{k+l} = j) = \sum_{\alpha} \mathsf{P}(X_{k+l} = j | X_k = \alpha) \cdot \mathsf{P}(X_k = \alpha) = \sum_{\alpha} p_\alpha(k) \cdot p_{\alpha j}(l).$$
4. Следует из 2) и 3).

□

Пример. Матрицу переходных вероятностей можно задавать с помощью ориентированного графа:

Пусть $\mathscr{X} = \{0, 1, 2\}$ и

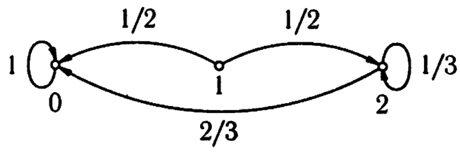
$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Этой матрице соответствует следующий граф:

Отметим, что состояние 0 является «поглощающим»: если частица в него попала, то она в нем и останется, поскольку $p_{00} = 1$.

Определение 9.8. Матрица переходных вероятностей $\mathbb{P} = \|p_{ij}\|$ является *стохастической*, т.е. $\forall p_{ij} \geqslant 0$ и $\forall i$:

$$\sum_{j \in \mathscr{X}} p_{ij} = 1.$$



Определение 9.9. Распределение $\Pi = (\pi_j, j \in \mathscr{X})$ вероятностей на $\mathscr{X}$ называется *стационарным* для $\mathbb{P}$ (или для марковской цепи), если

$$\Pi = \Pi \cdot \mathbb{P},$$

т.е. $\forall j \in \mathscr{X}\ \pi_j = \sum\limits_{\alpha \in \mathscr{X}} \pi_\alpha p_{\alpha j}$.

Утверждение 9.3. *Если начальное распределение* Π *является стационарным для* $\mathbb{P}$*, то* $\forall n$ $\Pi(n) = \Pi$.

Доказательство. $\Pi(n) = \Pi(0) \cdot \mathbb{P}^n = \Pi \cdot \mathbb{P}^n = \Pi$. □

Определение 9.10. Распределение вероятностей $\Pi = (\pi_j, j \in \mathscr{X})$ называется *предельным* для $\mathbb{P}$, если для любого начального распределения $\Pi(0)$ выполнено:

$$\Pi(n) = \Pi(0) \cdot \mathbb{P}^n \to \Pi,\ n \to \infty.$$

Теорема 9.5 (эргодическая). *Пусть* $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ *— однородная марковская цепь с матрицей переходных вероятностей* $\mathbb{P}$ *и фазовым пространством* $\mathscr{X} = \{1, \dots, N\}$. *Если* $\exists n_0$ *такой, что*

$$p_{ij}(n_0) > 0 \quad \forall i, j \in \mathscr{X},$$

то существуют числа $(\pi_1, \dots, \pi_N)$ *со свойством*

$$\pi_j > 0 \text{ и } \sum_{j \in \mathscr{X}} \pi_j = 1$$

такие, что для каждого $j \in \mathscr{X}$ *и любого* $i \in \mathscr{X}$:

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}(n) = \pi_j.$$

Наглядный смысл этого «эргодического» результата состоит в том, что за большое время система, описываемая марковской цепью, как бы «забывает», из какого начального состояния она «стартовала».

Доказательство. Введем обозначения:

$$m_j(n) = \min_i p_{ij}(n),$$
$$M_j(n) = \max_i p_{ij}(n).$$

Тогда

$$m_j(n+1) = \min_i p_{ij}(n+1) = \Big|\text{уравнение Колмогорова-Чепмена}\Big| =$$
$$= \min_i \sum_\alpha p_{i\alpha} \underbrace{p_{\alpha j}(n)}_{\geqslant m_j(n)} \geqslant m_j(n) \cdot \min_i \underbrace{\sum_\alpha p_{i\alpha}}_{=1} = m_j(n).$$

Аналогично, $M_j(n+1) \leqslant M_j(n)$. Значит, последовательность $M_j(n) - m_j(n)$ монотонно убывает.

Раз $m_j(n) \leqslant p_{ij}(n) \leqslant M_j(n)$, поэтому для доказательства существования предела $p_{ij}(n)$ достаточно проверить, что $M_j(n) - m_j(n) \to 0$.

Обозначим $\varepsilon = \min\limits_{i,j} p_{i,j}(n_0) > 0$.

Рассмотрим

$$
\begin{aligned}
p_{ij}(n+n_0) &= \Big|\text{Уравнения Колмогорова-Чепмена}\Big| = \sum_{\alpha\in\mathscr{X}} p_{i\alpha}(n_0)p_{\alpha j}(n) = \\
&= \sum_{\alpha\in\mathscr{X}} \big(p_{i\alpha}(n_0) - \varepsilon p_{j\alpha}(n) + \varepsilon p_{j\alpha}(n)\big)p_{\alpha j}(n) = \\
&= \sum_{\alpha\in\mathscr{X}} \underbrace{\big(p_{i\alpha}(n_0) - \varepsilon p_{j\alpha}(n)\big)}_{\geqslant 0} \underbrace{\overbrace{p_{\alpha j}(n)}^{\leqslant M_j(n)}}_{\geqslant m_j(n)} + \varepsilon \underbrace{\sum_{\alpha\in\mathscr{X}} p_{j\alpha}(n)p_{\alpha j}(n)}_{p_{jj}(2n)} \geqslant \\
&\geqslant m_j(n) \sum_{\alpha\in\mathscr{X}} \big(p_{i\alpha}(n_0) - \varepsilon p_{j\alpha}(n)\big) + \varepsilon p_{jj}(2n) = \\
&= m_j(n)(1-\varepsilon) + \varepsilon p_{jj}(2n).
\end{aligned}
$$

Аналогично, $p_{ij}(n+n_0) \leqslant M_j(n)(1-\varepsilon) + \varepsilon p_{jj}(2n)$.

Так как эти неравенства выполняются для любого i, то и $m_j(n+n_0) \geqslant m_j(n)(1-\varepsilon)+\varepsilon p_{jj}(2n)$ и $M_j(n+n_0) \leqslant M_j(n)(1-\varepsilon) + \varepsilon p_{jj}(2n)$.

Следовательно,

$$M_j(n+n_0) - m_j(n+n_0) \leqslant (M_j(n) - m_j(n))(1-\varepsilon).$$

Значит, $M_j(n+kn_0) - m_j(n+kn_0) \leqslant (M_j(n) - m_j(n))(1-\varepsilon)^k \to 0,\ k \to +\infty$.

Получаем, что $M_j(n)-m_j(n) \to 0$ по некоторой подпоследовательности. Раз $M_j(n)-m_j(n)$ — монотонная последовательность, то $M_j(n) - m_j(n) \to 0$.

Обозначим $\pi_j = \lim\limits_{n\to+\infty} m_j(n)$. Тогда $\pi_j \geqslant m_j(n) \geqslant m_j(n_0) \geqslant \varepsilon > 0$. Значит,

$$
\begin{aligned}
|p_{ij}(n) - \pi_j| &\leqslant |m_j(n) - \pi_j| + |p_{ij}(n) - m_j(n)| \leqslant \\
&\leqslant |m_j(n) - \pi_j| + |M_j(n) - m_j(n)| \to 0,\ n \to +\infty,
\end{aligned}
$$

т.е. $\forall i, j \ \lim\limits_{n\to+\infty} p_{ij}(n) = \pi_j$.

Наконец, $\sum\limits_{j\in\mathscr{X}} \pi_j = \sum\limits_{j\in\mathscr{X}} \lim\limits_{n\to+\infty} p_{ij}(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{\sum_{j\in\mathscr{X}} p_{ij}(n)}_{=1} = 1.$ □

Определение 9.11. Распределение $\Pi = (\pi_1, \ldots, \pi_N)$ из эргодической теоремы называется *эргодическим* для $\mathbb{P}$.

Следствие. *Эргодическое распределение является предельным и единственным стационарным.*

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in\mathscr{X}} \pi_\alpha p_{\alpha j} &= \sum_{\alpha\in\mathscr{X}} \lim_{n\to+\infty} p_{i\alpha}(n)p_{\alpha j} = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sum_{\alpha\in\mathscr{X}} p_{i\alpha}(n)\cdot p_{\alpha j}}_{p_{ij}(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} p_{ij}(n+1) = \pi_j,
\end{aligned}
$$

значит, Π — стационарное распределение.

Пусть $\Pi(0)$ — произвольное начальное распределение. Тогда

$$\Pi(n) = \Pi(0)\cdot\mathbb{P}(n) = \Pi(0)\cdot \begin{pmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & \cdots & p_{1N}(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1}(n) & p_{N2}(n) & \cdots & p_{NN}(n) \end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\to} \Pi(0)\cdot \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_N \end{pmatrix} = \Pi.$$

т.е. Π является предельным распределением.

Пусть $\hat{\Pi}$ — другое стационарное распределение. Тогда, взяв его в качестве начального, получим, что $\Pi(n) = \hat{\Pi}\ \forall n$, и, так как Π — предельное, $\Pi(n) \to \Pi$. Значит, $\Pi = \hat{\Pi}$. □

Замечание. *Значит, если выполняются условия эргодической теоремы, то достаточно найти стационарное распределение и им аппроксимировать распределение* $\Pi(n)$ *при больших* n.

9.3 Марковские цепи с непрерывным временем

Пусть $\mathscr{X}$ — не более чем счетное множество.

Определение 9.12. Случайный процесс $(X_t, t \geqslant 0)$ со значениями в $\mathscr{X}$ называется *марковской цепью*, если $\forall n\ \forall a_1, \dots, a_n, i, j \in \mathscr{X},\ \forall t \geqslant s > s_n > \dots > s_1$:
$$\mathsf{P}(X_t = j | X_s = i, X_{s_n} = a_n, \dots, X_{s_1} = a_1) = \mathsf{P}(X_t = j | X_s = i)$$
всегда, когда $\mathsf{P}(X_s = i, X_{s_n} = a_n, \dots, X_{s_1} = a_1) > 0$.

Определение 9.13.

- Множество $\mathscr{X}$ называется *фазовым пространством* или *пространством состояний* марковской цепи.
- Условные вероятности
$$p_{ij}(s,t) := \mathsf{P}(X_t = j | X_s = i)$$
называются *переходными вероятностями* марковской цепи.
- $\mathbb{P}(s,t) = \left\| p_{ij}(s,t) \right\|_{i,j \in \mathscr{X}}$ — *матрица переходных вероятностей.*
- $\Pi(0) = \big(p_j(0),\ j \in \mathscr{X}\big)$, где $p_j(0) = \mathsf{P}(X_0 = j)$ — *начальное распределение цепи.*
- $\Pi(t) = \big(p_j(t),\ j \in \mathscr{X}\big)$, где $p_j(t) = \mathsf{P}(X_t = j)$ — *распределение цепи в момент времени* $t \geqslant 0$.

Лемма 9.2 (свойства переходных вероятностей)**.**

1. $0 \leqslant p_{ij}(s,t) \leqslant 1$.
2. $\sum\limits_{j \in \mathscr{X}} p_{ij}(s,t) = 1\ \forall i \in \mathscr{X}$. *(И, значит,* $\mathbb{P}(s,t)$ *— стохастическая матрица)*
3. $p_{ij}(s,s) = \delta_{ij}$.
4. Уравнение Колмогорова-Чепмена
$\forall s \leqslant u \leqslant t$:
$$p_{ij}(s,t) = \sum_{\alpha \in \mathscr{X}} p_{i\alpha}(s,u) p_{\alpha j}(u,t).$$

Доказательство. 1.-3. Следуют из определения переходных вероятностей.

4.
$$\begin{aligned}
p_{ij}(s,t) &= \mathsf{P}(X_t = j | X_s = i) = \\
&= \sum_{\alpha \in \mathscr{X}} \mathsf{P}(X_t = j, X_u = \alpha | X_s = i) = \\
&= \sum_{\alpha \in \mathscr{X}} \mathsf{P}(X_t = j | X_u = \alpha, X_s = i) \cdot \mathsf{P}(X_u = \alpha | X_s = i) = \\
&= \Big| \text{марковское свойство} \Big| = \\
&= \sum_{\alpha \in \mathscr{X}} \mathsf{P}(X_t = j | X_u = \alpha) \cdot \mathsf{P}(X_u = \alpha | X_s = i) = \\
&= \sum_{\alpha \in \mathscr{X}} p_{i\alpha}(s,u) \cdot p_{\alpha j}(u,t).
\end{aligned}$$

□

Упражнение 4. Конечномерные распределения марковской цепи однозначно определяются начальными распределениями и переходными вероятностями.

Вопрос. *Верно ли обратное?*

Теорема 9.6 (о существовании марковских цепей)**.** *Пусть $\mathscr{X} \subset \mathbb{R}$ — не более чем счетное множество, $\Pi(0) = \big(p_j(0), j \in \mathscr{X}\big)$ — распределение вероятностей на $\mathscr{X}$, $p_{ij}(s,t)$, $i,j \in \mathscr{X}$, $0 \leqslant s \leqslant t$ — функции, обладающие свойствами 1)-4) из леммы.*

Тогда существует марковская цепь $(X_t, t \geqslant 0)$ такая, что:

$$\Pi(0) \text{ — её начальное распределение,}$$

$$p_{ij}(s,t) \text{ — её переходные вероятности.}$$

Доказательство. Для $0 \leqslant t_1 \leqslant \dots \leqslant t_n$ зададим вероятностную меру $\mathsf{P}_{t_1,\dots,t_n}$ на $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ следующим образом:

$$\mathsf{P}_{t_1,\dots,t_n}(B) = \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathscr{X}^n\cap B} \sum_{i_0\in\mathscr{X}} p_{i_{n-1}i_n}(t_{n-1},t_n)\cdot\ldots\cdot p_{i_0i_1}(0,t_1)\cdot p_{i_0}(0).$$

Несложно проверить, что $\mathsf{P}_{t_1,\dots,t_n}$ является вероятностной мерой в $\mathbb{R}^n$.

Для набора неупорядоченных $t_1,\dots,t_n$ зададим $\mathsf{P}_{t_1,\dots,t_n}$ по симметрии (см. Лемма 5.3).

Надо проверить условия согласованности мер $\{\mathsf{P}_{t_1,\dots,t_n} : t_1,\dots,t_n \geqslant 0, n \in \mathbb{N}\}$.

Пусть $B = B_1 \times \dots \times \underbrace{\mathbb{R}}_{j} \times \dots \times B_n$.

Тогда для $0 \leqslant t_1 \leqslant \dots \leqslant t_n$:

$$\mathsf{P}_{t_1,\dots,t_n}(B) = \sum_{i_1\in B_1\cap\mathscr{X}} \dots \sum_{i_n\in B_n\cap\mathscr{X}} \sum_{i_0\in\mathscr{X}} p_{i_{n-1}i_n}(t_{n-1},t_n)\cdot\ldots\cdot p_{i_0i_1}(0,t_1)\cdot p_{i_0}(0) =$$

$$\Bigg(\text{Но} \sum_{i_j\in\mathbb{R}\cap\mathscr{X}} p_{i_{j-1}i_j}(t_{j-1},t_j)\cdot p_{i_ji_{j+1}}(t_j,t_{j+1}) = \Big|\text{Уравнение Колмогорова-Чепмена}\Big| =$$

$$= p_{i_{j-1}i_{j+1}}(t_{j-1},t_{j+1}).\Bigg)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i_1\in B_1\cap\mathscr{X}} \dots \sum_{i_{j-1}\in B_{j-1}\cap\mathscr{X}} \sum_{i_{j+1}\in B_{j+1}\cap\mathscr{X}} \dots \sum_{i_n\in B_n\cap\mathscr{X}} \sum_{i_0\in\mathscr{X}} p_{i_{n-1}i_n}(t_{n-1},t_n)\cdot\ldots \\ &\ldots\cdot p_{i_{j-1}i_{j+1}}(t_{j-1},t_{j+1})\cdot\ldots\cdot p_{i_0i_1}(0,t_1)\cdot p_{i_0}(0) = \\ &= \mathsf{P}_{t_1,\dots,t_{j-1},t_{j+1},\dots,t_n}(B_1\times\dots\times B_{j-1}\times B_{j+1}\times\dots\times B_n). \end{aligned}$$

Значит, есть свойство согласованности.

По теореме Колмогорова 5.1 существует случайный процесс $(X_t, t \geqslant 0)$ с такими конечномерными распределениями.

Легко видеть, что $(X_t, t \geqslant 0)$ есть искомая марковская цепь. □

Определение 9.14. Марковская цепь $(X_t, t \geqslant 0)$ называется *однородной*, если её переходные вероятности $p_{ij}(s,t)$ зависят только от i, j и $t-s$:

$$p_{ij}(s,t) = p_{ij}(0,t-s) =: p_{ij}(t-s).$$

Тогда

$$\mathbb{P}(t) = \big\|p_{ij}(t)\big\|_{i,j\in\mathscr{X}}.$$

Определение 9.15. Набор стохастических матриц $(\mathbb{P}(t), t \geqslant 0)$ называется *стохастической полугруппой*, если

1. $\mathbb{P}(0) = \mathrm{I}$ (единичная матрица);
2. $\mathbb{P}(t+s) = \mathbb{P}(t)\cdot\mathbb{P}(s) \quad \forall s,t \geqslant 0$.

Следствие. *Матрицы $\mathbb{P}(t)$ у однородной марковской цепи образуют стохастическую полугруппу.*

Доказательство. $\mathbb{P}(t+s) = \mathbb{P}(0,t+s) = \Big|\text{уравнение Колмогорова-Чепмена}\Big| = \mathbb{P}(s,t+s)\cdot\mathbb{P}(0,s) = \mathbb{P}(t)\cdot\mathbb{P}(s)$. □

Упражнение 5. Любая стохастическая полугруппа является набором матриц переходных вероятностей однородной марковской цепи.

Пример 4. Процесс $(N_t, t \geqslant 0)$ является однородной марковской цепью.

Доказательство.
$$\mathsf{P}(N_t = j | N_s = i) = \frac{\mathsf{P}(N_t - N_s = j - i, N_s = i)}{\mathsf{P}(N_s = i)} = \mathsf{P}(N_t - N_s = j - i) = \frac{(\lambda(t-s))^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda(t-s)}.$$
□

Определение 9.16. Распределение $\Pi = (\pi_j, j \in \mathscr{X})$ вероятностей на $\mathscr{X}$ называется *стационарным* распределением для стохастической полугруппы $(\mathbb{P}(t), t \geqslant 0)$, если $\forall t \geqslant 0$
$$\Pi = \Pi \cdot \mathbb{P}(t),$$
т.е. $\pi_j = \sum\limits_{\alpha} \pi_\alpha p_{\alpha j}(t)$.

Наблюдение. Если стационарное распределение Π взять в качестве начального, то $\forall t \geqslant 0$ $\Pi(t) = \Pi$.

Доказательство. $\Pi(t) = \Pi \cdot \mathbb{P}(t) = \Pi$. □

Определение 9.17. Распределение $\Pi = (\pi_j, j \in \mathscr{X})$ вероятностей на $\mathscr{X}$ называется *предельным* для стохастической полугруппы $(\mathbb{P}(t), t \geqslant 0)$, если для любого начального распределения $\Pi(0)$ выполнено:
$$\Pi(t) = \Pi(0) \cdot \mathbb{P}(t) \to \Pi, \text{ при } t \to +\infty,$$
$$\text{т.е. } p_j(t) \to \pi_j.$$

Как и для дискретного времени, можно сформулировать следующую теорему:

Теорема 9.7 (Эргодическая, б/д)**.** *Пусть $(\mathbb{P}(t), t \geqslant 0)$ — стохастическая полугруппа. Если $\exists j_0 \in \mathscr{X}$ и $h, \delta > 0$ такие, что $\forall i \in X$:*
$$p_{ij_0}(h) \geqslant \delta,$$
то существует набор неотрицательных чисел $(\pi_j, j \in \mathscr{X})$ таких, что
$$\forall i, j \quad \lim_{t \to +\infty} p_{ij}(t) = \pi_j,$$
причем
$$|p_{ij}(t) - \pi_j| \leqslant (1-\delta)^{[t/2]}.$$

Следствие 9.2. *В условиях эргодической теоремы $\Pi = (\pi_j, j \in \mathscr{X})$ удовлетворяет условию $\Pi(t) \to \Pi, t \to +\infty$, т.е. $p_j(t) \to \pi_j, t \to +\infty$.*

Доказательство. По формуле полной вероятности $p_j(t) = \sum\limits_{\alpha} p_\alpha(0) \cdot p_{\alpha j}(t)$.

С другой стороны, $\pi_j = \underbrace{\sum\limits_{\alpha} p_\alpha(0)}_{=1} \cdot \pi_j$.

Значит, $|p_j(t) - \pi_j| = \left| \sum\limits_{\alpha} p_\alpha(0) \cdot (p_{\alpha j}(t) - \pi_j) \right| \leqslant \sum\limits_{\alpha} p_\alpha(0) \cdot |p_{\alpha j}(t) - \pi_j| \leqslant (1-\delta)^{[t/2]} \underbrace{\sum\limits_{\alpha} p_\alpha(0)}_{=1} \to$
$\to 0,\ t \to +\infty$. □

Следствие 9.3. *В условиях эргодической теоремы $\Pi = (\pi_j, j \in \mathscr{X})$ удовлетворяет равенству*
$$\Pi = \Pi \cdot \mathbb{P}(t),\ \forall t > 0,$$
или
$$\pi_j = \sum_{\alpha} \pi_\alpha \cdot p_{\alpha j}(t).$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\begin{aligned}\pi_j &= \lim_{s\to+\infty} p_{ij}(s+t) = \Big|\text{уравнение Колмогорова-Чепмена}\Big| = \\ &= \lim_{s\to+\infty} \sum_{\alpha} p_{i\alpha}(s)\cdot p_{\alpha j}(t) = \\ &= \Big|\text{Считаем, что } \mathscr{X} = 1,\ldots,N \text{ или } \mathscr{X} = \mathbb{N}\Big| \geqslant \\ &\geqslant \lim_{s\to+\infty} \sum_{\alpha\leqslant n} p_{i\alpha}(s)\cdot p_{\alpha j}(t) = \\ &= \sum_{\alpha\leqslant n} \pi_\alpha \cdot p_{\alpha j}(t).\end{aligned}$$

Неравенство выполнено для любого n, значит, $\pi_j \geqslant \sum\limits_{\alpha\in\mathscr{X}} \pi_\alpha p_{\alpha j}(t)$.

Теперь покажем, что $\sum\limits_j \pi_j < +\infty$.

Для $\forall n$:

$$\sum_{j\leqslant n} \pi_j = \sum_{j\leqslant n} \lim_{t\to+\infty} p_{ij}(t) = \lim_{t\to+\infty} \sum_{j\leqslant n} p_{ij}(t) \leqslant \lim_{t\to+\infty} \underbrace{\sum_{j\in\mathscr{X}} p_{ij}(t)}_{=1} = 1.$$

Значит, $\sum\limits_j \pi_j \leqslant 1$.

Отсюда, $\sum\limits_j \pi_j \overset{*}{\geqslant} \sum\limits_j \sum\limits_\alpha \pi_\alpha p_{\alpha j}(t) = \sum\limits_\alpha \sum\limits_j \pi_\alpha p_{\alpha j}(t) = \sum\limits_\alpha \pi_\alpha \underbrace{\sum\limits_j p_{\alpha j}(t)}_{=1} = \sum\limits_\alpha \pi_\alpha.$

Получаем, что в $\overset{*}{\geqslant}$ для $\forall j \in \mathscr{X}$, на самом деле, имеет место равенство:

$$\pi_j = \sum_\alpha \pi_\alpha \cdot p_{\alpha j}(t) \text{ или } \Pi = \Pi\cdot\mathbb{P}(t).$$

□

Следствие 9.4. *В условиях эргодической теоремы либо $\sum\limits_j \pi_j = 1$ (и тогда $\Pi = (\pi_j, j\in\mathscr{X})$ — это стационарное и предельное распределение), либо $\sum\limits_j \pi_j = 0$ (такое возможно только для бесконечного $\mathscr{X}$, пример — N_t).*

Доказательство. Достаточно показать, что если $\sum\limits_j \pi_j > 0$, то $\sum\limits_j \pi_j = 1$.

Рассмотрим $\tilde\pi_j = \frac{\pi_j}{\sum_j \pi_j}$. Тогда $\sum\limits_j \tilde\pi_j = 1$, а $\tilde\Pi = (\tilde\pi_j, j\in\mathscr{X})$ — распределение вероятностей на $\mathscr{X}$.

Пусть $(X_t, t\geqslant 0)$ — однородная марковская цепь с начальным распределением $\tilde\Pi$ и стохастической полугруппой $(\mathbb{P}(t), t\geqslant 0)$ из утверждения эргодической теоремы.

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X_t = j) = p_j(t) = \sum_\alpha \tilde\pi_\alpha \cdot p_{\alpha j}(t) = \frac{\sum\limits_\alpha \pi_\alpha\cdot p_{\alpha j}(t)}{\sum\limits_i \pi_i} = \\ = \Big|\text{Следствие 9.3}\Big| = \frac{\pi_j}{\sum\limits_i \pi_i} = \tilde\pi_j.\end{aligned}$$

С другой стороны, согласно Следствию 9.2, $\mathsf{P}(X_t = j) \to \pi_j,\ t\to+\infty$.
Значит, $\tilde\pi_j = \pi_j\ \forall j \Rightarrow \sum\limits_\alpha \pi_\alpha = 1$. □

Вопрос. *Как найти стационарное и предельное распределение?*

Нужен аналог матрицы переходных вероятностей за один шаг при дискретном времени.

Определение 9.18. Пусть $(\mathbb{P}(t), t \geqslant 0)$ — стохастическая полугруппа. Тогда матрица
$$Q = \frac{d^+}{dt}\mathbb{P}(t)\Big|_{t=0}$$
называется *инфинитиземальной* матрицей марковской цепи. Её элементы:
$$q_{ij} = \lim_{h\to 0+}\frac{p_{ij}(h) - p_{ij}(0)}{h}.$$

Определение 9.19. Стохастическая полугруппа $(\mathbb{P}(t), t \geqslant 0)$ называется *стандартной*, если
$$\mathbb{P}(t) \to \mathbb{P}(0) = \mathrm{I} \text{ (единичная матрица)},$$
при $t \to 0+$, т.е. для всех $i, j \in \mathscr{X}$ $\lim\limits_{t\to 0+} p_{ij}(t) = \delta_{ij}$ (символ Кронекера).

Теорема 9.8 (о существовании инфинитезимальной матрицы, б/д)**.** *Пусть* $(\mathbb{P}(t), t \geqslant 0)$ *— стандартная стохастическая полугруппа. Тогда у нее существует инфинитезимальная матрица* $Q = \frac{d^+}{dt}\mathbb{P}(t)\Big|_{t=0}$, *причем* $\forall i \neq j\ 0 \leqslant q_{ij} < +\infty$, *а* $q_{ii} \in (-\infty, 0]$.

Определение 9.20. Марковская цепь называется *консервативной*, если все элементы инфинитиземальной матрицы Q конечны и $\forall i \in \mathscr{X}$:
$$\sum_{j\in\mathscr{X}} q_{ij} = 0 \text{ или } \sum_{j\neq i} q_{ij} = -q_{ii}.$$

Теорема 9.9 (обратные дифференциальные уравнения Колмогорова)**.** *Пусть дана марковская цепь со стохастической полугруппой* $(\mathbb{P}(t), t \geqslant 0)$ *и инфинитезимальной матрицей* Q *— консервативной. Тогда* $\forall t > 0$
$$\mathbb{P}'(t) = Q \cdot \mathbb{P}(t)$$
или
$$p'_{ij}(t) = \sum_{\alpha} q_{i\alpha}\cdot p_{\alpha j}(t).$$

Доказательство. Пусть $t, h > 0$. Тогда по уравнениям Колмогорова-Чепмена:
$$\frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = \frac{1}{h}\sum_{\alpha} p_{i\alpha}(h)\cdot p_{\alpha j}(t) - \frac{1}{h}p_{ij}(t) = \frac{1}{h}\sum_{\alpha\neq i} p_{i\alpha}(h)\cdot p_{\alpha j}(t) + \frac{p_{ii}(h)-1}{h}p_{ij}(t).$$

Заметим, что $\lim\limits_{h\to 0+}\frac{p_{ii}(h)-1}{h}p_{ij}(t) = \lim\limits_{h\to 0+}\frac{p_{ii}(h)-p_{ii}(0)}{h}p_{ij}(t) = q_{ii}\cdot p_{ij}(t)$.

Обозначим $L_{ij}(h) = \frac{1}{h}\sum\limits_{\alpha\neq i} p_{i\alpha}(h)\cdot p_{\alpha j}(t)$.

Считаем, что $\mathscr{X} = \{1, \ldots, N\}$ или $\mathscr{X} = \mathbb{N}$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$\liminf_{h\to 0+} L_{ij}(h) \geqslant \liminf_{h\to 0+}\sum_{\substack{\alpha\neq i\\ \alpha\leqslant n}}\frac{p_{i\alpha}(h)}{h}\cdot p_{\alpha j}(t) = \sum_{\substack{\alpha\neq i\\ \alpha\leqslant n}} q_{i\alpha}\cdot p_{\alpha j}(t).$$

Переходя к пределу при $n \to +\infty$, получаем, что
$$\liminf_{h\to 0+} L_{ij}(h) \geqslant \sum_{\alpha\neq i} q_{i\alpha}\cdot p_{\alpha j}(t).$$

С другой стороны, при $i < n$:
$$L_{ij}(h) = \frac{1}{h}\sum_{\substack{\alpha\neq i\\ \alpha\leqslant n}} p_{i\alpha}(h)\cdot p_{\alpha j}(t) + \frac{1}{h}\sum_{\alpha>n} p_{i\alpha}(h)\cdot \underbrace{p_{\alpha j}(t)}_{\leqslant 1} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{h}\sum_{\substack{\alpha\neq i\\ \alpha\leqslant n}} p_{i\alpha}(h)\cdot p_{\alpha j}(t) + \frac{1}{h}\underbrace{\sum_{\alpha>n} p_{i\alpha}(h)}_{1-\sum\limits_{\alpha\leqslant n} p_{i\alpha}(h)}.$$

Значит,

$$\limsup_{h\to 0+} L_{ij}(h) \leqslant \limsup_{h\to 0+} \left(\sum_{\substack{\alpha\neq i\\ \alpha\leqslant n}} \frac{p_{i\alpha}(h)}{h}\cdot p_{\alpha j}(t) + \frac{1}{h}\Bigl(1 - p_{ii}(h) - \sum_{\substack{\alpha\neq i\\ \alpha\leqslant n}} p_{i\alpha}(h)\Bigr)\right) =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha\neq i\\ \alpha\leqslant n}} q_{i\alpha}\cdot p_{\alpha j}(t) + (-q_{ii} - \sum_{\substack{\alpha\neq i\\ \alpha\leqslant n}} q_{i\alpha}).$$

Устремляя $n\to+\infty$, получаем

$$\limsup_{h\to 0+} L_{ij}(h) \leqslant \sum_{\alpha\neq i} q_{i\alpha}\cdot p_{\alpha j}(t) - \underbrace{\sum_{\alpha} q_{i\alpha}}_{=0,\text{т.к. цепь консервативная}} = \sum_{\alpha\neq i} q_{i\alpha}\cdot p_{\alpha j}(t).$$

В итоге мы показали, что

$$\exists \lim_{h\to 0+} \frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = \sum_{\alpha\in\mathscr{X}} q_{i\alpha}\cdot p_{\alpha j}(t).$$

Аналогично доказывается равенство для левой производной. □

Упражнение 6. Переходные вероятности $p_{ij}(t)$ равномерно непрерывны на $\mathbb{R}_+$, если стохастическая полугруппа стандартна.

Теорема 9.10 (прямые дифференциальные уравнения Колмогорова)**.** *Пусть* $(\mathbb{P}(t), t\geqslant 0)$ *— стохастическая полугруппа такая, что инфинитиземальная матрица* Q *существует, все её элементы конечны и* $\forall i\neq j$*:*

$$p_{ij}(h) = q_{ij}\cdot h + \alpha_{ij}(h),$$

где $\frac{\alpha_{ij}(h)}{h}\to 0$ *при* $h\to 0$ *равномерно по всем* $i\in\mathscr{X}$*.*

Тогда $\forall t>0$

$$\mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t)\cdot Q$$

или

$$p'_{ij}(t) = \sum_{\alpha} p_{i\alpha}(t)\cdot q_{\alpha j}.$$

Доказательство. Пусть $t, h > 0$. Рассмотрим

$$\frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = \Bigl|\text{Уравнения Колмогорова-Чепмена}\Bigr| =$$

$$= \frac{1}{h}\sum_k p_{ik}(t)\cdot p_{kj}(h) - \frac{1}{h}p_{ij}(t) =$$

$$= p_{ij}(t)\frac{p_{jj}(h)-1}{h} + \sum_{k\neq j} p_{ik}(t)\frac{p_{kj}(h)}{h} =$$

$$= p_{ij}(t)\frac{p_{jj}(h)-1}{h} + \sum_{k\neq j} p_{ik}(t)\cdot q_{kj} + \sum_{k\neq j} p_{ik}(t)\frac{\alpha_{kj}(h)}{h}.$$

Но $\left|\sum_{k\neq j} p_{ik}(t)\frac{\alpha_{kj}(h)}{h}\right| \leqslant \max_{k\neq j}\left|\frac{\alpha_{kj}(h)}{h}\right|\cdot \underbrace{\left|\sum_{k\neq j} p_{ik}(t)\right|}_{\leqslant 1} \to 0$ при $h\to 0$ по условию.

Значит, $\exists \lim_{h\to 0+}\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h} = \sum_k p_{ik}(t)\cdot q_{kj}$.

Аналогично доказывается равенство для левой производной. □

Следствие 9.5. *В условиях теоремы 9.10*

$$\Pi'(t) = \Pi(t)\cdot Q.$$

Доказательство. Если $\mathscr{X}$ конечно, то всё просто:
$$\Pi'(t) = (\Pi(0)\cdot\mathbb{P}(t))' = \Pi(0)\cdot\mathbb{P}'(t) = \underbrace{\Pi(0)\cdot\mathbb{P}(t)}_{\Pi(t)}\cdot Q = \Pi(t)\cdot Q.$$

Если $\mathscr{X}$ бесконечно, то повторяем доказательство предыдущей теоремы:
$$\frac{p_j(t+h)-p_j(t)}{h} = \frac{1}{h}\sum_k p_k(t)\cdot p_{kj}(h) - \frac{1}{h}p_j(t) =$$
$$= p_j(t)\frac{p_{jj}(h)-1}{h} + \sum_{k\neq j} p_k(t)\cdot q_{kj} + \sum_{k\neq j} p_k(t)\frac{\alpha_{kj}(h)}{h}.$$

и $\left|\sum\limits_{k\neq j} p_k(t)\frac{\alpha_{kj}(h)}{h}\right| \leqslant \max\limits_{k\neq j}\left|\frac{\alpha_{kj}(h)}{h}\right| \to 0.$ □

Замечание. *Решение системы*
$$\begin{cases} \Pi'(t) = \Pi(t)\cdot Q \\ \Pi(0) = \Pi \\ \Pi(t) = (p_k(t), k\in\mathscr{X}),\ \sum\limits_k p_k(t) = 1 \end{cases}$$
не всегда дает настоящее распределение вероятностей в момент времени $t > 0$.

Пример 5 (Процессы чистого размножения)**.**
$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

$\mathscr{X} = \mathbb{Z}_+$.

Тогда решение $\Pi(t) = (p_k(t), k\in\mathscr{X})$ системы
$$\begin{cases} \Pi'(t) = \Pi(t)\cdot Q \\ p_0(0) = 1, p_k(0) = 0\ \forall k > 0 \end{cases}$$
удовлетворяет $\sum\limits_k p_k(t) = 1\ \forall t > 0 \ \Leftrightarrow\ \sum\limits_k \frac{1}{\lambda_k} = +\infty$.

Следствие 9.6. *В условиях теоремы 9.10 и эргодической теоремы выполнено*
$$\Pi\cdot Q = 0,$$
или
$$\sum_\alpha \pi_\alpha\cdot q_{\alpha j} = 0,\ \forall j.$$

Доказательство. Если $\sum\limits_j \pi_j = 0$, то всё очевидно.

Если же $\sum\limits_j \pi_j = 1$, то рассмотрим цепь с начальным распределением Π и теми же переходными вероятностями. Тогда по предыдущему следствию
$$\Pi'(t) = \Pi(t)\cdot Q,$$
но следствие 9.3 из эргодической теоремы говорит, что
$$\Pi(t) = \Pi\ \forall t > 0\ \Rightarrow\ 0 = \Pi\cdot Q.$$
□

Замечание. *Если фазовое пространство $\mathscr{X}$ конечно и цепь стандартная, то выполнены обе системы дифференциальных уравнений Колмогорова и цепь консервативна.*

10 Пространство L^2 случайных величин

Определение 10.1. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, тогда через $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ обозначается пространство случайных величин с конечным вторым моментом:

$$L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P}) = \{\xi \text{ – случайная величина} : \mathsf{E}|\xi|^2 < +\infty\}.$$

Свойства пространства L^2

1. L^2 — линейное пространство $\xi, \eta \in L^2 \Rightarrow a\xi + b\eta \in L^2$.
2. Функция $\|\xi\| = \sqrt{\mathsf{E}\xi^2}$ обладает свойствами нормы:
   $\|\xi + \eta\| \leqslant \|\xi\| + \|\eta\|$ (неравенство треугольника),
   $\|a\xi\| = |a|\|\xi\|$.

   Замечание. *Если вместо случайных величин рассматривать их классы эквивалентности п.н.:*
   $$\tilde{\xi} = \{\eta \text{ – с.в.} : \xi = \eta \text{ п.н.}\},$$
   то $\|\cdot\|$ станет настоящей нормой, т.е. $\|\tilde{\xi}\| = 0 \Leftrightarrow \tilde{\xi} = 0$.

3. Сходимость в пространстве L^2: $\xi_n \xrightarrow{L^2} \xi$, если $\|\xi_n - \xi\|^2 = \mathsf{E}|\xi_n - \xi|^2 \to 0$.
   Пространство L^2 является полным относительно такой сходимости: любая фундаментальная последовательность из L^2 имеет предел, т.е. $\|\xi_n - \xi_m\| \to 0,\ n, m \to \infty$, то $\exists \xi \in L^2 : \xi_n \xrightarrow{L^2} \xi$.
4. Функция $\langle \xi, \eta \rangle = \mathsf{E}\xi\eta$ играет роль скалярного произведения.
   Если $\xi, \eta \in L^2$, то $\xi\eta \in L^1$ (т.е. $\mathsf{E}\xi\eta$ конечно) и выполнено неравенство Коши-Буняковского:
   $$|\langle \xi, \eta \rangle| = |\mathsf{E}\xi\eta| \leqslant \sqrt{\mathsf{E}\xi^2 \mathsf{E}\eta^2} = \|\xi\| \cdot \|\eta\|.$$

Лемма 10.1 (непрерывность скалярного произведения)**.** *Пусть $\xi_n \xrightarrow{L^2} \xi, \eta_n \xrightarrow{L^2} \eta,\ \xi_m, \eta_n, \xi, \eta \in L^2$. Тогда $\mathsf{E}\xi_n\eta_n \to \mathsf{E}\xi\eta$.*

Доказательство. Рассмотрим

$$\begin{aligned}
|\mathsf{E}\xi_n\eta_n - \mathsf{E}\xi\eta| &= |\mathsf{E}\xi_n\eta_n - \mathsf{E}\xi_n\eta + \mathsf{E}\xi_n\eta - \mathsf{E}\xi\eta| \leqslant \\
&\leqslant |\mathsf{E}\xi_n(\eta_n - \eta)| + |\mathsf{E}(\xi_n - \xi)\eta| \leqslant \\
&\leqslant \Big|\text{неравенство Коши-Буняковского}\Big| \leqslant \\
&\leqslant \sqrt{\mathsf{E}\xi_n^2 \cdot \underbrace{\mathsf{E}(\eta_n - \eta)^2}_{\to 0}} + \sqrt{\mathsf{E}\,\underbrace{(\xi_n - \xi)^2}_{\to 0} \cdot \underbrace{\mathsf{E}\eta^2}_{=\text{const}}}
\end{aligned}$$

$$\|\xi_n\| \leqslant \Big|\text{неравенство треугольника}\Big| \leqslant \underbrace{\|\xi\|}_{=\text{const}} + \underbrace{\|\xi_n - \xi\|}_{\to 0}.$$

Значит, $\|\xi_n\|$ ограничена и $|\mathsf{E}\xi_n\eta_n - \mathsf{E}\xi\eta| \to 0 \Rightarrow \mathsf{E}\xi_n\eta_n \to \mathsf{E}\xi\eta$. □

Следствие. *Если $\xi_n \xrightarrow{L^2} \xi, \xi_n, \xi \in L^2$, то*

1. $\mathsf{E}\xi_n^2 \to \mathsf{E}\xi^2$;
2. $\mathsf{E}\xi_n \to \mathsf{E}\xi$;
3. $\xi_n \xrightarrow{L^1} \xi$, *т.е.* $\mathsf{E}|\xi_n - \xi| \to 0$.

10.1 Непрерывность случайных процессов

Определение 10.2. Случайный процесс называется *стохастически непрерывным* в точке $t_0 \in [a, b]$, если $X_t \xrightarrow{P} X_{t_0}$ при $t \to t_0$.

Определение 10.3. Случайный процесс $(X_t, t \in [a,b])$ называется *непрерывным в среднем квадратичном* (в с/к) в точке $t_0 \in [a,b]$, если $X_t \xrightarrow{L^2} X_{t_0}$ при $t \to t_0$.

Лемма 10.2 (критерий непрерывности в с/к)**.** *Пусть* $(X_t, t \in [a,b])$ *—* L^2*-процесс. Тогда* X_t *непрерывен в с/к в точке* t_0 $\Leftrightarrow$ *его корреляционная функция* $K(s,t) = \mathsf{E}X_sX_t$ *непрерывна в точке* (t_0, t_0)*.*

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть $X_t \xrightarrow{L^2} X_{t_0}$, при $t \to t_0$, $X_s \xrightarrow{L^2} X_{t_0}$, при $s \to t_0$.

Тогда в силу непрерывности скалярного произведения $K(s,t) = \mathsf{E}X_tX_s \to \mathsf{E}X_{t_0}X_{t_0} = K(t_0,t_0)$ при $s,t \to t_0$.

($\Leftarrow$) $\mathsf{E}(X_t - X_{t_0})^2 = \mathsf{E}X_t^2 - 2\mathsf{E}X_tX_{t_0} + \mathsf{E}X_{t_0}^2 = K(t,t) - 2K(t,t_0) + K(t_0,t_0) \underset{t\to t_0}{\to} K(t_0,t_0) - 2K(t_0,t_0) + K(t_0,t_0) = 0.$

□

Упражнение 7. Пусть $(X_t, t \in [a,b])$ — L^2-процесс. Тогда X_t непрерывен в с/к на $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $K(s,t) = \mathsf{E}X_sX_t$ непрерывна на $[a,b] \times [a,b]$.

Лемма 10.3 (критерий стохастической непрерывности)**.** *Пусть* $(X_t, t \in [a,b])$ *стохастически непрерывен в точке* t_0 $\Leftrightarrow$ $(X_t, X_{t_0}) \xrightarrow{d} (X_{t_0}, X_{t_0})$*.*

Доказательство.

($\Rightarrow$) $X_t \xrightarrow{P} X_{t_0}$ $\Rightarrow$ $(X_t, X_{t_0}) \xrightarrow{P} (X_{t_0}, X_{t_0})$, так как есть покомпонентаная сходимость по вероятности. $\Rightarrow$ $(X_t, X_{t_0}) \xrightarrow{d} (X_{t_0}, X_{t_0})$

($\Leftarrow$) $(X_t, X_{t_0}) \xrightarrow{d} (X_{t_0}, X_{t_0})$.

Тогда по теореме о наследовании сходимости $X_t - X_{t_0} \xrightarrow{d} X_{t_0} - X_{t_0} = 0$. Но так как 0 – константа, то $X_t - X_{t_0} \xrightarrow{P} 0$. Значит, $X_t \xrightarrow{P} X_{t_0}$.

□

Следствие. W_t *и* N_t *непрерывны в с/к на* $\mathbb{R}_+$*.*

10.2 Дифференцирование случайных процессов

Определение 10.4. Процесс $(X_t, t \in (a,b))$ называется *дифференцируемым по вероятности* в точке $t \in (a,b)$, если у выражения $\frac{X_{t+h} - X_t}{h}$ существует предел по вероятности при $h \to 0$. Он называется *производной по вероятности* и обозначается $(P)\frac{d}{dt}X_t$:

$$\frac{X_{t+h} - X_t}{h} \xrightarrow{P} (P)\frac{d}{dt}X_t.$$

Определение 10.5. Процесс $(X_t, t \in (a,b))$ называется *дифференцируемым в с/к* в точке $t \in (a,b)$, если у выражения $\frac{X_{t+h} - X_t}{h}$ существует предел в L^2 при $h \to 0$. Он называется *производной в с/к* и обозначается $(L^2)\frac{d}{dt}X_t$:

$$\frac{X_{t+h} - X_t}{h} \xrightarrow{L^2} (L^2)\frac{d}{dt}X_t.$$

Упражнение 8. Являются ли W_t и N_t дифференцируемыми в с/к или по вероятности?

Обозначение: Если $\xi_n \xrightarrow{L^2} \xi$ и они все элементы L^2, то $\xi = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, \xi_n$ (limit in mean).

Теорема 10.1 (критерий непрерывной дифференцируемости в с/к, б/д)**.** L^2*-процесс* $(X_t, t \in (a,b))$ *является непрерывно дифференцируемым в с/к на* (a,b) $\Leftrightarrow$ *его корреляционная функция* $K(s,t)$ *имеет непрерывную вторую смешанную производную* $\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}K(s,t)$ *на* $(a,b) \times (a,b)$*.*

Утверждение 10.1 (свойства L^2-производной)**.** *Пусть $(X_t, t \in (a,b))$ — L^2-процесс, дифференцируемый в с/к. Тогда*

1. *Для* $\forall \xi \in L^2: \quad \mathsf{E}\left(\frac{d}{dt}X_t \cdot \xi\right) = \frac{d}{dt}\left(\mathsf{E}X_t\xi\right).$
2. $\mathsf{E}\frac{d}{dt}X_t = \frac{d}{dt}\mathsf{E}X_t.$
3. $\mathsf{E}\frac{d}{dt}X_t \cdot \frac{d}{ds}X_s = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\mathsf{E}X_tX_s.$
4. $\operatorname{cov}\left(\frac{d}{dt}X_t, \frac{d}{ds}X_s\right) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\operatorname{cov}(X_t, X_s).$

Доказательство.

1. По определению $\frac{d}{dt}X_t = \underset{h\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\, \frac{X_{t+h}-X_t}{h}$.

   Тогда в силу леммы о непрерывности скалярного произведения:
   $\mathsf{E}\left(\frac{d}{dt}X_t \cdot \xi\right) = \mathsf{E}\left(\underset{h\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\, \frac{X_{t+h}-X_t}{h}\cdot\xi\right) = \lim_{h\to 0}\mathsf{E}\left(\frac{X_{t+h}-X_t}{h}\cdot\xi\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\mathsf{E}(X_{t+h}\xi - X_t\xi)}{h} =$
   $= \frac{d}{dt}\mathsf{E}(X_t\xi)$, из обычного определения производной.
2. Берем $\xi = 1$ в п. 1.
3. $\mathsf{E}\frac{d}{dt}X_t \cdot \frac{d}{ds}X_s = \left|\text{п.1 с } \xi = \frac{d}{ds}X_s\right| = \frac{d}{dt}\mathsf{E}\left(X_t \cdot \frac{d}{ds}X_s\right) = \left|\text{п.1 с } \xi = X_t\right| = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\mathsf{E}X_tX_s.$
4. $\operatorname{cov}(\frac{d}{dt}X_t, \frac{d}{ds}X_s) = \mathsf{E}\frac{d}{dt}X_t\cdot\frac{d}{ds}X_s - \mathsf{E}\frac{d}{dt}X_t\cdot\mathsf{E}\frac{d}{ds}X_s = \left|\text{п. 2 и 3}\right| = \frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\mathsf{E}X_tX_s - \frac{\partial}{\partial t}\mathsf{E}X_t\cdot\frac{\partial}{\partial s}\mathsf{E}X_s =$
   $= \frac{\partial^2}{\partial t\partial s}(\mathsf{E}X_tX_s - \mathsf{E}X_t\mathsf{E}X_s) = \frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\operatorname{cov}(X_t, X_s)$

□

10.3 Интегрирование случайных процессов

Определение 10.6. Процесс $(X_t, t \in (a,b))$ называется *интегрируемым в с/к* на $[a,b]$, если существует предел в L^2 интегральных сумм $\sum\limits_{i=1}^{n} X_{s_i}(t_i - t_{i-1})$, где $T = \{a = t_0 \leqslant t_1 < \dots < t_n = b\}, s_i \in [t_{i-1}, t_i]$ – размеченное разбиение $[a,b]$, при $\Delta T = \max\limits_i (t_i - t_{i-1}) \to 0$.

Такой предел называется интегралом от X_t по $[a,b]$ и обозначается

$$(L^2)\int\limits_a^b X_t dt := \underset{\Delta T\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\, \sum_{i=1}^{n} X_{s_i}(t_i - t_{i-1}).$$

Вопрос. *Когда интеграл существует?*

Теорема 10.2 (критерий интегрируемости)**.** *Пусть $(X_t, t \in [a,b])$ — L^2-процесс. Тогда X_t интегрируем в с/к на $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $K(s,t) = \mathsf{E}X_sX_t$ интегрируема по Риману на $[a,b]\times[a,b]$.*

Доказательство.

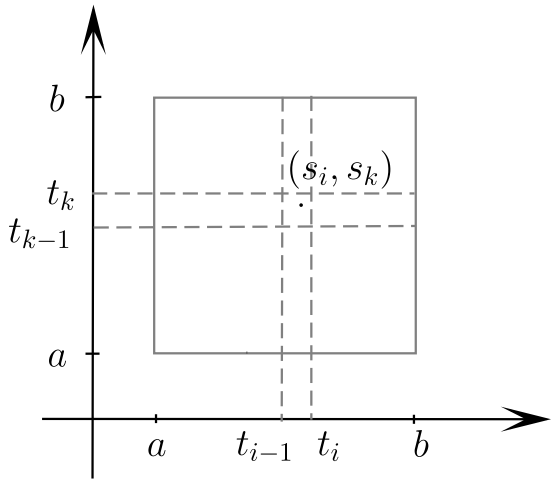
($\Leftarrow$) Пусть $T = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}, s_i \in [t_{i-1}, t_i]$ и $T' = \{a = t'_0 < t'_1 < \dots < t'_m = b\}, s'_j \in [t'_{j-1}, t'_j]$ — два различных разбиения $[a,b]$.

Обозначим $\Sigma(T) = \sum\limits_{i=1}^{n} X_{s_i}(t_i - t_{i-1})$, $\Sigma(T') = \sum\limits_{j=1}^{m} X_{s'_j}(t'_j - t'_{j-1})$ — соответствующие им интегральные суммы.

Процесс X_t интегрируем в с/к на $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ у $\Sigma(T)$ существует предел при $\Delta T \to 0$ $\Leftrightarrow$ (в силу полноты пространства L^2) последовательность $\Sigma(T)$ фундаментальна, т.е. $\mathsf{E}|\Sigma(T) - \Sigma(T')|^2 \to 0$ при $\Delta T, \Delta T' \to 0$.

Заметим, что $\mathsf{E}|\Sigma(T)-\Sigma(T')|^2 = \mathsf{E}(\Sigma(T))^2 - 2\mathsf{E}(\Sigma(T)\Sigma(T')) + \mathsf{E}(\Sigma(T'))^2$.
Рассмотрим

$$\mathsf{E}(\Sigma(T))^2 = \sum_{i,k=1}^{n} (\mathsf{E}X_{s_i}X_{s_k})(t_i - t_{i-1})(t_k - t_{k-1}) = \sum_{i,k=1}^{n} K(s_i, s_k)(t_i - t_{i-1})(t_k - t_{k-1}).$$



Получаем интегральную сумму для $K(s,t)$ при интегрировании по $[a,b]\times[a,b]$. $K(s,t)$ интегрируема по Риману на $[a,b]\times[a,b]$ по условию, поэтому

$$\mathsf{E}(\Sigma(T))^2 \to \iint\limits_{[a,b]^2} K(s,t)dsdt \text{ при } \Delta T \to 0.$$

Аналогично,

$$\mathsf{E}\Sigma(T)\Sigma(T') \to \iint\limits_{[a,b]^2} K(s,t)dsdt \text{ при } \Delta T, \Delta T' \to 0$$

и

$$\mathsf{E}(\Sigma(T'))^2 \to \iint\limits_{[a,b]^2} K(s,t)dsdt \text{ при } \Delta T' \to 0.$$

Значит,

$$\mathsf{E}|\Sigma(T)-\Sigma(T')|^2 \underset{\Delta T, \Delta T' \to 0}{\to 0} 2\iint\limits_{[a,b]^2} K(s,t)dsdt - 2\iint\limits_{[a,b]^2} K(s,t)dsdt = 0.$$

($\Rightarrow$) Раз X_t интегрируем, то $\Sigma(T) \overset{L^2}{\to} \int\limits_a^b X_t dt$ при $\Delta T \to 0$. Тогда по лемме о непрерывности скалярного произведения $\mathsf{E}\Sigma(T)\Sigma(T') \underset{\Delta T, \Delta T' \to 0}{\to} \mathsf{E}(\int\limits_a^b X_t dt)^2$.

Но $\mathsf{E}\Sigma(T)\Sigma(T')$ — это интегральная сумма для $K(s,t)$ по $[a,b]\times[a,b]$. Значит, по определению интеграла Римана функция $K(s,t)$ интегрируема по Риману, причем $\iint\limits_{[a,b]^2} K(s,t)dsdt = \mathsf{E}(\int\limits_a^b X_t dt)^2$.

□

Следствие. *Если $(X_t, t \in [a,b])$ непрерывен в с/к на $[a,b]$, то X_t интегрируем в с/к на $[a,b]$*

Доказательство. X_t непрерывен в с/к на $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $K(s,t) = \mathsf{E}X_sX_t$ непрерывна на $[a,b]\times[a,b]$ $\Rightarrow$ она интегрируема по Риману на $[a,b]\times[a,b]$ $\Leftrightarrow$ (по теореме) X_t интегрируем в с/к на $[a,b]$. □

Пример 6. W_t, N_t интегрируемы в с/к по любому $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$.

Теорема 10.3 (свойства L^2-интеграла)**.** *Пусть* $(X_t, t \in [a,b])$ — L^2*-процесс, интегрируемый в с/к. Тогда*

1. $\forall \xi \in L^2$ *выполнено:*
$$\mathsf{E}\left(\int\limits_a^b X_t dt \cdot \xi\right) = \int\limits_a^b \mathsf{E}(X_t \cdot \xi) dt.$$
2. $\mathsf{E}\int\limits_a^b X_t dt = \int\limits_a^b \mathsf{E} X_t dt.$
3. *Пусть даны* $[c', d'], [c, d] \subset [a, b]$*, тогда*
$$\mathsf{E}\left(\int\limits_c^d X_t dt \int\limits_{c'}^{d'} X_s ds\right) = \int\limits_c^d \int\limits_{c'}^{d'} (\mathsf{E} X_t X_s) ds dt.$$
4. $\operatorname{cov}\left(\int\limits_c^d X_t dt, \int\limits_{c'}^{d'} X_s ds\right) = \int\limits_c^d \int\limits_{c'}^{d'} \operatorname{cov}(X_t, X_s) ds dt.$

Доказательство.

1. Пусть $\Sigma(T)$ — интегральная сумма X_t: $\Sigma(T) = \sum\limits_{i=1}^n X_{s_i}(t_i - t_{i-1})$, тогда $\Sigma(T) \xrightarrow[\Delta T \to 0]{L^2} \int\limits_a^b X_t dt$.

   В силу леммы о непрерывности скалярного произведения: $\lim\limits_{\Delta T \to 0} \mathsf{E}(\Sigma(T)\xi) = \mathsf{E}(\int\limits_a^b X_t dt \cdot \xi)$, но
$$\lim_{\Delta T \to 0} \mathsf{E}(\Sigma(T)\xi) = \lim_{\Delta T \to 0} \underbrace{\sum_{i=1}^n \mathsf{E}(X_{s_i}\xi) \cdot (t_i - t_{i-1})}_{\text{интегральная сумма функции } X_t \cdot \xi},$$
   значит, есть предел интегральных сумм $X_t \cdot \xi$. Тогда $\lim\limits_{\Delta T \to 0} \mathsf{E}(\Sigma(T) \cdot \xi) = \int\limits_a^b \mathsf{E}(X_t \cdot \xi) dt$.
2. Из п. 1 с $\xi = 1$.
3. $\mathsf{E}\int\limits_c^d X_t dt \int\limits_{c'}^{d'} X_s ds = \left|\xi = \int\limits_{c'}^{d'} X_s ds \text{ в п. } 1\right| = \int\limits_c^d \mathsf{E}\left(X_t \int\limits_{c'}^{d'} X_s ds\right) dt = \left|\xi = X_t \text{ в п. } 1\right| =$
$= \int\limits_c^d \int\limits_{c'}^{d'} \mathsf{E} X_t X_s ds dt.$
4. Следует из п. 2 и 3.

$\square$

11 Стационарные случайные процессы

11.1 Стационарные в узком и широком смысле случайные процессы

Считаем $T = \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}_+, \mathbb{Z}_+$.

Определение 11.1. Случайный процесс $(X_t, t \in T)$ называется *стационарным в узком смысле*, если $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t_1, \ldots, t_n, h \in T$ выполнено:
$$(X_{t_1+h}, \ldots, X_{t_n+h}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}).$$

Определение 11.2. Процесс $(X_t, t \in T)$ называется *стационарным в широком смысле*, если:

1. X_t — L^2-процесс;
2. $\mathsf{E}X_t = a = const$;
3. $\operatorname{cov}(X_t, X_s)$ зависит только от $(t-s)$.

Утверждение 11.1. *Если $(X_t, t \in T)$ — стационарный в узком смысле L^2-процесс, то X_t стационарен и в широком смысле.*

Доказательство. Пусть $(X_t, t \in T)$ — стационарный в узком смысле L^2-процесс. Тогда $X_t \overset{d}{=} X_s\ \forall t, s \in T$, значит, $\mathsf{E}X_t = \mathsf{E}X_s$. Кроме того, $\forall t, s, h \in T$: $(X_t, X_s) \overset{d}{=} (X_{t+h}, X_{s+h}) \Rightarrow \operatorname{cov}(X_t, X_s) = \operatorname{cov}(X_{t+h}, X_{s+h})$.

Значит, X_t стационарен в широком смысле. □

Примеры.

1. $T = \mathbb{Z}_+,\ X_n = \xi\ \forall n \geqslant 0$ — стационарный в узком смысле процесс.
2. $T = \mathbb{Z}_+, X_n = \xi_n$, где ξ_n — независимые одинаково распределенные случайные величины. Тогда X_t стационарен в узком смысле.
3. ξ, η — одинаково распределенные случайные величины, невырожденные.
$$X_n = \begin{cases} \xi, & n = 0, 1 \pmod 3 \\ \eta, & n = 2 \pmod 3 \end{cases}$$
Тогда $X_n \overset{d}{=} X_m\ \forall n, m$, но он не стационарен в узком смысле, так как
$$(X_0, X_1) = (\xi, \xi) \overset{d}{\neq} (\xi, \eta) = (X_1, X_2).$$
4. ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины.
$\mathsf{P}(\xi_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$, $X_t = \xi_1 \sin t + \xi_2 \cos t$ — стационарный в широком смысле, но не в узком.

Теорема 11.1. *Пусть $(X_t, t \geqslant 0)$ — марковская однородная цепь с фазовым пространством $\mathscr{X}$, стохастической полугруппой переходных вероятностей $(\mathbb{P}(t), t \geqslant 0), \mathbb{P}(t) = \|p_{ij}(t)\|$ и начальным распределением $\Pi = (\pi_j, j \in \mathscr{X})$, которое является стационарным для стохастической полугруппы $\mathbb{P}(t)$. Тогда X_t — стационарный в узком смысле случайный процесс.*

Доказательство. Нужно показать, что $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \overset{d}{=} (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$.

Построим марковскую цепь с такими переходными вероятностями и начальным распределением, используя теорему 9.6: для $0 < t_1 < \dots < t_n$, $B_k \in \mathscr{X}, k = 1, \dots, n$ и $n \geqslant 1$ имеем
$$\mathsf{P}(X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n) = \sum_{j_1 \in B_1} p_{j_1}(t_1) \sum_{j_2 \in B_2} p_{j_1, j_2}(t_1, t_2) \dots \sum_{j_n \in B_n} p_{j_{n-1}, j_n}(t_{n-1}, t_n),$$
где $p_j(t) = \mathsf{P}(X_t = j) = \pi_j$ при всех $j \in \mathscr{X}$ в силу стационарности начального распределения. Поэтому требуемая стационарность следует из того, что
$$p_{ij}(s, t) = p_{ij}(s - t) = p_{ij}(s + h, t + h),$$
для любых $i, j \in \mathscr{X}, 0 \leqslant s \leqslant t, h \geqslant -s$ в силу однородности цепи. □

Теорема 11.2. *Пусть $(X_t, t \in T)$ — гауссовский процесс. Тогда он стационарен в узком смысле $\Leftrightarrow$ он стационарен в широком смысле.*

Доказательство.

($\Rightarrow$) Гауссовский процесс — это L^2-процесс. Значит, из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком.

($\Leftarrow$) Пусть $t_1, \dots, t_n, h \in T$, тогда вектор $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ — гауссовский и $\sim \mathcal{N}(a(t_1, \dots, t_n), \Sigma(t_1, \dots, t_n))$, где $a(t_1, \dots, t_n) = (\mathsf{E}X_{t_1}, \dots, \mathsf{E}X_{t_n}) = (a, \dots, a)$, $a = \mathsf{E}X_t = const$, а $\Sigma(t_1, \dots, t_n) = \|\operatorname{cov}(X_{t_i}, X_{t_j})\|$.

Но для $\forall h \in T : \Sigma(t_1 + h, \dots, t_n + h) = \Sigma(t_1, \dots, t_n)$, так как $\operatorname{cov}(X_{t_i+h}, X_{t_j+h}) = \operatorname{cov}(X_{t_i}, X_{t_j})$ из стационарности в широком смысле. Значит,
$$(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}) \overset{d}{=} (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}),$$

т.е. X_t стационарен в узком смысле.

$\square$

11.2 Ортогональная случайная мера

Определение 11.3. Пусть $(X_t, t \in T)$ и $(Y_t, t \in T)$ — два действительных случайных процесса, тогда $Z_t = X_t + iY_t$ — *комплексный случайный процесс.*

$K(s,t) = \mathsf{E} Z_s \overline{Z_t}$ — корреляционная функция Z_t, а $R(s,t) = \operatorname{cov}(X_s, X_t) = \mathsf{E}(Z_s - \mathsf{E} Z_s)\overline{(Z_t - \mathsf{E} Z_t)}$ — ковариационная функция процесса Z_t.

Определение 11.4. $\mathscr{K}$ называется *полукольцом*, если:

1. $\varnothing \in \mathscr{K}$;
2. $A, B \in \mathscr{K} \;\Rightarrow\; A \cap B \in \mathscr{K}$;
3. $A, B \in \mathscr{K}, B \subset A \;\Rightarrow\; \exists C_1, \ldots, C_N \in \mathscr{K} : B \sqcup \bigsqcup\limits_{i=1}^{N} C_i = A$.

Пример 7. $\mathscr{K} = \{(a, b] : a \leqslant b\}$ — полукольцо в $\mathbb{R}$.

$(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, а $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — пространство комлексных случайных величин $\xi : \mathsf{E}|\xi|^2 < +\infty$.

Определение 11.5. Отображение $Z : \mathscr{K} \to L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ называется *ортогональной случайной мерой на* $\mathscr{K}$, если:

1. Если $A, B \in \mathscr{K} : A \cap B = 0$, то $\mathsf{E} Z(A)\overline{Z(B)} = 0$ (свойство ортогональности);
2. Если $B = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i,\ B, B_i \in \mathscr{K}$, то
$$Z(B) = \sum_{i=1}^{\infty} Z(B_i) \text{ п.н.,}$$
где ряд сходится в среднем квадратическом.

Определение 11.6. Функция μ на $\mathscr{K}$, определенная по правилу $\mu(B) = \mathsf{E}|Z(B)|^2$ называется *структурной мерой* меры Z.

Упражнение 9.

1. μ — счетно-аддитивная функция на $\mathscr{K}$.
2. $\forall A, B \in \mathscr{K}$ выполнено $\mathsf{E} Z(A)\overline{Z(B)} = \mu(A \cap B)$.

Определение 11.7. Ортогональная случайная мера Z называется *центрированной*, если $\mathsf{E} Z(B) = 0,\ \forall B \in \mathscr{K}$.

Определение 11.8. Процесс $(X_t, t \in T), T \subset \mathbb{R}$ называется *процессом с ортогональными приращениями*, если $\forall s < u < t \in T : \mathsf{E}(X_t - X_u)\overline{X_s} = 0$. Процесс $(X_t, t \in T)$ называется *центрированным*, если $\mathsf{E} X_t = 0,\ \forall t \in T$.

Рассмотрим $\mathscr{K}_+ = \{(a, b] : 0 \leqslant a < b < +\infty\}$ — полукольцо полуинтервалов в $\mathbb{R}_+$.

Теорема 11.3.

1. *Пусть Z — ортогональная случайная мера на $\mathscr{K}_+$. Тогда процесс $(X_t, t \geqslant 0)$, заданный по формуле:*
$$X_t = Z(0, t]$$
является процессом с ортогональными приращениями, непрерывным справа в с/к.
2. *Пусть $(X_t, t \geqslant 0)$ — L^2-процесс с ортогональными приращениями, непрерывный в с/к. Тогда $Z : \mathscr{K}_+ \to L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, где $Z(a, b] = X_b - X_a$, является ортогональной случайной мерой на $\mathscr{K}_+$.*

Доказательство.

1. Легко видеть, что X_t — L^2-процесс.

   Пусть $s < u < t \in [a, b]$. Тогда
$$\mathsf{E}(X_t - X_u)\overline{X_s} = \Big|\text{аддитивность } Z\Big| = \mathsf{E}Z(u,t]\overline{Z(0,s]} = 0,$$
   так как Z — ортогональная мера. Значит, X_t имеет ортогональные приращения.

   Пусть μ — структурная мера для Z.

   Тогда при $t > t_0$:
$$\mathsf{E}|X_t - X_{t_0}|^2 = \mathsf{E}|Z(t_0, t]|^2 = \mu\underbrace{(t_0, t]}_{\to\varnothing} \to 0, \text{ при } t \to t_0+,$$
   в силу непрерывности в нуле функции μ (из счетной аддитивности μ).

2. (Идея доказательства)
   - Из ортогональности X_t следует ортогональность Z.
   - Кроме того, Z аддитивна. Нужно проверить, что Z — счетно-аддитивна.
   - Рассмотрим $G(t) = \mathsf{E}|X_t - X_a|^2,\ t \in [a, b]$. Ясно, что $G(a) = 0$, покажем, что $G(t)$ не убывает и непрерывна справа. (TODO)
   - Если $G(b) = 0 \ \Rightarrow\ G(t) \equiv 0 \ \Rightarrow\ Z = 0$, так как все X_t равны X_a
   - Если $G(b) > 0$, рассмотрим
$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ \frac{G(t)}{G(b)}, & t \in [a, b] \\ 1, & t > b \end{cases}$$
     Легко видеть, что $F(t)$ — функция распределения на $\mathbb{R}$.
   - Пусть $\exists\,\mathsf{P}$ — вероятностная мера, соответствующая функции распределения $F(t)$. $F(t) = \mathsf{P}(0, t]$.
   - Пусть $[a, b] = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k]$.

     Проверим, что
$$\mathsf{E}\left|Z(a,b] - \sum_{k=1}^{N} Z(a_k, b_k]\right|^2 = G(b)\left(\mathsf{P}(a,b] - \sum_{k=1}^{N}\mathsf{P}(a_k, b_k]\right) \to 0, N \to \infty,$$
     так как P — счетно-аддитивна на $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

     Получим счетную аддитивность Z.

□

11.3 Стохастический интеграл по ортогональной случайной мере

Пусть Z — ортогональная случайная мера на полукольце $\mathscr{K}$ подмножеств Λ, причем $\Lambda \in \mathscr{K}$. Пусть μ — структурная мера, $\mu(\Lambda) > 0$.

Утверждение 11.2. *Меру μ можно продолжить до меры на $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{K})$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{E} = \alpha(\mathscr{K})$ — минимальная алгебра, содержащая $\mathscr{K}$. Тогда $\mathscr{E}$ состоит из конечных объединений непересекающихся элементов $\mathscr{K}$, т.е. $\forall A \in \mathscr{E}$ существует представление вида $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} C_k,\ C_k \in \mathscr{K}$.

Тогда положим $\mu(A)$ равным
$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{n}\mu(C_k).$$
Легко видеть, что μ будет счетно-аддитивна на $\mathscr{E}$ (так как она счетно-аддитивна на $\mathscr{K}$).

Рассмотрим $\forall A \in \mathscr{E}$
$$\mathsf{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Lambda)}.$$
Тогда P — вероятностная мера на $\mathscr{E}$. По теореме Каратеодори (см. стр. 18) меру P можно продолжить единственным образом до вероятностной меры на $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{K})$.

Пусть $\tilde{\mathsf{P}}$ — такое продолжение. Положим $\forall A \in \mathscr{A}$:
$$\mu(A) = \tilde{\mathsf{P}}(A) \cdot \mu(\Lambda).$$
Это и будет искомое продолжение μ на $\mathscr{A}$. $\square$

Определение 11.9. Пусть $A \in \mathscr{E}$ и $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} C_k,\ C_k \in \mathscr{K}$. Тогда определим $Z(A)$ как
$$Z(A) = \sum_{k=1}^{n} Z(C_k).$$

Утверждение 11.3. *Определение Z на $\mathscr{E}$ корректно (с точностью до п.н.).*

Доказательство. Пусть $A = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} D_j,\ D_j \in \mathscr{K}$ — другое разбиение A на элементы из $\mathscr{K}$.

Тогда $Z(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} Z(C_k) = \Big|\text{Аддитивность } Z\Big| = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} Z(C_k \cap D_j)$.

С другой стороны, $Z(A) = \sum\limits_{j=1}^{m} Z(D_j) = \Big|\text{Аддитивность } Z\Big| = \sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n} Z(D_j \cap C_k)$. $\square$

Определение 11.10. Функция $f : \Lambda \to \mathbb{C}$ называется *простой*, если f представима в виде:
$$f(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathrm{I}_{B_k}(\lambda),$$
где $c_k \in \mathbb{C},\ B_k \in \mathscr{E}$ и $B_1, \ldots, B_n$ — разбиение Λ.

Определение 11.11. *Стохастическим интегралом* от простой функции $f(\lambda) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \mathrm{I}_{B_k}(\lambda)$ по ортогональной случайной мере Z называется
$$J(f) = \sum_{k=1}^{n} c_k Z(B_k).$$

$J(f) \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$.

Утверждение 11.4. *Определение стохастического интеграла от простых функций корректно.*

Доказательство. Пусть $f(\lambda) = \sum\limits_{j=1}^{m} d_j \mathrm{I}_{D_j}(\lambda)$ — другое представление, где $D_1, \ldots, D_m$ — другое разбиение Λ.

Тогда если $D_j \cap B_k \neq \varnothing$, то $d_j = c_k$.

Отсюда

$$\begin{aligned}
J(f) &= \sum_{k=1}^{n} c_k Z(B_k) = \Big|\text{аддитивность } Z\Big| = \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{j=1}^{m} Z(B_k \cap D_j) = \Big|\text{т.к. } Z(\varnothing) = 0\Big| = \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{j: B_k \cap D_j \neq \varnothing} Z(B_k \cap D_j) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j: B_k \cap D_j \neq \varnothing} d_j Z(B_k \cap D_j) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} d_j Z(B_k \cap D_j) = \\
&= \sum_{j=1}^{m} d_j \sum_{k=1}^{n} Z(B_k \cap D_j) = \Big|\text{аддитивность } Z\Big| = \\
&= \sum_{j=1}^{m} d_j Z(D_j).
\end{aligned}$$

□

Лемма 11.1 (изометрия J). *Стохастический интеграл от простых функций сохраняет скалярное произведение:*

$$\langle J(f), J(g) \rangle_{L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})} = \langle f, g \rangle_{L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu)},$$

или

$$\mathsf{E} J(f) \overline{J(g)} = \int_{\Lambda} f \overline{g} \mu(d\lambda).$$

Доказательство. Пусть $f(\lambda) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \mathrm{I}_{B_k}(\lambda)$, $g(\lambda) = \sum\limits_{j=1}^{m} d_j \mathrm{I}_{D_j}(\lambda)$.

Тогда

$$\begin{aligned}
\mathsf{E} J(f) \overline{J(g)} &= \mathsf{E} \left(\sum_{k=1}^{n} c_k Z(B_k) \right) \overline{\left(\sum_{j=1}^{m} d_j Z(D_j) \right)} = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_k \overline{d_j} \mathsf{E} Z(B_k) \overline{Z(D_j)} = \Big|\text{свойство } \mu\Big| = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_k \overline{d_j} \mu(B_k \cap D_j) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_k \overline{d_j} \int_{\Lambda} \mathrm{I}_{B_k \cap D_j}(\lambda) \mu(d\lambda) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_k \overline{d_j} \int_{\Lambda} \mathrm{I}_{B_k}(\lambda) \overline{\mathrm{I}_{D_j}(\lambda)} \mu(d\lambda) = \\
&= \int_{\Lambda} \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \mathrm{I}_{B_k}(\lambda) \right) \overline{\left(\sum_{j=1}^{m} d_j \mathrm{I}_{D_j}(\lambda) \right)} \mu(d\lambda) = \\
&= \int_{\Lambda} f \overline{g} \mu(d\lambda).
\end{aligned}$$

□

Следствие 11.1. *J — линейное отображение.*

Доказательство. Нужно проверить, что $J(\alpha f + \beta g) = \alpha J(f) + \beta J(g)$.

Рассмотрим

$$\begin{gathered}\langle J(\alpha f+\beta g)-\alpha J(f)-\beta J(g), J(\alpha f+\beta g)-\alpha J(f)-\beta J(g)\rangle_{L^2(\Omega)} = \\ = \langle J(\alpha f+\beta g), J(\alpha f+\beta g)\rangle_{L^2(\Omega)} - \alpha\langle J(f), J(\alpha f+\beta g)\rangle_{L^2(\Omega)} - \beta\langle J(g), J(\alpha f+\beta g)\rangle_{L^2(\Omega)} - \\ -\overline{\alpha}\langle J(\alpha f+\beta g), J(f)\rangle_{L^2(\Omega)} + |\alpha|^2\langle J(f), J(f)\rangle_{L^2(\Omega)} + \beta\overline{\alpha}\langle J(g), J(f)\rangle_{L^2(\Omega)} - \\ -\overline{\beta}\langle J(\alpha f+\beta g), J(g)\rangle_{L^2(\Omega)} + \alpha\overline{\beta}\langle J(f), J(g)\rangle_{L^2(\Omega)} + |\beta|^2\langle J(g), J(g)\rangle_{L^2(\Omega)} = \\ = \Big|\text{изометрия } J\Big| = \\ = \langle \alpha f+\beta g, \alpha f+\beta g\rangle_{L^2(\Lambda)} - \alpha\langle f, \alpha f+\beta g\rangle_{L^2(\Lambda)} - \beta\langle g, \alpha f+\beta g\rangle_{L^2(\Lambda)} - \\ -\overline{\alpha}\langle \alpha f+\beta g, f\rangle_{L^2(\Lambda)} + |\alpha|^2\langle f, f\rangle_{L^2(\Lambda)} + \beta\overline{\alpha}\langle f, g\rangle_{L^2(\Lambda)} - \\ -\overline{\beta}\langle \alpha f+\beta g, g\rangle_{L^2(\Lambda)} + \alpha\overline{\beta}\langle f, g\rangle_{L^2(\Lambda)} + |\beta|^2\langle g, g\rangle_{L^2(\Lambda)} = \\ = \langle \alpha f+\beta g-\alpha f-\beta g, \alpha f+\beta g-\alpha f-\beta g\rangle_{L^2(\Lambda)} = \langle 0, 0\rangle_{L^2(\Lambda)} = 0\end{gathered}$$

Значит, $J(\alpha f + \beta g) = \alpha J(f) + \beta J(g)$. □

Определение 11.12. Пусть f — произвольная функция, $f \in L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu)$. Пусть $f_n \overset{L^2(\Lambda)}{\to} f$ — последовательность простых функций.

Тогда *стохастическим интегралом* от функции f по ортогональной случайной мере Z называется

$$J(f) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, J(f_n),$$

т.е. $\mathsf{E}|J(f) - J(f_n)|^2 \to 0$.

Лемма 11.2. *Стохастический интеграл существует для $\forall f \in L^2(\Lambda) = L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu)$ и его определение корректно.*

Доказательство. Покажем, что простые функции плотны в пространстве $L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu)$.

Пусть f — произвольная функция в $L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu)$. Тогда найдется последовательность f_n : $f_n \overset{L^2(\Lambda)}{\to} f$ и все f_n имеют вид:

$$f_n = \sum_{k=1}^{m} c_k \mathrm{I}_{C_k}(\lambda),$$

где $C_k \in \mathscr{A}$ (т.е. f_n не обязательно простые).

Но $\forall A \in \mathscr{A}$ и $\forall \varepsilon > 0$ найдется $B \in \mathscr{E}$ такое, что $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$ (факт с теории вероятностей).

Значит, $\mathrm{I}_{C_k}(\lambda)$ сколь угодно близко приближается в $L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu)$ индикаторами I_{B_k}, $B_k \in \mathscr{E}$.

Получаем, что f приближается в $L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu)$ простыми функциями.

Пусть $f_n \overset{L^2(\Lambda)}{\to} f$, f_n — простые функции. Тогда f_n — фундаментальная последовательность. Отсюда

$$\mathsf{E}|J(f_n) - J(f_m)|^2 = \Big|\text{изометрия } J\Big| = \int\limits_{\Lambda} |f_n - f_m|^2 \mu(d\lambda) \to 0,$$

так как f_n фундаментальна. Значит, $J(f_n)$ фундаментальна в $L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu)$.

В силу полноты пространства $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ у последовательности $J(f_n)$ есть предел:

$$J(f) := \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, J(f_n).$$

Пусть $g_n \overset{L^2(\Lambda)}{\to} f$ — другая последовательность простых функций. Тогда $g_n - f_n \overset{L^2(\Lambda)}{\to} 0$. Значит, в силу изометрии и линейности J:

$$J(g_n) - J(f_n) \to 0,\ n \to \infty.$$

Следовательно, предел у $J(g_n)$ будет тот же самый. □

Следствие 11.2. *Стохастический интеграл от произвольной функции — изометрическое линейное отображение.*

Доказательство. Пусть $f, g \in L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu)$, $f_n \overset{L^2(\Lambda)}{\to} f$, $g_n \overset{L^2(\Lambda)}{\to} g$, f_n, g_n — простые функции.

Тогда

$$\int\limits_\Lambda f\overline{g}\mu(d\lambda) = \langle f, g\rangle_{L^2(\Lambda)} = \Big|\text{непрерывность скалярного произведения}\Big| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\langle f_n, g_n\rangle_{L^2(\Lambda)} = \Big|\text{изометрия } J \text{ для простых функций}\Big| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\langle J(f_n), J(g_n)\rangle_{L^2(\Lambda)} = \Big|\text{т.к. } J(f_n) \overset{L^2(\Omega)}{\to} J(f), J(g_n) \overset{L^2(\Omega)}{\to} J(g)\Big| =$$

$$= \langle J(f), J(g)\rangle_{L^2(\Omega)} = \mathsf{E}J(f)\overline{J(g)}.$$

Линейность проверяется так же, как и в случае простых функций. □

Теорема 11.4 (свойства стохастического интеграла)**.** *Стохастический интеграл по ортогональной случайной мере Z является линейным изометрическим отображением между $L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu)$ и некоторым подпространством $L^2_Z \subset L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$.*

При этом Z продолжается до ортогональной случайной меры на $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{K})$ по правилу $Z(A) = J(\mathrm{I}_A)$, $A \in \mathscr{A}$.

Вопрос. *Как строить стохастический интеграл, если $\Lambda \notin \mathscr{K}$, но $\Lambda = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty}\Lambda_n$, $\Lambda_n \in \mathscr{K}$?*

В этом случае структурную меру μ можно продолжить до конечной или σ-конечной меры на $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{K})$.

Для $f \in L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu)$ построение происходит в два этапа:

1. $\forall n$ для $f_n = f\Big|_{\Lambda_n}$ строим стохастический интеграл от $Z : J_n(f_n)$.
2. для f полагаем $J(f) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} J_n(f_n)$, где ряд сходится в $L^2(\Omega)$.

Свойства остаются теми же самыми, а Z продолжается до ортогональной случайной меры на $\mathscr{G} = \{A \in \mathscr{A} : \mu(A) < \infty\}$ по правилу $Z(A) = J(\mathrm{I}_A)$.

11.4 Спектральное представление стационарных процессов

Теорема 11.5 (Карунен, б/д)**.** *Пусть $(X_t, t \in T)$ — центрированный L^2-процесс, причем его ковариационная функция допускает* факторизацию, *т.е. существует измеримое пространство $(\Lambda, \mathscr{A})$ и конечная мера μ на нем такая, что $\forall t, s \in T$:*

$$\operatorname{cov}(X_t, X_s) = \int\limits_\Lambda f(t,\lambda)\overline{f(s,\lambda)}\mu(d\lambda),$$

где $\{f(t,\lambda), t \in T\}$ — некоторый набор функций из $L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu)$.

Если система $\{f(t,\lambda),\ t \in T\}$ — полная в $L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu)$, то существует центрированная ортогональная случайная мера Z на $\mathscr{A}$ такая, что $\forall t \in T$

$$X_t = \int\limits_\Lambda f(t,\lambda)Z(d\lambda).$$

При этом μ будет структурной мерой на Z.

Определение 11.13. Подобное представление называется *спектральным.*

Лемма 11.3 (из анализа)**.** *Пусть μ — конечная мера на $([-a,a], \mathscr{B}([-a,a]))$ такая, что $\mu(-a) = 0$. Тогда система функций $\{e^{i\frac{\pi n\lambda}{a}}, n \in \mathbb{Z}\}$ является полной в $L^2([-a,a], \mathscr{B}([-a,a]), \mu)$. Более того, если $f \in L^2([-a,a], \mathscr{B}([-a,a]), \mu)$ ограничена, $|f| \leqslant N$, то приближающую тригонометрическую сумму $h(\lambda)$ можно выбрать так, что $|h(\lambda)| \leqslant N + 1$.*

11.5 Спектральное представление процессов с дискретным временем

Пусть $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ — стационарный в широком смысле центрированный процесс, $R(n,m) = \operatorname{cov}(X_n, X_m)$ — неорицательно определенная и симметричная.

Определение 11.14. Функция $r(s,t)$, $s,t \in T$, называется *неотрицательно определенной (в комплексном смысле)* на $T \times T$, если $\forall n\ \forall t_1, \ldots, t_n \in T\ \forall z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ выполнено:

$$\sum_{i,j=1}^{n} r(t_i, t_j) z_i \overline{z_j} \geqslant 0.$$

Упражнение 10. Действительная функция $r(s,t)$ неотрицательно определена (в комплексном смысле) $\Leftrightarrow$ она неотрицательно определена (в действительном смысле (см. Определение 7.3)) и симметрична.

<u>Вывод:</u> $R(s,t)$ неотрицательно определена (в комплексном смысле).

Определение 11.15. Пусть $T = \mathbb{Z}$ или $\mathbb{R}$, тогда функция $(r(t), t \in T)$ называется *неорицательно определенной (в комплексном смысле)*, если неотрицательно определена функция двух переменных $\tilde{r}(s,t) = r(s-t)$.

Теорема 11.6 (Герглотц). *Функция $(R(n), n \in \mathbb{Z})$ является неотрицательно определенной (в комплексном смысле) $\Leftrightarrow$ существует конечная мера G на $\big([-\pi,\pi], \mathscr{B}([-\pi,\pi])\big)$ такая, что $\forall n \in \mathbb{Z}$*

$$R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} G(d\lambda).$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Пусть $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$, $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Рассмотрим

$$\sum_{j,l=1}^{n} R(k_j - k_l) z_j \overline{z_l} = \sum_{j,l=1}^{n} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik_j\lambda - ik_l\lambda} G(d\lambda) \right) z_j \overline{z_l} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{j,l=1}^{n} e^{ik_j\lambda} z_j \overline{e^{ik_l\lambda} z_l} G(d\lambda) \right) = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^{n} e^{ik_j\lambda} z_j \right|^2 G(d\lambda) \geqslant 0.$$

□

Замечание. *В теореме Герглотца всегда можно считать, что $G(\{-\pi\}) = 0$. Если, например, $G(\{-\pi\}) > 0$, то можно перейти к мере $\tilde{G}$, которая отличается от G только в точках $-\pi$ и π:*

$$\tilde{G}(\{-\pi\}) = 0,\ \tilde{G}(\{\pi\}) = G(\{-\pi\}) + G(\{\pi\}).$$

Тогда, так как $e^{in\lambda}\Big|_{\pi} = e^{in\lambda}\Big|_{-\pi}$, то $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} G(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} e^{in\lambda} \tilde{G}(d\lambda).$$

Теорема 11.7 (о спектральном представлении). *Пусть $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ — центрированный стационарный в широком смысле случайный процесс. Тогда существует центрированная ортогональная случайная мера Z на $\mathscr{B}([-\pi,\pi])$ такая, что $\forall n \in \mathbb{Z}$*

$$X_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} Z(d\lambda).$$

Доказательство. Обозначим $R(n) = \operatorname{cov}(X_n, X_0)$, $R(n,m) = \operatorname{cov}(X_n, X_m)$.

Тогда $R(n-m) = R(n,m)$ в силу стационарности в широком смысле. Значит, функция $R(n)$ неотрицательно определена (в комплексном смысле).

По теореме Герглотца $\exists G$ — мера на $\mathscr{B}([-\pi,\pi])$ такая, что $\forall n, m$:

$$\operatorname{cov}(X_n, X_m) = R(n-m) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\lambda} G(d\lambda) = \underbrace{\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}\overline{e^{im\lambda}} G(d\lambda)}_{\text{факторизация}}.$$

Так как $G(-\pi) = 0$, то $\{e^{in\lambda}, n \in \mathbb{Z}\}$ — полна в $L^2\big([-\pi,\pi], \mathscr{B}([-\pi,\pi]), G\big)$, то по теореме Карунена найдется центрированная ортогональная случайная мера Z на $\mathscr{B}([-\pi,\pi])$ такая, что $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$X_n = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} Z(d\lambda).$$

$\square$

Определение 11.16. Мера G из теоремы Герглотца называется *спектральной мерой* для процесса X_n:

$$\operatorname{cov}(X_n, X_0) = R(n) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} G(d\lambda).$$

Если G имеет плотность $g(\lambda)$, то $g(\lambda)$ называется *спектральной плотностью* X_n.

Вопрос. *Как найти спектральную плотность?*

Так как $R(n) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} g(\lambda) d\lambda$, то $R(n)$ — это коэффициенты Фурье для функции $g(\lambda)$. Тогда $g(\lambda)$ есть ряд Фурье:

$$g(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} R(n) e^{-in\lambda}.$$

Замечание. *Из теоремы Карунена также следует, что спектральная мера X_n = структурной мере для Z:*

$$\begin{array}{ccccc}
\operatorname{cov}(X_n, X_0) & = & R(n) & = & \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} G(d\lambda) \\
\| & & & & \| \\
\mathsf{E} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} Z(d\lambda) \int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 Z(d\lambda) & = & \Big| \text{ортогональность } Z \Big| & = & \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} \mu(d\lambda).
\end{array}$$

11.6 Спектральное представление в непрерывном времени

Пусть $(X_t, t \in \mathbb{R})$ — стационарный в широком смысле центрированный случайный процесс. Пусть $R(t) = \operatorname{cov}(X_t, X_0)$. Тогда $R(t)$ — неотрицательно определена (в комплексном смысле).

Теорема 11.8 (Бохнер-Хинчин)**.** *Пусть $(R(t), t \in \mathbb{R})$ непрерывна в нуле. Тогда $R(t)$ — неорицательно определена (в комплексном смысле) $\Leftrightarrow$ найдется конечная мера G на $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ такая, что $\forall t \in \mathbb{R}$*

$$R(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} G(d\lambda).$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Пусть $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R},\ z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.

$$\sum_{j,k=1}^{n} R(t_j - t_k) z_j \overline{z_k} =$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{i(t_j - t_n)\lambda} G(d\lambda) z_j \overline{z_k} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j,k=1}^{n} (e^{it_j\lambda} z_j) \overline{(e^{it_k\lambda} z_k)} \right) G(d\lambda) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{j=1}^{n} e^{it_j\lambda} z_j \right|^2 G(d\lambda) \geqslant 0.$$

□

Определение 11.17. Мера G из теоремы Бохнера-Хинчина называется *спектральной*:

$$\operatorname{cov}(X_t, X_0) = R(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} G(d\lambda).$$

Если G имеет плотность $g(\lambda)$, то $g(\lambda)$ называется *спектральной плотностью.*

Вопрос. *Как найти спектральную плотность?*

Теорема 11.9 (формула обращения)**.** *Если* $\int_{\mathbb{R}} |R(t)| dt < +\infty$*, то*

$$g(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-it\lambda} R(t) dt.$$

Теорема 11.10 (о спектральном представлении)**.** *Пусть* $(X_t, t \in \mathbb{R})$ *— центрированный стационарный в широком смысле непрерывный в с/к случайный процесс. Тогда существует центрированная ортогональная случайная мера* Z *на* $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ *такая, что* $\forall t \in \mathbb{R}$*:*

$$X_t = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} Z(d\lambda).$$

Доказательство. Положим $R(t) = \operatorname{cov}(X_t, X_0),\ R(t,s) = \operatorname{cov}(X_t, X_s)$. Тогда обе ковариации непрерывны в нуле, так как X_t непрерывен в с/к. По теореме Бохнера-Хинчина получаем, что

$$\operatorname{cov}(X_t, X_s) = R(t,s) = R(t-s) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\lambda} G(d\lambda) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} \overline{e^{is\lambda}} G(d\lambda)}_{\text{факторизация}}.$$

Покажем, что $\{e^{it\lambda}, t \in \mathbb{R}\}$ полна в $L^2(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), G)$.

Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), G)$. Для $\forall \varepsilon > 0\ \exists a > 0, N \in \mathbb{N}$ такие, что функция

$$f_{a,N}(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \notin [-a,a] \\ f(\lambda), & \lambda \in [-a,a],\ |f(\lambda)| \leqslant N \\ N, & \lambda \in [-a,a],\ f(\lambda) > N \\ -N, & \lambda \in [-a,a],\ f(\lambda) < -N \end{cases}$$

приближает $f : \|f - f_{a,N}\|_{L^2(\mathbb{R},G)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ и $G(\mathbb{R} \setminus [-a,a]) \cdot (N+1)^2 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{8},\ G(-a) = 0$.

По лемме из анализа $\exists h(\lambda) = \sum\limits_{k \in K} c_k e^{i\frac{\pi k \lambda}{a}}$, где K — конечное подмножество $\mathbb{Z}, c_k \in \mathbb{C}$ такие, что $\|f_{a,N} - h\|^2_{L^2([-a,a],G)} \leqslant \frac{\varepsilon^2}{8}$ и $|h(\lambda)| \leqslant N+1$ на $[-a,a]$ (а значит, и на $\mathbb{R}$, так как h периодическая).

Тогда

$$\|f-h\|_{L^2(\mathbb{R},G)} \leqslant \|f-f_{a,N}\|_{L^2(\mathbb{R},G)} + \|f_{a,N}-h\|_{L^2(\mathbb{R},G)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \|f_{a,N}-h\|_{L^2(\mathbb{R},G)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

так как $\|f_{a,N}-h\|^2_{L^2(\mathbb{R},G)} = \int\limits_{\mathbb{R}} |f_{a,N}-h|^2 G(d\lambda) = \int\limits_{-a}^{a} |f_{a,N}-h|^2 G(d\lambda) + \int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-a,a]} |h(\lambda)|^2 G(d\lambda) \leqslant \leqslant \frac{\varepsilon^2}{8} + (N+1)^2 \cdot G(\mathbb{R}\setminus[-a,a]) \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4}$.

По теореме Карунена существует центрированная ортогональная случайная мера Z на $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ такая, что $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$X_t = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} Z(d\lambda).$$

□

Следствие 11.3. *Спектральная мера X_n = структурной мере для Z.*