Случайные процессы. Прикладной поток.

Теоретическое задание 10.

Мартингалы.

1. Пусть $(W_t, t \geqslant 0)$ — винеровский процесс. Докажите, что процесс $Y_t = W_t^2 - t$ является мартингалом относительно естественной фильтрации процесса W_t.

2. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ — винеровский процесс. Найдите все такие пары $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, что процесс
$$(X_t = \exp\{\alpha W_t + \beta t\}, \ t \geq 0)$$
является мартингалом (субмартингалом, супермартингалом) относительно естественной фильтрации процесса W_t.

3. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ — такая последовательность случайных величин, что для любого n существует плотность $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ случайного вектора $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Пусть $\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots$ — другая последовательность случайных величин, причем также для любого n существует плотность $g_n(x_1, \ldots, x_n)$ случайного вектора $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Докажите, что процесс
$$X_n = \frac{g_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{f_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)}$$
является мартингалом относительно фильтрации $(\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ n \in \mathbb{N})$.

4. Докажите, что если τ — марковский момент относительно $\mathbb{F} = (F_t, t \geqslant 0)$, то τ является и опциональным моментом относительно $\mathbb{F}$.

5. Пусть $N = (N_t, t \geqslant 0)$ — пуассоновский процесс интенсивности λ, а Y_n — момент его n-го скачка. Пусть так же $\tau = \inf\{n \mid Y_n \geqslant x\}$. Покажите, что процесс $X_n = Y_n - n/\lambda$ является мартингалом относительно фильтрации $\mathbb{F}^Y$ и найдите $\mathsf{E}\tau$.

6. Пусть $(S_n, n \in \mathbb{N})$ — простейшее случайное блуждание с вероятностью шага вправо p. Пусть $a < x < b$ — целые числа, а $X_n = x + S_n$, $n \geqslant 1$. Обозначим $\tau = \min\{n : S_n \in \{a, b\}\}$ — момент выхода процесса X_n из полосы. Вычислите $\mathsf{E}\tau$.