Случайные процессы. Прикладной поток.

Теоретическое задание 9.

Марковские моменты.

1. Пусть задана фильтрация $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$, а $\tau_1, \tau_2, \dots$ — марковские моменты относительно $\mathbb{F}$. Докажите, что случайные величины
$$\prod_{k=1}^{m} \tau_k, \quad \sup_k \tau_k, \quad \inf_k \tau_k$$
тоже являются марковскими моментами относительно $\mathbb{F}$.

2. Пусть задана фильтрация $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \geqslant 0)$, а $\tau_1, \tau_2, \dots$ — марковские моменты относительно $\mathbb{F}$. Докажите, что случайные величины
$$\sum_{k=1}^{m} \tau_k, \quad \max_{k=1,\dots,m} \tau_k, \quad \min_{k=1,\dots,m} \tau_k$$
тоже являются марковскими моментами относительно $\mathbb{F}$.

3. Пусть $(W_t, t \geqslant 0)$ — винеровский процесс. Положим $\tau_x = \min\{t : W_t = x\}$ для некоторого $x > 0$. Найдите плотность случайной величины $Y_a = \sup\limits_{t \in [\tau_x, \tau_x + a]} W_t$.

4. Пусть $(W_t, t \geqslant 0)$ — винеровский процесс. Найдите $\mathsf{D} \sup\limits_{t \in [1,2]} W_t$.

5. Пусть $(W_t, t \geqslant 0)$ — винеровский процесс, а $u > s > 0$. Найдите
$$\mathsf{P}\left(W_t \text{ не имеет нулей на отрезке } [s, u]\right).$$