利用网格 Laplace 矩阵的谱进行网格的压缩

PB17000123 张湛

2019 年 8 月 29 日

摘要

Laplace 矩阵是图论中用到的一种重要矩阵，给定一个有 n 个顶点的图 $G=(V,E)$，其拉普拉斯矩阵被定义为 $L=I-DA$，其中 D 为图的度矩阵，A 为图的邻接矩阵。利用网格 Laplace 矩阵的谱进行网格的压缩，可以很好的近似原图像。其原理类似于 DFT。

0.1 Laplace 矩阵

$$L_{i,j}=\begin{cases}1 & ,\ i=j\\ -1/d_i & ,\ (i,j)\in E\\ 0 & ,\ \text{else}\end{cases}$$

或者，

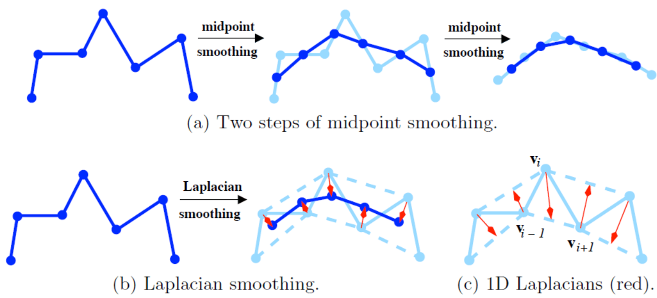
$$L_{i,j}=\begin{cases}d_i & ,\ i=j\\ -1 & ,\ (i,j)\in E\\ 0 & ,\ \text{else}\end{cases}$$

Laplacian 光滑变换，其变换矩阵为 $S=I-\frac{1}{2}L$。它的作用大致可由下图表示出来：

0.2 基于谱的网格压缩

对 Laplace 矩阵进行特征值分解，即谱分解：

$$L=VDV^{-1}$$



(a) Two steps of midpoint smoothing.

(b) Laplacian smoothing.

(c) 1D Laplacians (red).

图 1: 一维情形下的 Laplacian 光滑变换

其中，D 为特征值构成的对角阵，V 为对应的特征向量组成的矩阵 $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$。

假设，我们输入的信号为 X，则基于谱的压缩可以表示为：

$$X' = V_{(k)} V_{(k)}^T X$$

其中,V 为对应的前 k 个特征值最小的特征向量组成的矩阵 $V_{(k)} = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$。我们把 k 叫作谱系数。

对应于傅里叶变换，前 k 个特征值最小的特征向量组成的矩阵 $V_{(k)}$ 是包含了图 G 的主要信息，而细节信息都将在 $V_{(k)}^{res} = \{v_k, v_k + 1, ..., v_n\}$ 中。由此，我们可以计算得误差函数：

$$Loss = \|X - X'\| = \|V_{(k)}^{resT} X\|$$

0.3 算法实现与实验结果

在我的程序中，L 取的是文中所说的第一种。由于，matlab 中的 eigs 函数可以求得系数矩阵的前 k 个特征值最大的特征向量。因此为了得出我们所需的结果，我计算了 L 的逆的的前 k 个特征值最大的特征向量，这和要求的前 k 个特征值最小的特征向量是等价的。

$$[V, D] = eigs(inv(L), k);$$

在实验中，我发现对 V 进行一次正交化会使得压缩的结果更符合预期效果。于是：

$$V = orth(V);$$

这步能够有成效的具体原因我也不太清楚，但感觉上可能是和框架理论中要求正交性有些关系，我没有深究。

最后压缩：

$$y = V * (V' * x);$$

我们用颜色来表示误差的大小：

图 2: 误差的色阶图

这里解释一下为什么用第一种 L，而不用第二种对称的 L，我想这和老师的思考题“当拉普拉斯矩阵的元素取成 1 ，-1/d 时会出现重建的网格有很多的毛刺噪声（特征值取的很多时）”的原理是一样的。就是取前 k 个特征值最大的特征向量时，计算的特征值会比较大，从而分辨的误差较小，噪声较小。

下面是实验结果:

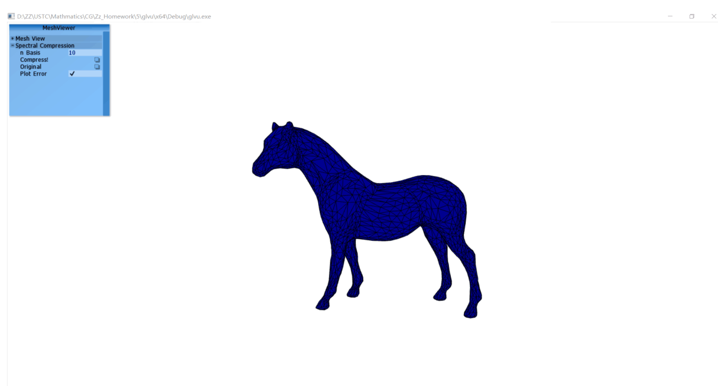


图 3: origin

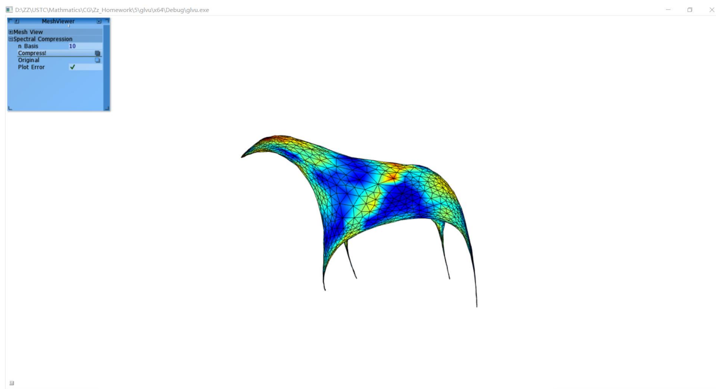


图 4: k = 10

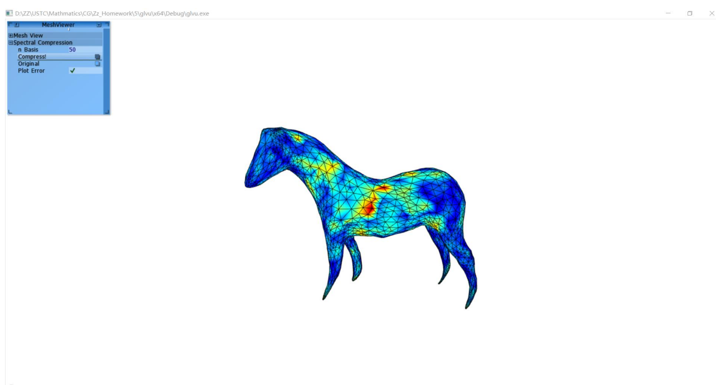


图 5: k = 50

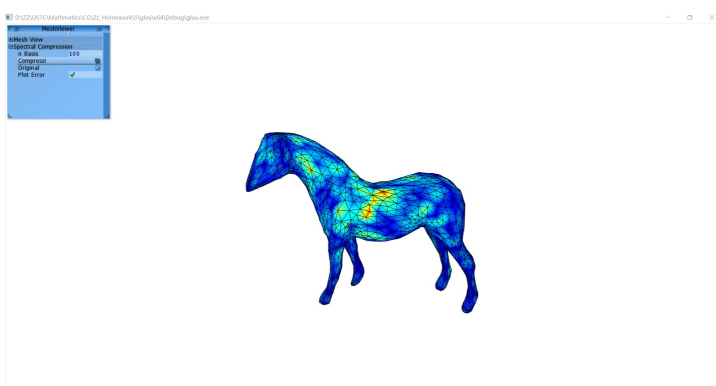


图 6: k = 100

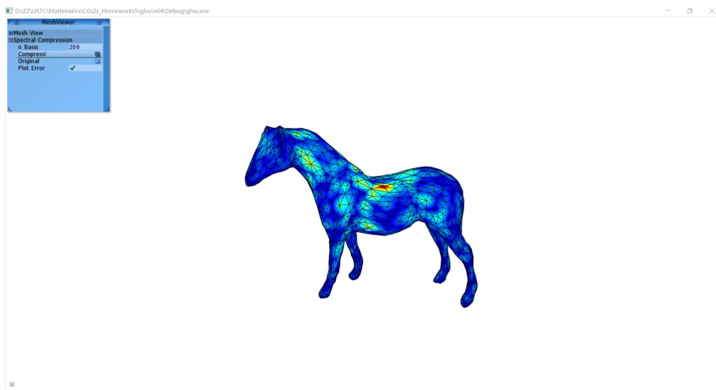


图 7: k = 200

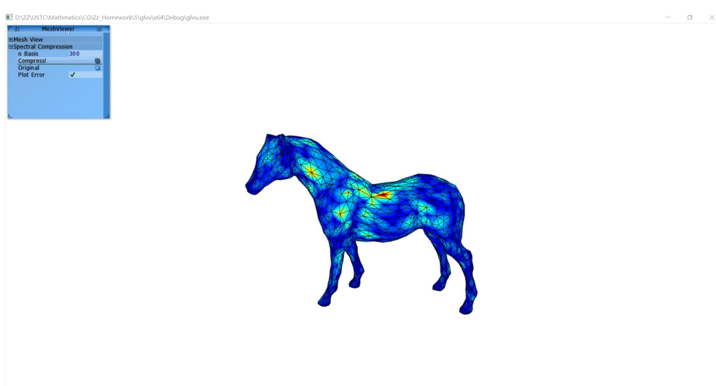


图 8: k = 300