网格参数化与纹理映射

PB17000123 张湛

2019 年 8 月 22 日

摘要

三维曲面离散化为三维网格后，为了进行纹理贴图，有时还要展开到二维的 uv 坐标平面上。虽然大部分空间曲面都不是可展的，但是在曲面的局部区域观察是可以表示成 $f(u,v)$ 的形式的，这个过程在数字图形处理中的术语叫参数化（$(Parameterization)$。从三角网格的角度，每个三角形和它的 uv 平面上的对应都是仿射变换的关系，根据不同的应用，通常要给这种局部映射加约束，比如要求角度或者面积的变形最小等，在曲面不撕裂的情况下，这种假设只能近似满足。

纹理映射是真实感图像制作的一个重要部分，运用它可以方便的制作出极具真实感的图形而不必花过多时间来考虑物体的表面细节。然而纹理加载的过程可能会影响程序运行速度，当纹理图像非常大时，这种情况尤为明显。如何妥善的管理纹理，减少不必要的开销，是系统优化时必须考虑的一个问题。还好，OpenGL 提供了纹理对象对象管理技术来解决上述问题。与显示列表一样，纹理对象通过一个单独的数字来标识。这允许 OpenGL 硬件能够在内存中保存多个纹理，而不是每次使用的时候再加载它们，从而减少了运算量，提高了速度。

1 网格参数化

三角网格参数化可归结为这样一个问题：给定一个由空间点集组成的三角网格和一个二维参数域。通常为平面或者球面。求一个参数域上的点 x_i 到网格上的点 u_i 的一一映射。使得参数域上的网格与原网格拓扑结构同构，并保证参数与上的三角形步重叠的同时谋求某种与原始网格之间几何变量的变形的最小化。

$$u_i = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{i,j} u_j \text{ , 当 } u_i \text{ 非边界点时}$$

其中，我们假设 $\{u_1, ..., u_n\}$ 是非边界点，$\{u_{n+1}, ..., u_N\}$ 是边界点。

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_{i,j} = 1, \lambda_{i,j} = 0 \text{ 当}(i,j) \notin E, \lambda_{i,j} > 0 \text{ 当}(i,j) \in E$$

1.1 Uniform Parameterization

取 $\lambda_{i,j} = \frac{1}{d_i}$，$\forall j = 1, ..., N$，这里 d_i 是 u_i 的度。

下图，是对猫头进行的参数化：

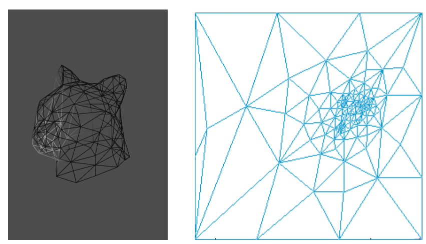

图 1: uniform

1.2 Weighted Least Squares Parameterization

令 $F(u_1, u_2, ..., u_n) = \sum_{(i,j)\in E} w_{i,j}\|u_i - u_j\|^2$，我们将这个能量函数最小化即可。取 $w_{i,j} = 1/\|x_i - x_j\|^q$，计算出最小化 F 的 $\{u_i\}$ 即可。该方法，等价于取 $\lambda_{i,j} = w_{i,j}/\sum_{j:(i,j)\in E} w_{i,j}$，进行运算。

下图，是对猫头进行的参数化：

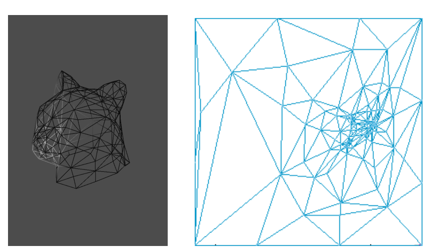

图 2: weighted least squares

1.3 Shape-preserving Parameterization

对于保形参数化内部点的求解方法，这里比较复杂一点。

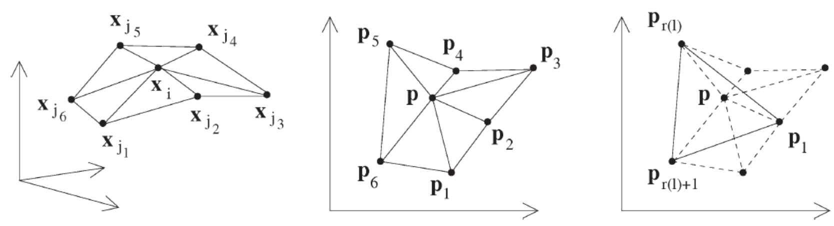

图 3: The subtriangulation and local parametrization

在局部参数化中，有

$$\|p_k - p\| = \|x_{j_k} - x_i\|,\ ang(p_k, p_i, p_{k+1}) = 2\pi\ ang(x_{j_k}, x_i, x_{j_{k+1}})/\theta_i$$

这里 $\theta_i = \sum_{k=1}^{d_i} ang(x_{j_k}, p, x_{j_{k+1}})$ 也就是领域内各个角度的和。其实这两个公式的意思就是保证长度一样和角度的比一样了。

然后就可以求得每个点的权重了。对于每个 p_l，我们找与 $p_l p$ 相交的对边的端点 $p_{r(l)}, p_{r(l)+1}$（若是交于一点，则后面面积比变为线段比即可）。有

$$\mu_{l,l} = \frac{area(p, p_{r(l)}, p_{r(l)+1})}{area(p_l, p_{r(l)}, p_{r(l)+1})}, \mu_{r(l),l} = \frac{area(p, p_{r(l)+1}, p_l)}{area(p_l, p_{r(l)}, p_{r(l)+1})}, \mu_{r(l)+1,l} = \frac{area(p, p_l, p_{r(l)})}{area(p_l, p_{r(l)}, p_{r(l)+1})}$$

最后求出的权重求一个平均值就好了:

$$\lambda_{i,j} = \frac{1}{d_i}\sum_{l=1}^{d_i} \mu_{k,l},\ k = 1, ..., d_i$$

这样就得到了整个权重了。最后在得到了权重以后再根据上述凸组合的公式求解线性方程求出参数化结果。

下图，是对猫头进行的参数化：

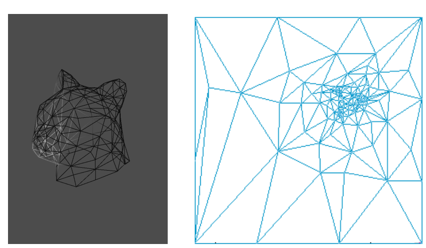

图 4: shape-preserving

2 纹理映射

完成参数化后，纹理映射就简单许多了。我们把下面这张图映到球上：

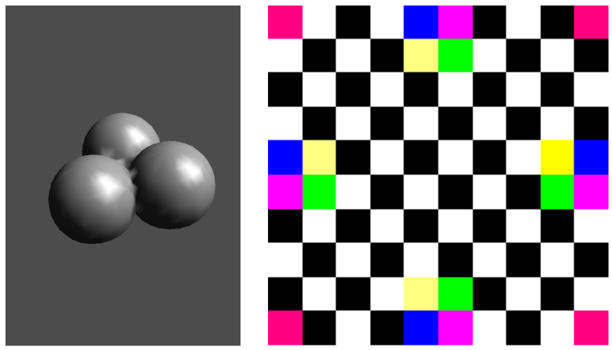

图 5: texture

这里，是三种不同参数化方法纹理映射后的结果：

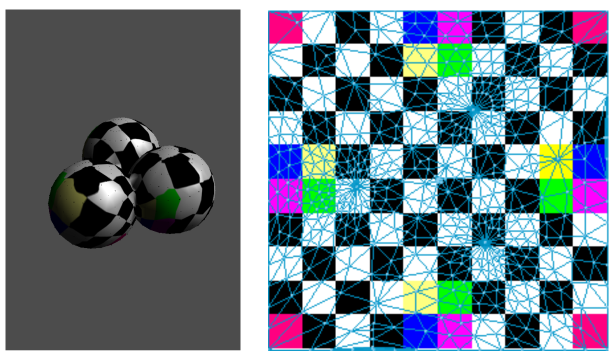

图 6: uniform parameterization

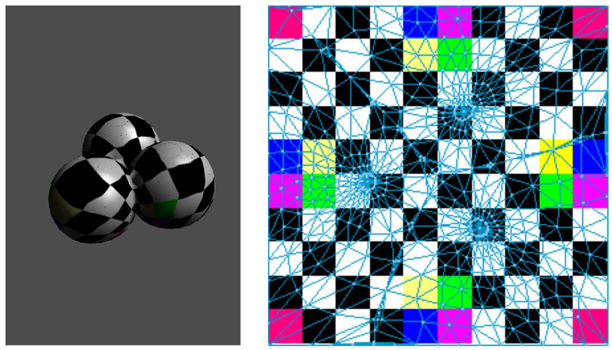

图 7: weighted least squares parameterization

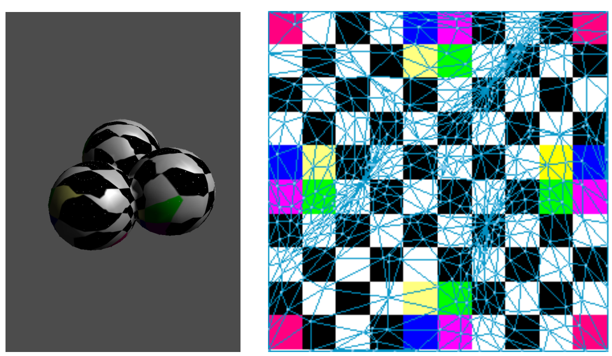

图 8: shape-preserving parameterization