RPiS, Lista 1 - Tomasz Woszczyński

Zadanie 1
Niech Σ będzie σ-ciałem zbiorów.

(a) Sprawdzić, że $\emptyset \in \Sigma$.

(b) Załóżmy, że $A_k \in \Sigma$, dla $k = 1, 2, 3, \ldots$. Wykazać, że $\bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \Sigma$.

Podpunkt (a):
Zgodnie z definicją rodziny zdarzeń, $\Omega \in \mathcal{F}$ oraz jeśli $A \in \mathcal{F}$, to dopełnienie zbioru A również należy do $\mathcal{F}$. Skoro tak, to dopełnieniem zbioru $A = \Omega$ jest $A^{\complement} = \Omega \backslash \Omega = \emptyset$.

Podpunkt (b):
Wiemy, że dla $A_k \in \Sigma$ zachodzi $A_k^{\complement} = (\Omega \setminus A_k) \in \Sigma$, czyli $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} (\Omega \setminus A_k) = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k$.
Ponadto, skorzystajmy z prawa de Morgana:

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^{\complement} = \bigcap_{i \in I} A_i^{\complement}, \text{ gdzie } I \in \mathbb{N}$$

Dzięki temu możemy wykonać następujące przekształcenia:

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\Omega \setminus A_k) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\Omega \setminus A_k)^{\complement} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k, \text{ c.n.d.}$$

Zadanie 2
Niech $\Omega = \{a, b, c\}$.

(a) Opisać σ-ciała zbiorów tej przestrzeni zdarzeń.

(b) Podać przykład funkcji X, Y takich, że X jest zmienną losową, a Y nie jest zmienną losową.

Podpunkt (a):
Wszystkimi σ-ciałami zbiorów tej przestrzeni zdarzeń są:

$$\begin{aligned}
&\Sigma_1 = \{\Omega, \emptyset\} \\
&\Sigma_2 = \{\Omega, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\} \\
&\Sigma_3 = \{\Omega, \emptyset, \{b\}, \{a, c\}\} \\
&\Sigma_4 = \{\Omega, \emptyset, \{c\}, \{a, b\}\} \\
&\Sigma_5 = \{\Omega, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}
\end{aligned}$$

W pierwszym przypadku nie bierzemy żadnych "dodatkowych" zbiorów poza Ω i jego dopełnieniem. W kolejnych przypadkach dodajemy po kolei jednoelementowe zbiory oraz ich dopełnienia, a więc wyczerpujemy wszystkie możliwości, gdyż dopełnienia są wszystkimi możliwościami zbiorów dwuelementowych. W ostatnim przypadku bierzemy jeszcze wszystkie singletony, jak i ich dopełnienia.

Podpunkt (b):
Weźmy sobie σ-ciało zbiorów $\Sigma_4 = \{\Omega, \emptyset, \{c\}, \{a, b\}\}$. Zdefiniujmy funkcję X będącą zmienną losową oraz funkcję Y niebędącą zmienną losową:

$$X(z)=\begin{cases}0 & \text{dla } z=a \text{ lub } z=b\\ 1 & \text{dla } z=c\end{cases} \qquad Y(z)=\begin{cases}0 & \text{dla } z=a\\ 1 & \text{dla } z=b \text{ lub } z=c\end{cases}$$

Wtedy $X(a)=0, X(b)=0, X(c)=1$ oraz $X^{-1}(0)=\{a,b\}, X^{-1}(1)=\{c\}$. Zbiory $\{a,b\}$ i $\{c\}$ należą do Σ_4, czyli rzeczywiście X jest zmienną losową. W przypadku Y mamy: $Y(a)=0, Y(b)=1, Y(c)=1$, ale $Y^{-1}(0)=\{a\}, Y^{-1}(1)=\{b,c\}$. Łatwo zauważyć, że zbiory $\{a\},\{b,c\}\notin\Sigma_4$, czyli nie należą do rodziny zdarzeń, co przeczy definicji zmiennej losowej.

Zadanie 3

Niech $\Omega=\{1,2,3,4,5\}$ oraz $S=\{1,4\}$. Wyznaczyć najmniejsze σ-ciało zbiorów zawierające S.

σ-ciało musi zawierać Ω, dla każdego elementu $A\in\mathcal{F}$ dopełnienie A również musi należeć do $\mathcal{F}$, oraz suma wszystkich zbiorów A_i dla $i\in\mathbb{N}$ musi należeć do $\mathcal{F}$. Biorąc pod uwagę te trzy warunki, najmniejszym σ-ciałem zawierającym zbiór S jest:

$$\mathcal{F}=\left\{\Omega, \underbrace{\emptyset}_{\Omega^{\complement}}, \{1,4\}, \underbrace{\{2,3,5\}}_{\{1,4\}^{\complement}}\right\}$$

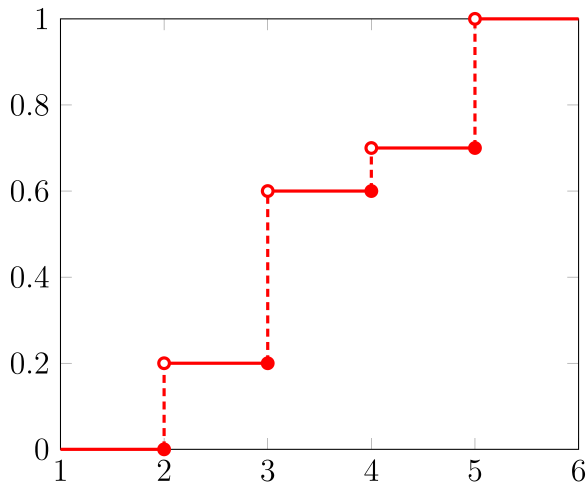
Zadanie 4

Wyznaczyć dystrybuantę i obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej X o rozkładzie

x_i	2	3	4	5
p_i	0.2	0.4	0.1	0.3

Dystrybuantę możemy wyznaczyć poprzez wyznaczanie odpowiednich wartości dla kolejnych przedziałów. Zawsze $\sum_i p_i=1$ (jest to maksymalna wartość dystrybuanty, jako że jest to funkcja schodkowa i rosnąca). Dystrybuantą dla takiego rozkładu będzie:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{dla } x\in(-\infty,2)\\ 0.2 & \text{dla } x\in[2,3)\\ 0.6 & \text{dla } x\in[3,4)\\ 0.7 & \text{dla } x\in[4,5)\\ 1 & \text{dla } x\in[5,\infty)\end{cases}$$



Wartość oczekiwaną $\mathbb{E}[X]$ zmiennej losowej obliczamy ze wzoru $\mathbb{E}[X]=\sum_i x_i p_i$, czyli:

$$\mathbb{E}[X]=2\cdot0.2+3\cdot0.4+4\cdot0.1+5\cdot0.3=0.4+1.2+0.4+1.5=3.5$$

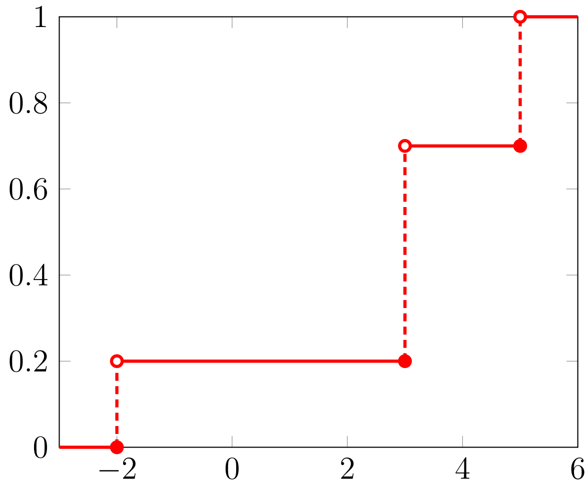
Zadanie 5

Dystrybuanta F zmiennej losowej X jest określona następująco:

x	$(-\infty, -2]$	$(-2, 3]$	$(3, 5]$	$(5, \infty)$
$F(x)$	0	0.2	0.7	1

Podać postać funkcji gęstości (funkcję prawdopodobieństwa) $f(x)$.

Narysujmy wykres przedstawiający dystrybuantę F zmiennej losowej X:



Interesujące nas punkty to te, w których kończą się poszczególne przedziały. W tym przypadku są to -2, 3 oraz 5. Aby obliczyć wartości p_i, odejmijmy sobie kolejno wartości $F(x)$ od prawej strony (czyli od 1). Będziemy wtedy mieli:

x_i	-2	3	5
p_i	$0.2 - 0 = 0.2$	$0.7 - 0.2 = 0.5$	$1 - 0.7 = 0.3$

Zadanie 6

Niech X będzie zmienną losową typu dyskretnego, udowodnić $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X)+b$.

$$\mathbb{E}(aX+b) = \sum_i (ax_i + b)p_i = \underbrace{a\sum_i x_i p_i}_{a\mathbb{E}(X)} + \underbrace{\sum_i bp_i}_{b\cdot 1} = a\mathbb{E}(X) + b, \text{ c.n.d.}$$

Zadanie 7

Niech X będzie zmienną losową typu ciągłego, udowodnić $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X)+b$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(aX+b) &= \int_{\mathbb{R}} (ax+b)f(x)dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}} ax \cdot f(x)dx + \int_{\mathbb{R}} b \cdot f(x)dx = \\
&= \underbrace{a\int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x)dx}_{a\mathbb{E}(X)} + \underbrace{b\int_{\mathbb{R}} f(x)dx}_{b\cdot 1} = \\
&= a\mathbb{E}(X) + b, \text{ c.n.d.}
\end{aligned}$$

Definicja funkcji beta

$$B(p,q)=\int\limits_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt,\ p>0,\ q>0$$

Zadanie 8
Sprawdzić, że

(a) $B(p,q+1)=B(p,q)\frac{q}{p+q}$,

(b) $B(p,q)=B(p,q+1)+B(p+1,q)$.

Podpunkt (a):
Rozpiszmy wartość funkcji beta dla p i $q+1$:

$$\begin{aligned}
B(p,q+1)&=\int\limits_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q}dt=\left|\begin{matrix}u=(1-t)^q & du=-q(1-t)^{q-1}\\ dv=t^{p-1} & v=\frac{t^p}{p}\end{matrix}\right|=\\
&=\underbrace{\left[\frac{t^p}{p}\cdot(1-t)^q\right]_0^1}_{\substack{t=1:\ 1-t=0\\ t=0:\ t^p=0\\ \text{czyli to jest 0}}}+\int\limits_0^1\frac{t^p}{p}\cdot q(1-t)^{q-1}dt=\\
&=\frac{q}{p}\int\limits_0^1 t^p\cdot(1-t)^{q-1}dt=\left[\textit{rozwinięcie } t^p=t^{p-1}-t^{p-1}(1-t)\right]=\\
&=\frac{q}{p}\int\limits_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}-t^{p-1}(1-t)^{q}dt=\\
&=\frac{q}{p}\left[\int\limits_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt-\int\limits_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q}dt\right]=\\
&=\frac{q}{p}\left[B(p,q)-B(p,q+1)\right]=\frac{q}{p}B(p,q)-\frac{q}{p}B(p,q+1)
\end{aligned}$$

Tak otrzymane równanie możemy teraz przekształcić:

$$\begin{aligned}
B(p,q+1)&=\frac{q}{p}B(p,q)-\frac{q}{p}B(p,q+1)\\
B(p,q+1)+\frac{q}{p}B(p,q+1)&=\frac{q}{p}B(p,q)\\
\frac{p+q}{p}B(p,q+1)&=\frac{q}{p}B(p,q)\ /\cdot\frac{p}{p+q}\\
B(p,q+1)&=\frac{q}{p+q}B(p,q),\ \text{c.n.d.}
\end{aligned}$$

Podpunkt (b):
Rozpiszmy równanie od prawej strony i rozwińmy oba wyrazy:

$$\begin{aligned} B(p,q+1)+B(p+1,q) &= \int\limits_0^1 t^{p-1}(1-t)^q dt + \int\limits_0^1 t^p(1-t)^{q-1}dt = \\ &= \int\limits_0^1 t^{p-1}(1-t)^q + t^p(1-t)^{q-1}dt = \\ &= \int\limits_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\underbrace{((1-t)+t)}_{1}dt = \\ &= \int\limits_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = B(p,q), \text{ c.n.d.} \end{aligned}$$

Zadanie 9
Udowodnić, że $\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p+q)$, gdzie $p, q \in \mathbb{R}^+$ (czyli wszystkie potrzebne całki istnieją).

Dla przypomnienia, funkcję Γ wyraża się takim wzorem:

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt, \ p > 0$$