

Zadanie 1

Sprawdzić, że:

- (a) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1,$
- (b) $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np.$

Podpunkt (a): skorzystajmy z dwumianu Newtona, a więc ze wzoru

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

i weźmy $x = 1 - p$ oraz $y = p$. Wtedy, po podstawieniu mamy:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = ((1-p) + p)^n = 1^n = 1, \text{ co należało dowieść.}$$

Podpunkt (b): skorzystajmy z własności $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$. Przekształćmy wzór:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} &= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &\quad \underbrace{\text{dla } k=0 \text{ jest to } 0} \\ &= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} p \cdot p^{k-1} (1-p)^{n-k} = \\ &= np \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = \\ &= np \cdot ((1-p) + p)^n = 1^n = np \cdot 1^n = np \end{aligned}$$

Dowiedliśmy więc, że $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np.$

Zadanie 2

Sprawdzić, że:

- (a) $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = 1,$
- (b) $\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda.$

Podpunkt (a):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} &= e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \\ &= e^{-\lambda} \cdot \underbrace{\left(\lambda^0 \cdot \frac{1}{0!} + \lambda^1 \cdot \frac{1}{1!} + \lambda^2 \cdot \frac{1}{2!} + \lambda^3 \cdot \frac{1}{3!} + \dots \right)}_{\text{szereg Maclaurina na } e^{\lambda}} = \\ &= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = e^{\lambda-\lambda} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

Szereg Maclaurina na e^λ wynika z tego, że $e^\lambda = f(\lambda) = f'(\lambda) = f''(\lambda) = \dots = 1 = f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots$, czyli powyższe przekształcenie jest dowodem wzoru.

Podpunkt (b):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} &= e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \\ &= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \\ &= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda \end{aligned}$$

Zadanie 3

Funkcją Γ -Eulera nazywamy wartość całki:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt, \quad p > 0$$

Wykazać, że $\Gamma(n) = (n-1)!$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Udowodnimy to indukcyjnie po n :

1. Baza indukcyjna: $n = 1$, wtedy:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} t^{1-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 0 - (-1) = 1 = 0!, \text{ czyli prawda } \checkmark$$

2. Krok indukcyjny: założmy, że dla $n \in \mathbb{N}$ jest $\Gamma(n) = (n-1)!$, musimy pokazać, że dla $\Gamma(n+1) = n! = n\Gamma(n)$.

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = \left| \begin{array}{ll} u = t^n & du = nt^{n-1} \\ dv = e^{-t} & v = -e^{-t} \end{array} \right| = \\ &= \underbrace{-\frac{t^n}{e^t} \Big|_0^{\infty}}_0 + \underbrace{\int_0^{\infty} t^{n-1} n e^{-t} dt}_n = n \Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n! \end{aligned}$$

Udowodniliśmy więc, że dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Całkowanie przez części: $\int u dv = uv - \int v du$, bierzemy łatwiejszą do zróźniczkowania część jako u oraz łatwiejszą do scałkowania część dv .

Zadanie 4

Niech $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$, gdzie $\lambda > 0$. Obliczyć wartość całek:

(a) $\int_0^{\infty} f(x) dx,$

(b) $\int_0^{\infty} x f(x) dx.$

Podpunkt (a):

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(x) dx &= \int_0^{\infty} \lambda \exp(-\lambda x) dx = \lambda \int_0^{\infty} \exp(-\lambda x) dx = \lambda \cdot \left. \frac{-\exp(-\lambda x)}{\lambda} \right|_0^{\infty} = \\ &= -\exp(-\lambda x) \Big|_0^{\infty} = \underbrace{\lim_{b \rightarrow \infty} \exp(-\lambda b)}_0 - \underbrace{(-\exp(0))}_{-1} = 0 - (-1) = 1 \end{aligned}$$

Podpunkt (b):

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x f(x) dx &= \int_0^{\infty} x \lambda \exp(-\lambda x) dx = \lambda \int_0^{\infty} x \exp(-\lambda x) dx = \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = x & du = 1 \\ v = -\frac{\exp(-\lambda x)}{\lambda} & dv = \exp(-\lambda x) \end{array} \right| = \\ &= \lambda \left(\left[\frac{x \exp(-\lambda x)}{\lambda} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{\exp(-\lambda x)}{\lambda} dx \right) = \\ &= \lambda \left(\left[-\frac{x \exp(-\lambda x)}{\lambda} \right]_0^{\infty} + \left[\frac{\exp(-\lambda x)}{\lambda^2} \right]_0^{\infty} \right) = \\ &= \left[\frac{(\lambda x + 1) \exp(-\lambda x)}{\lambda} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Zadanie 5

Wykazać, że $D_n = n$, gdzie

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & 1 \end{vmatrix}$$

Dodajmy do pierwszego wiersza wszystkie kolejne, a więc od drugiego do n -tego. Wtedy otrzymamy następującą macierz:

$$D_n = \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & 1 \end{vmatrix}$$

Otrzymana macierz jest macierzą dolnotrójkątną, a więc obliczenie wyznacznika tej macierzy sprowadza się do przemnożenia wszystkich wartości z przekątnej. Otrzymamy więc $\det(D_n) = n \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = n$, co kończy dowód.

Zadanie 6

Niech $I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx$. Mamy $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2}\right\} dy dx$. Stosując podstawienie $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, wykazać, że $I^2 = 2\pi$.

Rozwiązanie z ćwiczeń: stosując podstawienie z polecenia, wiemy, że $\theta \in [0, 2\pi)$ oraz $r \in [0, \infty)$. Dzięki temu możemy policzyć następujący Jakobian:

$$\begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

Wykorzystamy go do policzenia całki podwójnej I^2 następująco:

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r \exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\} d\theta dr = \int_0^{\infty} r \exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\} dr \cdot \int_0^{2\pi} 1 d\theta = \\ &= \left(-\exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\}\right)_0^{\infty} \cdot 2\pi = 2\pi, \text{ c.n.d.} \end{aligned}$$

Zadanie 7

Symbol \bar{s} oznacza średnią ciągu s_1, \dots, s_n . Udowodnić, że:

- (a) $\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 - n \cdot \bar{x}^2$,
- (b) $\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = \sum_{k=1}^n x_k y_k - n \bar{x} \bar{y}$.

Podpunkt (a):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 &= \sum_{k=1}^n (x_k^2 - 2x_k \bar{x} + \bar{x}^2) = \\ &= \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2x_1 \bar{x} - 2x_2 \bar{x} - 2x_3 \bar{x} - \dots - 2x_n \bar{x} + n \cdot \bar{x}^2 = \\ &= \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2\bar{x} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \cdot n + n \cdot \bar{x}^2 = \\ &= \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2\bar{x}^2 \cdot n + n \cdot \bar{x}^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 - n \cdot \bar{x}^2, \text{ c.n.d. } \checkmark \end{aligned}$$

Podpunkt (b):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) &= \sum_{k=1}^n (x_k y_k - \bar{x} y_k - \bar{y} x_k + \bar{x} \bar{y}) = \\ &= \sum_{k=1}^n x_k y_k - \sum_{k=1}^n \bar{x} y_k - \sum_{k=1}^n \bar{y} x_k + \sum_{k=1}^n \bar{x} \bar{y} = \\ &= \sum_{k=1}^n x_k y_k - \bar{x} \sum_{k=1}^n y_k - \bar{y} \sum_{k=1}^n x_k + n \bar{x} \bar{y} = \\ &= \sum_{k=1}^n x_k y_k - \bar{x} n \bar{y} - \bar{y} n \bar{x} + n \bar{x} \bar{y} = \sum_{k=1}^n x_k y_k - n \bar{x} \bar{y}, \text{ c.n.d. } \checkmark \end{aligned}$$

Zadanie 8

Dane są wektory $\vec{\mu}, X \in \mathbb{R}^n$ oraz macierz $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Niech $S = (X - \vec{\mu})^T \Sigma^{-1} (X - \vec{\mu})$ oraz $Y = A \cdot X$, gdzie macierz A jest odwracalna. Sprawdzić, że

$$S = (Y - A\vec{\mu})^T (A\Sigma A^T)^{-1} (Y - A\vec{\mu})$$

Przy rozwiązywaniu tego zadania skorzystajmy z dwóch ważnych własności macierzy transponowanych, jak i odwracalnych:

1. $(AB)^T = B^T A^T$, podobnie $(ABC)^T = C^T B^T A^T$,
2. $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$, podobnie $(ABC)^{-1} = C^{-1} B^{-1} A^{-1}$.

Działania rozpoczniemy od końca, a następnie przekształcając równanie dojdziemy do postaci wyjściowej. Rozpiszmy więc:

$$\begin{aligned} S &= (Y - A\vec{\mu})^T (A\Sigma A^T)^{-1} (Y - A\vec{\mu}) = \\ &= (AX - A\vec{\mu})^T (A\Sigma A^T)^{-1} (AX - A\vec{\mu}) = \\ &= (A(X - \vec{\mu}))^T (A\Sigma A^T)^{-1} (A(X - \vec{\mu})) = \\ &= (X - \vec{\mu})^T \underbrace{A^T (A^T)^{-1} \Sigma^{-1} A^{-1} A}_{\Sigma^{-1}} (X - \vec{\mu}) = \\ &= (X - \vec{\mu})^T \Sigma^{-1} (X - \vec{\mu}), \text{ c.n.d. } \checkmark \end{aligned}$$