Matematyka dyskretna (L) - cheatsheet
Tomasz Woszczyński

1 Wariacje

Liczba wariacji z powtórzeniami

Dla zbiorów A, B o odpowiednio m, n elementach liczba funkcji ze zbioru A w B wynosi n^m, czyli $|\{f : A \to B\} = n^m|$.

Liczba wariacji bez powtórzeń

Dla zbiorów A, B o odpowiednio m, n elementach liczba funkcji różnowartościowych ze zbioru A w B wynosi $n(n-1)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Liczba podzbiorów

Zbiór A o n elementach ma $|\{B : B \subseteq A\} = 2^n|$ podzbiorów.

Para podzbiorów

Dla U będącego n-elementowym można wyznaczyć dwa jego podzbiory A, B takie, że $A \subseteq B$ na $|\{(A,B) : A \subseteq B \subseteq U\}| = |\{f : U \to \{0,1,2\}\}| = 3^n$ sposobów.

Liczba permutacji

Zbiór U o n elementach można spermutować na $n!$ sposobów.

Sufit, podłoga, część ułamkowa

Niech $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$, wtedy:
$\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \le x < n+1$
$\lceil x \rceil = n \Leftrightarrow n-1 < x \le n$
$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$

Własności sufitu i podłogi

Niech $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$, wtedy:
$\lfloor x+n \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$, ponieważ
$\lfloor x \rfloor + n \le x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1$.
Ponadto mamy:
$\lceil x+n \rceil = n + \lceil x \rceil$
$\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$

Podzbiory k-elementowe

Niech $|U| = \{1, 2, \dots, n\}$ oraz $P_n^k = \{A \subseteq U : |A| = k\}$. Wtedy $\frac{n!}{(n-k)!} = k!\left|P_n^k\right|$, czyli $\left|P_n^k\right| = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$.

Symbol Newtona

Dla $k, n \in \mathbb{N}$ takich, że $0 \le k \le n$ zachodzi:
$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Kulki i szufladki

n kulek do k szuflad można wrzucić na tyle sposobów, ile jest ciągów złożonych z n zer i $k-1$ jedynek, czyli $\binom{n+k-1}{k-1}$.

Dwumian Newtona

Dla $n \in \mathbb{N}$ mamy $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$.

Zasada szufladkowa Dirichleta

Niech $k, s \in \mathbb{N}_+$. Jeśli wrzucimy k kulek do s szuflad (Dirichleta), a kulek jest więcej niż szuflad ($k > s$), to w którejś szufladzie będą przynajmniej dwie kulki. Innymi słowy, dla skończonych zbiorów A, B, jeśli $|A| > |B|$, to nie istnieje funkcja różnowartościowa z A w B. Dla $k > s \cdot i$ kulek oraz s szuflad będzie w jakiejś szufladzie $i+1$ kulek.

2 Asymptotyka

Niech $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \ge 0$, wtedy możemy mówić o takich funkcjach asymptotycznych:

Notacja dużego O

Mamy $f(n) = O(g(n))$ wtw, gdy $\exists(c > 0)\ \exists(n_0 \in \mathbb{N})\ \forall(n \ge n_0)\ f(n) < cg(n)$.
Ponadto dla $C, a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zachodzą takie własności:
$\forall(\alpha, \beta)\ \alpha \le \beta \Rightarrow n^\alpha = O(n^\beta)$,
$\forall(\alpha > 1) n^C = O(a^n)$,
$\forall(\alpha > 0) (\ln n)^C = O(n^\alpha)$.
Przydatna może okazać się reguła de l'Hospitala, więc gdy $f(n)$ i $g(n)$ dążą do nieskończoności, to $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$.

Notacja małego o

$f(n) = o(g(n))$ wtw, gdy $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

Notacja duże Omega (Ω)

$f(n) = \Omega(g(n))$ wtw, gdy $\exists(c > 0)\exists(n_0 \in \mathbb{N})\forall(n \ge n_0) f(n) \ge cg(n)$.

Notacja Theta (Θ)

$f(n) = \Theta(g(n))$ wtw, gdy $f(n) = \Omega(g(n)) \wedge f(n) = O(g(n))$.

Notacja małe Omega (ω)

$f(n) = \omega(g(n))$ wtw, gdy $\lim_{n\to\infty} = \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$.

3 Arytmetyka modularna

Funkcja modulo

Niech $n, d \in \mathbb{Z}$ i $d \ne 0$. Wtedy:
$n \bmod d = n - \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \cdot d$.

$n \bmod d = r$ wtw, gdy $0 \le r < d \wedge \exists(k \in \mathbb{Z})\ n = kd + r$

Przystawanie modulo

$a \equiv_n b$ wtw, gdy $a \bmod n = b \bmod n$

Własności funkcji modulo

$a + b \equiv_n a \bmod n + b \bmod n$
$a \cdot b \equiv_n (a \bmod n) \cdot (b \bmod n)$

Podzielność

Niech $n, d \in \mathbb{Z}$ i $d \ne 0$. Wtedy:
$d|n$ wtw, gdy $\exists(k \in \mathbb{Z})\ n = kd$
$d|n$ wtw, gdy $n \bmod d = 0$
$d|n$ wtw, gdy $n \equiv_d 0$
$d|n_1 \wedge d|n_2$ to $d|(n_1 + n_2)$

Największy wspólny dzielnik (NWD, gcd)

Niech $a, b \in \mathbb{N}$, wtedy
$\gcd(a,b) = \max\{d \in \mathbb{N} : d|a \wedge d|b\}$

Algorytm Euklidesa

Dla $a \ge b > 0$ korzystamy z własności: $\gcd(a,b) = \gcd(b, a \bmod b)$ oraz $\gcd(a, 0) = a$.

```
gcd(a, b):
    while b != 0:
        c = a mod b
        a = b
        b = c
    return a
```

Rozszerzony algorytm Euklidesa

Dla $a \ge b > 0$:
$\exists(x, y \in \mathbb{Z})\ xa + yb = \gcd(a,b)$

```
gcd(a, b):
    x = 1, y = 0, r = 0, s = 1
    while b != 0:
        c = a mod b
        q = a div b
        a = b
        b = c

        r' = r
        s' = s
        r = x - q * r
        s = y - q * s
        x = r'
        y = s'

    return a, x, y
```

Liczby względnie pierwsze

Niech $a, b \in \mathbb{Z}$, wtedy te liczby są względnie pierwsze, gdy $\gcd(a,b) = 1$.

4 Wzór włączeń i wyłączeń

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \subseteq \{1,\dots,n\}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

5 Rekurencja, zależności rekurencyjne

Liczby Fibonacciego

Niech $F_0 = 0, F_1 = 1$, wtedy $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n > 1$.

Operator przesunięcia $\mathbf{E}$

Mamy ciąg $\langle a_n \rangle = \langle a_0, a_1, \dots, a_n, \dots \rangle$. Wtedy $\mathbf{E}\langle a_n \rangle = \langle a_{n+1} \rangle = \langle a_1, \dots, a_n, \dots \rangle$.

Złożenie operatora przesunięcia

$\mathbf{E}^2 \langle a_n \rangle = \mathbf{E}(\mathbf{E}\langle a_n \rangle) = \langle a_2, \dots, a_n, \dots \rangle$

Operatory działające na ciągi

$\langle a_n \rangle + \langle b_n \rangle = \langle a_n + b_n \rangle = \langle a_0 + b_0, \dots \rangle$
$c\langle a_n \rangle = \langle ca_n \rangle = \langle ca_0, ca_1, \dots \rangle$

Co anihiluje dane ciągi?

$\langle \alpha \rangle$ anihiluje $\mathbf{E} - 1$.
$\left\langle \alpha a^i \right\rangle$ anihiluje $\mathbf{E} - a$.
$\left\langle \alpha a^i + \beta b^i \right\rangle$ anihiluje $(\mathbf{E} - a)(\mathbf{E} - b)$.
$\left\langle \sum_{k=0}^{n} \alpha_k a_k^i \right\rangle$ anihiluje $\prod_{k=0}^{n} (\mathbf{E} - a_k)$.
$\langle \alpha i + \beta \rangle$ anihiluje $(\mathbf{E} - 1)^2$.
$\left\langle (\alpha i + \beta) a^i \right\rangle$ anihiluje $(\mathbf{E} - a)^2$.
$\left\langle (\alpha i + \beta) a_i + \gamma b^i \right\rangle$ anihiluje $(\mathbf{E} - a)^2 (\mathbf{E} - b)$.
$\left\langle \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k i^k \right\rangle a^i$ anihiluje $(\mathbf{E} - a)^n$.

Dodatkowe własności anihilatorów

Jeśli $\mathbf{E}_A$ anihiluje $\langle a_i \rangle$, to ten sam anihilator anihiluje również ciąg $c\langle a_n \rangle$ dla dowolnej stałej c.
Jeśli $\mathbf{E}_A$ anihiluje $\langle a_i \rangle$ i $\mathbf{E}_B$ anihiluje $\langle b_i \rangle$, to $\mathbf{E}_A \mathbf{E}_B$ anihiluje $\langle a_i \rangle \pm \langle b_i \rangle$.

Liczby Catalana

C_n oznacza n-tą liczbę Catalana, wyraża się przez $C_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} C_{n-i}$ dla $C_0 = 0$.
Można je również przedstawić wzorami $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$. Spełniają one zależność $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$.
Liczby Catalana posiadają różne interpretacje kombinatoryczne, takie jak liczba poprawnych rozmieszczeń nawiasów, liczba dróg w układzie współrzędnych w I ćwiartce, liczba drzew binarnych, liczba podziałów wielokąta wypukłego na trójkąty.

Funkcje tworzące (OGF)

Dla ciągu $\langle a_n \rangle$ można utworzyć funkcję $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = A(x)$, która jest funkcją tworzącą tego ciągu. Poniżej kilka typowych funkcji tworzących dla ciągów:
$\frac{1}{1-x}$ dla ciągu $\langle 1 \rangle$, czyli $\frac{n}{1-x}$ dla $\langle n \rangle$.
$\frac{1}{1-2x}$ dla ciągu $\langle 2^n \rangle$.
$\frac{1}{(1-x)^2}$ dla ciągu $\langle 1, 2, 3, \dots \rangle$.
$\frac{1}{1-x^2}$ dla ciągu $\langle 0, 1, 0, 1, \dots \rangle$.

Przerwy pomiędzy wyrazami

Funkcją tworzącą takiego ciągu $\langle a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, \dots \rangle$ jest $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \ldots = A(x^2)$. Dla ciągu o wyrazach co 3 miejsca byłoby to $A(x^3)$, dla 4 to $A(x^4)$, dla n więc $A(x^n)$.

Co drugi wyraz ciągu (pochodne)

Funkcją tworzącą $\langle a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, \dots \rangle$ jest $\frac{A(x)+A(-x)}{2}$, dla $\langle 0, a_1, 0, a_3, \dots \rangle$ mamy $\frac{A(x)-A(-x)}{2}$.

Funkcją tworzącą takiego ciągu $\langle 0, a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4, \dots, ia_i, \dots \rangle$ jest pochodna funkcji $A(x)$ przesunięta o jedno miejsce w prawo, a więc $xA'(x)$.

Wykorzystanie całek w OGF

Aby odnaleźć funkcję tworzącą ciągu $\left\langle 0, \frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{2}, \dots, \frac{a_i}{i}, \dots \right\rangle$ należy scałkować funkcję tworzącą $A(x)$ i przesunąć ją w lewo: $\int_0^1 \frac{A(x)-a_0}{x} dx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i} x^i$.

Liczba podziałów liczby n

Dowolne składniki: $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}$

Różne składniki: $\prod_{i=1}^{\infty} (1 + x^i)$

Nieparzyste składniki: $\prod_{i=1}^{\infty} (1 + x^{2i-1})$

Składniki mniejsze od m: $\prod_{i=1}^{m-1} \frac{1}{1-x^i}$

Różne potęgi 2: $\prod_{i=1}^{\infty} (1 + x^{2^i})$

Rekursja uniwersalna

Niech a, b, c będą dodatnimi stałymi, rozwiązaniem równania rekurencyjnego

$$T(n) = \begin{cases} b & \text{dla } n = 1 \\ aT\left(\frac{n}{c}\right) + bn & \text{dla } n > 1 \end{cases}$$

dla n będących potęgą liczby c jest

$$T(n) = \begin{cases} O(n) & \text{dla } a < c \\ O(n \log n) & \text{dla } a = c \\ O\left(n^{\log_c a}\right) & \text{dla } a > c \end{cases}$$