

1 Wariacje

Liczba wariacji z powtórzeniami

Dla zbiorów A, B o odpowiednio m, n elementach liczba funkcji ze zbioru A w B wynosi n^m , czyli $|\{f : A \rightarrow B\}| = n^m$.

Liczba wariacji bez powtórzeń

Dla zbiorów A, B o odpowiednio m, n elementach liczba funkcji różnowartościowych ze zbioru A w B wynosi $n(n-1)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Liczba podzbiorów

Zbiór A o n elementach ma $|\{B : B \subseteq A\}| = 2^n$ podzbiorów.

Para podzbiorów

Dla U będącego n -elementowym można wyznaczyć dwa jego podzbiory A, B takie, że $A \subseteq B$ na $|\{(A, B) : A \subseteq B \subseteq U\}| = |\{f : U \rightarrow \{0, 1, 2\}\}| = 3^n$ sposobów.

Liczba permutacji

Zbiór U o n elementach można spermutować na $n!$ sposobów.

Sufit, podłoga, część ułamkowa

Niech $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$, wtedy:

- $\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \leq x < n + 1$
- $\lceil x \rceil = n \Leftrightarrow n - 1 < x \leq n$
- $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$

Własności sufitu i podłogi

Niech $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$, wtedy:

- $\lfloor x + n \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$, ponieważ $\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1$.

Ponadto mamy:

- $\lfloor x + n \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$
- $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$

Podzbiory k-elementowe

Niech $|U| = \{1, 2, \dots, n\}$ oraz $P_n^k = \{A \subseteq U : |A| = k\}$. Wtedy $\frac{n!}{(n-k)!} = k! \binom{n}{k}$,

czyli $|P_n^k| = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$.

Symbol Newtona

Dla $k, n \in \mathbb{N}$ takich, że $0 \leq k \leq n$ zachodzi:

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Tożsamość absorpcyjna

Dla $k \geq 1$ zachodzi $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$.

Tożsamość Cauchy’ego

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^r \binom{m}{i} \binom{n}{r-i}$$

Tożsamość Pascala

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Kulki i szufladki

n kulek do k szuflad można wrzucić na tyle sposobów, ile jest ciągów złożonych

z n zer i $k-1$ jedynek, czyli $\binom{n+k-1}{k-1}$.

Dwumian Newtona

Dla $n \in \mathbb{N}$ mamy $(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$.

Inna tożsamość (jaka?)

$$\binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{m-k}{n-k}$$

Zasada szufladkowa Dirichleta

Niech $k, s \in \mathbb{N}_+$. Jeśli wrzucimy k kulek do s szuflad (Dirichleta), a kulek jest więcej niż szuflad ($k > s$), to w którejś szufladzie będą przynajmniej dwie kulki. Innymi słowy, dla skończonych zbiorów A, B , jeśli $|A| > |B|$, to nie istnieje funkcja różnowartościowa z A w B . Dla $k > s \cdot i$ kulek oraz s szuflad będzie w jakiejś szufladzie $i+1$ kulek.

Liczba rozwiązań $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ (inaczej stars and bars)

Liczba rozwiązań takiego równania, interpretowana również jako liczba przedstawień liczby naturalnej n w postaci k liczb naturalnych (różnych od zera), wynosi $\binom{n-1}{k-1}$. Przedstawienia różniące się kolejnością składników uważamy za różne!

2 Asymptotyka

Niech $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \geq 0$, wtedy możemy mówić o takich funkcjach asymptotycznych:

Notacja dużego O

Mamy $f(n) = O(g(n))$ wtw, gdy $\exists (c > 0) \exists (n_0 \in \mathbb{N}) \forall (n \geq n_0) f(n) < cg(n)$. Ponadto dla $C, a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zachodzą takie własności:

- $\forall (\alpha, \beta) \alpha \leq \beta \Rightarrow n^\alpha = O(n^\beta)$,
- $\forall (\alpha > 1) n^C = O(a^n)$,
- $\forall (\alpha > 0) (\ln n)^C = O(n^\alpha)$.

Przydatna może okazać się reguła de l’Hospitála, więc gdy $f(n)$ i $g(n)$ dążą do nieskończoności, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}.$$

Notacja małego o

$f(n) = o(g(n))$ wtw, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

Notacja duże Omega (Ω)

$f(n) = \Omega(g(n))$ wtw, gdy $\exists (c > 0) \exists (n_0 \in \mathbb{N}) \forall (n \geq n_0) f(n) \geq cg(n)$.

Notacja Theta (Θ)

$f(n) = \Theta(g(n))$ wtw, gdy $f(n) = \Omega(g(n)) \wedge f(n) = O(g(n))$.

Notacja małe Omega (ω)

$f(n) = \omega(g(n))$ wtw, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$.

3 Arytmetyka modularna

Funkcja modulo

Niech $n, d \in \mathbb{Z}$ i $d \neq 0$. Wtedy:

$$n \bmod d = n - \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \cdot d.$$

$n \bmod d = r$ wtw, gdy $0 \leq r < d \wedge \exists (k \in \mathbb{Z}) n = kd + r$

Przystawanie modulo

$a \equiv_n b$ wtw, gdy $a \bmod n = b \bmod n$

Własności funkcji modulo

- $a + b \equiv_n a \bmod n + b \bmod n$
- $a \cdot b \equiv_n (a \bmod n) \cdot (b \bmod n)$

Podzielność

Niech $n, d \in \mathbb{Z}$ i $d \neq 0$. Wtedy:

- $d | n$ wtw, gdy $\exists (k \in \mathbb{Z}) n = kd$
- $d | n$ wtw, gdy $n \bmod d = 0$
- $d | n$ wtw, gdy $n \equiv_d 0$
- $d | n_1 \wedge d | n_2$ to $d | (n_1 + n_2)$

Największy wspólny dzielnik (NWD, gcd)

Niech $a, b \in \mathbb{N}$, wtedy

$$\gcd(a, b) = \max\{d \in \mathbb{N} : d | a \wedge d | b\}$$

Własności NWD

Dla $a > b$ względnie pierwszych ($a \perp b$) i $0 \leq m < n$:

$$\gcd(a^n - b^n, a^m - b^m) = a^{\gcd(m, n)} - b^{\gcd(m, n)}.$$

Algorytm Euklidesa

Dla $a \geq b > 0$ korzystamy z własności: $\gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b)$ oraz $\gcd(a, 0) = a$.

```
gcd(a, b):
    while b != 0:
        c = a mod b
        a = b
        b = c
    return a
```

Rozszerzony algorytm Euklidesa

Dla $a \geq b > 0$: $\exists (x, y \in \mathbb{Z}) xa + yb = \gcd(a, b)$

```
gcd(a, b):
    x = 1, y = 0, r = 0, s = 1
    while b != 0:
        c = a mod b
        q = a div b
        a = b
        b = c
        r' = r
        s' = s
        r = x - q * r'
        s = y - q * s'
```

```
        r' = r
        s' = s
        r = x - q * r'
        s = y - q * s'
        x = r'
        y = s'
```

```
    return a, x, y
```

Liczby względnie pierwsze

Niech $a, b \in \mathbb{Z}$, wtedy te liczby są względnie pierwsze, gdy $\gcd(a, b) = 1$.

Coś o liczbach pierwszych

- Jeśli $2^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to n jest liczbą pierwszą.
- Jeśli $a^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to $a = 2$.
- Jeśli $2^n + 1$ jest liczbą pierwszą, to n jest potęgą liczby 2.

4 Wzór włączeń i wyłączeń

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

5 Rekurencja, zależności rekurencyjne

Liczby Fibonacciego

Niech $F_0 = 0, F_1 = 1$, wtedy $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n > 1$.

Własności liczb Fibonacciego

Każde dwie kolejne liczby Fibonacciego są względnie pierwsze.

$$\gcd(F_m, F_n) = F_{\gcd(m, n)}$$

Szereg harmoniczna

$$H_n = H_{n-1} + \frac{1}{n}$$

Podział płaszczyzny na obszary

$$p_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0 \\ p_{n-1} + n & \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Liczba nieporządków n -elementowych

- $d_n = n! \cdot \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}$
- $d_{n+1} = n(d_n + d_{n+1})$ dla $d_0 = 1, d_1 = 0$.

Operator przesunięcia E

Mamy ciąg $\langle a_n \rangle = \langle a_0, a_1, \dots, a_n, \dots \rangle$. Wtedy $E \langle a_n \rangle = \langle a_{n+1} \rangle = \langle a_1, \dots, a_n, \dots \rangle$.

Złożenie operatora przesunięcia

$$E^2 \langle a_n \rangle = E(E \langle a_n \rangle) = \langle a_2, \dots, a_n, \dots \rangle$$

Operatory działające na ciągu

- $\langle a_n \rangle + \langle b_n \rangle = \langle a_n + b_n \rangle = \langle a_0 + b_0, \dots \rangle$
- $c \langle a_n \rangle = \langle ca_n \rangle = \langle ca_0, ca_1, \dots \rangle$

Co anihiluje dane ciągi?

- $\langle a \rangle \Rightarrow E - 1$.
- $\langle a^i \rangle \Rightarrow E - a$.
- $\langle a^i + \beta b^i \rangle \Rightarrow (E - a)(E - b)$.
- $\left\langle \sum_{k=0}^n \alpha_k a_k^i \right\rangle \Rightarrow \prod_{k=0}^n (E - a_k)$.
- $\langle \alpha i + \beta \rangle \Rightarrow (E - 1)^2$.
- $\langle (\alpha i + \beta) a^i \rangle \Rightarrow (E - a)^2$.
- $\langle (\alpha i + \beta) a_i + \gamma b^i \rangle \Rightarrow (E - a)^2 (E - b)$.
- $\left\langle \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k i^k \right\rangle a^i \Rightarrow (E - a)^n$.

Dodatkowe własności anihilatorów

Jeśli E_A anihiluje $\langle a_i \rangle$, to ten sam anihilator anihiluje również ciąg $c \langle a_n \rangle$ dla dowolnej stałej c . Jeśli E_A anihiluje $\langle a_i \rangle$ i E_B anihiluje $\langle b_i \rangle$, to $E_A E_B$ anihiluje $\langle a_i \rangle \pm \langle b_i \rangle$.

Liczby Catalana

C_n oznacza n -tą liczbę Catalana, wyraża

się przez $C_n = \sum_{i=1}^n C_{i-1} C_{n-i}$ dla $C_0 = 0$.

Można je również przedstawić wzorami

$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{1}{(n+1)!n!}$. Spełniają one

zależność $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$. Liczby Catalana posiadają różne interpretacje kombinatoryczne, takie jak liczba poprawnych rozmieszczeń nawiasów, liczba dróg w układzie współrzędnych w I ćwiartce, liczba drzew binarnych, liczba podziałów wielokąta wypukłego na trójkąty.

Funkcje tworzące (OGF)

Dla ciągu $\langle a_n \rangle$ można utworzyć funkcję $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = A(x)$, która jest funkcją tworzącą tego ciągu. Poniżej kilka typowych funkcji tworzących dla ciągów:

- $\frac{1}{1-x}$ dla ciągu $\langle 1 \rangle$, czyli $\frac{n}{1-x}$ dla $\langle n \rangle$.
- $\frac{1}{1-2x}$ dla ciągu $\langle 2^n \rangle$.
- $\frac{1}{(1-x)^2}$ dla ciągu $\langle 1, 2, 3, \dots \rangle$.
- $\frac{1}{1-x^2}$ dla ciągu $\langle 1, 0, 1, 0, \dots \rangle$.

Przesunięcie wyrazów w prawo o k miejsc

Aby z ciągu $\langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$ o OGF $A(x)$ otrzymać ciąg $\langle 0, \dots, 0, a_0, a_1, \dots \rangle$, w którym pierwsze k wyrazów jest 0, należy pomnożyć funkcję tworzącą przez x^k , więc mamy $x^k A(x)$.

Przesunięcie wyrazów w lewo o k miejsc

Aby z takiego ciągu jak wyżej otrzymać ciąg $\langle a_k, a_{k+1}, \dots \rangle$, należy wykonać takie działanie:

$$\frac{A(x) - (a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_{k-1} x^{k-1})}{x^k}.$$

Przerwy pomiędzy wyrazami

Funkcją tworzącą takiego ciągu $\langle a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, \dots \rangle$ jest $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i =$

$a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \dots = A(x^2)$. Dla ciągu o wyrazach co 3 miejsca byłoby to $A(x^3)$, dla 4 to $A(x^4)$, dla n więc $A(x^n)$.

Co drugi wyraz ciągu (pochodne)

Funkcją tworzącą $\langle a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, \dots \rangle$ jest $\frac{A(x) + A(-x)}{2}$, dla $\langle 0, a_1, 0, a_3, \dots \rangle$ mamy $\frac{A(x) - A(-x)}{2}$.

Funkcją tworzącą takiego ciągu $\langle 0, a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4, \dots, ia_i, \dots \rangle$ jest pochodna funkcji $A(x)$ przesunięta o jedno miejsce w prawo, a więc $xA'(x)$.

Wykorzystanie całek w OGF

Aby odnaleźć funkcję tworzącą ciągu $\langle 0, \frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{2}, \dots, \frac{a_i}{i}, \dots \rangle$ należy scałkować funkcję tworzącą $A(x)$ i przesunąć ją w

lewo: $\int_0^1 \frac{A(x)-a_0}{x} dx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i} x^i$.

Inne funkcje tworzące

- $\langle n^2 \rangle$ odpowiada OGF $\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$.
- $\langle n^3 \rangle$ odpowiada OGF $x \frac{x^2+4x+1}{(1-x)^4}$.
- $\langle \binom{n+k}{k} \rangle$ odpowiada OGF $\frac{1}{(1-x)^{n+1}}$.

Liczba podziałów liczby n

- Dowolne składniki: $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}$
- Różne składniki: $\prod_{i=1}^{\infty} (1+x^i)$
- Nieparzyste składniki: $\prod_{i=1}^{\infty} (1+x^{2i-1})$
- Składniki mniejsze od m : $\prod_{i=1}^{m-1} \frac{1}{1-x^i}$
- Różne potęgi 2: $\prod_{i=1}^{\infty} (1+x^{2^i})$

Rekursja uniwersalna

Niech a, b, c będą dodatnimi stałymi, rozwiązaniem równania rekurencyjnego

$$T(n) = \begin{cases} b & \text{dla } n = 1 \\ aT(\frac{n}{c}) + bn & \text{dla } n > 1 \end{cases}$$

dla n będących potęgą liczby c jest

$$T(n) = \begin{cases} O(n) & \text{dla } a < c \\ O(n \log n) & \text{dla } a = c \\ O(n^{\log_c a}) & \text{dla } a > c \end{cases}$$

6 Teoria grafów

Graf nieskierowany

Graf nieskierowany to para zbiorów (V, E) , gdzie $E = \{\{u, v\} : u, v \in V\}$. V to zbiór wierzchołków, E to zbiór krawędzi. **"Patologie" w grafach**

Pętla to krawędź postaci $\{v, v\}$, a krawędzie równoległe to dwie lub więcej krawędzi łączących te same wierzchołki u, v (dla $u \neq v$).

Graf prosty

Graf $G = (V, E)$ jest prosty, jeśli nie zawiera pętli ani krawędzi równoległych.

Graf skierowany

Graf nieskierowany to para zbiorów (V, E) , gdzie $E = \{\{u, v\} : u, v \in V\}$. V to zbiór wierzchołków, E to zbiór krawędzi skierowanych lub łuków.

Krawędź incydentna

Krawędź e jest incydentna do wierzchołka u , jeśli jeden z końców e to u .

Stopień wierzchołka

Stopień wierzchołka u oznaczany przez $\deg(u)$ to liczba krawędzi incydentnych do u . Każda pętla incydentna do u dokłada się do stopnia u liczbą 2.

Lemat o uściskach dłoni

Niech $G = (V, E)$ będzie nieskierowanym grafem. Wtedy $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$.

Lemat o uściskach dłoni dla grafu skierowanego

Niech $G = (V, E)$ będzie skierowanym grafem. Wtedy $\sum_{v \in V} \deg_{\text{in}}(v) = \deg_{\text{out}}(v)$.

Reprezentacje grafów

Graf można reprezentować za pomocą list sąsiadów, macierzy sąsiedztwa lub macierzy incydencji.

Izomorfizm grafów

Dwa grafy nieskierowane proste $G = (V, E)$ i $H = (V', E')$ są izomorficzne wtw, gdy istnieje bijekcja $f: V \rightarrow V'$ taka, że $\forall \{u, v \in V\} \{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E'$.

Marszruta, ścieżka, droga, cykl

- Marszruta o długości k to ciąg $\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ taki, że $\forall (0 \leq i < k) \{v_i, v_{i+1}\} \in E$.
 - Droga to marszruta, w której żadna krawędź nie występuje dwukrotnie.
 - Ścieżka to marszruta, w której żaden wierzchołek nie występuje dwukrotnie.
 - Cykl to marszruta, w której pierwszy wierzchołek jest taki sam jak ostatni, a poza tym, żaden wierzchołek nie występuje dwukrotnie.
- $u-v$ -marszruta to marszruta taka, że $v_0 = u$ i $v_k = v$, analogicznie definiujemy $u-v$ -drogę i $u-v$ -ścieżkę. Marszruta/droga jest zamknięta, gdy $v_0 = v_k$. Zamknięta ścieżka to cykl.

Graf spójny

Nieskierowany graf $G = (V, E)$ jest spójny, jeśli z każdego wierzchołka da się dojść do innego, tzn. dla każdego wierzchołka $u, v \in V$ istnieje $u-v$ -ścieżka.

Dopełnienie grafu

Dopełnienie grafu G oznaczamy przez \overline{G} , a definiujemy je jako graf $\overline{G} = (V, E')$ taki, że $\{u, v\} \in E'$ wtw, gdy $\{u, v\} \notin E$.

Podgraf

Podgrafem grafu $G = (V, E)$ jest dowolny graf $H = (V', E')$ taki, że $V' \subseteq V$ i $E' \subseteq E$. Podgraf jest właściwy, jeśli $G \neq H$.

Spójna składowa

Spójna składowa grafu G to dowolny podgraf spójny $H = (V', E')$ grafu G , który jest maksymalny ze względu na zawieranie, tzn. taki, że nie istnieje

podgraf spójny H' , którego podgrafem właściwym jest H .

Drzewo i las

Graf $G = (V, E)$ jest acykliczny, jeśli nie zawiera żadnego cyklu. Las jest acyklicznym grafem, a drzewo acyklicznym grafem spójnym. Drzewa są spójnymi składowymi lasu, a więc las składa się z drzew.

Drzewo jest najmniejszym grafem spójnym, a więc jeśli chcemy zbudować graf spójny G na zbiorze wierzchołków V , to G musi być drzewem.

Liść

Liść to wierzchołek o stopniu 1. Dowolne drzewo o $n \geq 2$ wierzchołkach zawiera przynajmniej 2 liście.

Most

Most to krawędź, której usunięcie zwiększa liczbę spójnych składowych grafu, ponadto żaden most nie leży na cyklu.

Charakteryzacja drzewa

Niech $G = (V, E)$ będzie n -wierzchołkowym grafem nieskierowanym ($n \geq 1$). Wtedy wszystkie następujące stwierdzenia są równoważne:

- G jest spójny i acykliczny (G jest drzewem).
- G jest spójny i ma $n-1$ krawędzi.
- G jest acykliczny i ma $n-1$ krawędzi.
- Dla każdego $u, v \in V$ w G jest tylko jedna $u-v$ -ścieżka.
- G jest spójny i każda krawędź jest mostem.
- G nie ma cykli, ale dołożenie jakiegokolwiek krawędzi tworzy cykl.

Liczba liści w dowolnym drzewie

Niech t_i oznacza liczbę wierzchołków stopnia i w drzewie, wtedy

$$t_1 = \sum_{i=3}^n (i-2)t_i + 2 \text{ oznacza liczbę liści}$$

w drzewie. Nie zależy ona od t_2 , gdyż "przedłużenie" liścia kolejną krawędzią nie zmienia liczby liści w drzewie.

Wierzchołek centralny, promień grafu

Niech $d(u, v)$ oznacza odległość wierzchołków u, v , czyli długość najkrótszej ścieżki łączącej je. Dla każdego wierzchołka v definiujemy $r(v) = \max\{d(v, u) : u \in V(G)\}$. Wierzchołek w , dla którego $r(w) = \min\{r(v) : v \in V(G)\}$ nazywamy wierzchołkiem centralnym grafu G , a liczbę $r(G) = r(w)$ promieniem grafu G .

Graf dwudzielny

Graf $G = (V, E)$ jest dwudzielny wtw, gdy istnieje podział zbioru V na zbiory A i B taki, że dla każdej krawędzi $e \in E$ jeden koniec e należy do zbioru A , a drugi

do zbioru B . Podział wierzchołków nie zawsze jest jednoznaczny! Graf G jest dwudzielny wtw, gdy nie zawiera cyklu o nieparzystej długości.

Lemat o zamkniętej marszrucie

Każda zamknięta marszruta o nieparzystej długości zawiera cykl o nieparzystej długości.

Graf o minimalnym stopniu k

Niech G będzie grafem prostym, w którym każdy wierzchołek ma stopień przynajmniej k . Wówczas G zawiera ścieżkę o długości k . Jeśli $k \geq 2$, to G zawiera cykl o długości przynajmniej $k+1$.

Algorytmy przeszukiwania grafów

Przeszukiwanie grafu w głąb

```
DFS(u):
    u.visited = true
    for each neighbour v of u:
        if not v.visited:
            DFS(v)
```

Przeszukiwanie grafu wszерz

```
BFS(v):
    queue Q = {}
    Q.enqueue(v)
    v.visited = true
```

```
while (Q != empty):
    u = Q.dequeue()
    for each neighbour w of u:
        if not w.visited:
            Q.enqueue(w)
            w.visited = true
```

Czas działania DFS oraz BFS to $O(V+E)$.

Drzewo rozpinające

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym. Drzewo rozpinające grafu G to podgraf $T = (V, E')$, który jest drzewem. T zawiera wszystkie wierzchołki grafu G .

Las rozpinający

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem niekoniecznie spójnym. Las rozpinający grafu G to podgraf $F = (V, E')$, który jest lasem, którego liczba spójnych składowych jest taka sama jak liczba spójnych składowych grafu G .

Minimalne drzewo rozpinające (MST)

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym o nieujemnych wagach na krawędziach, a graf $T = (V, E')$ jego drzewem rozpinającym. Wagę definiuje funkcja $c: E \rightarrow \mathbb{R}_+$. Wtedy wagą drzewa rozpinającego $c(T) = \sum_{e \in E'} c(e)$. Minimalnym drzewem

rozpinającym (MST) grafu G jest drzewo rozpinające T o minimalnej wadze.

Algorytmy na znajdowanie MST

Algorytm Kruskala polega na dodawaniu kolejnych krawędzi w taki sposób, aby nie stworzyły one żadnego cyklu.

KRUSKAL:

```
sort(E) wzgledem wagi
T = {}
for i in [1, m]:
    if (T + {e(i)} nie tworzy
        zadnego cyklu):
        T = T + {e(i)}
```

Algorytm Prima polega na dobieraniu najlżejszych krawędzi do grafu T .

PRIM:

```
T = {}
U = {1} (dowolny wierzcholek G)
while (U != V):
    e = najlżejsza krawedz (u, v),
        taka ze u jest z U,
        a v jest z V-U
    T = T + {(u, v)}
    U = U + {v}
```

Algorytm Boruvki polega na dodawaniu najlżejszych krawędzi do T , łączeniu ich w superwierzchołki i wykonywaniu algorytmu od początku.

BORUVKA:

```
T = V
while (T != MST):
    wybierz najmniejsza krawedz
    z najmniejsza waga i dodaj
    ja do zbioru E'
```

gdy jest wiecej niz jedna spojna skladowa, polacz wszystkie wierzcholki w superwierzcholki i wykonaj algorytm od poczatku

Wszystkie powyżej przedstawione algorytmy działają w czasie $O(|E| \cdot \log |V|)$.

Algorytm Reverse-delete polega na usuwaniu kolejnych krawędzi aby otrzymać **MST**.

KRUSKAL(edges[] E):

```
sort(E) malejaco wzgledem wagi
i = 0
```

```
while i < size(E):
    edge = E[i]
    usun E[i]
    if graf nie jest spojny:
        E[i] = edge
        i = i + 1
```

```
return edges[] E
```

Złożoność czasowa tego algorytmu to $O(E \log V (\log \log V)^3)$.

Skojarzenie (matching)

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym. Skojarzenie grafu G to dowolny podzbiór krawędzi $M \subseteq E$ taki, że żadne dwie krawędzie z M nie mają wspólnego końca.

Największe skojarzenie

Skojarzenie największe grafu G to skojarzenie o maksymalnej liczbie krawędzi.

Wierzchołki skojarzone, wolne

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym, a M jakimś skojarzeniem w G . Wierzchołek $v \in V$ jest skojarzony w M , jeśli jest końcem jakiejś krawędzi z M . Wierzchołek $v \in V$ jest wolny/nieskojarzony, jeśli żadna krawędź z M nie jest z nim incydentna.

Ścieżka alternująca

Ścieżka P w grafie G jest alternująca (względem M) jeśli krawędzie na P na przemian należą i nie należą do M .

Ścieżka powiększająca

Ścieżka P w grafie G jest powiększająca (względem M), jeśli jest alternująca względem M i jej końce są nieskojarzone (w M).

Skojarzenie doskonałe/pelne

Skojarzenie doskonałe/pelne grafu G to skojarzenie, w którym każdy wierzchołek z V jest skojarzony.

Cykl alternujący

Cykl C w grafie G jest alternujący względem M jeśli krawędzie na C na przemian należą i nie należą do M .

Twierdzenie Berge'a

Skojarzenie M grafu G jest największe wtw, gdy G nie zawiera ścieżki powiększającej względem M .

Sąsiedztwo wierzchołków

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem a $W \subseteq V$ podzbiorem wierzchołków. Sąsiedztwo W oznaczane jako $N(W)$ definiujemy jako zbiór

$\{v \in V : \exists w \in W \mid \{v, w\} \in E\}$.

Warunek Halla

Niech graf $G = (A \cup B, E)$ będzie grafem dwudzielnym.

Dla każdego $A' \subseteq A$ zachodzi $|N(A')| \geq |A'|$ oraz dla każdego $B' \subseteq B$ zachodzi $|N(B')| \geq |B'|$.

Skojarzenie doskonałe w grafie dwudzielnym

Graf dwudzielnym G zawiera skojarzenie doskonałe wtw, gdy spełniony jest w nim warunek Halla.

Waga ścieżki, najlżejsza ścieżka

Waga ścieżki P to suma wag krawędzi leżących na P . Najlżejsza/najkrótsza (względem $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$) ścieżka z s do t to ta, która ma najmniejszą wagę. Niech $S \subseteq V$, a s będzie ustalonym wierzchołkiem z V . Ścieżka P z s do v jest prawie S -owa/osiągalna bezpośrednio z S , jeśli wszystkie wierzchołki na P oprócz v są w S .

$d(v)$ to waga najkrótszej ścieżki z s do v . $t(v)$ to waga najkrótszej prawie S -owej ścieżki z s do v , a gdy taka ścieżka nie istnieje, to $t(v) = \infty$.

Algorytm Dijkstry

Algorytm Dijkstry służy do znajdowania wagi najkrótszych ścieżek.

DIJKSTRA:

```
S = {s}
d(s) = 0

for each neighbour v of s:
    t(v) = c(s, v)
for other vertices:
    while (S != V):
        u = argmin{t(u): u not in S}
        S = S + {u}
        update all t(v):
            for each neighbour v
                (not in S) of vertex u:
                    t(v) = min{t(v),
                        d(u)+c(u, v)}
```

Pokrycie wierzchołkowe

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem. Pokrycie wierzchołkowe G to dowolny podzbiór $V' \subseteq V$ taki, że każda krawędź z E ma przynajmniej jeden z końców w V' .

Najmniejsze pokrycie wierzchołkowe

Najmniejsze pokrycie wierzchołkowe grafu G to to spośród pokryć wierzchołkowych G , które zawiera najmniej wierzchołków.

Pokrycie wierzchołkowe a skojarzenie

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem. Niech M będzie jakimś skojarzeniem G , a W jakimś pokryciem wierzchołkowym. Wtedy $|M| \leq |W|$.

Twierdzenie Koeniga

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem dwudzielnym, M_{\max} największym skojarzeniem G , a W_{\min} najmniejszym pokryciem wierzchołkowym. Wtedy $|M_{\max}| = |W_{\min}|$.

Droga i cykl Eulera

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym nieskierowanym, niekoniecznie prostym. Droga Eulera grafu G to droga (krawędzie się nie powtarzają, wierzchołki mogą), która zawiera każdą krawędź $e \in E$. Cykl Eulera grafu G to droga zamknięta (wierzchołek startowy

jest taki sam jak końcowy), która zawiera każdą krawędź $e \in E$.

Warunki istnienia drogi/cyklu Eulera

Spójny graf G posiada drogę Eulera wtw, gdy zawiera 0 lub 2 wierzchołki o stopniu nieparzystym. Spójny graf G posiada cykl Eulera wtw, gdy wszystkie jego wierzchołki mają stopień parzysty. W grafie skierowanym warunkiem na istnienie cyklu Eulera jest taka sama liczba krawędzi wychodzących i wchodzących dla każdego wierzchołka.

Aby spójny graf skierowany miał drogę Eulera, muszą zachodzić:

- dla dokładnie jednego wierzchołka jest $\deg_{\text{in}}(v) = \deg_{\text{out}}(v) + 1$,
- dla dokładnie jednego wierzchołka jest $\deg_{\text{in}}(v) + 1 = \deg_{\text{out}}(v)$,
- dla każdego innego niż dwa powyższe wierzchołki jest $\deg_{\text{in}}(v) = \deg_{\text{out}}(v)$.

Ścieżka i cykl Hamiltona

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym nieskierowanym. Ścieżka Hamiltona grafu G to ścieżka (wierzchołki się nie powtarzają), która zawiera każdy wierzchołek $v \in V$. Cykl Hamiltona grafu G to cykl (wierzchołki się nie powtarzają), który zawiera każdy wierzchołek $v \in V$.

Warunki istnienia drogi/cyklu Hamiltona

Sprawdzenie, czy graf $G = (V, E)$ zawiera ścieżkę lub cykl Hamiltona jest problemem trudnym obliczeniowo - jest to problem NP-trudny.

Warunki konieczne na istnienie cyklu Hamiltona

Jeśli graf $G = (A \cup B, E)$ jest dwudzielnym, to warunkiem koniecznym na istnienie cyklu Hamiltona jest $|A| = |B|$.

Jeśli graf $G = (V, E)$ zawiera cykl Hamiltona, to dla dowolnego zbioru $S \subseteq V$, graf $G - S$ (powstały po usunięciu wierzchołków z S wraz z incydentnymi krawędziami) zawiera co najmniej $|S|$ spójnych składowych.

Twierdzenie Diraca

Jeśli graf $G = (V, E)$ jest grafem prostym o co najmniej trzech wierzchołkach i minimalnym stopniu wierzchołka $\delta(G) \geq \frac{|V|}{2}$, to G zawiera cykl Hamiltona.

Twierdzenie Ore'a (albo Orego)

Jeśli graf $G = (V, E)$ jest grafem prostym o co najmniej trzech wierzchołkach i takim, że dla każdych dwóch wierzchołków u i v niepołączonych krawędzią zachodzi $\deg(u) + \deg(v) \geq |V|$, to G zawiera cykl Hamiltona.

Obliczanie najmniejszego wagowo cyklu Hamiltona

Odległości między krawędziami zapisane są jako funkcja wagi $c : E \rightarrow \mathbb{R} \geq 0$. Zakładamy, że skróć zawsze się opłaca, czyli $\forall u, v, w \in V : c(u, v) \leq c(u, w) + c(w, v)$. Niech OPT oznacza sumaryczną długość optymalnej trasy. Wtedy $c(MST(G)) \leq OPT$. Algorytm na obliczenie najmniejszego wagowo cyklu Hamiltona jest następujący:

- Oblicz $MST(G)$.
 - Podwój $MST(G)$ otrzymując T^2 .
 - Znajdź cykl Eulera C_E podwojonego $MST(G)$, czyli T^2 .
 - Skróć C_E do cyklu Hamiltona.
- Tak obliczona trasa ma wagę $\leq 2OPT$.

Algorytm Christofidesa (najmniejszy wagowo cykl Hamiltona)

- Oblicz $MST(G)$.
- Oblicz najmniejsze wagowo skojarzenie pełne M na podgrafie zawierającym wierzchołki V^- , które mają stopień nieparzysty w $MST(G)$.
- Znajdź cykl Eulera C_E multigrafu $MST(G) + M$.
- Skróć C_E do cyklu Hamiltona.

Tak otrzymana trasa ma wagę $\leq \frac{3}{2}OPT$.

Kolorowanie grafu

Niech graf $G = (V, E)$ będzie grafem prostym. Kolorowaniem wierzchołkowym grafu G nazywamy funkcję $f : V \rightarrow \text{Kolory}$ taką, że $\forall (u, v) \in E : f(u) \neq f(v)$. Liczba chromatyczna grafu G (oznaczana $\chi(G)$) to najmniejsza liczba kolorów, jaką można pokolorować graf G .

Własności liczby chromatycznej

Przez $\omega(G)$ oznaczamy wielkość największej klikii zawartej w G . Wtedy $\chi(G) \geq \omega(G)$. $\Delta(G)$ to największy stopień wierzchołka w G . Wtedy $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Twierdzenie Brooks

Jeśli G nie jest kliką ani nieparzystym cyklem, to $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Algorytm sekwencyjny kolorowania grafu

Niech $\text{Kolory} = \{1, 2, 3, \dots\}$ i $G = (V, E)$. Wtedy algorytmem sekwencyjnym jest:

- Ustaw wierzchołki z V w pewien ciąg.
- Dla każdego wierzchołka v w kolejności dyktowanej przez ciąg wykonaj: przypisz wierzchołkowi v najmniejszą liczbę naturalną spośród takich, które nie są przypisane żadnemu sąsiadowi v .

Graf planarny

Graf G jest planarny, gdy da się go narysować na płaszczyźnie w taki

sposób, by żadne dwie krawędzie się nie przecinały.

Rysunek grafu

Łamana (linia wielokątna, linia łamana) to ciąg skończenie wielu odcinków, z których każdy zaczyna się tam, gdzie kończy poprzedni; poza tym żadne dwa odcinki nie mają punktów wspólnych.

Rysunek grafu $G = (V, E)$ na płaszczyźnie to funkcja różnowartościowa f taka, że odwzorowuje każdy wierzchołek $v \in V$ na punkt $f(v)$ płaszczyzny oraz każdą krawędź (u, v) na łamaną łączącą $f(u)$ z $f(v)$.

Mówimy, że rysunek nie ma przecięć, jeśli dla dowolnych dwóch krawędzi e, e' , $f(e) \cap f(e')$ może zawierać jedynie obrazy wspólnych końców e i e' .

Graf G jest planarny, jeśli posiada rysunek bez przecięć.

Graf płaski

Konkretny rysunek bez przecięć grafu G nazywamy grafem płaskim.

Ściana takiego grafu to spójny obszar płaszczyzny po usunięciu linii reprezentujących krawędzie. Innymi słowy, ściana to zbiór punktów płaszczyzny, które da się połączyć krzywą nieprzecinającą żadnej krawędzi. Granica ściany zawiera krawędzie styczne z tą ścianą. Długość granicy ściany to długość zamkniętej marszruty przechodzącej przez wszystkie krawędzie granicy tej ściany. Niech f_i oznacza długość granicy i -tej ściany grafu planarnego $G = (V, E)$, a l liczbę

ścian G . Wtedy $\sum_{i=1}^l f_i = 2|E|$.

Twierdzenie Jordana

Zamknięta nieprzecinająca się łamana C o skończonej liczbie odcinków dzieli płaszczyznę na dokładnie dwie ściany, z których każda ma C jako granicę.

Graf dualny

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem planarnym. Graf dualny G^* dla grafu płaskiego G tworzy się następująco: dla każdej ściany (włącznie ze ścianą zewnętrzną) grafu G dodajemy wierzchołek. Jeśli dwie ściany mają wspólną krawędź e , łączymy wierzchołki utworzone w poprzednim kroku odpowiednio dla sąsiadujących ścian krawędzią przecinającą tylko krawędź e . Graf dualny nie jest wyznaczony jednoznacznie (zależy od rysunku G).

Wzór Eulera

Niech G będzie spójnym grafem planarnym (niekoniecznie prostym) o n wierzchołkach, m krawędziach i

f ścianach. Wówczas $n - m + f = 2$. Dla niespójnego grafu o k spójnych składowych jest to wzór $n - m + f = k - 1$.

Liczba krawędzi grafu planarnego

Niech G będzie prostym grafem planarnym o $n \geq 3$ wierzchołkach. Wówczas liczba krawędzi m tego grafu nie przekracza $3n - 6$. Jeśli dodatkowo, G nie zawiera żadnego trójkąta, to $m \leq 2n - 4$.

Grafy homeomorficzne

Grafy G i H są homeomorficzne, gdy jeden można przekształcić do drugiego za pomocą skończonej liczby operacji następujących dwóch typów:

1. zamian krawędzi na ścieżkę o długości 2, tj. w ten sposób dodajemy również jeden nowy wierzchołek,
2. zamiana ścieżki $P = (u, v, w)$ takiej, że v ma stopień 2 na krawędź (u, w) , jednocześnie usuwając v .

Twierdzenie Kuratowskiego

Graf G jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podgrafu homeomorficznego z $K_{3,3}$ lub K_5 .

Twierdzenie Heawooda

Każdy graf planarny jest 5-kolorowalny.

Sieć, przepływ w sieci

Sieć to graf skierowany (digraf) $D = (V, E)$ z dwoma wyróżnionymi wierzchołkami $s, t \in V$ zwanymi źródłem i ujściem i funkcją przepustowości $c : E \rightarrow R \geq 0$ na krawędziach. Niech $f : E \rightarrow R$, dla $v \in V$ definiujemy $f^+(v) = \sum_{e=(v,w):e \in E, w \in V} f(v, w)$ oraz

$$f^-(v) = \sum_{e=(w,v):e \in E, w \in V} f(w, v).$$

Funkcja f jest przepływem, jeśli spełnia warunki przepustowości $\forall e \in E : 0 \leq f(e) \leq c(e)$ oraz jeśli spełnia warunek zachowania przepływu: $\forall v \in V \setminus \{s, t\} : f^+(v) = f^-(v)$. Wartość przepływu f , oznaczana jako $|f|$ to $f^-(t) - f^+(t)$.

Ścieżka powiększająca

Ścieżka powiększająca P dla przepływu f to ścieżka postaci $(s = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k, e_{k+1}, t = v_{k+1})$ taka, że:

$\forall 0 \leq i \leq k : e_{i+1} \in E \wedge (e_{i+1} = (v_i, v_{i+1}) \vee e_{i+1} = (v_{i+1}, v_i),$
 $\forall 0 \leq i \leq k : e_{i+1} = (v_i, v_{i+1}) \implies f(e_{i+1}) < c(e_{i+1})$ (krawędź w przód),
 $\forall 0 \leq i \leq k : e_{i+1} = (v_{i+1}, v_i) \implies f(e_{i+1}) > 0$ (krawędź w tył).

Luz ścieżki powiększającej P to

minimum z dwóch minimów: $\min\{c(e) - f(e)\}$ po wszystkich krawędziach w przód ścieżki oraz $\min\{f(e)\}$ po wszystkich krawędziach wstecznych.

Zastosowanie ścieżki powiększającej

Weźmy ścieżkę powiększającą P taką jak powyżej dla przepływu f o luzie ϵ . Zastosować P do przepływu f oznacza funkcję f' taką, że:

1. dla $e \in E \setminus P : f'(e) = f(e)$,
2. dla $e \in P$ w przód: $f'(e) = f(e) + \epsilon$,
3. dla $e \in P$ wstecznej: $f'(e) = f(e) - \epsilon$.

Lemat: f' jest przepływem takim, że $|f'| = |f| + \epsilon$.

Algorytm Forda-Fulkersona

Niech $D = (V, E)$ będzie digrafem spójnym, $c : E \rightarrow R \geq 0$, $s, t \in V$ oraz $\forall e \in E : f(e) < c(e)$. Wtedy algorytm jest taki:

Dopóki istnieje ścieżka powiększająca P dla f , wykonaj:

1. zastosuj P do f , otrzymując f' ,
2. $f \leftarrow f'$.

Algorytm znajdowania ścieżki powiększającej

1. $R \leftarrow \{s\}$.
 2. Dopóki można, wykonuj:
 - 2.1. Jeśli istnieje krawędź $e = (u, v) : u \in R, v \notin R, f(e) < c(e)$, to dodaj v do R .
 - 2.2. Jeśli istnieje krawędź $e = (v, u) : u \in R, v \notin R, f(e) > 0$, to dodaj v do R .
- Jeżeli R zawiera t , to znaczy, że istnieje ścieżka powiększająca P dla f .

Przepustowość przekroju

$[S, T]$ to $s - t$ przekrój, jeśli $s \in S, t \in T, S \cup T = V, S \cap T = \emptyset$. Przepustowość przekroju:

$$c([S, T]) = \sum_{e=(u,v) \in E: u \in S, v \in T} c(e).$$

Lemat: Niech $U \subset V$. Wtedy $f^+(U) - f^-(U) = \sum_{v \in V} f^+(v) - f^-(v)$.

Dla dowolnego $s - t$ przekroju $[S, T]$ zachodzi $|f| \leq c([S, T])$.

Maksymalny przepływ, minimalne cięcie

Twierdzenie: przepływ f obliczony przez algorytm Forda-Fulkersona ma wartość równą przepustowości pewnego $s - t$ przekroju. Zatem jest maksymalny.

Przepływ całkowitoliczbowy: jeśli przepustowość każdej krawędzi w sieci jest liczbą całkowitą, to istnieje przepływ f maksymalny, który jest całkowitoliczbowy.

Zastosowania przepływów

Są to między innymi znajdowanie największego skojarzenia w grafach dwudzielnych, jak i znajdowanie największego b -skojarzenia w grafach dwudzielnych.

Niech $b : V \rightarrow N$. Wtedy $M \subseteq E$ jest b -skojarzeniem, jeśli $\forall v \in V : \deg_M(v) \leq b(v)$ (liczba krawędzi z M incydentna do v nie przekracza $b(v)$).