

1 Wariacje

Liczba wariacji z powtórzeniami

Dla zbiorów A, B o odpowiednio m, n elementach liczba funkcji ze zbioru A w B wynosi n^m , czyli $|\{f : A \rightarrow B\}| = n^m$.

Liczba wariacji bez powtórzeń

Dla zbiorów A, B o odpowiednio m, n elementach liczba funkcji różnowartościowych ze zbioru A w B wynosi $n(n-1)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Liczba podzbiorów

Zbiór A o n elementach ma $|\{B : B \subseteq A\}| = 2^n$ podzbiorów.

Para podzbiorów

Dla U będącego n -elementowym można wyznaczyć dwa jego podzbiory A, B takie, że $A \subseteq B$ na $|\{(A, B) : A \subseteq B \subseteq U\}| = |\{f : U \rightarrow \{0, 1, 2\}\}| = 3^n$ sposobów.

Liczba permutacji

Zbiór U o n elementach można spermutować na $n!$ sposobów.

Sufit, podłoga, część ułamkowa

Niech $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$, wtedy:

- $\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \leq x < n + 1$
- $\lceil x \rceil = n \Leftrightarrow n - 1 < x \leq n$
- $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$

Własności sufitu i podłogi

Niech $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$, wtedy:

- $\lfloor x + n \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$, ponieważ $\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1$.

Ponadto mamy:

- $\lfloor x + n \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$
- $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$

Podzbiory k-elementowe

Niech $|U| = \{1, 2, \dots, n\}$ oraz $P_n^k = \{A \subseteq U : |A| = k\}$. Wtedy $\frac{n!}{(n-k)!} = k! \cdot |P_n^k|$,

czyli $|P_n^k| = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$.

Symbol Newtona

Dla $k, n \in \mathbb{N}$ takich, że $0 \leq k \leq n$ zachodzi:

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Tożsamość absorpcyjna

Dla $k \geq 1$ zachodzi $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$.

Tożsamość Cauchy’ego

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^r \binom{m}{i} \binom{n}{r-i}$$

Tożsamość Pascala

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Kulki i szufladki

n kulek do k szuflad można wrzucić na tyle sposobów, ile jest ciągów złożonych

z n zer i $k-1$ jedynek, czyli $\binom{n+k-1}{k-1}$.

Dwumian Newtona

Dla $n \in \mathbb{N}$ mamy $(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$.

Inna tożsamość (jaka?)

$$\binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{m-k}{n-k}$$

Zasada szufladkowa Dirichleta

Niech $k, s \in \mathbb{N}_+$. Jeśli wrzucimy k kulek do s szuflad (Dirichleta), a kulek jest więcej niż szuflad ($k > s$), to w którejś szufladzie będą przynajmniej dwie kulki. Innymi słowy, dla skończonych zbiorów A, B , jeśli $|A| > |B|$, to nie istnieje funkcja różnowartościowa z A w B . Dla $k > s \cdot i$ kulek oraz s szuflad będzie w jakiejś szufladzie $i+1$ kulek.

2 Asymptotyka

Niech $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \geq 0$, wtedy możemy mówić o takich funkcjach asymptotycznych:

Notacja dużego O

Mamy $f(n) = O(g(n))$ wtw, gdy $\exists(c > 0) \exists(n_0 \in \mathbb{N}) \forall(n \geq n_0) f(n) < cg(n)$. Ponadto dla $C, a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zachodzą takie własności:

- $\forall(\alpha, \beta) \alpha \leq \beta \Rightarrow n^\alpha = O(n^\beta)$,
- $\forall(\alpha > 1) n^C = O(a^n)$,
- $\forall(\alpha > 0) (\ln n)^C = O(n^\alpha)$.

Przydatna może okazać się reguła de l’Hospitla, więc gdy $f(n)$ i $g(n)$ dążą do nieskończoności, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$.

Notacja małego o

$f(n) = o(g(n))$ wtw, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

Notacja duże Omega (Ω)

$f(n) = \Omega(g(n))$ wtw, gdy $\exists(c > 0) \exists(n_0 \in \mathbb{N}) \forall(n \geq n_0) f(n) \geq cg(n)$.

Notacja Theta (Θ)

$f(n) = \Theta(g(n))$ wtw, gdy $f(n) = \Omega(g(n)) \wedge f(n) = O(g(n))$.

Notacja małe Omega (ω)

$f(n) = \omega(g(n))$ wtw, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$.

3 Arytmetyka modularna

Funkcja modulo

Niech $n, d \in \mathbb{Z}$ i $d \neq 0$. Wtedy:

$$n \bmod d = n - \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \cdot d.$$

$n \bmod d = r$ wtw, gdy $0 \leq r < d \wedge \exists(k \in \mathbb{Z}) n = kd + r$

Przystawanie modulo

$a \equiv_n b$ wtw, gdy $a \bmod n = b \bmod n$

Własności funkcji modulo

- $a + b \equiv_n a \bmod n + b \bmod n$
- $a \cdot b \equiv_n (a \bmod n) \cdot (b \bmod n)$

Podzielność

Niech $n, d \in \mathbb{Z}$ i $d \neq 0$. Wtedy:

- $d|n$ wtw, gdy $\exists(k \in \mathbb{Z}) n = kd$
- $d|n$ wtw, gdy $n \bmod d = 0$
- $d|n$ wtw, gdy $n \equiv_d 0$
- $d|n_1 \wedge d|n_2$ to $d|(n_1 + n_2)$

Największy wspólny dzielnik (NWD, gcd)

Niech $a, b \in \mathbb{N}$, wtedy

$$\gcd(a, b) = \max\{d \in \mathbb{N} : d|a \wedge d|b\}$$

Własności NWD

Dla $a > b$ względnie pierwszych ($a \perp b$) i $0 \leq m < n$:

$$\gcd(a^n - b^n, a^m - b^m) = a^{\gcd(m, n)} - b^{\gcd(m, n)}.$$

Algorytm Euklidesa

Dla $a \geq b > 0$ korzystamy z własności: $\gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b)$ oraz $\gcd(a, 0) = a$.

```
gcd(a, b):
    while b != 0:
        c = a mod b
        a = b
        b = c
    return a
```

Rozszerzony algorytm Euklidesa

Dla $a \geq b > 0$:

$$\exists(x, y \in \mathbb{Z}) xa + yb = \gcd(a, b)$$

```
gcd(a, b):
    x = 1, y = 0, r = 0, s = 1
    while b != 0:
        c = a mod b
        q = a div b
        a = b
        b = c
        r' = r
        s' = s
        r = x - q * r
        s = y - q * s
        x = r'
        y = s'
```

```
return a, x, y
```

Liczby względnie pierwsze

Niech $a, b \in \mathbb{Z}$, wtedy te liczby są względnie pierwsze, gdy $\gcd(a, b) = 1$.

Coś o liczbach pierwszych

- Jeśli $2^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to n jest liczbą pierwszą.
- Jeśli $a^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to $a = 2$.
- Jeśli $2^n + 1$ jest liczbą pierwszą, to n jest potęgą liczby 2.

4 Wzór wtąceń i wyłączeń

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

5 Rekurencja, zależności rekurencyjne

Liczby Fibonacciego

Niech $F_0 = 0, F_1 = 1$, wtedy $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n > 1$.

Własności liczb Fibonacciego

Każde dwie kolejne liczby Fibonacciego są względnie pierwsze.

$$\gcd(F_m, F_n) = F_{\gcd(m, n)}$$

Szereg harmoniczna

$$H_n = H_{n-1} + \frac{1}{n}$$

Podział płaszczyzny na obszary

$$p_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0 \\ p_{n-1} + n & \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Liczba nieporządków n -elementowych

- $d_n = n! \cdot \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}$
- $d_{n+1} = n(d_n + d_{n+1})$ dla $d_0 = 1, d_1 = 0$.

Operator przesunięcia E

Mamy ciąg $\langle a_n \rangle = \langle a_0, a_1, \dots, a_n, \dots \rangle$. Wtedy $\mathbf{E} \langle a_n \rangle = \langle a_{n+1} \rangle = \langle a_1, \dots, a_n, \dots \rangle$.

Złożenie operatora przesunięcia

$$\mathbf{E}^2 \langle a_n \rangle = \mathbf{E}(\mathbf{E} \langle a_n \rangle) = \langle a_2, \dots, a_n, \dots \rangle$$

Operatory działające na ciągi

- $\langle a_n \rangle + \langle b_n \rangle = \langle a_n + b_n \rangle = \langle a_0 + b_0, \dots \rangle$
- $c \langle a_n \rangle = \langle ca_n \rangle = \langle ca_0, ca_1, \dots \rangle$

Co anihiluje dane ciągi?

- $\langle a \rangle \Rightarrow \mathbf{E} - 1$.
- $\langle a^i \rangle \Rightarrow \mathbf{E} - a$.
- $\langle \alpha a^i + \beta b^i \rangle \Rightarrow (\mathbf{E} - a)(\mathbf{E} - b)$.
- $\left\langle \sum_{k=0}^n \alpha_k a_k^i \right\rangle \Rightarrow \prod_{k=0}^n (\mathbf{E} - a_k)$.
- $\langle \alpha i + \beta \rangle \Rightarrow (\mathbf{E} - 1)^2$.
- $\langle (\alpha i + \beta) a^i \rangle \Rightarrow (\mathbf{E} - a)^2$.
- $\langle (\alpha i + \beta) a_i + \gamma b^i \rangle \Rightarrow (\mathbf{E} - a)^2 (\mathbf{E} - b)$.
- $\left\langle \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k i^k \right\rangle a^i \Rightarrow (\mathbf{E} - a)^n$.

Dodatkowe własności anihilatorów

Jeśli \mathbf{E}_A anihiluje $\langle a_i \rangle$, to ten sam anihilator anihiluje również ciąg $c \langle a_n \rangle$ dla dowolnej stałej c . Jeśli \mathbf{E}_A anihiluje $\langle a_i \rangle$ i \mathbf{E}_B anihiluje $\langle b_i \rangle$, to $\mathbf{E}_A \mathbf{E}_B$ anihiluje $\langle a_i \rangle \pm \langle b_i \rangle$.

Liczby Catalana

C_n oznacza n -tą liczbę Catalana, wyraża się przez $C_n = \sum_{i=1}^n C_{i-1} C_{n-i}$ dla $C_0 = 0$.

Można je również przedstawić wzorami $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$. Spełniają one zależność $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$.

Liczby Catalana posiadają różne interpretacje kombinatoryczne, takie jak liczba poprawnych rozmieszczeń nawiasów, liczba dróg w układzie współrzędnych w I ćwiartce, liczba

drzew binarnych, liczba podziałów wielokąta wypukłego na trójkąty.

Funkcja tworzące (OGF)

Dla ciągu $\langle a_n \rangle$ można utworzyć funkcję $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = A(x)$, która jest funkcją tworzącą tego ciągu. Poniżej kilka typowych funkcji tworzących dla ciągów:

- $\frac{1}{1-x}$ dla ciągu $\langle 1 \rangle$, czyli $\frac{n}{1-x}$ dla $\langle n \rangle$.
- $\frac{1}{1-2x}$ dla ciągu $\langle 2^n \rangle$.
- $\frac{1}{(1-x)^2}$ dla ciągu $\langle 1, 2, 3, \dots \rangle$.
- $\frac{1}{1-x^2}$ dla ciągu $\langle 0, 1, 0, 1, \dots \rangle$.

Przesunięcie wyrazów w prawo o k miejsc

Aby z ciągu $\langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$ o OGF $A(x)$ otrzymać ciąg $\langle 0, \dots, 0, a_0, a_1, \dots \rangle$, w którym pierwsze k wyrazów jest 0, należy pomnożyć funkcję tworzącą przez x^k , więc mamy $x^k A(x)$.

Przesunięcie wyrazów w lewo o k miejsc

Aby z takiego ciągu jak wyżej otrzymać ciąg $\langle a_k, a_{k+1}, \dots \rangle$, należy wykonać takie działanie: $\frac{A(x) - (a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_{k-1} x^{k-1})}{x^k}$.

Przerwy pomiędzy wyrazami

Funkcją tworzącą takiego ciągu $\langle a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, \dots \rangle$ jest $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i =$

$a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \dots = A(x^2)$. Dla ciągu o wyrazach co 3 miejsca byłoby to $A(x^3)$, dla 4 to $A(x^4)$, dla n więc $A(x^n)$.

Co drugi wyraz ciągu (pochodne)

Funkcją tworzącą $\langle a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, \dots \rangle$ jest $\frac{A(x) + A(-x)}{2}$, dla $\langle 0, a_1, 0, a_3, \dots \rangle$ mamy $\frac{A(x) - A(-x)}{2}$.

Funkcją tworzącą takiego ciągu $\langle 0, a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4, \dots, ia_i, \dots \rangle$ jest pochodna funkcji $A(x)$ przesunięta o jedno miejsce w prawo, a więc $xA'(x)$.

Wykorzystanie całek w OGF

Aby odnaleźć funkcję tworzącą ciągu $\langle 0, \frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{2}, \dots, \frac{a_i}{i}, \dots \rangle$ należy scałkować funkcję tworzącą $A(x)$ i przesunąć ją w

lewo: $\int_0^1 \frac{A(x) - a_0}{x} dx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i} x^i$.

Inne funkcje tworzące

- $\langle n^2 \rangle$ odpowiada OGF $\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$.
- $\langle n^3 \rangle$ odpowiada OGF $x \frac{x^2 + 4x + 1}{(1-x)^4}$.

3. $\left\langle \binom{n+k}{k} \right\rangle$ odpowiada OGF $\frac{1}{(1-x)^{n+1}}$.

Liczba podziałów liczby n

1. Dowolne składniki: $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}$
2. Różne składniki: $\prod_{i=1}^{\infty} (1+x^i)$
3. Nieparzyste składniki: $\prod_{i=1}^{\infty} (1+x^{2i-1})$
4. Składniki mniejsze od m : $\prod_{i=1}^{m-1} \frac{1}{1-x^i}$
5. Różne potęgi 2: $\prod_{i=1}^{\infty} (1+x^{2^i})$

Rekursja uniwersalna

Niech a, b, c będą dodatnimi stałymi, rozwiązaniem równania rekurencyjnego

$$T(n) = \begin{cases} b & \text{dla } n = 1 \\ aT(\frac{n}{c}) + bn & \text{dla } n > 1 \end{cases}$$

dla n będących potęgą liczby c jest

$$T(n) = \begin{cases} O(n) & \text{dla } a < c \\ O(n \log n) & \text{dla } a = c \\ O(n^{\log_c a}) & \text{dla } a > c \end{cases}$$

6 Teoria grafów

Graf nieskierowany

Graf nieskierowany to para zbiorów (V, E) , gdzie $E = \{ \{u, v\} : u, v \in V \}$. V to zbiór wierzchołków, E to zbiór krawędzi.

"Patologie" w grafach

Pętla to krawędź postaci $\{v, v\}$, a krawędzie równoległe to dwie lub więcej krawędzi łączących te same wierzchołki u, v (dla $u \neq v$).

Graf prosty

Graf $G = (V, E)$ jest prosty, jeśli nie zawiera pętli ani krawędzi równoległych.

Graf skierowany

Graf nieskierowany to para zbiorów (V, E) , gdzie $E = \{ \{u, v\} : u, v \in V \}$. V to zbiór wierzchołków, E to zbiór krawędzi skierowanych lub łuków.

Krawędź incydentna

Krawędź e jest incydentna do wierzchołka u , jeśli jeden z końców e to u .

Stopień wierzchołka

Stopień wierzchołka u oznaczany przez $\deg(u)$ to liczba krawędzi incydentnych do u . Każda pętla incydentna do u dokłada się do stopnia u liczbą 2.

Lemat o uściskach dłoni

Niech $G = (V, E)$ będzie nieskierowanym grafem. Wtedy $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$.

Reprezentacje grafów

Graf można reprezentować za pomocą list sąsiadów, macierzy sąsiedztwa lub macierzy incydencji.

Izomorfizm grafów

Dwa grafy nieskierowane proste $G = (V, E)$ i $H = (V', E')$ są izomorficzne wtw, gdy istnieje bijekcja $f: V \rightarrow V'$ taka, że $\forall (u, v \in V) \{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E'$.

Marszruta, ścieżka, droga, cykl

1. Marszruta o długości k to ciąg $\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ taki, że $\forall (0 \leq i < k) \{v_i, v_{i+1}\} \in E$.
 2. Droga to marszruta, w której żadna krawędź nie występuje dwukrotnie.
 3. Ścieżka to marszruta, w której żaden wierzchołek nie występuje dwukrotnie.
 4. Cykl to marszruta, w której pierwszy wierzchołek jest taki sam jak ostatni, a poza tym, żaden wierzchołek nie występuje dwukrotnie.
- $u-v$ -marszruta to marszruta taka, że $v_0 = u$ i $v_k = v$, analogicznie definiujemy $u-v$ -drogę i $u-v$ -ścieżkę. Marszruta/droga jest zamknięta, gdy $v_0 = v_k$. Zamknięta ścieżka to cykl.

Graf spójny

Nieskierowany graf $G = (V, E)$ jest spójny, jeśli z każdego wierzchołka da się dojść do innego, tzn. dla każdego wierzchołka $u, v \in V$ istnieje $u-v$ -ścieżka.

Dopełnienie grafu

Dopełnienie grafu G oznaczamy przez \bar{G} , a definiujemy je jako graf $\bar{G} = (V, E')$ taki, że $\{u, v\} \in E'$ wtw, gdy $\{u, v\} \notin E$.

Podgraf

Podgrafem grafu $G = (V, E)$ jest dowolny graf $H = (V', E')$ taki, że $V' \subseteq V$ i $E' \subseteq E$. Podgraf jest właściwy, jeśli $G \neq H$.

Spójna składowa

Spójna składowa grafu G to dowolny podgraf spójny $H = (V', E')$ grafu G , który jest maksymalny ze względu na zawieranie, tzn. taki, że nie istnieje podgraf spójny H' , którego podgrafem właściwym jest H .

Drzewo i las

Graf $G = (V, E)$ jest acykliczny, jeśli nie zawiera żadnego cyklu. Las jest acyklicznym grafem, a drzewo acyklicznym grafem spójnym. Drzewa są spójnymi składowymi lasu, a więc las składa się z drzew.

Drzewo jest najmniejszym grafem spójnym, a więc jeśli chcemy zbudować

graf spójny G na zbiorze wierzchołków V , to G musi być drzewem.

Liść

Liść to wierzchołek o stopniu 1. Dowolne drzewo o $n \geq 2$ wierzchołkach zawiera przynajmniej 2 liście.

Most

Most to krawędź, której usunięcie zwiększa liczbę spójnych składowych grafu, ponadto żaden most nie leży na cyklu.

Charakteryzacja drzewa

Niech $G = (V, E)$ będzie n -wierzchołkowym grafem nieskierowanym ($n \geq 1$). Wtedy wszystkie następujące stwierdzenia są równoważne:

1. G jest spójny i acykliczny (G jest drzewem).
2. G jest spójny i ma $n-1$ krawędzi.
3. G jest acykliczny i ma $n-1$ krawędzi.
4. Dla każdego $u, v \in V$ w G jest tylko jedna $u-v$ -ścieżka.
5. G jest spójny i każda krawędź jest mostem.
6. G nie ma cykli, ale dołożenie jakiegokolwiek krawędzi tworzy cykl.

Liczba liści w dowolnym drzewie

Niech t_i oznacza liczbę wierzchołków stopnia i w drzewie, wtedy

$$t_1 = \sum_{i=3}^n (i-2)t_i + 2 \text{ oznacza liczbę liści}$$

w drzewie. Nie zależy ona od t_2 , gdyż "przedłużenie" liścia kolejną krawędzią nie zmienia liczby liści w drzewie.

Wierzchołek centralny, promień grafu

Niech $d(u, v)$ oznacza odległość wierzchołków u, v , czyli długość najkrótszej ścieżki łączącej je. Dla każdego wierzchołka v definiujemy $r(v) = \max\{d(v, u) : u \in V(G)\}$. Wierzchołek w , dla którego $r(w) = \min\{r(v) : v \in V(G)\}$ nazywamy wierzchołkiem centralnym grafu G , a liczbę $r(G) = r(w)$ promieniem grafu G .

Graf dwudzielny

Graf $G = (V, E)$ jest dwudzielny wtw, gdy istnieje podział zbioru V na zbiory A i B taki, że dla każdej krawędzi $e \in E$ jeden koniec e należy do zbioru A , a drugi do zbioru B . Podział wierzchołków nie zawsze jest jednoznaczny! Graf G jest dwudzielny wtw, gdy nie zawiera cyklu o nieparzystej długości.

Lemat o zamkniętej marszrucie

Każda zamknięta marszruta o nieparzystej długości zawiera cykl o nieparzystej długości.

Graf o minimalnym stopniu k

Niech G będzie grafem prostym, w którym każdy wierzchołek ma stopień

przynajmniej k . Wówczas G zawiera ścieżkę o długości k . Jeśli $k \geq 2$, to G zawiera cykl o długości przynajmniej $k+1$.

Algorytmy przeszukiwania grafów

Przeszukiwanie grafu w głąb

DFS(u):
 u.visited = true
 for each neighbour v of u:
 if not v.visited
 DFS(v)

Przeszukiwanie grafu wszerz

BFS(v):
 queue Q = {}
 Q.enqueue(v)
 v.visited = true

 while (Q != empty):
 u = Q.dequeue()
 for each neighbour w of u:
 if not w.visited:
 Q.enqueue(w)
 w.visited = true

Czas działania DFS oraz BFS to $O(V+E)$.

Drzewo rozpinające

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym. Drzewo rozpinające grafu G to podgraf $T = (V, E')$, który jest drzewem. T zawiera wszystkie wierzchołki grafu G .

Las rozpinający

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem niekoniecznie spójnym. Las rozpinający grafu G to podgraf $F = (V, E')$, który jest lasem, którego liczba spójnych składowych jest taka sama jak liczba spójnych składowych grafu G .

Minimalne drzewo rozpinające (MST)

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym o nieujemnych wagach na krawędziach, a graf $T = (V, E')$ jego drzewem rozpinającym. Wagę definiuje funkcja $c: E \rightarrow \mathbb{R}_+$. Wtedy wagą drzewa rozpinającego $c(T) = \sum_{e \in E'} c(e)$. Minimalnym drzewem rozpinającym (MST) grafu G jest drzewo rozpinające T o minimalnej wadze.

Algorytmy na znajdowanie MST

Algorytm Kruskala polega na dodawaniu kolejnych krawędzi w taki sposób, aby nie stworzyły one żadnego cyklu.

KRUSKAL:
 sort(E) wzgledem wagi
 T = {}
 for i in [1, m]:
 if (T + {e(i)} nie tworzy
 żadnego cyklu):
 T = T + {e(i)}

Algorytm Prima polega na dobieraniu najbliższych krawędzi do grafu T .

PRIM:

```
T = {}
U = {1} (dowolny wierzcholek G)
while (U != V):
    e = najlzejsza krawedz (u, v),
      taka ze u jest z U,
      a v jest z V-U
    T = T + {(u, v)}
    U = U + {v}
```

Algorytm Boruvki polega na dodawaniu najbliższych krawędzi do T , łączeniu ich w superwierzchołki i wykonywaniu algorytmu od początku.

BORUVKA:

```
T = V
while (T != MST):
    wybierz najmniejsza krawedz
    z najmniejsza waga i dodaj
    ja do zbioru E'

    gdy jest wiecej niz jedna
    spojna składowa, polacz
    wszystkie wierzchołki w
    superwierzchołki i wykonaj
    algorytm od poczatku
```

Wszystkie powyżej przedstawione algorytmy działają w czasie $O(|E| \cdot \log|V|)$.

Skojarzenie (matching)

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym. Skojarzenie grafu G to dowolny podzbiór krawędzi $M \subseteq E$ taki, że żadne dwie krawędzie z M nie mają wspólnego końca.

Największe skojarzenie

Skojarzenie największe grafu G to skojarzenie o maksymalnej liczbie krawędzi.

Wierzchołki skojarzone, wolne

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym, a M jakimś skojarzeniem w G . Wierzchołek $v \in V$ jest skojarzony w M , jeśli jest końcem jakiejś krawędzi z M . Wierzchołek $v \in V$ jest wolny/nieskojarzony, jeśli żadna krawędź z M nie jest z nim incydentna.

Ścieżka alternująca

Ścieżka P w grafie G jest alternująca (względem M) jeśli krawędzie na P na przemian należą i nie należą do M .

Ścieżka powiększająca

Ścieżka P w grafie G jest powiększająca (względem M), jeśli jest alternująca względem M i jej końce są nieskojarzone (w M).

Skojarzenie doskonałe/pełne

Skojarzenie doskonałe/pełne grafu G to skojarzenie, w którym każdy wierzchołek z V jest skojarzony.

Cykl alternujący

Cykl C w grafie G jest alternujący względem M jeśli krawędzie na C na przemian należą i nie należą do M .

Twierdzenie Berge’a

Skojarzenie M grafu G jest największe wtw, gdy G nie zawiera ścieżki powiększającej względem M .

Sąsiedztwo wierzchołków

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem a $W \subseteq V$ podzbiorem wierzchołków. Sąsiedztwo W oznaczane jako $N(W)$ definiujemy jako zbiór

$$\{v \in V : \exists (w \in W) \{v, w\} \in E\}.$$

Warunek Halla

Niech graf $G = (A \cup B, E)$ będzie grafem dwudzielnym.

Dla każdego $A' \subseteq A$ zachodzi $|N(A')| \geq |A'|$ oraz dla każdego $B' \subseteq B$ zachodzi $|N(B')| \geq |B'|$.

Skojarzenie doskonałe w grafie dwudzielnym

Graf dwudzielnny G zwiera skojarzenie doskonałe wtw, gdy spełniony jest w nim warunek Halla.

Waga ścieżki, najlżejsza ścieżka

Waga ścieżki P to suma wag krawędzi leżących na P . Najlższej/na/krótsza (względem $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$) ścieżka z s do t to ta, która ma najmniejszą wagę. Niech $S \subseteq V$, a s będzie ustalonym wierzchołkiem z V . Ścieżka P z s do v jest prawie S -owa/osiągalna bezpośrednio z S , jeśli wszystkie wierzchołki na P oprócz v są w S .

$d(v)$ to waga najkrótszej ścieżki z s do v . $t(v)$ to waga najkrótszej prawie S -owej ścieżki z s do v , a gdy taka ścieżka nie istnieje, to $t(v) = \infty$.

Algorytm Dijkstry

Algorytm Dijkstry służy do znajdowania wagi najkrótszych ścieżek.

DIJKSTRA:

```
S = {s}
d(s) = 0

for each neighbour v of s:
    t(v) = c(s, v)
for other vertices:
    while (S != V):
        u = argmin{t(u): u not in S}
        S = S + {u}
    update all t(v):
        for each neighbour v
            (not in S) of vertex u:
                t(v) = min{t(v),
                    d(u)+c(u, v)}
```

Pokrycie wierzchołkowe

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem. Pokrycie wierzchołkowe G to dowolny pozdbiór $V' \subseteq V$ taki, że każda krawędź z E ma przynajmniej jeden z końców w V' .

Najmniejsze pokrycie wierzchołkowe

Najmniejsze pokrycie wierzchołkowe grafu G to to spośród pokryć wierzchołkowych G , które zawiera najmniej wierzchołków.

Pokrycie wierzchołkowe a skojarzenie

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem. Niech M będzie jakimś skojarzeniem G , a W jakimś pokryciem wierzchołkowym. Wtedy $|M| \leq |W|$.

Twierdzenie Koeniga

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem dwudzielnym, M_{\max} największym skojarzeniem G , a W_{\min} najmniejszym pokryciem wierzchołkowym. Wtedy $|M_{\max}| = |W_{\min}|$.