

1 Wariacje

Liczba wariacji z powtórzeniami

Dla zbiorów A, B o odpowiednio m, n elementach liczba funkcji ze zbioru A w B wynosi n^m , czyli $|\{f : A \rightarrow B\}| = n^m$.

Liczba wariacji bez powtórzeń

Dla zbiorów A, B o odpowiednio m, n elementach liczba funkcji różnowartościowych ze zbioru A w B wynosi $n(n-1)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Liczba podzbiorów

Zbiór A o n elementach ma $|\{B : B \subseteq A\}| = 2^n$ podzbiorów.

Para podzbiorów

Dla U będącego n -elementowym można wyznaczyć dwa jego podzbiory A, B takie, że $A \subseteq B$ na $|\{(A, B) : A \subseteq B \subseteq U\}| = |\{f : U \rightarrow \{0, 1, 2\}\}| = 3^n$ sposobów.

Liczba permutacji

Zbiór U o n elementach można spermutować na $n!$ sposobów.

Sufit, podłoga, część ułamkowa

Niech $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$, wtedy:

$$\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \leq x < n + 1$$

$$\lceil x \rceil = n \Leftrightarrow n - 1 < x \leq n$$

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$$

Własności sufitu i podłogi

Niech $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$, wtedy:

$$\lfloor x + n \rfloor = n + \lfloor x \rfloor, \text{ ponieważ}$$

$$\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1.$$

Ponadto mamy:

$$\lceil x + n \rceil = n + \lceil x \rceil$$

$$\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$$

Podzbiory k-elementowe

Niech $|U| = \{1, 2, \dots, n\}$ oraz $P_n^k = \{A \subseteq U : |A| = k\}$. Wtedy $\frac{n!}{(n-k)!} = k! \binom{n}{k}$,

$$\text{czyli } |P_n^k| = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

Symbol Newtona

Dla $k, n \in \mathbb{N}$ takich, że $0 \leq k \leq n$ zachodzi:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Kulki i szufladki

n kulek do k szuflad można wrzucić na tyle sposobów, ile jest ciągów złożonych z n zer i $k-1$ jedynek, czyli $\binom{n+k-1}{k-1}$.

Dwumian Newtona

Dla $n \in \mathbb{N}$ mamy $(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$.

Zasada szufladkowa Dirichleta

Niech $k, s \in \mathbb{N}_+$. Jeśli wrzucimy k kulek do s szuflad (Dirichleta), a kulek jest więcej niż szuflad ($k > s$), to w którejs szufladzie będą przynajmniej dwie kulki.

Innymi słowy, dla skończonych zbiorów A, B , jeśli $|A| > |B|$, to nie istnieje funkcja różnowartościowa z A w B . Dla $k > s \cdot i$ kulek oraz s szuflad będzie w jakiejs szufladzie $i+1$ kulek.

2 Asymptotyka

Niech $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \geq 0$, wtedy możemy mówić o takich funkcjach asymptotycznych:

Notacja dużego O

Mamy $f(n) = O(g(n))$ wtw, gdy $\exists(c > 0) \exists(n_0 \in \mathbb{N}) \forall(n \geq n_0) f(n) < cg(n)$. Ponadto dla $C, a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zachodzą takie własności:

$$\forall(\alpha, \beta) \alpha \leq \beta \Rightarrow n^\alpha = O(n^\beta),$$

$$\forall(\alpha > 1) n^C = O(a^n),$$

$$\forall(\alpha > 0) (\ln n)^C = O(n^\alpha).$$

Przydatna może okazać się reguła de l'Hospitala, więc gdy $f(n)$ i $g(n)$ dążą do nieskończoności, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$.

Notacja małego o

$f(n) = o(g(n))$ wtw, gdy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$

Notacja duże Omega (Ω)

$f(n) = \Omega(g(n))$ wtw, gdy

$$\exists(c > 0) \exists(n_0 \in \mathbb{N}) \forall(n \geq n_0) f(n) \geq cg(n).$$

Notacja Theta (Θ)

$f(n) = \Theta(g(n))$ wtw, gdy $f(n) = \Omega(g(n)) \wedge$

$$f(n) = O(g(n)).$$

Notacja małe Omega (ω)

$f(n) = \omega(g(n))$ wtw, gdy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty.$$

3 Arytmetyka modułarna

Funkcja modulo

Niech $n, d \in \mathbb{Z}$ i $d \neq 0$. Wtedy:

$$n \bmod d = n - \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \cdot d.$$

$$n \bmod d = r \text{ wtw, gdy } 0 \leq r < d \wedge$$

$$\exists(k \in \mathbb{Z}) n = kd + r$$

Przystawanie modulo

$a \equiv_n b$ wtw, gdy $a \bmod n = b \bmod n$

Własności funkcji modulo

$$a + b \equiv_n a \bmod n + b \bmod n$$

$$a \cdot b \equiv_n (a \bmod n) \cdot (b \bmod n)$$

Podzielność

Niech $n, d \in \mathbb{Z}$ i $d \neq 0$. Wtedy:

$$d|n \text{ wtw, gdy } \exists(k \in \mathbb{Z}) n = kd$$

$$d|n \text{ wtw, gdy } n \bmod d = 0$$

$$d|n \text{ wtw, gdy } n \equiv_d 0$$

$$d|n_1 \wedge d|n_2 \text{ to } d|(n_1 + n_2)$$

Największy wspólny dzielnik (NWD, gcd)

Niech $a, b \in \mathbb{N}$, wtedy

$$\gcd(a, b) = \max\{d \in \mathbb{N} : d|a \wedge d|b\}$$

Algorytm Euklidesa

Dla $a \geq b > 0$ korzystamy z własności:

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b) \text{ oraz}$$

$$\gcd(a, 0) = a.$$

`gcd(a, b):`

```
while b != 0:
    c = a mod b
    a = b
    b = c
return a
```

Rozszerzony algorytm Euklidesa

Dla $a \geq b > 0$:

$$\exists(x, y \in \mathbb{Z}) xa + yb = \gcd(a, b)$$

`gcd(a, b):`

```
x = 1, y = 0, r = 0, s = 1
while b != 0:
    c = a mod b
    q = a div b
    a = b
    b = c
```

$$r' = r$$

$$s' = s$$

$$r = x - q * r$$

$$s = y - q * s$$

$$x = r'$$

$$y = s'$$

`return a, x, y`

Liczby względnie pierwsze

Niech $a, b \in \mathbb{Z}$, wtedy te liczby są względnie pierwsze, gdy $\gcd(a, b) = 1$.

4 Wzór włączeń i wyłączeń

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

5 Rekurencja, zależności rekurencyjne

Liczby Fibonacciego

Niech $F_0 = 0, F_1 = 1$, wtedy $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n > 1$.

Operator przesunięcia E

Mamy ciąg $\langle a_n \rangle = \langle a_0, a_1, \dots, a_n, \dots \rangle$.

Wtedy $\mathbf{E}\langle a_n \rangle = \langle a_{n+1} \rangle = \langle a_1, \dots, a_n, \dots \rangle$.

Złożenie operatora przesunięcia

$$\mathbf{E}^2 \langle a_n \rangle = \mathbf{E}(\mathbf{E} \langle a_n \rangle) = \langle a_2, \dots, a_n, \dots \rangle$$

Operatory działające na ciągi

$$\langle a_n \rangle + \langle b_n \rangle = \langle a_n + b_n \rangle =$$

$$\langle a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots \rangle$$

$$c \langle a_n \rangle = \langle ca_n \rangle = \langle ca_0, ca_1, \dots \rangle$$