最大公約数概算アルゴリズム

最大公約数概算アルゴリズム (Approximate Greatest Common Divisor algorithm; AGCD algorithm) とは、任意の集合について各要素が公差を初項とする有意な等差数列の要素付近に存在することが見込めるとき、その等差数列の公差を求めるアルゴリズムである。言い換えると、AGCD algorithm はある集合の要素がおおよそある定数の整数倍であると見なせるとき、その定数、つまり要素の最大公約数を推定する。

注意されたいのは、ある集合に AGCD algorithm を用いるとき、その集合において見込められる等差数列の要素の最大公約数は概観として求まっている必要があるということである。AGCD algorithm は、概観として求まっている等差数列の要素の最大公約数を厳密化するものとも捉えられる。

以下に AGCD algorithm の手順を示す。

[1]

$$E(A) := \left\{ b_n \,\middle|\, \begin{matrix} \forall n \in \mathbb{N}, \\ n \leq |A| - 1, \end{matrix} \begin{cases} \Delta a_n < g_A \implies b_n = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2} \\ \Delta a_n \geq g_A \implies b_n = \Delta a_n \end{cases} \right\} \tag{1.1}$$

$$\left(a_n \leq a_{n+1},\ \Delta a_n := a_{n+1} - a_n \right)$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} E^1(A) := E(A) \\ E^{n+1}(A) := E\left(E^n(A)\right) \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\{\alpha\} := E^{|A|-1}(A) \tag{1.3}$$

$$D : \left[\alpha - \Delta\varepsilon,\ \alpha + \Delta\varepsilon\right] \tag{1.4}$$

[2]

$$Z(\delta,\ A) := \sum_{k=1}^{|A|} |a_k - \delta| \qquad \left(a_k \in A\right) \tag{2.1}$$

$$G_A := \arg\min_{\delta \in D} Z(\delta, A) \tag{2.2}$$

上式において、目的の最大公約数は G_A である。AGCD algorithm は [1], [2] の二段回で構成されており、[1] では最大公約数を探索する範囲の限定、[2] では実際の概算を行う。また、g_A は概観として求まっている最大公約数、$\Delta\varepsilon$ は最大公約数を探索する範囲の幅を決定する数であり、ともに定数である。

[1]

(1.1)

任意の集合 A について、$a_n \le a_{n+1}$ かつ $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ とし、$\Delta a_n < g_A$ の場合は b_n を a_n と a_{n+1} の平均、$\Delta a_n \ge g_A$ の場合は b_n を Δa_n として、b_n の集合 $E(A)$ を定める。言い換えれば、 集合 A を数列と見なし、各 a_n についてその差分が概観として求まっている最大公約数 g_A を下回れば b_n を a_n と a_{n+1} の平均とし、そうでなければ b_n を差分 Δa_n として $E(A)$ を得る。

(1.2)

任意の自然数 n について、$E^1(A) = E(A),\ \ E^{n+1}(A) = E^n\left(E(A)\right)$ と定める。つまり、集合 A から n 回 $E(A)$ を得る操作を行なって得られた集合を $E^n(A)$ 定める。

(1.3)

要素数が $|A|$ の集合 A について、$E^{|A|-1}(A)$ の要素数は 1 になる。このとき、$E^{|A|-1}(A)$ のただひとつの要素を α とする。

(1.4)

探索範囲 D を $\left[\alpha - \Delta\varepsilon,\ \alpha + \Delta\varepsilon\right]$ と定める。つまり、求める最大公約数は $\left[\alpha - \Delta\varepsilon,\ \alpha + \Delta\varepsilon\right]$ に存在するとして [2] に移行する。

[2]

(2.1)

任意の実数 δ と集合 A を引数とする関数 Z を、全ての A の要素 a_k と δ との差の絶対値の総和として定める。

(2.2)

D に含まれる任意の実数 δ と集合 A を引数とする関数 Z について、$Z(\delta,\ A)$ が最小値をとるような δ を求める最大公約数 G_A とする。

以上のようにして、任意の集合 A について各要素が公差を初項とする有意な等差数列の要素付近に存在することが見込めるとき、その等差数列の要素の最大公約数の概算値 G_A が求まる。