

# 轻子质子散射

王旭

2024 年 1 月 8 日

## 目录

<b>1</b>	<b>背景知识</b>	<b>1</b>
1	形状因子 . . . . .	1
2	弹性散射过程 . . . . .	2
<b>2</b>	<b>运动学变量</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>散射振幅</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>软光子近似下的散射截面</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>红外发散相消</b>	<b>16</b>
<b>6</b>	<b><math>\Delta</math> 共振态的介绍</b>	<b>17</b>
<b>7</b>	<b>高阶拉氏量</b>	<b>24</b>
<b>8</b>	<b>费曼图的计算</b>	<b>26</b>
<b>9</b>	<b>重整化的计算</b>	<b>34</b>
<b>A</b>	<b>附录</b>	<b>36</b>
1	三体相空间 . . . . .	36
2	S 参考系 . . . . .	37
3	EOMS 重整化与 Becher 和 Leutwyler 的红外正规化 . . . . .	40

## 1 背景知识

弹性轻子质子散射常被用做探测质子内部结构的工具。在极化电子和未极化的电子散射过程中，质子弹性形状因子比 ( $G_E/G_M$ ) 对  $Q^2$  依赖所表现出的差异 [1–4]；以及电子氢原子系统与  $\mu$  氢原子系统中，质子半径的差异 [5–7]；都需要我们对理论和实验进行更高精度的计算与检验。

在轻子质子散射中，除双光子交换引起的修正外，实光子发射也会对结果造成修正。对于弹性散射，给定能量下，转移动量  $Q^2$  和轻子散射角度  $\theta$  有一一对应关系。但在辐射修正下，并非如此。对于 QED 的辐射修正，我们可以将其分为两类：

1. 固定转移动量  $Q^2$ 。
2. 固定轻子散射角  $\theta$ 。如 MUSE 实验 [8] 和 Jefferson Lab 中一些高分辨率光谱仪实验 [9]。

### 1 形状因子

为了考虑质子的电荷分布对结果的影响，我们首先引入形状因子。形状因子来源于质子内部不同点处散射波的相位差。如果虚光子的波长远大于质子半径，则每个点对于散射波的贡献将是同相的。如果虚光子的波长小于质子半径，则散射波的相位强烈依赖于电荷的分布。

下面是形状因子的半经典推导 [10]。考虑一个电荷分布为  $Q\rho(\mathbf{r}')$  的靶，其中  $Q$  是总电量， $\rho(\mathbf{r}')$  是归一化的电荷分布。则势函数可以写为

$$V(\mathbf{r}') = \int \frac{Q\rho(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} d^3\mathbf{r}'. \quad (1.1)$$

Born 近似下，入射态和出射态的波函数可以写为  $\psi_i = e^{i(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r} - Et)}$  和  $\psi_f = e^{i(\mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{r} - Et)}$ ，因此

$$\begin{aligned} M_{fi} &= \langle \psi_f | V(\mathbf{r}) | \psi_i \rangle = \int e^{i(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r} - \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{r})} V(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \\ &= \int e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}')} \frac{Q\rho(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' d^3\mathbf{r} \\ &= \int e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}} \frac{Q}{4\pi|\mathbf{R}|} d^3\mathbf{R} \int \rho(\mathbf{r}') e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}')} d^3\mathbf{r}', \end{aligned} \quad (1.2)$$

其中  $\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3$  为动量转移， $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ 。定义

$$F(\mathbf{q}^2) = \int \rho(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{r}, \quad (1.3)$$

则

$$M_{fi} = M_{fi}^{pt} F(\mathbf{q}^2). \quad (1.4)$$

其中上标  $M_{fi}^{pt}$  表示质子作为点状粒子。

对于比较小的动量转移, 可以将  $F(\mathbf{q}^2)$  展开为  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}$  的 Taylor 级数,

$$\begin{aligned} F(\mathbf{q}^2) &= \int \rho(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \\ &= \int \rho(\mathbf{r}) \left[ 1 + i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})^2 + \cdots \right] \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \\ &\simeq \int_0^\infty r^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\cos\theta \left[ 1 - \frac{1}{2}q^2 r^2 \cos^2\theta \right] \rho(r) \end{aligned} \quad (1.5)$$

最后一步中, 我们假设系统是宇称守恒的, 因此  $r$ 、 $q$  的奇次幂都为 0, 也是我们用  $\mathbf{q}^2$  作变量的原因。如果系统还具有转动对称性,  $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$ , 则

$$F(q^2) \sim 1 - \frac{1}{6}q^2 \langle r_c^2 \rangle + \mathcal{O}(q^4), \quad (1.6)$$

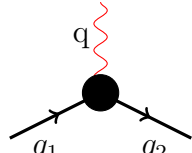
其中均方电荷半径  $\langle r_c^2 \rangle$  定义为

$$\langle r_c^2 \rangle = 4\pi \int_0^\infty r^4 \rho(r) dr. \quad (1.7)$$

除 (1.5) 式外, 形状因子还可以写作

$$F(q^2) = 4\pi \int_0^\infty \frac{\sin(qr)}{qr} r^2 \rho(r) dr. \quad (1.8)$$

在场论中, 对于一般的顶点, 我们有



The diagram shows a central black vertex. Two solid lines with arrows pointing towards the vertex are labeled  $q_1$  and  $q_2$ . A wavy line labeled  $q$  points away from the vertex.

$$= (-ie) \bar{u}(q_2) \left[ F_1(Q^2) \gamma^\mu + \frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m} p_\nu F_2(Q^2) \right] u(q_1). \quad (1.9)$$

实验系中  $q^2 < 0$ , 因此定义  $Q^2 = -q^2$ 。而  $F_1, F_2$  分别被称作 Dirac 和 Pauli 形状因子。 $F_1$  的物理意义是调整了  $eA_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  耦合项, 相当于电荷重整化, 而  $F_2$  则给出反常磁矩。

实验上, 也通常用 Sachs 形状因子, 它们之间的关系如下:

$$G_E(Q^2) = F_1(Q^2) + \frac{Q^2}{4m^2} F_2(Q^2), \quad (1.10)$$

$$G_M(Q^2) = F_1(Q^2) + F_2(Q^2) \quad (1.11)$$

## 2 弹性散射过程

首先考虑非极化的弹性散射过程

$$l(k_1) + p(p_1) \rightarrow l'(k_2) + p'(p_2), \quad (1.12)$$

其中  $k_1, p_1, k_2, p_2$  分别是初末态轻子和质子的四动量,  $k_1^2 = k_2^2 = m^2, p_1^2 = p_2^2 = M^2$ 。选取参考系:  $\mathbf{p}_1 = 0$ 。定义  $q = k_1 - k_2$  为虚光子的四动量, 引入如下运动学不变量:

$$\begin{aligned} S &= 2p_1 \cdot k_1, \quad Q^2 = -q^2, \quad X = S - Q^2, \quad \lambda_S = S^2 - 4m^2M^2, \\ \lambda_X &= X^2 - 4m^2M^2, \quad \lambda_m = Q^2(Q^2 + 4m^2). \end{aligned} \quad (1.13)$$

利用上面的不变量, 我们可以把初末态轻子的  $k_0$  和  $|\mathbf{k}|$  表示为:

$$k_{10} = \frac{S}{2M}, \quad |\mathbf{k}_1| = \frac{\sqrt{\lambda_S}}{2M}, \quad k_{20} = \frac{X}{2M}, \quad |\mathbf{k}_2| = \frac{\sqrt{\lambda_X}}{2M}. \quad (1.14)$$

接着把轻子散射角利用不变量表示:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{|\mathbf{k}_1||\mathbf{k}_2|} = \frac{SX - 2M^2(Q^2 + 2m^2)}{\sqrt{\lambda_S\lambda_X}}. \quad (1.15)$$

求解上式可以得到  $Q^2$  与  $\cos\theta$  的关系为:

$$Q_{\pm}^2 = \lambda_S \frac{S \sin^2\theta + 2M^2 \pm 2M \cos\theta \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2\theta}}{(S + 2M^2)^2 - \lambda_S \cos^2\theta} \quad (1.16)$$

将上式代回 (1.15), 我们可以发现,  $Q_-^2$  才是正确的解,  $Q_+^2$  给出的是  $180^\circ - \theta$  解。由于散射角度只能取  $-1 < \cos\theta < 1$ , 因此  $Q^2$  的取值范围为:

$$0 < Q^2 < \frac{\lambda_S}{S + m^2 + M^2}. \quad (1.17)$$

弹性散射的树图如图:

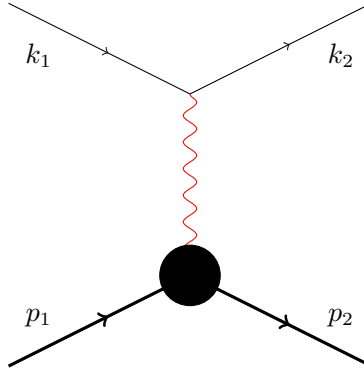


图 1: 弹性轻子质子散射

散射振幅为

$$\mathcal{M}_B = \frac{ie^2}{Q^2} \bar{u}(k_2) \gamma^\mu u(k_1) \bar{U}(p_2) \Gamma_\mu(q) U(p_1) \quad (1.18)$$

其中下标  $B$  表示为 Born 项, 而

$$\Gamma_\mu(q) = F_1(Q^2) \gamma^\mu + \frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m} p_\nu F_2(Q^2). \quad (1.19)$$

散射振幅模方可以分为轻子部分和强子部分

$$|\mathcal{M}_B|^2 = \frac{e^4}{Q^4} W_{\mu\nu}(q) L^{\mu\nu}, \quad (1.20)$$

其中

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr}[\gamma^\mu (\not{k}_1 + m) \gamma^\nu (\not{k}_2 + m)], \quad (1.21)$$

$$W_{\mu\nu}(q) = \frac{1}{2} \text{Tr}[\Gamma_\mu(q) (\not{p}_1 + M) \Gamma_\nu(-q) (\not{p}_1 + \not{q} + M)]. \quad (1.22)$$

可以将强子部分写成协变形式：

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}(q) &= -\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) \mathcal{F}_1(Q^2) + \left(p_{1\mu} + \frac{q_\mu}{2}\right) \left(p_{1\nu} + \frac{q_\nu}{2}\right) \frac{\mathcal{F}_2(Q^2)}{2M^2} \\ &= \sum_{i=1}^2 w_{\mu\nu}^i \mathcal{F}_i(Q^2) \end{aligned} \quad (1.23)$$

其中  $w_{\mu\nu}^i$  的含义是自明的，而  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  定义如下：

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(Q^2) &= Q^2 (F_1(Q^2) + F_2(Q^2))^2 \\ \mathcal{F}_2(Q^2) &= 4M^2 F_1(Q^2)^2 + Q^2 F_2(Q^2)^2. \end{aligned} \quad (1.24)$$

对应  $2 \rightarrow 2$  的散射，我们有微分散射截面

$$d\sigma_B = \frac{1}{2\sqrt{\lambda_S}} |\mathcal{M}_B|^2 d\Gamma_2 \quad (1.25)$$

其中两体末态相空间积分为

$$\begin{aligned} d\Gamma_2 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \delta^4(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) \frac{d^3 \mathbf{k}_2}{2k_{20}} \frac{d^3 \mathbf{p}_2}{2p_{20}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{4k_{20}p_{20}} \delta(p_{10} + k_{10} - p_{20} - k_{20}) |\mathbf{k}_2|^2 d|\mathbf{k}_2| d\Omega \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{|\mathbf{k}_2|^2}{4k_{20}p_{20}} \left[ 1 / \frac{\partial(k_{20} + p_{20})}{\partial|\mathbf{k}_2|} \right] d\Omega \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{|\mathbf{k}_2|^2}{4k_{20}p_{20}} \left[ 1 / \left( \left( \frac{\mathbf{k}_2}{k_{20}} - \frac{\mathbf{p}_2}{p_{20}} \right) \cdot \hat{\mathbf{k}}_2 \right) \right] d\Omega \end{aligned} \quad (1.26)$$

第三个等式中，我们利用了

$$d(k_{20} + p_{20}) = \frac{\partial(p_{20} + k_{20})}{\partial|\mathbf{k}_2|} d|\mathbf{k}_2| \quad (1.27)$$

最后一个等式中，我们首先利用

$$k_0^2 = \mathbf{k}^2 + m^2 \longrightarrow d(k_{20} + p_{20}) = \frac{1}{2k_{20}} d|\mathbf{k}_2|^2 + \frac{1}{2p_{20}} d|\mathbf{p}_2|^2,$$

然后选定  $\mathbf{k}_2$  为参考方向，将  $\mathbf{p}_2$  分解到平行和垂直方向

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_{2,L} + \mathbf{p}_{2,T}$$

由动量守恒 (用  $\mathbf{P}$  代表总矢量)

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{P} - \mathbf{k}_2 \longrightarrow \begin{cases} \mathbf{p}_{2,L} = \mathbf{P}_L - \mathbf{k}_2, & p_{2,L} = P_L - |\mathbf{k}_2| \\ \mathbf{p}_{2,T} = \mathbf{P}_T \end{cases}$$

$\mathbf{P}_L$  和  $\mathbf{P}_T$  可以由投影算符  $\mathcal{P}_L = \hat{\mathbf{k}}_2 \hat{\mathbf{k}}_2$  和  $\mathcal{P}_T = 1 - \mathcal{P}_L$  得到，因此  $\mathbf{P}_{L,T}$  依赖于  $\cos\theta$  和  $\phi_1$ ，与  $|\mathbf{k}_2|$  无关。从而

$$\begin{cases} dP_L \wedge d\Omega = 0 \\ dP_T \wedge d\Omega = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} dp_{2,L} \wedge d\Omega = -d|\mathbf{k}_2| \wedge d\Omega \\ d|\mathbf{p}_{2,T}| \wedge \Omega = 0 \end{cases}$$

代入到  $d(k_{20} + p_{20})$  中，有

$$\begin{aligned} d(k_{20} + p_{20}) \wedge d\Omega &= d(k_{20} + p_{20}) = \frac{1}{2k_{20}} d|\mathbf{k}_2|^2 + \frac{1}{2p_{20}} d|\mathbf{p}_2|^2 \wedge d\Omega \\ &= \left[ \frac{1}{k_{20}} |\mathbf{k}_2| d|\mathbf{k}_2| + \frac{1}{p_{20}} \left( p_{2,L} dp_{2,L} + |\mathbf{p}_{2,T}| d|\mathbf{p}_{2,T}| \right) \right] \wedge d\Omega \\ &= \left( \frac{|\mathbf{k}_2|}{k_{20}} - \frac{p_{2,L}}{p_{20}} \right) d|\mathbf{k}_2| \wedge d\Omega \end{aligned} \quad (1.28)$$

即验证了最后一步。

将 (1.13) 中的变量代入，可以得到在实验室系中

$$d\Gamma_2 = \frac{\sqrt{\lambda_X} d\cos\theta}{8\pi(S + 2M^2 - \cos\theta X \sqrt{\lambda_S/\lambda_X})}, \quad (1.29)$$

利用 (1.15)  $\cos\theta$  与  $Q^2$  的关系，可以得到

$$d\Gamma_2 = \frac{dQ^2}{8\pi\sqrt{\lambda_S}}. \quad (1.30)$$

最终，我们可以得到微分散射截面

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_B}{dQ^2} &= \frac{2\pi\alpha^2}{\lambda_S Q^4} \sum_{i=1}^2 \theta_B^i \mathcal{F}_i(Q^2), \\ \frac{d\sigma_B}{d\cos\theta} &= j_\theta \frac{d\sigma_B}{dQ^2}, \end{aligned} \quad (1.31)$$

其中

$$\theta_B^1 = Q^2 - 2m^2, \quad \theta_B^2 = \frac{SX - M^2 Q^2}{2M^2}, \quad j_\theta = \frac{\sqrt{\lambda_S} \lambda_X^{3/2}}{2M^2(SX - 2m^2(Q^2 + 2M^2))} \quad (1.32)$$

## 2 运动学变量

考虑轫致辐射过程  $l(k_1) + p(p_1) \rightarrow l'(k_2) + p'(p_2) + \gamma(k)$ , 其中  $(k^2 = 0)$ 。额外引入三个变量: 非弹性度  $v = (p_1 + k_1 - k_2)^2 - M^2$ ,  $\tau = (k \cdot q)/(k \cdot p_1)$ , 以及方位角  $\phi_k$  (实验系中), 即  $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$  和  $(\mathbf{k}, \mathbf{q})$  平面之间的夹角。

用之前已经定义的洛伦兹不变量 (1.13), 加上新的三个变量, 我们可以将末态轻子的  $k_0$  和  $|\mathbf{k}|$  重新表述为:

$$k_{20} = \frac{X - v}{2M}, \quad |\mathbf{k}_2| = \frac{\sqrt{(X - v)^2 - 4m^2M^2}}{2M}. \quad (2.1)$$

同理,  $\cos\theta$  也要重新表述为:

$$\cos\theta = \frac{S(X - v) - 2M^2(Q^2 + 2m^2)}{\sqrt{\lambda_S((X - v)^2 - 4M^2m^2)}}, \quad (2.2)$$

在固定  $Q^2$  的情况下,  $\cos\theta$  仅依赖于辐射过程的非弹性度。观察非弹性度的定义, 我们可以发现, 在实验系中, 当  $\cos\theta_R = -1$  时,  $v$  取到上限。因此在固定  $Q^2$  情况下,  $v$  的上限为

$$v_q = \frac{\sqrt{\lambda_S \lambda_m} - Q^2(S + 2m^2)}{2m^2}, \quad (2.3)$$

其中下标  $q$  表示此时  $v$  是  $Q^2$  的函数。

通过求解 (2.2), 我们可以得到两个  $Q^2$ , 同理, 只有一个是正确的, 如下

$$Q^2(v) = \frac{(S + 2M^2)(\lambda_S - vS) - \lambda_S(S - v)\cos^2\theta - 2M\sqrt{\lambda_S}\sqrt{\mathcal{D}}\cos\theta}{(S + 2M^2)^2 - \lambda_S\cos^2\theta}, \quad (2.4)$$

其中

$$\mathcal{D} = M^2(\lambda_S + v(v - 2S)) - m^2(\lambda_S\sin^2\theta + 4vM^2). \quad (2.5)$$

(2.4) 式中, 固定  $\theta$ , 则此时  $Q^2$  仅为  $v$  的函数。由于  $\mathcal{D}$  在根号下, 因此  $\mathcal{D}$  必须是正的。 $\mathcal{D}$  是  $v$  的二次函数, 且二次项系数  $M^2 > 0$ , 因此令  $\mathcal{D} = 0$ , 小的解即为  $v$  在固定  $\theta$  时的上限:

$$v_\theta = S + 2m^2 - \frac{m}{M}\sqrt{(S + 2M^2)^2 - \lambda_S\cos^2\theta}. \quad (2.6)$$

观察 (2.4), 可以发现当  $\cos\theta > 0$  时,  $\mathcal{D}$  越小,  $Q^2$  越大; 当  $\cos\theta < 0$  时,  $\mathcal{D}$  越小,  $Q^2$  越小。

在 (2.3) 中,  $v_q$  为  $Q^2$  的函数, 对  $Q^2$  求导, 并令其等于 0, 可以得到  $v_q$  的最大值。此时

$$\begin{aligned} Q^2(v_q^{max}) &= \frac{m(S + 2m^2)}{\sqrt{S + m^2 + M^2}} - 2m^2, \\ v_q^{max} &= S - 2m(\sqrt{S + m^2 + M^2} - m). \end{aligned} \quad (2.7)$$

观察 (2.6)，我们可以发现当  $\cos\theta = \pm 1$  时， $v_\theta$  取到最大值；当  $\cos\theta = 0$  时，取到最小值。分别如下

$$\begin{aligned} v_\theta^{max} &= v_q^{max} = S - 2m(\sqrt{S + m^2 + M^2} - m), \\ v_\theta^{min} &= (S - 2mM)(1 - \frac{m}{M}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

$v_q$  和  $v_\theta$  整体情况下对  $Q^2$  和  $\theta$  的依赖如图：

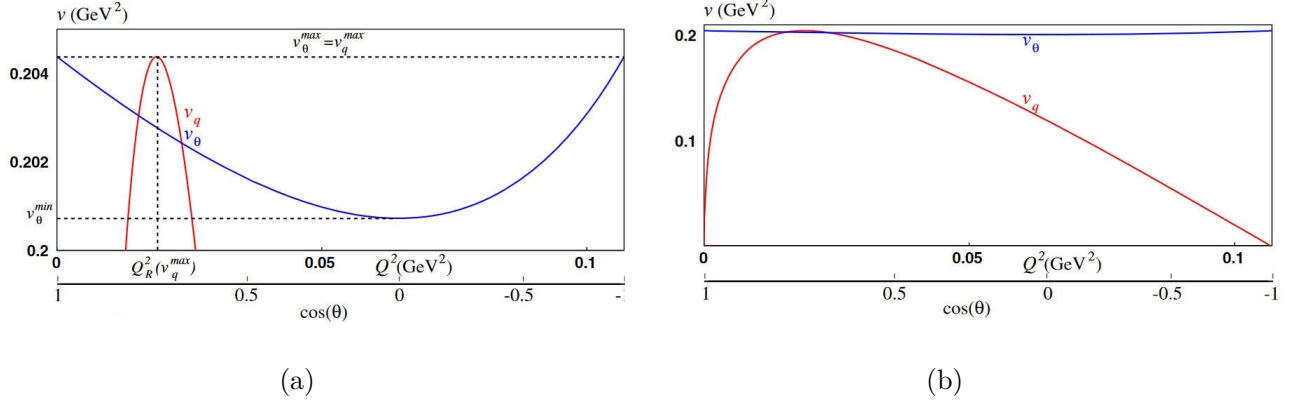


图 2:  $v_q$  和  $v_\theta$  在  $|\mathbf{k}_1| = 200\text{MeV}$  时对应变量的依赖关系。

(a) 图为  $v = 0.2\text{GeV}$  附近的放大图，(b) 图为完整图。

从图中可以看出，当  $Q^2$  达到边界时， $v_q \rightarrow 0$ ，不辐射出光子，恢复为弹性散射。

利用 (2.4)，我们可以画出在不同散射角度下  $Q_R^2(v)$  对  $v$  的依赖关系，如图 (3)。在这里，我们引入一个下标  $R$  来强调当固定  $\theta$  时， $Q^2$  仅依赖于  $v$ 。从图中不难看出，即使当  $\theta = 0$  时， $Q_R^2$  也不一定等于 0，也有可能辐射出光子。而弹性散射中，当  $\theta = 0$  时，代回 (1.16)，转移动量  $Q_R^2 = 0$ 。

将 (2.6) 代入 (2.4) 可以得到

$$Q_R^2(v_\theta) = \frac{m(S(S + 2M^2) - \lambda_S \cos^2\theta)}{M\sqrt{(S + 2M^2)^2 - \lambda_S \cos^2\theta}} - 2m^2. \quad (2.9)$$

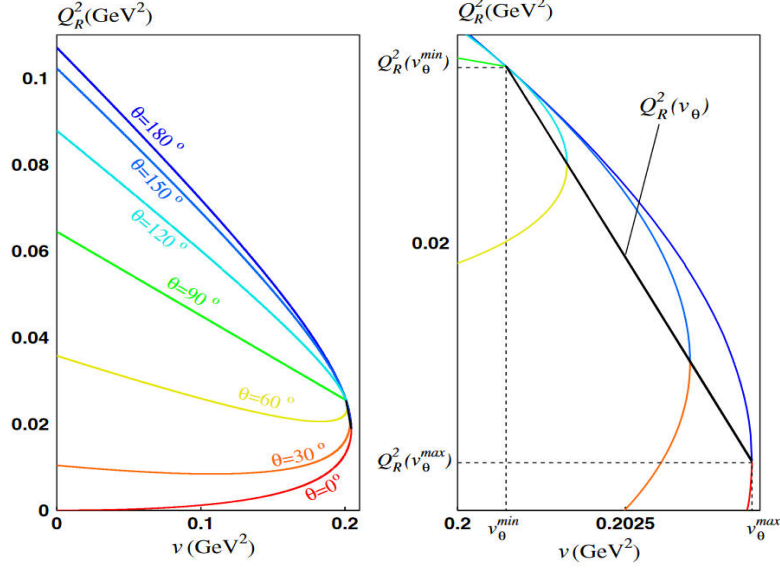
即每个  $\theta$  角对应非弹性度上限对应的  $Q_R^2$  点所组成的线，如图 (3) 右图所示。由于  $Q_R^2(v_\theta)$  为关于  $\theta$  的偶函数，因此  $\theta$  和  $180^\circ - \theta$  对应的  $Q_R^2$  总位于同一点。

由 (2.6) 可以给两个值：

$$\begin{aligned} Q^2(v_\theta^{max}) &= \frac{m(S + 2m^2)}{\sqrt{S + m^2 + M^2}} - 2m^2, \\ Q^2(v_\theta^{min}) &= m\left(\frac{S}{M} - 2m\right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

同样在图 (3) 右图中标示出来了。



图 3:  $Q_R^2$  在不同角度下对  $v$  的依赖关系

从 (2.9) 式中, 我们可以看出, 在固定  $\theta$  的情况下, 硬光子的发射是不能在超相对论近似 ( $m = 0$ ) 下进行计算的, 否则  $Q_R^2 = 0$  没有意义。

$\tau$  在实验系下可以表述为

$$\tau = \frac{k \cdot q}{k \cdot p_1} = \frac{1}{M}(q_0 - |\mathbf{q}|\cos\theta_k), \quad (2.11)$$

其中  $\theta_k$  为  $\mathbf{q}$  与  $\mathbf{k}$  之间的夹角。 $\tau$  在固定  $Q^2$  和固定  $\theta$  时的取值范围分别为

$$\begin{aligned} \tau_{max/min}^q &= \frac{Q^2 + v \pm \sqrt{\lambda_q}}{2M^2}, \\ \tau_{max/min}^\theta &= \frac{Q_R^2(v) + v \pm \sqrt{\lambda_v}}{2M^2}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

其中  $\lambda_q = (Q^2 + v)^2 + 4M^2Q^2$ ,  $\lambda_v = (Q_R^2(v) + v)^2 + 4M^2Q_R^2(v)$ 。

$\sin\phi_k$  可以在实验系下写成如下形式:

$$\sin\phi_k = \pm \frac{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} p_1^\alpha q^\beta k_1^\gamma k^\delta}{M|\mathbf{q}||\mathbf{k}_1^\perp|k_0 \sin\theta_k} \quad (2.13)$$

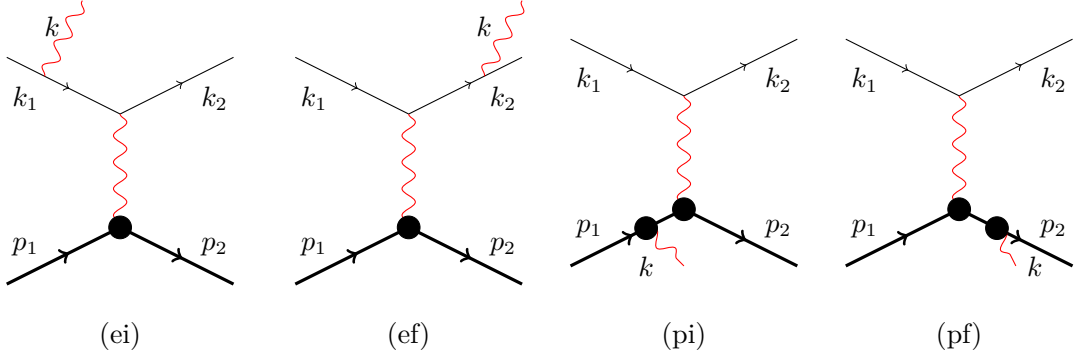
我们将目前已知的弹性过程和非弹性过程的比较总结如下。

弹性过程	非弹性过程
$Q^2$ 与 $\theta$ 一一对应	$Q^2$ 依赖于 $\theta$ 和 $v$
$\theta = 0$ 时, $Q^2 = 0$	$\theta = 0$ 时, $Q^2$ 不一定等于 0

表 1: 弹性过程与非弹性过程比较

### 3 散射振幅

我们考虑韧致辐射过程，如图所示，分别是初末态轻子腿上辐射出光子与初末态强子腿上辐射出光子。



对应的散射振幅为

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{ei} &= \bar{u}(k_2)(-ie\gamma^\mu)\frac{i}{\not{k}_1 - \not{k} - M}(-ie\gamma^\alpha)u(k_1)\left(\frac{-i}{-t}\right)\bar{U}(p_2)(ie\Gamma_\mu(q-k))U(p_1)\varepsilon_\alpha^*, \\
 \mathcal{M}_{ef} &= \bar{u}(k_2)(-ie\gamma^\alpha)\frac{i}{\not{k}_2 + \not{k} - M}(-ie\gamma^\mu)u(k_1)\left(\frac{-i}{-t}\right)\bar{U}(p_2)(ie\Gamma_\mu(q-k))U(p_1)\varepsilon_\alpha^*, \\
 \mathcal{M}_{pi} &= \bar{u}(k_2)(-ie\gamma^\mu)u(k_1)\left(\frac{-i}{-Q^2}\right)\bar{U}(p_2)(ie\Gamma^\alpha(-k))\frac{i}{\not{p}_2 + \not{k} - M}(ie\Gamma^\mu(q))U(p_1)\varepsilon_\alpha^*, \\
 \mathcal{M}_{pf} &= \bar{u}(k_2)(-ie\gamma^\mu)u(k_1)\left(\frac{-i}{-Q^2}\right)\bar{U}(p_2)(ie\Gamma^\mu(q))\frac{i}{\not{p}_1 - \not{k} - M}(ie\Gamma^\alpha(q))U(p_1)\varepsilon_\alpha^*,
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中  $t = -(q-k)^2 = Q^2 + \tau R$ ，而  $R = 2p_1 \cdot k = v/(1+\tau)$ 。 $\varepsilon_\alpha^*$  为光子的极化矢量。我们把轻子腿上辐射出光子的图称为 BH 图，两者相加，我们可以得到

$$\mathcal{M}_{\text{BH}} = -\frac{ie^3}{t}\bar{u}(k_2)\Gamma^{\mu\alpha}u(k_1)\bar{U}(p_2)\Gamma_\mu(q-k)U(p_1)\varepsilon_\alpha^*, \tag{3.2}$$

其中

$$\Gamma^{\mu\alpha} = \left(\frac{k_1^\alpha}{k \cdot k_1} - \frac{k_2^\alpha}{k \cdot k_2}\right)\gamma^\mu - \frac{\gamma^\mu \not{k} \gamma^\alpha}{2k_1 \cdot k} - \frac{\gamma^\alpha \not{k} \gamma^\mu}{2k_2 \cdot k} \tag{3.3}$$

同弹性散射过程一样，我们可以将散射振幅的模方分为轻子部分和强子部分。BH 图仅仅是轻子腿上辐射出光子，因此，除了入射光子的动量之外，强子部分和弹性散射是一样的。

$$|\mathcal{M}_{\text{BH}}|^2 = \frac{e^6}{t^2}W_{\mu\nu}(q-k)L^{\mu\nu}, \tag{3.4}$$

其中

$$L^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\text{Tr}[\Gamma^{\mu\alpha}(\not{k}_1 + m)\bar{\Gamma}_\alpha^\nu(\not{k}_2 + m)], \tag{3.5}$$

其中  $\bar{\Gamma}_\alpha^\nu = \gamma^0 \Gamma_\alpha^{\nu\dagger} \gamma^0$ , 利用  $\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu$ , 因此

$$\bar{\Gamma}_\alpha^\nu = \left( \frac{k_{1\alpha}}{k \cdot k_1} - \frac{k_{2\alpha}}{k \cdot k_2} \right) \gamma^\nu - \frac{\gamma^\nu \not{k} \gamma_\alpha}{2k \cdot k_2} - \frac{\gamma_\alpha \not{k} \gamma^\nu}{2k \cdot k_1}. \quad (3.6)$$

我们把从强子部分辐射出光子的图叫做 VCS 图, 两者相加, 可以得到

$$\mathcal{M}_{\text{VCS}} = \frac{ie^3}{Q^2} \bar{u}(k_2) \gamma_\mu u(k_1) \bar{U}(p_2) \varepsilon_\alpha^* \Gamma_h^{\mu\alpha} U(p_1), \quad (3.7)$$

其中

$$\Gamma_h^{\mu\alpha} = \Gamma^\mu(q) \frac{\not{p}_1 - \not{k} + M}{2p_1 \cdot k} \Gamma^\alpha(-k) - \Gamma^\alpha(-k) \frac{\not{p}_2 + \not{k} + M}{2p_2 \cdot k} \Gamma^\mu(q) \quad (3.8)$$

## 4 软光子近似下的散射截面

如果我们把一张带有费米子外腿的图记作  $m_0(p) = \bar{u}(p)\tilde{m}_0(p)$ ，那么我们可以接着把费米子外腿上辐射出光子的图记作  $m_1$ ，如图所示



那么

$$\begin{aligned}
 m_1 &= \bar{u}(p)(-ie\not{\epsilon}^*(k))\frac{i}{\not{p} + \not{k} - m}\tilde{m}_0(p+k) \\
 &= e\bar{u}(p)\frac{\not{\epsilon}^*(\not{p} + \not{k} + m)}{2p \cdot k}\tilde{m}_0(p+k) \\
 &= e\frac{p \cdot \epsilon^*(k)}{p \cdot k}\bar{u}(p)\tilde{m}_0(p) \\
 &= e\frac{p \cdot \epsilon^*(k)}{p \cdot k}m_0(p)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

其中，我们利用了  $\not{\epsilon}^*\not{p} = 2p \cdot \epsilon^* - \not{p} \cdot \epsilon^*$ ,  $\bar{u}(\not{p} - m) = 0$ 。

因此，在做了软光子近似后，（其中的下标 BH 表示的是轻子腿上辐射出光子，我们把这种图叫做 BH 图）

$$M_{\text{BH}} \rightarrow M_{\text{BH}}^s = eM_B \left( \frac{k_2 \cdot \epsilon^*}{k_2 \cdot k} - \frac{k_1 \cdot \epsilon^*}{k_1 \cdot k} \right). \tag{4.2}$$

考虑 BH 图时，并将末态光子的能量取上限  $\Delta$  截断，则积分截面为

$$d\sigma_{s\gamma} = -\frac{\alpha}{4\pi^2}d\sigma_B \int_{k^0 < \Delta} \frac{d^3k}{k^0} \left( \frac{k_2}{k_2 \cdot k} - \frac{k_1}{k_1 \cdot k} \right)^2. \tag{4.3}$$

如果我们把整体的微分散射截面写为

$$d\sigma = \int d\sigma_B [1 + \delta_{s\gamma}(\Delta)], \tag{4.4}$$

则

$$\begin{aligned}
 \delta_{s\gamma}(\Delta) &= \left( -\frac{\alpha}{4\pi^2} \right) \int_{k^0 < \Delta} \frac{d^3k}{k^0} \left( \frac{k_2}{k_2 \cdot k} - \frac{k_1}{k_1 \cdot k} \right)^2 \\
 &= -\frac{\alpha}{\pi} (B_{k_2 k_2} - B_{k_2 k_1} + B_{k_1 k_1}) - \delta_{IR}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

其中  $B_{k_2 k_2}, B_{k_1 k_1}$  表示无交叉项积分的结果,  $B_{k_2 k_1}$  则为交叉项积分的结果。 $B_{k_2 k_2}$  和  $B_{k_1 k_1}$  的结果可以直接算出如下,

$$B_{k_2 k_2} = \ln\left(\frac{2\Delta}{m}\right) + \frac{k_2^0}{|\vec{k}_2|} \ln\left(\frac{m}{k_2^0 + |\vec{k}_2|}\right) \quad (4.6)$$

$$B_{k_1 k_1} = \ln\left(\frac{2\Delta}{m}\right) + \frac{k_1^0}{|\vec{k}_1|} \ln\left(\frac{m}{k_1^0 + |\vec{k}_1|}\right) \quad (4.7)$$

而  $B_{k_2 k_1}$  的计算如下。首先我们把  $B_{k_2 k_1}$  的具体形式写出来, 为

$$\begin{aligned} B_{k_2 k_1} &= \frac{1}{4\pi} \int_{k^0 < \Delta} \frac{d^3 k}{\sqrt{|\vec{k}|^2 + \lambda^2}} \frac{k_1 \cdot k_2}{(k_2 \cdot k)(k_1 \cdot k)} \\ &= \frac{k_1 \cdot k_2}{4\pi} \int_0^{\sqrt{\Delta^2 - \lambda^2}} \frac{|\vec{k}|^2 d|\vec{k}|}{\sqrt{|\vec{k}|^2 + \lambda^2}} \int \frac{d\Omega_\gamma}{(k_2 \cdot k)(k_1 \cdot k)} \end{aligned} \quad (4.8)$$

利用费曼参数化

$$\frac{1}{(k \cdot k_2)(k \cdot k_1)} = \int_0^1 \frac{dx}{[(k \cdot k_2)x + (k \cdot k_1)(1-x)]^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(k \cdot k_x)^2}, \quad (4.9)$$

其中  $k_x = xk_2 + (1-x)k_1$ 。接下来可以得到立体角的积分为

$$\int \frac{d\Omega_\gamma}{(k \cdot k_2)(k \cdot k_1)} = 4\pi \int_0^1 \frac{dx}{(k^0 k_x^0)^2 - |\vec{k}|^2 |\vec{k}_x|^2} \quad (4.10)$$

接着代入  $k^0 = \sqrt{|\vec{k}|^2 + \lambda^2}$ , 可以得到

$$B_{k_2 k_1} = (k_1 \cdot k_2) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{\Delta^2 - \lambda^2}} \frac{1}{\sqrt{|\vec{k}|^2 + \lambda^2}} \frac{|\vec{k}|^2 d|\vec{k}|}{|\vec{k}|^2 [(k_x^0)^2 - |\vec{k}_x|^2] + (\lambda k_x^0)^2} \quad (4.11)$$

做三角换元  $|\vec{k}| = \lambda \tan \psi$ , 得到

$$B_{k_2 k_1} = (k_1 \cdot k_2) \int_0^1 dx \int_0^{\arctan \sqrt{(\Delta/\lambda)^2 - 1}} \frac{\sin \psi \tan \psi d\psi}{(k_x^0)^2 - |\vec{k}_x|^2 \sin^2 \psi} \quad (4.12)$$

将上式中的内层积分记为  $I$ , 并令  $t = \sin \psi$ , 可以得到

$$I = \int_0^{\sqrt{1 - (\lambda/\Delta)^2}} \frac{t^2 dt}{(1 - t^2)[(k_x^0)^2 - |\vec{k}_x|^2 t^2]} \quad (4.13)$$

对被积分对象做分解

$$\begin{aligned} &\frac{t^2 dt}{(1 - t^2)[(k_x^0)^2 - |\vec{k}_x|^2 t^2]} \\ &= \frac{1}{2[(k_x^0)^2 - |\vec{k}_x|^2]} \left( \frac{k_x^0}{|\vec{k}_x| t - k_x^0} - \frac{k_x^0}{|\vec{k}_x| t + k_x^0} - \frac{1}{t - 1} + \frac{1}{t + 1} \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

将上述分解代入  $I$  中, 可以得到

$$I = \frac{1}{2[(k_x^0)^2 - |\vec{k}_x|^2]} \left( \frac{k_x^0}{|\vec{k}_x|} \ln |\vec{k}_x| t - k_x^0 \right. \\ \left. - \frac{k_x^0}{|\vec{k}_x|} \ln |\vec{k}_x| t + k_x^0 - \ln|t-1| + \ln|t+1| \right) \Big|_0^{\sqrt{1-(\lambda/\Delta)^2}} \quad (4.15)$$

假设  $\lambda \ll \Delta$ , 则

$$I = \frac{1}{2k_x^2} \left( \frac{k_x^0}{|\vec{k}_x|} \ln \frac{k_x^0 - |\vec{k}_x|}{k_x^0 + |\vec{k}_x|} + \ln \frac{4\Delta^2}{\lambda^2} \right) \quad (4.16)$$

最后我们可以得到

$$B_{k_2 k_1} = \frac{k_2 \cdot k_1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{k_x^2} \left( \frac{k_x^0}{|\vec{k}_x|} \ln \frac{k_x^0 - |\vec{k}_x|}{k_x^0 + |\vec{k}_x|} + \ln \frac{4\Delta^2}{k_x^2} + \ln \frac{k_x^2}{\lambda^2} \right) \quad (4.17)$$

之所以将最后一个对数拆成两部分是因为  $\ln(k_x^2/\lambda^2)$  恰好为红外发散项, 如果我们将红外有限项记作  $\tilde{B}_{k_2 k_1}$ , 且假设  $k_1 = k_2$ , 此时积分较为容易, 刚好可以得到我们前面的  $B_{k_2 k_2}$  和  $B_{k_1 k_1}$  两项。

接下来我们将  $B_{k_2 k_1}$  分成两部分:

$$B_{k_2 k_1} = \frac{k_2 \cdot k_1}{2} (R_1 + R_2) \quad (4.18)$$

$$R_1 = \int_0^1 dx \frac{1}{k_x^2} \ln \frac{4\Delta^2}{\lambda^2} \quad (4.19)$$

$$R_2 = \int_0^1 \frac{1}{k_x^2} \frac{k_x^0}{|\vec{k}_x|} \ln \frac{k_x^0 - |\vec{k}_x|}{k_x^0 + |\vec{k}_x|} \quad (4.20)$$

为了得到  $R_2$  的最终结果, 我们引入一个新的变量  $\beta$ , 为了书写方便, 同时令  $p = \beta k_1, p' = k_2$ , 并选择  $\beta$  使得  $(p - p')^2 = 0$ 。显然  $\beta$  有两个解, 我们取

$$\beta = \frac{k_1 \cdot k_2 + \sqrt{(k_1 \cdot k_2)^2 - m^4}}{m^2} \quad (4.21)$$

接着我们定义一些新的变量

$$u = p' + x(p - p'), l = p^0 - p'^0, v = \frac{p^2 - p'^2}{2l}, m = u^0 - |\vec{u}|. \quad (4.22)$$

此时

$$R_2 = \beta \int_0^1 dx \frac{1}{u^2} \frac{u^0}{|\vec{u}|} \ln \frac{u^0 - |\vec{u}|}{u^0 + |\vec{u}|} \\ = -\beta \int_{p^0 - |\vec{p}'|}^{p^0 - |\vec{p}|} \frac{dm}{2vl} \left[ \frac{1}{m + v} + \frac{1}{m - (2vp' - p'^2)/v} - \frac{1}{m} \right] \\ \times \ln \left( -\frac{m + v}{v} \frac{m}{m - (2vp' - p'^2)/v} \right) \quad (4.23)$$

利用

$$\frac{d}{dm} \text{Sp}(A(m+v)) = -\frac{1}{m+v} \ln(1 - A(m+v)) \quad (4.24)$$

可以得到  $R_2$  的最终形式为

$$R_2 = \beta \left[ \frac{1}{4lv} \ln^2 \frac{m(m+v)}{2vp'^0 - p'^2 - mv} - \frac{1}{2lv} \ln^2 \left( -\frac{v(m+v)}{v^2 + 2vp'^0 - p'^2} \right) - \frac{1}{lv} \left\{ -\text{Sp} \left( \frac{m+v}{v} \right) + \text{Sp} \left( \frac{v(m+v)}{v^2 + 2vp'^0 - p'^2} \right) \right\} \right]_{m=p'^0 - |\vec{p}'|}^{m=p^0 - |\vec{p}|} \quad (4.25)$$

在不做软光子近似的时候，我们将散射截面表示如下

$$d\sigma_{h\gamma} = \frac{d\Gamma}{4M|\vec{k}_1|} |\overline{M_{1\gamma}}|^2 \quad (4.26)$$

其中

$$d\Gamma = \int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2k_2^0} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2p_2^0} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0} (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + p_1 - k_2 - p_2 - k) \quad (4.27)$$

我们首先将末态核子的四动量积掉，以移除一个  $\delta$  函数，结果如下

$$d\Gamma = \int \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{d^3k_2}{2k_2^0} \frac{d^3k}{2k^0} \delta[(k_1 + p_1 - k_2 - k)^2 - M^2] \quad (4.28)$$

选择质子静止的参考系  $p_1^\mu = (M, 0, 0, 0)$ ，轻子入射方向为  $z$  轴，然后散射轻子和光子的四动量记为

$$\begin{aligned} k_2^\mu &= (k_2^0, |\vec{k}_2| \sin\theta_l \cos\phi_l, |\vec{k}_2| \sin\theta_l \sin\phi_l, |\vec{k}_2| \cos\phi_l) \\ k^\mu &= (k^0, k^0 \sin\theta_\gamma \cos\phi_\gamma, k^0 \sin\theta_\gamma \sin\phi_\gamma, k^0 \cos\phi_\gamma) \end{aligned} \quad (4.29)$$

则

$$\begin{aligned} d^3k_2 &= k_2^0 |\vec{k}_2| d\cos\theta_l d\phi_l dk_2^0 \\ d^3k &= k^2 d\cos\theta_\gamma d\phi_\gamma dk^0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

我们可以重新将  $\delta$  函数写成如下形式

$$(k_1 + p_1 - k_2 - k)^2 - M^2 = 2(A - B\cos\phi_\gamma) \quad (4.31)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= M(k_1^0 - k_2^0 - k^0) - k_1^0 k_2^0 + k_2^0 k^0 - k_1^0 k^0 + |\vec{k}_1| |\vec{k}_2| \cos\theta_l + |\vec{l}| E_\gamma \cos\theta_\gamma - k^0 |\vec{k}_2| \cos\theta_l \cos\theta_\gamma + m^2 \\ B &= k^0 |\vec{k}_2| \sin\theta_l \sin\theta_\gamma \end{aligned} \quad (4.32)$$

对于非极化散射，我们可以先将  $\phi_l$  积分，得到如下结果

$$\begin{aligned}
 d\Gamma &= \int \frac{1}{4(2\pi)^4} k^0 |\vec{k}_2| dk_2^0 d\cos\theta_l dk^0 d\cos\theta_\gamma d\phi_\gamma \delta[2(A - B\cos\phi_\gamma)] \\
 &= \frac{1}{8(2\pi)^4} \frac{dk_2^0 d\cos\theta_l dk^0 d\cos\theta_\gamma}{\sin\theta_l \sin\theta_\gamma \sin\phi_\gamma} \Theta\left(1 - \frac{A^2}{B^2}\right)
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

其中  $\sin\phi_\gamma = \sqrt{1 - A^2/B^2}$ 。



## 5 红外发散相消

待填充...

## 6 $\Delta$ 共振态的介绍

$\Delta(1232)$  共振态  $[I(J^P) = \frac{3}{2}(\frac{3}{2}^+)]$ , 由于它与核子质量相近, 与  $\pi N$  道的强耦合, 以及衰变到光子的过程, 因此是中低能散射实验中的重要角色, 如  $\pi N$  散射、 $\pi$  的光生过程以及康普顿散射等。

在一般的重子手征场论中, 我们可以通过将共振态的影响隐式地包含在低能有效常数 (LECs) 中。然而由于  $\Delta(1232)$  实在是太近了, 因此会影响可观测量的收敛性。因此我们想自然地扩大手征场论的框架, 从而将共振态作为动力学自由度包含在手征场论中, 这样我们就可以研究更宽能量区域的散射。

在重子中, 首先发展的自洽的框架是重重子方法 [11–13]。近年来, 人们则提出了满足洛伦兹不变的扩展方法 [14–16]。值得一提的是, 如果想要在满足洛伦兹不变的场论中引入自旋  $s \geq 1$  的粒子, 我们就必须引入非物理的自由度。因此我们还要施加一些限制以指定物理的自由度。

Rarita-Schwinger 方法对自旋为  $\frac{3}{2}$  的场给出了一个协变的描述。场用矢量旋量表示, 用符号  $\Psi^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) 标识, 其中每一个  $\Psi^\mu$  是一个 Dirac 场。在恰当正时的洛伦兹变换下  $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ , Rarita-Schwinger 场兼具四矢量场和四分量 Dirac 场变换的性质:

$$\Psi'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu S(\Lambda) \Psi^\nu(x), \quad (6.1)$$

其中  $S(\Lambda)$  是通常作用在 Dirac 旋量上的矩阵表示。描述一个相对论的  $s = \frac{3}{2}$  的场, 我们需要  $2 \times 4 = 8$  个独立的复场。因子 2 是因为需要描述粒子场和反粒子场。因此我们需要在矢量旋量场的 16 个复场中产生 8 个复条件以消除额外的自由度。

最一般的满足要求的自由拉氏量如下:

$$\mathcal{L}_{\frac{3}{2}} = \bar{\Psi}_\mu \Lambda^{\mu\nu}(A) \Psi_\nu, \quad (6.2)$$

通常我们将表示洛伦兹变换的符号和描述  $\Delta$  共振态的符号使用同一个符号  $\Lambda$  表示。上面的  $\Lambda^{\mu\nu}$  为:

$$\begin{aligned} \Lambda^{\mu\nu}(A, n) = & - \left\{ (i\not{\partial} - m_\Delta) g^{\mu\nu} + iA (\gamma^\mu \partial^\nu + \gamma^\nu \partial^\mu) \right. \\ & + \frac{i}{2} [3A^2 + 2A + 1] \gamma^\mu \not{\partial} \gamma^\nu \\ & \left. + m_\Delta [3A^2 + 3A + 1] \gamma^\mu \gamma^\nu \right\}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

其中  $A \neq -\frac{1}{2}$  任意实参量,  $m_\Delta$  为  $\Delta$  的质量。Rarita-Schwinger 引入的拉氏量对应着上式中  $A = -\frac{1}{3}$ 。

从上面的拉氏量中, 我们可以根据 Euler-Lagrange 方程:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\frac{3}{2}}}{\partial \bar{\Psi}_\mu} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}_{\frac{3}{2}}}{\partial \partial_\rho \bar{\Psi}_\mu} = 0. \quad (6.4)$$

得到运动方程 (EOM):

$$\Lambda^{\mu\nu}(A)\Psi_\nu = 0. \quad (6.5)$$

除了运动方程外, 场  $\Psi^\mu$  还满足方程:

$$(i\not{\partial} - m_\Delta)\Psi^\mu = 0 \quad (6.6)$$

$$\gamma_\mu\Psi^\mu = 0 \quad (6.7)$$

$$\partial_\mu\Psi^\mu = 0 \quad (6.8)$$

方程 (6.7) 和 (6.8) 分别产生四个复条件。因此我们得到 8 个独立的分量。值得注意的是方程 (6.6) 并不能减少独立分量的个数。

我们仿照 Rarita-Schwinger 方法, 可以给出  $n$  维时空中自旋  $\frac{3}{2}$  系统的自由拉氏量 [17]:

$$\mathcal{L}_{\frac{3}{2}} = \bar{\Psi}_\mu \Lambda^{\mu\nu}(A, n) \Psi_\nu, \quad (6.9)$$

其中

$$\begin{aligned} \Lambda^{\mu\nu}(A, n) = & - \left\{ (i\not{\partial} - m_\Delta) g^{\mu\nu} + iA(\gamma^\mu \partial^\nu + \gamma^\nu \partial^\mu) \right. \\ & + \frac{i}{n-2} [(n-1)A^2 + 2A + 1] \gamma^\mu \not{\partial} \gamma^\nu \\ & \left. + \frac{m_\Delta}{(n-2)^2} [n(n-1)A^2 + 4(n-1)A + n] \gamma^\mu \gamma^\nu \right\}, \quad n \neq 2 \end{aligned} \quad (6.10)$$

其中, 对应着 Rarita-Schwinger 引入的拉氏量 [18]。

自由拉氏量 (6.9) 在下列变换下是不变的:

$$\begin{aligned} \Psi_\mu &\mapsto \Psi_\mu + \frac{4a}{n} \gamma_\mu \gamma_\nu \Psi^\nu \\ A &\mapsto \frac{An - 8a}{n(1 + 4a)}, \quad a \neq -\frac{1}{4} \end{aligned} \quad (6.11)$$

上述变换又称点变化。在点变化下拉氏量不变 (需保证相互作用的拉氏量也不变) 保证了物理量不依赖于 “off-shell parameter”- $A$ 。

## 同位旋

$\Delta(1232)$  共振态的同位旋  $I = \frac{3}{2}$ , 是同位旋四重态  $\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-$ 。下面我们将  $\Delta$  共振态视为  $I = 1$  和  $I = \frac{1}{2}$  态的张量积中的  $I = \frac{3}{2}$  分量。用  $X$  和  $Y$  分别表示  $I = 1$  和  $I = \frac{1}{2}$  的同位旋表示的 Hilbert 空间, 则  $X$  和  $Y$  中的元素可以分别表示为

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^3 x_i |i\rangle = \sum_{m=-1}^1 (-1)^m x_{-m} |1, m\rangle, \quad |y\rangle = \sum_{r=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} y_r |\frac{1}{2}, r\rangle. \quad (6.12)$$

针对  $|x\rangle$  我们分别做了笛卡尔和球分解。在  $SU(2)$  变换  $V$  下,  $|x\rangle$  和  $|y\rangle$  分别按照伴随表示和基础表示进行变换, 即

$$\begin{aligned} x'_i &= \sum_{j=1}^3 D_{ij}(V) x_j, \quad D_{ij}(V) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tau_i V \tau_j V^\dagger) \\ y'_r &= \sum_{s=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} V_{rs} y_s. \end{aligned} \quad (6.13)$$

接下来考虑张量积  $Z = X \otimes Y$

$$|z\rangle = \sum_{i=1}^3 \sum_{r=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} z_{i,r} |i\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, r \right\rangle = \sum_{m=-1}^1 \sum_{r=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (-1)^m z_{-m,r} |1, m\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, r \right\rangle. \quad (6.14)$$

使用 CG 系数分解, 上述张量积可以被分解到  $Z = Z_{\frac{3}{2}} \oplus Z_{\frac{1}{2}}$ 。同位旋  $I = \frac{3}{2}$  态处于第一个空间中, 因此我们需要投影算符  $P_{\frac{3}{2}}$  和  $P_{\frac{1}{2}}$ , 分别将对应的态投影到子空间中。 $Z_{\frac{3}{2}}$  和  $Z_{\frac{1}{2}}$  的基可以分别写为 (省略直积符号):

$$\left| \left(1 \frac{1}{2}\right) \frac{3}{2}, M \right\rangle = \sum_{m=-1}^1 \sum_{r=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(1, m; \frac{1}{2}, r \left| \frac{3}{2}, M \right\rangle \right) |1, m\rangle \left| \frac{1}{2}, r \right\rangle, \quad (6.15)$$

$$\left| \left(1 \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2}, M \right\rangle = \sum_{m=-1}^1 \sum_{r=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(1, m; \frac{1}{2}, r \left| \frac{1}{2}, M \right\rangle \right) |1, m\rangle \left| \frac{1}{2}, r \right\rangle \quad (6.16)$$

其中  $(j_1, m_1; j_2, m_2 | J, M)$  为 CG 系数。利用上面的基底, 我们可以写出投影算符的形式:

$$P_{\frac{3}{2}} = \sum_{M=-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left| \left(1 \frac{1}{2}\right) \frac{3}{2}, M \right\rangle \left\langle \left(1 \frac{1}{2}\right) \frac{3}{2}, M \right|, \quad (6.17)$$

$$P_{\frac{1}{2}} = \sum_{M=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| \left(1 \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2}, M \right\rangle \left\langle \left(1 \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2}, M \right|. \quad (6.18)$$

给定表示

$$|1, 1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |1, 0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1, -1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \chi_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \chi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

在这组基底上,  $P_{\frac{1}{2}}$  的矩阵表示  $\xi_{\text{sph}}^{\frac{1}{2}}$

$$\xi_{\text{sph}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 - \tau_3 & -\frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1 - i\tau_2) & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1 + i\tau_2) & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1 - i\tau_3) \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1 + i\tau_3) & 1 + \tau_3 \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

利用变换矩阵  $T$  可以变换到笛卡尔坐标系下,

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

如下,

$$\xi^{\frac{1}{2}} = T^\dagger \xi_{\text{sph}}^{\frac{1}{2}} T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & i\tau_3 & -i\tau_2 \\ -i\tau_3 & 1 & i\tau_1 \\ i\tau_2 & -i\tau_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

或者可以写成更紧凑的形式,

$$\xi_{ij}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \tau_i \tau_j. \quad (6.22)$$

注意,  $\xi^{\frac{1}{2}}$  的每个元素都是作用到同位旋  $\chi_r$  上的  $2 \times 2$  矩阵。可以通过  $\xi^{\frac{1}{2}} + \xi^{\frac{3}{2}} = 1$  来简单获得  $\xi^{\frac{3}{2}}$  的形式,

$$\xi_{ij}^{\frac{3}{2}} = \delta_{ij} - \frac{1}{3} \tau_i \tau_j. \quad (6.23)$$

对于空间  $Z_{\frac{3}{2}}$  中的矢量  $|\Delta\rangle$ , 有

$$|\Delta\rangle = \sum_{M=-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \Delta_M \left| \frac{3}{2}, M \right\rangle = \Delta^- \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle + \cdots, \quad (6.24)$$

标量积  $(\langle 1, m | \langle \frac{1}{2}, r |) |\Delta\rangle$  会根据 CG 系数  $(1, m; \frac{1}{2}, r | \frac{3}{2}, M)$  生成  $|\Delta\rangle$  的  $(-)^m z_{-m,r}^{(1)}$  的分量和  $\Delta_M$  分量。重新将球分量用笛卡尔分量表示, 我们可以得到

$$\begin{aligned} \xi_{1j}^{\frac{3}{2}} z_j &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta^0 - \Delta^{++} \\ \Delta^- - \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta^+ \end{pmatrix} \\ \xi_{2j}^{\frac{3}{2}} z_j &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta^0 + \Delta^{++} \\ \Delta^- + \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta^+ \end{pmatrix} \\ \xi_{1j}^{\frac{3}{2}} z_j &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \Delta^+ \\ \Delta^0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.25)$$

### $\Delta(1232)$ 共振态的领头阶拉氏量

之前的讨论中, 我们只是单纯的将矢量的分量视作复分量, 现在我们把它解释为场, 并用新的符号标记它:  $z_{i,r} \rightarrow \Psi_{i,r}$ 。在  $SU(2)_V$  变换下, 这些场的变换形式如下:

$$\Psi_{i,r} \mapsto \Psi'_{i,r} = D_{ij}(V) V_{rs} \Psi_{j,s} \quad (6.26)$$

我们把  $V$  用  $K(L, R, U)$  代替, 然后将整体变换提升为局部变换, 然后考虑到  $\Delta$  共振态的重子数为 1, 就可以得到场分量的变换形式如下:

$$\Psi_{i,r}(x) \mapsto \Psi'_{i,r}(x) = \exp[-i\Theta(x)] \mathcal{K}_{ij,rs}[V_L(x), V_R(x), U(x)] \Psi_{j,s}(x). \quad (6.27)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{ij,rs} &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\tau_i K \tau_j K^\dagger) K_{rs} \\ K(L, R, U) &= \sqrt{RUL^\dagger}^{-1} R \sqrt{U} \end{aligned} \quad (6.28)$$

相应的协变导数项可以给出如下:

$$\begin{aligned} (D_\mu \Psi)_{i,r} &= \mathcal{D}_{\mu,ij,rs} \Psi_{j,s}, \\ \mathcal{D}_{\mu,ij,rs} &= \partial_\mu \delta_{ij} \delta_{rs} - 2i\varepsilon_{ijk} \Gamma_{\mu,k} \delta_{rs} + \delta_{ij} \Gamma_{\mu,rs} - i\nu_\mu^{(s)} \delta_{ij} \delta_{rs}. \end{aligned}$$

其中  $\Gamma_\mu$  被重新参数化为  $\Gamma_\mu = \Gamma_{\mu,k} \tau_k$ .

领头阶的拉氏量可以给出如下:

$$\mathcal{L}_{\pi\Delta}^{(1)} = \Psi_\mu \xi^{\frac{3}{2}} \Lambda_{\pi\Delta}^{(1)\mu\nu} \xi^{\frac{3}{2}} \Psi_\nu \quad (6.29)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{\pi\Delta}^{(1)\mu\nu} &= - \left\{ (i\not{D} - m_\Delta) g^{\mu\nu} + iA (\gamma^\mu D^\nu + \gamma^\nu D^\mu) \right. \\ &\quad + \frac{i}{2} [3A^2 + 2A + 1] \gamma^\mu \not{D} \gamma^\nu \\ &\quad \left. + \frac{g_1}{2} \not{\psi} \gamma_5 g^{\mu\nu} + \frac{g_2}{2} (\gamma^\mu u^\nu + u^\mu \gamma^\nu) \gamma_5 + \frac{g_3}{2} \gamma^\mu \not{\psi} \gamma_5 \gamma^\nu \right\} \end{aligned} \quad (6.30)$$

事实上, 上式中的场  $\Psi$  包含  $4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$  个场  $\Psi_{\mu,\alpha,i,r}$ , 其中  $\mu$  代表洛伦兹矢量指标,  $\alpha$  代表 Dirac 旋量指标,  $i$  代表 isovector 指标,  $r$  代表同位旋指标。而投影算符  $\xi^{\frac{3}{2}}$  表示只有同位旋  $I = \frac{3}{2}$  的 isovector-isospinor 场进入到拉氏量中。

上述拉氏量在下面的局域变换下也是不变的:

$$\Psi_{\mu,i}(x) \mapsto \Psi_{\mu,i}(x) + \tau_i \alpha_\mu(x) \quad (6.31)$$

其中  $\alpha^\mu$  是任意的 vector-spinor 同位旋函数。这主要是由于我们使用的场  $\Psi_{\mu,\alpha,i}(x)$  具有 6 个同位旋自由度, 而不是 4 个。选取拉氏量 (6.29) 的量子化的规范固定条件  $\tau_i \Psi_{\mu,i} = 0$ , 可以给出下面的自由  $\Delta$  传播子:

$$S_{F,ij,\alpha\beta}^{\mu\nu}(p) = \xi_{ij,\alpha\beta}^{\frac{3}{2}} S_F^{\mu\nu}(p), \quad (6.32)$$

其中

$$\begin{aligned} S_F^{\mu\nu}(p) &= - \frac{\not{p} + m_\Delta}{p^2 - m_\Delta^2 + i0^+} \left[ g^{\mu\nu} - \frac{1}{3} \gamma^\mu \gamma^\nu + \frac{1}{3m_\Delta} (p^\mu \gamma^\nu - \gamma^\mu p^\nu) - \frac{2}{3m_\Delta^2} p^\mu p^\nu \right] \\ &\quad + \frac{1}{3m^2} \frac{1+A}{1+2A} \left\{ \left[ \frac{A}{1+2A} m_\Delta - \frac{1+A}{2(1+2A)} \not{p} \right] \gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\mu p^\nu - \frac{A}{1+2A} p^\mu \gamma^\nu \right\} \end{aligned} \quad (6.33)$$

选择  $A = -1$  则回到最常用的自由  $\Delta$  传播子形式。

领头阶的  $\pi N \Delta$  相互作用拉氏量可以写为：

$$\mathcal{L}_{\pi N \Delta}^{(1)} = g \Psi_{\mu,j} \xi_{ij}^{\frac{3}{2}} (g^{\mu\nu} + \tilde{z} \gamma^\mu \gamma^\nu) u_{\nu,j} \Psi + \text{H.c.} \quad (6.34)$$

其中  $u_\mu$  被重新参数化为  $u_\mu = u_{\mu,k} \tau_k$ , 而  $g, \tilde{z}$  是耦合常数。

如果在微扰展开的计算中包含  $\Delta(1232)$ , 可以应用“标准”的 power-counting 来进行重整化, 即拉氏量中  $O(q^n)$  的顶点算作  $q^n$ ,  $\pi$  介子的传播子算作  $q^{-2}$ , 核子传播子算作  $q^{-1}$ , 圈积分算作  $q^4$ 。此处  $q$  表示展开的小量, 如  $\pi$  介子的质量。但是这并不适用于  $\delta$  展开, 针对于  $\Delta$  传播子的 power-counting 更复杂一点。如果  $\Delta$  传播子出现在圈积分中, 则算作  $q$ ; 在没有实共振产生的树图中也算作  $q$ , 如  $\pi N$  散射的 u-channel 中的  $\Delta$  极点图; 另一方面, 在有共振产生的道中, 如  $\pi N$  散射的 s-channel 的  $\Delta$  极点图中, 我们将  $\Delta$  传播子视作 dressed 传播子, 因为自能开始于  $O(q^3)$ , 因此我们将其算作  $q^3$ 。而在所谓的  $\delta = m_\Delta - m \sim 293 \text{ MeV}$  的展开中, 我们将其视作  $O(q)$  的。而在另一种展开方式中, 由于  $m_\pi \ll \delta \ll \Lambda \sim 1 \text{ GeV}$ , 我们引入一个新的小参数  $\delta'$ , 有  $\delta' = \frac{\delta}{\Lambda} \sim \frac{m_\pi}{\delta}$ , 因此  $m_\pi$  在  $\delta'^2$  处, 因此  $\delta'$  是  $O(q^{\frac{1}{2}})$  的。

$\pi N \Delta$  二阶的拉氏量：

$$\mathcal{L}_{\pi N \Delta}^{(2)} = \bar{\Psi}^{i,\alpha} \xi_{ij}^{\frac{3}{2}} \left\{ -i \frac{b_1}{2} F_{\alpha\beta}^{+,j} \gamma_5 \gamma^\beta + \text{H.c.} \right\} + \dots \quad (6.35)$$

其中  $b_i$  为耦合常数, 以及新出现的各项定义如下：

$$F_{\mu\nu}^{\pm,i} = \frac{1}{2} \text{Tr}[\tau^i F_{\mu\nu}^{\pm}], \quad u_\mu^i = \frac{1}{2} \text{Tr}[\tau^i u_\mu], \quad \omega_{\mu\nu}^i = \frac{1}{2} \text{Tr}[\tau^i [D_\mu, u_\nu]] \quad (6.36)$$

为了方便在 Mathematica 中计算费曼振幅, 我们首先需要在 Feynrules 文件中定义各类场, 并给出耦合的拉氏量形式。为了方便, 我们首先将可能用到的拉氏量中的一些物理量定义如下：

$$\begin{aligned} u &= \mathbb{1} + i \frac{\phi}{2F} - \frac{\phi^2}{8F^2} + \mathcal{O}(\phi^3) \\ u_\mu &= -\frac{1}{F} \partial_\mu \phi + \frac{i}{F} r_\mu \phi - \frac{i}{F} \phi r_\mu + \mathcal{O}(\phi^3) \\ \Gamma_\mu &= -i r_\mu + \frac{1}{8F^2} [\phi \partial_\mu \phi - (\partial_\mu \phi) \phi] - \frac{i}{4F^2} \phi r_\mu \phi + \frac{i}{8F^2} \phi^2 r_\mu + \frac{i}{8F^2} r_\mu \phi^2 + \mathcal{O}(\phi^3) \\ f_{L,\mu\nu} &= f_{R,\mu\nu} = -e F_{\mu\nu} Q \\ f_+^{\mu\nu} &= 2f_R^{\mu\nu} + \frac{1}{2F^2} \phi f_R^{\mu\nu} \phi - \frac{1}{4F^2} \phi^2 f_R^{\mu\nu} - \frac{1}{4F^2} f_R^{\mu\nu} \phi^2 + \mathcal{O}(\phi^3) \\ f_-^{\mu\nu} &= \frac{i}{F} (\phi f_R^{\mu\nu} - f_R^{\mu\nu} \phi) + \mathcal{O}(\phi^3) \\ \chi_+ &= 2M^2 \mathbb{1} - \frac{1}{F^2} M^2 \phi^2 + \mathcal{O}(\phi^3) \\ \chi_- &= -\frac{2iM^2 \phi}{F} \end{aligned} \quad (6.37)$$

利用上面的变量, 我们定义一些在处理  $\Delta$  共振态时需要用到的新物理量,  $X = X_i \tau_i + X_s \mathbb{1}$ , 其中  $X_i = \frac{1}{2} \text{Tr}[X \tau_i]$ ,  $X_s = \frac{1}{2} \text{Tr}[X]$ ,  $X$  可以取  $\Gamma_\mu, u_\mu, f_\pm^{\mu\nu}, \chi_\pm$ 。

利用

$$\begin{aligned}\tau_i \tau_j &= \delta_{ij} \mathbb{1} + i \varepsilon_{ijk} \tau_k \\ [\tau_i, \tau_j] &= 2i \varepsilon_{ijk} \tau_k \\ \text{Tr}[\tau_i, \tau_j] &= 2\delta_{ij}\end{aligned}\tag{6.38}$$

利用上面的定义和公式, 我们可以求出

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu,k} &= \frac{1}{2} \text{Tr}[\Gamma_\mu \tau_k] = \frac{1}{2} i e A_\mu \delta_{3k} + \frac{i}{4F^2} \varepsilon_{ijk} \phi_i \partial_\mu \phi_j + \dots \\ u_{\mu,k} &= -\frac{1}{F} \partial_\mu \phi_k + \frac{1}{F} e A_\mu \phi_i \varepsilon_{3ik} \\ f_{+,k}^{\mu\nu} &= -e F^{\mu\nu} \delta_{3k} + \dots \\ f_{-,k}^{\mu\nu} &= \frac{1}{F} F^{\mu\nu} \phi \varepsilon_{3ki} + \dots\end{aligned}\tag{6.39}$$

...

在  $ep \rightarrow ep\gamma$  的散射过程中, 至  $O(p^{3.5})$  阶, 所包含的含  $\Delta(1232)$  共振态的图 (我们忽略轻子线, 转而将过程转化为包含  $\Delta$  共振态的虚康普顿散射过程):

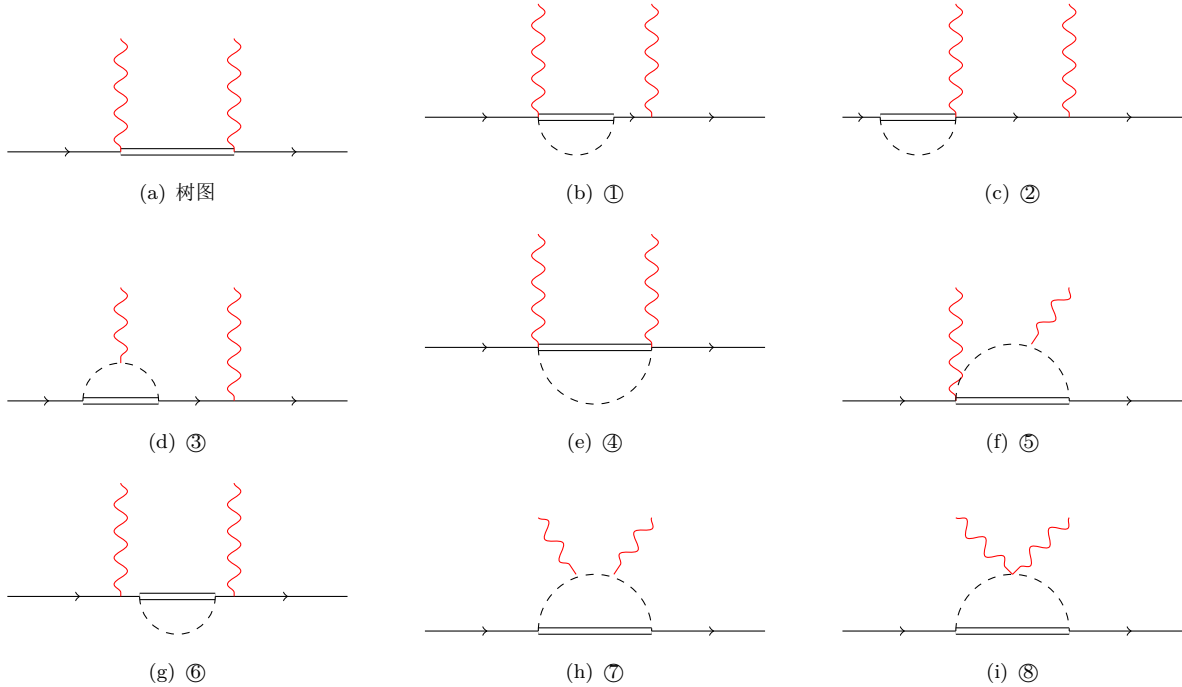


图 4: 虚康普顿散射

其中①②③⑤还存在对称图。



## 7 高阶拉氏量

我们重新给出直到  $O(p^3)$  阶的拉氏量如下：

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\pi N}^{(1)} &= \bar{\Psi} \left( i \not{D} - m + \frac{g_A}{2} \not{u} \gamma \right) \Psi \\
\mathcal{L}_{\pi N}^{(2)} &= \sum_{i=1}^7 c_i \bar{\Psi} O_i^{(2)} \Psi \\
\mathcal{L}_{\pi N}^{(3)} &= \sum_{i=1}^{23} d_i \bar{\Psi} O_i^{(3)} \Psi
\end{aligned} \tag{7.1}$$

首先定义一些项如下： $D_\mu \Psi = (\partial_\mu + \Gamma_\mu) \Psi$ ，其中

$$\begin{aligned}
\Gamma_\mu &= \frac{1}{2} [u^\dagger (\partial_\mu - i r_\mu) u + u (\partial_\mu - i l_\mu) u^\dagger] \\
u^\mu &= i [u^\dagger (\partial_\mu - i r_\mu) u - u (\partial_\mu - i l_\mu) u^\dagger] \\
\chi_\pm &= u^\dagger \chi u^\dagger \pm u \chi^\pm u, \\
F_{\mu\nu}^\pm &= u F_{L\mu\nu} u^\dagger \pm u^\dagger F_{R\mu\nu} u \\
F_{L\mu\nu} &= \partial_\mu l_\nu - \partial_\nu l_\mu - i [l_\mu, l_\nu] \\
F_{R\mu\nu} &= \partial_\mu r_\nu - \partial_\nu r_\mu - i [r_\mu, r_\nu]
\end{aligned} \tag{7.2}$$

手征二阶顶点系数定义如下表：

$c_i$	$O_i^{(2)}$
1	$\langle \chi_+ \rangle$
2	$-\frac{1}{8m^2} \langle u_\mu u_\nu \rangle D^{\mu\nu} + \text{h.c.}$
3	$\frac{1}{2} \langle u \cdot u \rangle$
4	$\frac{i}{4} [u_\mu, u_\nu] \sigma^{\mu\nu}$
5	$\tilde{\chi}_+$
6	$\frac{1}{8m} F_{\mu\nu}^+ \sigma^{\mu\nu}$
7	$\frac{1}{8m} \langle F_{\mu\nu}^+ \rangle \sigma^{\mu\nu}$

三阶项的系数如下表所示：

$d_i$	$O_i^{(3)}$
1	$-\frac{1}{2m} [u_\mu, [D_\nu, u^\mu]] D^\nu + \text{h.c.}$
2	$-\frac{1}{2m} [u_\mu, [D^\mu, u_\nu]] D^\nu + \text{h.c.}$
3	$\frac{1}{12m^3} [u_\mu, [D_\nu, u_\rho]] D^{\mu\nu\rho} + \text{h.c.}$
4	$-\frac{1}{2m} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \langle u_\mu u_\nu u_\alpha \rangle D_\beta + \text{h.c.}$
5	$\frac{1}{2m} i [\chi_-, u_\mu] D^\mu + \text{h.c.}$
6	$\frac{1}{2m} i [D^\mu, \tilde{F}_{\mu\nu}^+] D^\nu + \text{h.c.}$
7	$\frac{1}{2m} i [D^\mu, \langle F_{\mu\nu}^+ \rangle] D^\nu + \text{h.c.}$
8	$\frac{1}{2m} i \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \langle \tilde{F}_{\mu\nu}^+ u_\alpha \rangle D_\beta + \text{h.c.}$
9	$\frac{1}{2m} i \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \langle F_{\mu\nu}^+ \rangle u_\alpha D_\beta + \text{h.c.}$
10	$\frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma_5 \langle u^2 \rangle u_\mu$
11	$\frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma_5 \langle u_\mu u_\nu \rangle u^\nu$
12	$-\frac{1}{8m^2} \gamma^\mu \gamma_5 \langle u_\lambda u_\nu \rangle u_\mu D^{\lambda\nu} + \text{h.c.}$
13	$-\frac{1}{8m^2} \gamma^\mu \gamma_5 \langle u_\mu u_\nu \rangle u_\lambda D^{\lambda\nu} + \text{h.c.}$
14	$\frac{1}{4m} i \sigma^{\mu\nu} \langle [D_\lambda, u_\mu] u_\nu \rangle D^\lambda + \text{h.c.}$
15	$\frac{1}{4m} i \sigma^{\mu\nu} \langle u_\mu [D_\nu, u_\lambda] \rangle D^\lambda + \text{h.c.}$
16	$\frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma_5 \langle \chi_+ \rangle u_\mu$
17	$\frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma_5 \langle \chi_+ u_\mu \rangle$
18	$\frac{1}{2} i \gamma^\mu \gamma_5 [D_\mu, \chi_-]$
19	$\frac{1}{2} i \gamma^\mu \gamma_5 [D_\mu, \langle \chi_- \rangle]$
20	$-\frac{1}{8m^2} i \gamma^\mu \gamma_5 [\tilde{F}_{\mu\nu}^+, u_\lambda] D^{\lambda\nu} + \text{h.c.}$
21	$\frac{1}{2} i \gamma^\mu \gamma_5 v^\nu [\tilde{F}_{\mu\nu}^+, u^\nu]$
22	$\frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma_5 [D^\nu, F_{\mu\nu}^-]$
23	$\frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma_5 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \langle u_\nu F_{\alpha\beta}^- \rangle$

对于核子形状因子有贡献的项为

$$\mathcal{L}_{\pi N}^{(2)} = \mathcal{L}_{\pi N}^{(2)}(c_1, c_2, c_4, c_6, c_7), \mathcal{L}_{\pi N}^{(3)} = \mathcal{L}_{\pi N}^{(3)}(d_6, d_7), \mathcal{L}_{\pi N}^{(4)} = \mathcal{L}_{\pi N}^{(4)}(e_{54}, e_{74}, e_{105}, e_{106}) \quad (7.3)$$

其中  $\mathcal{L}_{\pi N}^{(4)}$  的项可以参考文章 [19]

## 8 费曼图的计算

$ep \rightarrow ep\gamma$  的费曼图大体上可以分为两类：从轻子腿上辐射出光子，以及从质子腿上辐射出光子。再仔细区分又可以分为三类，如图所示：

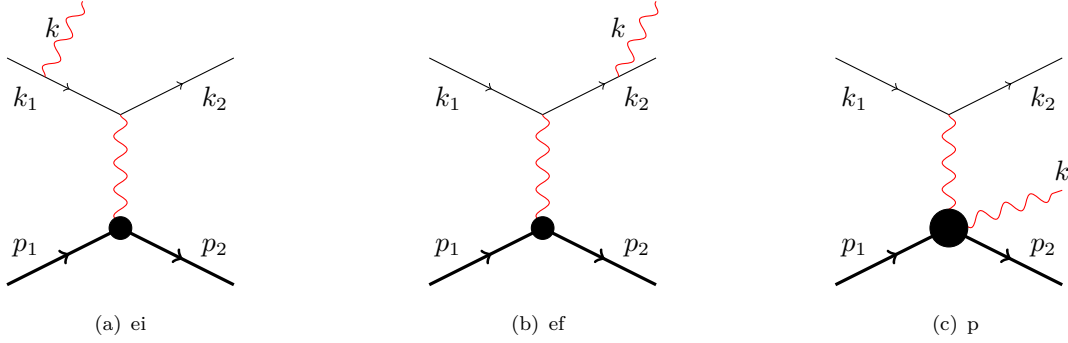


图 5: 韧致辐射

每张图我们都可以将其分为强子部分和轻子部分。前两张图我们可以简单的将其分为轻子腿上辐射出光子和强子部分至  $\mathcal{O}(p^3)$  阶的形状因子的计算。最后一张图则可以将其分为轻子部分和虚康普顿散射的计算。

我们首先定义 5 个 Mandelstem 变量：

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + k_1)^2, & s_1 &= (k + p_2)^2, & s_2 &= (k + k_2)^2 \\ t_1 &= (k - p_1)^2, & t_2 &= (p_1 - p_2)^2 \end{aligned} \quad (8.1)$$

由上面的定义，可以得出余下五个不独立变量的关系式，

$$\begin{aligned} p_2 \cdot k_2 &= \frac{1}{2}(s - s_1 - s_2) \\ p_1 \cdot k_2 &= \frac{1}{2}(s + t_1 + t_2 - m_e^2 - m_N^2) \\ k_1 \cdot k_2 &= m_e^2 - m_N^2 - \frac{1}{2}(s_1 - t_1 - t_2) \\ k_1 \cdot p_2 &= \frac{1}{2}(s - s_2 + t_2 - m_N^2) \\ k \cdot k_1 &= \frac{1}{2}(s_1 + s_2 + t_1 - m_e^2 - 2m_N^2) \end{aligned} \quad (8.2)$$

针对图 (5(a))，我们可以写出：

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{ei} &= \bar{u}_1(-ie\gamma^\mu) \frac{i(\not{k}_1) - \not{k} + m_e}{(k_1 - k)^2 - m_e^2} (-ie\gamma^\nu) u_1 \frac{-i}{l_1^2} \bar{u}_2 \Gamma_\mu u_2 \epsilon_\nu^* \\ &= \frac{e^2}{l_1^2} \frac{-1}{(k_1 - k)^2 - m_e^2} \bar{u}_1 \gamma^\mu (\not{k}_1 - \not{k} + m_e) \gamma^\nu u_1 \bar{u}_2 \Gamma_\mu u_2 \epsilon_\nu^* \end{aligned} \quad (8.3)$$

我们知道，一般可以将  $\Gamma^\mu$  写成如下形式：

$$\Gamma^\mu = F_1^N(Q^2)\gamma^\mu + i\frac{\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m_N}F_2^N(Q^2) \quad (8.4)$$

其中的  $Q = p_2 - p_1$ 。

同理，我们可以写出图 (5(b)) 的振幅：

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{ef} &= \bar{u}_1(-ie\gamma^\nu)\frac{i(\not{k} + \not{k}_2 + m_e)}{(k + k_2)^2 - m_e^2}(-ie\gamma^\mu)u_1\frac{-i}{l_1^2}\bar{u}_2\Gamma_\mu u_2\epsilon_\nu^* \\ &= \frac{e^2}{l_1^2}\frac{-1}{(k + k_2)^2 - m_e^2}\bar{u}_1\gamma^\nu(\not{k} + \not{k}_2 + m_e)\gamma^\mu u_1\bar{u}_2\Gamma_\mu u_2\epsilon_\nu^* \end{aligned} \quad (8.5)$$

而图 (5(c)) 的振幅如下：

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_p &= \bar{u}_1(-ie\gamma_\mu)u_1\frac{-i}{l_1^2}\bar{u}_2(\Gamma_1^{\mu\nu} + \Gamma_2^{\nu\mu})u_2\epsilon_\nu^* \\ &= \frac{-1}{l_1^2}e\bar{u}_1\gamma_\mu u_1\bar{u}_2(\Gamma_1^{\mu\nu} + \Gamma_2^{\nu\mu})u_2\epsilon_\nu^* \end{aligned} \quad (8.6)$$

其中的  $\Gamma_1^{\mu\nu}$  和  $\Gamma_2^{\nu\mu}$  可以写成如下的形式：

$$\begin{aligned} \Gamma_1^{\mu\nu} &= A_1\gamma^\mu\gamma^\nu + B_1\gamma^\mu\not{k}\gamma^\nu + C_1p_1^\mu\gamma^\nu + \dots \\ \Gamma_2^{\nu\mu} &= A_2\gamma^\nu\gamma^\mu + B_2\gamma^\nu\not{k}\gamma^\mu + C_2p_1^\nu\gamma^\mu + \dots \end{aligned} \quad (8.7)$$

我们可以将强子部分重新写成：

$$\bar{u}_2(\Gamma_1^{\mu\nu} + \Gamma_2^{\nu\mu})u_2\epsilon_\nu^* \equiv M_1^{\mu\nu}\epsilon_\nu^* \quad (8.8)$$

因此我们可以将虚康普顿散射过程的振幅写成：

$$\mathcal{M}_{vcs} = \epsilon_\mu(l_1)\epsilon_\nu^*M_1^{\mu\nu}. \quad (8.9)$$

因此只要求出了虚康普顿散射过程的振幅，我们就可以得到想要过程的振幅。

我们首先需要将  $M_1^{\mu\nu}$  做洛伦兹结构的分解，分解如下：

$$M_1^{\mu\nu} = \sum_i \bar{u}_2 A_i \Gamma_i^{\mu\nu} u_2 \quad (8.10)$$

其中  $\Gamma_i^{\mu\nu}$  共有 26 种取值：

$$\begin{array}{ccccc} \gamma^\mu\gamma^\nu; & g^{\mu\nu}; & k^\mu\gamma^\nu; & p_1^\mu\gamma^\nu; & p_2^\mu\gamma^\nu; \\ \gamma^\mu\gamma^\nu\not{k}; & g^{\mu\nu}\not{k}; & k^\mu\gamma^\nu\not{k}; & p_1^\mu\gamma^\nu\not{k}; & p_2^\mu\gamma^\nu\not{k}; \\ p_1^\nu\gamma^\mu; & p_2^\nu\gamma^\mu; & p_1^\mu p_1^\nu; & p_2^\mu p_2^\nu; & k^\mu p_1^\nu; \\ p_1^\nu\gamma^\mu\not{k}; & p_2^\nu\gamma^\mu\not{k}; & p_1^\mu p_1^\nu\not{k}; & p_2^\mu p_2^\nu\not{k}; & k^\mu p_1^\nu\not{k}; \end{array}$$

$$k^\mu p_2^\nu; \quad p_1^\mu p_2^\nu; \quad p_2^\mu p_1^\nu; \quad k^\mu p_2^\nu k; \quad p_1^\mu p_2^\nu k; \quad p_2^\mu p_1^\nu k.$$

值得注意的是，因为我们有  $k \cdot \epsilon^* = 0$ ，因此我们没有含  $k^\nu$  项。以及我们有  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ ，因此有些余下的表达式可以通过上面的分解表示出来。如：

$$\begin{aligned} \gamma^\nu \gamma^\mu &= 2g^{\mu\nu} - \gamma^\mu \gamma^\nu \\ \gamma^\mu k \gamma^\nu &= -\gamma^\mu \gamma^\nu k \\ k \gamma^\mu \gamma^\nu &= \gamma^\mu \gamma^\nu k + 2k^\mu \gamma^\nu \\ \gamma^\nu \gamma^\mu k &= 2g^{\mu\nu} k - \gamma^\mu \gamma^\nu k \\ &\dots \end{aligned} \tag{8.11}$$

而对于从轻子腿上辐射出光子的图，则主要计算集中在形状因子的计算：

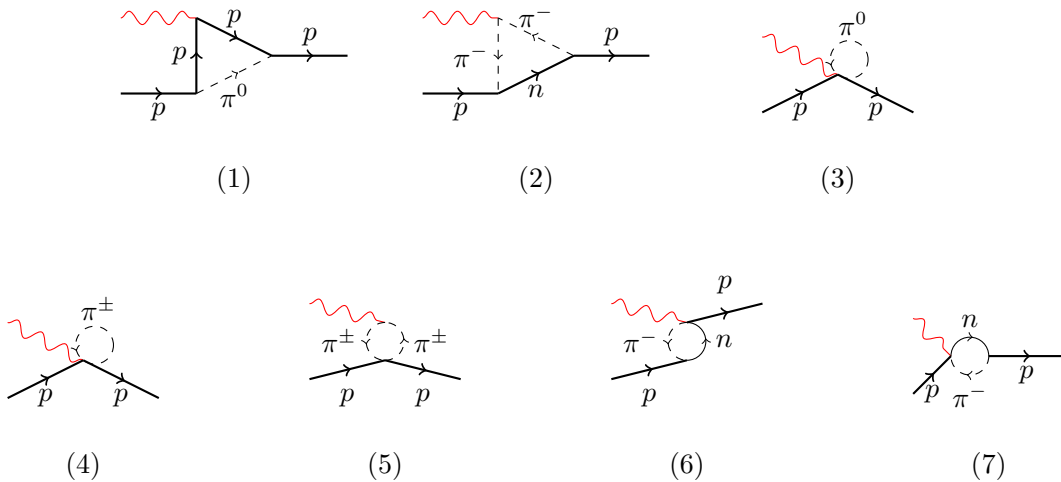
$$\begin{aligned} \mathcal{M}^\mu &= \bar{u}(p_2) \left[ \gamma^\mu A + p_1^\mu B + p_2^\mu C \right] u(p_1) \\ &= \bar{u}(p_2) \left[ \gamma^\mu A + P^\mu B \right] u(p_1) \\ &= \bar{u}(p_2) \left[ \gamma^\mu A + (2m_N \gamma^\mu - i\sigma^{\mu\nu} l_{2\nu}) B \right] u(p_1) \\ &= \bar{u}(p_2) \left[ \gamma^\mu (A + 2m_N B) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m_N} l_{2\nu} (-2m_N B) \right] u(p_1) \end{aligned} \tag{8.12}$$

其中第二个等号利用了 Ward 恒等式，得到了  $B = C$ ，且新定义了  $P = p_1 + p_2$ ；第三个等号则是利用了 Gordon 恒等式，且新定义了  $l_2 = p_2 - p_1$ 。

因此，我们可以得到形状因子：

$$F_1 = A + 2m_N B \quad F_2 = -2m_N B \tag{8.13}$$

我们利用程序计算形状因子这一部分，可以得到的费曼图如下：



记入射质子动量为  $p_1$ , 初设质子动量为  $p_2$ , 光子动量为  $l_1$ , 积分的圈动量为  $k_1$ 。则上面的振幅分别如下所示

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1^\mu = & \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} (-i) \bar{u}(p_2, m_N) \cdot \left( \frac{-g_a(\not{k}_1 + \not{p}_1)\gamma^5}{2F_\pi} \right) \cdot (-\not{k}_1 - \not{p}_1 + \not{p}_2 + m_N) \cdot \left( -\frac{1}{4}ie(2c_6 + c_7)(\not{l}_1\gamma^\mu) \right. \\ & + \frac{1}{4}ie(2c_6 + c_7)(\gamma^\mu \not{l}_1) - ie\gamma^\mu \left. \right) \cdot (m_N - \not{k}_1) \left( \frac{g_a(\not{k}_1 + \not{p}_1) \cdot \gamma^5}{2F_\pi} \right) \cdot u(p_1, m_N) \\ & / \left[ (k_1^2 - m_N^2)((k_1 + p_1)^2 - M^2)((k_1 + p_1 - p_2)^2 - m_N^2) \right] \end{aligned} \quad (8.14)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2^\mu = & \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} e(2k_1^\mu + p_1^\mu - p_2^\mu) \bar{u}(p_2, m_N) \cdot \left( \frac{g_a(\not{k}_1 + \not{p}_1 - \not{p}_2)\gamma^5}{\sqrt{2}F_\pi} \right) \cdot (\not{k}_1 + \not{p}_1 + m_N) \left( -\frac{g_a \not{k}_1 \gamma^5}{\sqrt{2}F_\pi} \right) \cdot u(p_1, m_N) \\ & / \left[ (k_1^2 - M^2)((k_1 + p_1)^2 - m_N^2)((k_1 + p_1 - p_2)^2 - M^2) \right] \end{aligned} \quad (8.15)$$

$$\mathcal{M}_3^\mu = \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} i \bar{u}(p_2, m_N) \cdot \left( -\frac{ic_2 e(k_1 \cdot p_1) k_1^\mu}{F_\pi^2 m_N^2} - \frac{ic_2 e(k_1 \cdot p_2) k_1^\mu}{F_\pi^2 m_N^2} \right) \cdot u(p_1, m_N) / (k_1^2 - M^2) \quad (8.16)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_4^\mu = & \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} i \bar{u}(p_2, m_N) \cdot \left( -\frac{2ic_2 e(k_1 \cdot p_1)(k_1 + p_1)^\mu}{F_\pi^2 m_N^2} - \frac{2ic_2 e(k_1 \cdot p_2)(k_1 + p_2)^\mu}{F_\pi^2 m_N^2} + \frac{4ic_3 e k_1^\mu}{F_\pi^2} \right. \\ & + \frac{ic_6 e \not{l}_1 \gamma^\mu}{2F_\pi^2} - \frac{ic_6 e \gamma^\mu \not{l}_1}{2F_\pi^2} + \frac{ie\gamma^\mu}{2F_\pi^2} \left. \right) \cdot u(p_1, m_N) / (k_1^2 - M^2) \end{aligned} \quad (8.17)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_5^\mu = & \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} ie(2k_1^\mu + p_1^\mu - p_2^\mu) \bar{u}(p_2, m_N) \cdot \left( -\frac{4ic_1 M^2}{F_\pi^2} - \frac{ic_2(k_1 \cdot p_1)(-k_1 \cdot p_1 + p_1 \cdot p_2 - p_1^2)}{F_\pi^2 m_N^2} \right. \\ & - \frac{ic_2(k_1 \cdot p_2)(-k_1 \cdot p_2 - p_1 \cdot p_2 + p_2^2)}{F_\pi^2 m_N^2} + \frac{2ic_3(-k_1 \cdot p_1 + k_1 \cdot p_2 - k_1^2)}{F_\pi^2} \\ & + \frac{ic_4 \not{k}_1(\not{p}_2 - \not{k}_1 - \not{p}_1)}{2F_\pi^2} - \frac{ic_4(\not{p}_2 - \not{p}_1 - \not{k}_1)\not{k}_1}{2F_\pi^2} - \frac{i\not{k}_1}{4F_\pi^2} + \frac{i(\not{p}_2 - \not{p}_1 - \not{k}_1)}{4F_\pi^2} \left. \right) \cdot u(p_1, m_N) \\ & / \left[ (k_1^2 - M^2)((k_1 + p_1 - p_2)^2 - M^2) \right] \end{aligned} \quad (8.18)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_6^\mu = & \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} (-) \bar{u}(p_2, m_N) \cdot \frac{eg_a \gamma^\mu \gamma^5}{\sqrt{2}F_\pi} \cdot (\not{k}_1 + m_N) \cdot \frac{g_a(\not{p}_1 - \not{k}_1)\gamma^5}{\sqrt{2}F_\pi} \cdot u(p_1, m_N) \\ & / \left[ (k_1^2 - m_N^2)((k_1 - p_1)^2 - M^2) \right] \end{aligned} \quad (8.19)$$

$$\mathcal{M}_7^\mu = \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} (-) \bar{u}(p_2, m_N) \left( -\frac{g_a(\not{k}_1 + \not{p}_2)\gamma^5}{\sqrt{2}F_\pi} \right) \cdot (m - \not{k}_1) \left( -\frac{eg_a\gamma^\mu\gamma^5}{\sqrt{2}F_\pi} \right) \cdot u(p_1, m_N) \quad (8.20)$$

$$\left/ \left[ (k_1^2 - m_N^2)((k_1 + p_2)^2 - M^2) \right] \right.$$

值得注意的是，上面的振幅是利用了到  $O(p^2)$  阶顶点的拉氏量生成的，因此某些振幅不仅仅是  $O(p^3)$  的，还可能包含更高阶的贡献，而我们需要将这些更高阶项扔掉。值得注意的是，图 (3) 中由于  $\pi^0$  形成了圈，因此其一阶顶点为 0，因此最低阶的贡献为  $O(p^4)$  的。处理之后的振幅结果如下（为了方便，我们仍用  $\mathcal{M}_1^\mu$  这样的形式来表示）：

$$\mathcal{M}_1^\mu = \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} = -i \bar{u}(p_2, m_N) \cdot \left( -\frac{g_a(\not{k}_1 + \not{p}_1)\gamma^5}{2F_\pi} \right) \cdot (-\not{k}_1 + m_N - \not{p}_1 + \not{p}_2) \cdot (-ie\gamma^\mu) \cdot (m_N - \not{k}_1) \cdot \quad (8.21)$$

$$\left( -\frac{g_a(-\not{k}_1 - \not{p}_1)\gamma^5}{2F_\pi} \right) \cdot u(p_1, m_N) \left/ \left[ (k_1^2 - m_N^2)((k_1 + p_1)^2 - M^2)((k_1 + p_1 - p_2)^2 - m_N^2) \right] \right.$$

$$\mathcal{M}_2^\mu = \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} e(2k_1^\mu + p_1^\mu - p_2^\mu) \bar{u}(p_2, m_N) \cdot \left( \frac{g_a(\not{k}_1 + \not{p}_1 - \not{p}_2)\gamma^5}{\sqrt{2}F_\pi} \right) \cdot (\not{k}_1 + \not{p}_1 + m) \left( -\frac{g_a\not{k}_1\gamma^5}{\sqrt{2}F_\pi} \right) \cdot u(p_1, m_N) \quad (8.22)$$

$$\left/ \left[ (k_1^2 - M^2)((k_1 + p_1)^2 - m_N^2)((k_1 + p_1 - p_2)^2 - M^2) \right] \right.$$

$$\mathcal{M}_4^\mu = \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} i \bar{u}(p_2, m_N) \cdot \frac{ie\gamma^\mu}{2F_\pi^2} \cdot u(p_1, m_N) \left/ (k_1^2 - M^2) \right. \quad (8.23)$$

$$\mathcal{M}_5^\mu = \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} ie(2k_1^\mu + p_1^\mu - p_2^\mu) \bar{u}(p_2, m_N) \left( \frac{-i(2\not{k}_1 + \not{p}_1 - \not{p}_2)}{4F_\pi^2} \right) \cdot u(p_1, m_N) \quad (8.24)$$

$$\left/ \left[ (k_1^2 - M^2)((k_1 + p_1 - p_2)^2 - M^2) \right] \right.$$

$$\mathcal{M}_6^\mu = \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} (-) \bar{u}(p_2, m_N) \cdot \frac{eg_a\gamma^\mu\gamma^5}{\sqrt{2}F_\pi} \cdot (\not{k}_1 + m_N) \cdot \frac{g_a(\not{p}_1 - \not{k}_1)\gamma^5}{\sqrt{2}F_\pi} \cdot u(p_1, m_N) \quad (8.25)$$

$$\left/ \left[ (k_1^2 - m_N^2)((k_1 - p_1)^2 - M^2) \right] \right.$$

$$\mathcal{M}_7^\mu = \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} (-) \bar{u}(p_2, m_N) \left( -\frac{g_a(\not{k}_1 + \not{p}_2)\gamma^5}{\sqrt{2}F_\pi} \right) \cdot (m - \not{k}_1) \left( -\frac{eg_a\gamma^\mu\gamma^5}{\sqrt{2}F_\pi} \right) \cdot u(p_1, m_N) \quad (8.26)$$

$$\left/ \left[ (k_1^2 - m_N^2)((k_1 + p_2)^2 - M^2) \right] \right.$$

之后我们需要将上述积分转为为圈积分函数的形式，并作洛伦兹结构分解。上述结果较为简单，仅有  $\gamma^\mu$  和  $(p_1 + p_2)^\mu$  两种洛伦兹结构。做了分解之后的结果如下：

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1^\mu = & \gamma^\mu \left[ -\frac{i\pi^2 e g_a^2}{4F_\pi^2} A_0(M^2) + \frac{i\pi^2 e g_a^2}{2F_\pi^2} A_0(m_N^2) + \frac{i\pi^2 e g_a^2 M^2 (6m_N^2 - t_2)}{2F_\pi^2 (4m_N^2 - t_2)} B_0(m_N^2, M^2, m_N^2) \right. \\
& - \frac{i\pi^2 e g_a^2 m_N^2 (2M^2 + 4m_N^2 - t_2)}{2F_\pi^2 (4m_N^2 - t_2)} B_0(t_2, m_N^2, m_N^2) - \left. \frac{i\pi^2 e g_a^2 M^4 m_N^2}{F_\pi^2 (4m_N^2 - t_2)} C_0(m_N^2, m_N^2, t_2, m_N^2, M^2, m_N^2) \right] \\
& + (p_1 + p_2)^\mu \left[ \frac{i\pi^2 e g_a^2 m_N}{F_\pi^2 (4m_N^2 - t_2)} A_0(M^2) - \frac{i\pi^2 e g_a^2 m_N}{F_\pi^2 (4m_N^2 - t_2)} A_0(m_N^2) - \frac{i\pi^2 e g_a^2 M^2 m_N (10m_N^2 - t_2)}{F_\pi^2 (t_2 - 4m_N^2)^2} \right. \\
& B_0(t_2, M^2, m_N^2) + \frac{i\pi^2 e g_a^2 m_N^3 (6M^2 + 4m_N^2 - t_2)}{F_\pi^2 (t_2 - 4m_N^2)^2} B_0(t_2, m_N^2, m_N^2) + \frac{2i\pi^2 e g_a^2 M^2 m_N^3 (3M^2 - 4m_N^2 + t_2)}{F_\pi^2 (t_2 - 4m_N^2)^2} \\
& \left. C_0(m_N^2, m_N^2, t_2, m_N^2, M^2, m_N^2) \right]
\end{aligned} \tag{8.27}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_2^\mu = & \gamma^\mu \left[ -\frac{i\pi^2 e g_a^2}{6F_\pi^2} A_0(M^2) + \frac{2i\pi^2 e g_a^2 m_N^2 (M^2 - 2m_N^2)}{F_\pi^2 (4m_N^2 - t_2)} B_0(m_N^2, M^2, m_N^2) \right. \\
& - \frac{i\pi^2 e g_a^2 (M^2 (40m_N^2 - 4t_2) + t_2 (t_2 - 16m_N^2))}{12F_\pi^2 (4m_N^2 - t_2)} B_0(t_2, M^2, M^2) \\
& + \frac{2i\pi^2 e g_a^2 m_N^2 (M^4 - 4M^2 m_N^2 + m_N^2 t_2)}{F_\pi^2 (4m_N^2 - t_2)} C_0(m_N^2, m_N^2, t_2, M^2, m_N^2, M^2) \left. \right] \\
& + (p_1 + p_2)^\mu \left[ \frac{2i\pi^2 e g_a^2 m_N}{F_\pi^2 (4m_N^2 - t_2)} A_0(M^2) - \frac{2i\pi^2 e g_a^2 m_N}{F_\pi^2 (4m_N^2 - t_2)} A_0(m_N^2) \right. \\
& + \frac{2i\pi^2 e g_a^2 m_N (M^2 (t_2 - 10m_N^2) + 2m_N^2 (2m_N^2 + t_2))}{F_\pi^2 (t_2 - 4m_N^2)^2} B_0(m_N^2, M^2, m_N^2) \\
& + \frac{6i\pi^2 e g_a^2 m_N^3 (2M^2 - t_2)}{F_\pi^2 (t_2 - 4m_N^2)^2} B_0(t_2, M^2, M^2) \\
& - \left. \frac{2i\pi^2 e g_a^2 m_N^3 (6M^4 - 4M^2 (2m_N^2 + t_2) + t_2 (2m_N^2 + t_2))}{F_\pi^2 (t_2 - 4m_N^2)^2} C_0(m_N^2, m_N^2, t_2, M^2, m_N^2, M^2) \right]
\end{aligned} \tag{8.28}$$

$$\mathcal{M}_4^\mu = \gamma^\mu \left[ -\frac{i\pi^2 e}{2F_\pi^2} A_0(M^2) \right] \tag{8.29}$$

$$\mathcal{M}_5^\mu = \gamma^\mu \left[ \frac{i\pi^2 e}{6F_\pi^2} A_0(M^2) + \frac{i\pi^2 e (4M^2 - t_2)}{12F_\pi^2} B_0(t_2, M^2, M^2) \right] \tag{8.30}$$

$$\mathcal{M}_6^\mu = \gamma^\mu \left[ \frac{i\pi^2 e g_a^2}{2F_\pi^2} A_0(m_N^2) + \frac{i\pi^2 e g_a^2 M^2}{2F_{\pi^2}} B_0(m_N^2, M^2, m_N^2) \right] \tag{8.31}$$



$$\mathcal{M}_7^\mu = \gamma^\mu \left[ \frac{i\pi^2 e g_a^2}{2F_\pi^2} A_0(m_N^2) + \frac{i\pi^2 e g_a^2 M^2}{2F_\pi^2} B_0(m_N^2, M^2, m_N^2) \right] \quad (8.32)$$

最终结果如下：

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^\mu = & \gamma^\mu \left[ A_0(M^2) \left( -\frac{5i\pi^2 e g_a^2}{12F_\pi^2} - \frac{i\pi^2 e}{3F_\pi^2} \right) + A_0(m_N^2) \left( \frac{3i\pi^2 e g_a^2}{2F_\pi^2} \right) \right. \\ & + B_0(m_N^2, M^2, m_N^2) \left( \frac{i\pi^2 e g_a^2 M^2}{F_\pi^2} + \frac{i\pi^2 e g_a^2}{F_\pi^2(4m_N^2 - t_2)} \left( \frac{(6m_N^2 - t_2)M^2}{2} + 2m_N^2(M^2 - 2m_N^2) \right) \right) \\ & + B_0(t_2, m_N^2, m_N^2) \left( \frac{i\pi^2 e(4M - t_2)}{12F_\pi^2} + \frac{-i\pi^2 e g_a^2}{2F_\pi^2} \left( \frac{m_N^2(2M^2 + 4m_N^2 - t_2)}{4m_N^2 - t_2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{M^2(40m_N^2 - 4t_2 + t_2(t_2 - 16m_N^2))}{6(4m_N^2 - t_2)} \right) \right) \\ & + C_0(m_N^2, m_N^2, t_2, m_N^2, M^2, m_N^2) \left( \frac{i\pi^2 e g_a^2 m_N^2(m_e^4 - 8M^2 m_N^2 + 2m_N^2 t_2)}{F_\pi^2(4m_N^2 - t_2)} \right) \Big] \\ & + (p_1^\mu + p_2^\mu) \left[ A_0(M^2) \left( \frac{3i\pi^2 e g_a^2 m_N}{F_\pi^2(4m_N^2 - t_2)} \right) + A_0(m_N^2) \left( \frac{-3i\pi^2 e g_a^2 m_N}{F_\pi^2(4m_N^2 - t_2)} \right) \right. \\ & + B_0(m_N^2, M^2, m_N^2) \left( \frac{2i\pi^2 e g_a^2 m_N(\frac{3}{2}M^2(t_2 - 10m_N^2) + 2m_N^2(2m_N^2 + t_2))}{F_\pi^2(t_2 - 4m_N^2)^2} \right) \\ & + B_0(t_2, m_N^2, m_N^2) \left( \frac{i\pi^2 e g_a^2 m_N^3(18M^2 + 4m_N^2 - 7t_2)}{F_\pi^2(t_2 - 4m_N^2)^2} \right) \\ & \left. + C_0(m_N^2, m_N^2, t_2, m_N^2, M^2, m_N^2) \left( \frac{2i\pi^2 e g_a^2}{F_\pi^2(t_2 - 4m_N^2)^2} (-3m_e^4 m_N^3 + 4M^2 m_N^5 + 5M^2 m_N^3 t_2 - 2t_2 m_N^5 + t_2^2 m_N^3) \right) \right] \end{aligned} \quad (8.33)$$

其中的  $A_0, B_0, C_0$  函数定义如下：

$$\begin{aligned} A_0(m^2) &= -16\pi^2 i \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 - m^2} \\ B_0(p^2, m_1^2, m_2^2) &= -16\pi^2 i \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - m_1^2)[(k+p)^2 - m_2^2]} \\ C_0(p_1^2, p_2^2, p_{12}^2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) &= -16\pi^2 i \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - m_1^2)[(k+p_1)^2 - m_2^2][(k+p_1+p_2)^2 - m_3^2]} \end{aligned} \quad (8.34)$$

其中  $p_{ij} = p_i + p_j$ ，这些圈函数在  $D$  维下积分之后的结果为：

$$\begin{aligned} A_0(m^2) &= -(4\pi)^{2-D/2} \Gamma(1 - \frac{D}{2}) \mu^{4-D} (m^2)^{D/2-1} \\ B_0(p^2, m_1^2, m_2^2) &= (4\pi)^{2-D/2} \Gamma(2 - \frac{D}{2}) \mu^{4-D} \int_0^1 dx [\Delta(x)]^{D/2-2} \\ C_0(p_1^2, p_2^2, p_{12}^2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) &= -(4\pi)^{2-D/2} \Gamma(3 - \frac{D}{2}) \mu^{4-D} \int_0^1 dx \int_0^x dy [S(x, y)]^{D/2-3} \end{aligned} \quad (8.35)$$

其中的  $\Delta(x)$  和  $S(x, y)$  函数定义如下:

$$\Delta(x) = p^2 x^2 - (p^2 + m_1^2 - m_2^2)x + m_1^2 \quad (8.36)$$

$$S(x, y) = p_2^2 x^2 + p_1^2 y^2 + (p_{12}^2 - p_1^2 - p_2^2)xy + (m_2^2 - m_3^2 - p_2^2)x + (m_1^2 - m_2^2 + p_2^2 - p_{12}^2)y + m_3^2 \quad (8.37)$$

令  $D = 4 - 2\epsilon$ , 当  $\epsilon \rightarrow 0$  时, 圈函数可以化简为:

$$\begin{aligned} A_0(m^2) &= m^2 \left( -R_\epsilon + \ln \frac{\mu^2}{m^2} \right) \\ B_0(p^2, m_1^2, m_2^2) &= -R_\epsilon - 1 - \int_0^1 \ln \frac{\Delta(x)}{\mu^2} dx \\ C_0(p_1^2, p_2^2, p_{12}^2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) &= - \int_0^1 dx \int_0^x \frac{dy}{S(x, y)} \end{aligned} \quad (8.38)$$

其中的  $R_\epsilon$  定义为:

$$R_\epsilon = \frac{2}{n-4} - [\ln(4\pi) + \Gamma'(1) + 1] \quad (8.39)$$

## 9 重整化的计算

我们知道形状因子的定义:

$$F_1 = A + 2m_N B, \quad F_2 = -2m_N B \quad (9.1)$$

其中  $A, B$  分别是  $\gamma^\mu$  和  $(p_1 + p_2)^\mu$  前的系数。

我们重新定义振幅为:

$$\mathcal{M}^\mu = \gamma^\mu A_{1\text{-loop}} + (p_1 + p_2)^\mu B_{1\text{-loop}} \quad (9.2)$$

即将正比于  $\gamma^\mu$  的系数定义为  $A_{1\text{-loop}}$ , 正比于  $(p_1 + p_2)^\mu$  的系数定义为  $B_{1\text{-loop}}$ 。则我们可以将单圈的形状因子写为:

$$F_1^{1\text{-loop}} = A_{1\text{-loop}} + 2m_N B_{1\text{-loop}} \quad (9.3)$$

代入  $A_0, B_0$  在  $D \rightarrow 4$  的极限, 我们可以得到  $F_{1\text{-loop}}$  的正比于  $R_\epsilon$  的系数:

$$\begin{aligned} F_1^{1\text{-loop}} &= -\frac{ie(-t_2 + g_a^2(9M^2 + t_2))}{192\pi^2 F_\pi^2} R_\epsilon + \text{regular-term} \\ &= \left( -\frac{3ieg_a^2 M^2}{64\pi^2 F_\pi^2} - \frac{ie(g_a^2 - 1)t_2}{192\pi^2 F_\pi^2} \right) R_\epsilon + \text{regular-term} \end{aligned} \quad (9.4)$$

为了抵消上面的发散, 我们需要用到树图的顶点结构。我们已知  $\gamma pp$  的前三阶树图顶点:

$$\begin{aligned} O(p^1) &: -ie\gamma^\mu \\ O(p^2) &: -iem_N(2c_6 + c_7)\gamma^\mu + \frac{i}{2}e(2c_6 + c_7)(p_1 + p_2)^\mu \\ O(p^3) &: \frac{ie(d_6 + 2d_7)}{2m_N}t_2(p_1 + p_2)^\mu \end{aligned}$$

其中我们可以得到

$$A^{O(p^1)} = -ie \quad (9.5)$$

$$A^{O(p^2)} = -iem_N(2c_6 + c_7), \quad B^{O(p^2)} = \frac{i}{2}e(2c_6 + c_7) \quad (9.6)$$

$$B^{O(p^3)} = \frac{ie(d_6 + 2d_7)}{2m_N}t_2 \quad (9.7)$$

已知质子的波函数重整化常数:

$$\delta Z_1 = -3g_a^2 \frac{(-5M^2 + 12m_N^2)A_0(M^2) + 4M^2(-m_N^2 + A_0(m_N^2)) + (M^2 - 3m_N^2)B_0(m_N^2, M^2, m_N^2)}{64F_\pi^2(M^2 - 4m_N^2)\pi^2} \quad (9.8)$$

我们将式 (8.38) 中的  $A_0, B_0$  带入  $\delta Z_1$  中, 可以得到其中正比于  $R_\epsilon$  的项:

$$\delta Z_1 = -\frac{3g_a^2 M^2}{64F_\pi^2 \pi^2} R_\epsilon + \cdots \quad (9.9)$$

我们定义

$$F_1^{O(p^1)} = -ie \quad (9.10)$$

$$F_1^{O(p^2)} = 0 \quad (9.11)$$

$$F_1^{O(p^3)} = ie(d_6 + 2d_7)t_2 \quad (9.12)$$

## A 附录

### 1 三体相空间

下面的分析参考 [20]。

在实验系中，四动量定义如下：

$$\begin{aligned}
 l &= (E_l, 0, 0, |\mathbf{l}|), \\
 p &= (M, 0, 0, 0), \\
 l' &= (E'_l, |\mathbf{l}'|\sin\theta_l, 0, |\mathbf{l}'|\cos\theta_l) \\
 p' &= (E_p, |\mathbf{p}'|\sin\theta_p\cos\phi_p, |\mathbf{p}'|\sin\theta_p\sin\phi_p, |\mathbf{p}'|\cos\theta_p) \\
 k &= (E_\gamma, E_\gamma\sin\theta_\gamma\cos\phi_\gamma, E_\gamma\sin\theta_\gamma\sin\phi_\gamma, E_\gamma\cos\theta_\gamma)
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

由等式  $(l + p - l' - k)^2 = p'^2 = M^2$ ，可以展开得到关于  $E'_l$  的等式

$$A\sqrt{E'^2_l - m^2} = BE'_l + C, \tag{A.2}$$

其中

$$\begin{aligned}
 A &= |\mathbf{l}|\cos\theta_l - E_\gamma\cos\psi = (\mathbf{l} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{l}', \\
 \cos\psi &= \cos\theta_l\cos\theta_\gamma + \sin\theta_l\sin\theta_\gamma\cos\phi_\gamma, \\
 B &= E_l + M - E_\gamma, \\
 C &= E_\gamma(E_l + M - |\mathbf{l}|\cos\theta_\gamma) - ME_l - m^2.
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

求解 (A.2) 式，我们可以得到两个解

$$E'_l = \frac{BC \pm A\sqrt{m^2(A^2 - B^2) + C^2}}{A^2 - B^2}. \tag{A.4}$$

多数情况下，“-” 的对应着物理解，但在一些区域，两个根都是物理的。物理解必须要满足两个判据：

$$E_\gamma < \frac{M(E_l - m)}{M + E_l - |\mathbf{l}|\cos\theta_\gamma}, \quad m < E'_l < E_l - E_\gamma. \tag{A.5}$$

如果轻子的质量可以忽略，则  $E'_l$  是唯一给定的：

$$E'_l = \frac{C}{A - B} = \frac{M(E_l - E_\gamma) - E_l E_\gamma(1 - \cos\theta_\gamma)}{M + E_l(1 - \cos\theta_l) - E_\gamma(1 - \cos\psi)}. \tag{A.6}$$

下面我们来看一下微分散射截面。完整的微分散射截面如下

$$d\sigma_{\text{brems}} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_i - P_f) \frac{1}{4I} |\mathcal{M}_{\text{brems}}|^2 \frac{d^3 l'}{(2\pi)^3 2E'_l} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E_p} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2E_\gamma}, \tag{A.7}$$

其中下标 brems 表示轫致辐射,  $I$  为入射流强。实验过程中, 我们不会去探测质子, 因此首先对  $p'$  积分, 利用  $d^3p_i = |\mathbf{p}_i|^2 d|\mathbf{p}_i| d\Omega = |\mathbf{p}_i| E_i dE_i d\Omega$ , 以及  $I = \sqrt{(l \cdot p)^2 - m^2 M^2} = M|\mathbf{l}|$ , 可以得到

$$d\sigma_{\text{brems}} = \frac{1}{(4\pi)^5} \delta(E_l + M - E'_l - E_p - E_\gamma) \frac{|\mathcal{M}_{\text{brems}}|^2}{M|\mathbf{l}|} \frac{|\mathbf{l}'||\mathbf{k}|}{E_p} dE'_l dE_\gamma d\Omega_l d\Omega_\gamma, \quad (\text{A.8})$$

令

$$f(E'_l) = E_l + M - E'_l - E_\gamma - \sqrt{(\mathbf{l} - \mathbf{k})^2 - 2(\mathbf{l} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{l}' + E_l'^2 - m^2 + M^2}, \quad (\text{A.9})$$

利用

$$\delta[f(x)] = \sum_{i=1}^k \frac{\delta(x - x_i)}{|df(x_i)/dx|}, \quad (\text{A.10})$$

$f(E'_l)$  对  $E'_l$  求导可得

$$\frac{df(E'_l)}{dE'_l} = -1 - \frac{E'_l}{E_p} \left[ 1 - \frac{(\mathbf{l} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{l}'}{|\mathbf{l}'|^2} \right] = \frac{AE'_l - B|\mathbf{l}'|}{E_p|\mathbf{l}'|}, \quad (\text{A.11})$$

加上方程 (A.9) 的解刚好是 (A.4), 因此

$$\frac{d\sigma_{\text{brems}}}{dE_\gamma d\Omega_\gamma d\Omega_l} = \frac{1}{(4\pi)^5} \frac{1}{M|\mathbf{l}|} \sum_{E'_l} \frac{E_\gamma |\mathbf{l}'|^2 |\mathcal{M}_{\text{brems}}|}{|AE'_l - B|\mathbf{l}'||}, \quad (\text{A.12})$$

其中  $E'_l$  和  $|\mathbf{l}'|$  是  $E_l, \theta_l, E_\gamma, \theta_\gamma, \phi_\gamma$  的函数。如果  $E'_l$  两个根都是物理的, 那么求和中两个根都要取到。如果轻子的质量可以忽略, 那么可以利用 (A.6) 进一步化简。

## 2 S 参考系

S 参考系通常是用来处理三体相空间积分的。以  $ep \rightarrow ep\gamma$  散射为例, 入射出射轻子动量分别为  $l, l'$ , 入射出射质子动量分别为  $p, p'$ , 光子动量为  $k$ 。则可以定义 S 系为辐射光子和反冲质子的质心系 (S 系中的物理量我们加一个下标  $S$ , 没有下标  $S$  的则视为实验系中的物理量), 即

$$\vec{p}' + \vec{k} = \vec{Q} \xrightarrow{S\text{-frame}} \vec{Q}_S = \vec{0} \quad (\text{A.13})$$

这里  $\vec{Q}$  在实验系中利用动量守恒又可以写作  $\vec{Q} = \vec{l} - \vec{l}'$ 。如果是弹性散射,  $\vec{l} - \vec{l}' = \vec{p}' - \vec{p}$ 。

轫致辐射的软光子的能量上限取决于实验所能分辨的最小能量, 记为  $\Delta_{\gamma^*}$ 。恰好对应着出射轻子能量  $E'$  与满足弹性条件的理论上的弹性极限  $E'^{\text{el}}$  的最大偏离, 即  $E'^{\text{el}} - E' \leq \Delta_{\gamma^*}$ 。在软光子极限  $k = (E_{\gamma^*}, \vec{k}) \rightarrow 0$  下, 我们假设  $E' \simeq E'^{\text{el}}$ 。

实验上通常不会检测反冲质子, 因此可以利用  $\delta$  函数把质子三动量积掉, 得

$$d\sigma_{br} = \frac{(2\pi)\delta^{lab}}{8ME'_p E} \frac{d^3\vec{l}'}{(2\pi)^3 2E'} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_{\gamma^*}} \times \frac{1}{4} \sum_{spins} |M|^2 \quad (\text{A.14})$$

<sup>1</sup>通常情况下, 如果有实光子发射, 则  $E' \leq E'^{\text{el}}$ , 其中等号仅在严格弹性散射意义下成立。因为我们关心的物理弹性散射过程实际上伴随着软光子的轫致辐射, 因此我们认为  $E' \simeq E'^{\text{el}}$

其中的  $\delta^{lab}$  函数为

$$\delta^{lab} = \delta\left(E + M - E' - \sqrt{(\vec{Q} - \vec{k})^2 + M^2} - E_{\gamma^*}\right) \quad (\text{A.15})$$

如果我们想对  $\vec{k}$  积分, 我们就会发现  $\delta^{lab}$  函数中对  $\vec{k}$  的依赖是各向异性的。而当我们从实验系转移到 S 系时,  $\delta^{lab}$  在软光子极限下将不再依赖于光子的散射角度。我们可以在软光子极限下把  $\delta$  函数写为

$$\delta^S = \delta(E^S + E_p^S - E'^S - E_p'^S) \quad (\text{A.16})$$

其中的上标  $S$  表示 S 系。下面我们来看看 S 系和实验系中的物理量的关系 (在软光子极限下考虑)。

1. 在 S 系中考虑  $(p' + k)^2$  不变量:

$$(p'^S + k^S)^2 = M^2 + 2E_p'^S E_{\gamma^*}^2 + 2(E_{\gamma^*}^S)^2 \xrightarrow{\gamma_{\text{soft}}} M^2.$$

由于  $\vec{p}^S + \vec{k}^S = 0$ , 我们又有

$$(\vec{p}^S + \vec{k}^S) = (E_p'^S + E_{\gamma^*}^S)^2 \xrightarrow{\gamma_{\text{soft}}} (E_p'^S)^2.$$

因此我们有  $\boxed{E_p'^S \simeq M}$ 。

2. 考虑不变量  $l \cdot (p' + k)$ 。在 S 系中, 我们有

$$l^S \cdot (p'^S + k^S) = E^S (E_p'^S + E_{\gamma^*}^S) \xrightarrow{\gamma_{\text{soft}}} M E^S.$$

在实验系中, 我们有

$$l \cdot (p' + k) = l \cdot (p + Q) = M E + \frac{Q^2}{2} = M E'.$$

因此我们有  $\boxed{E^S \simeq E'}$ 。

3. 考虑不变量  $l' \cdot (p' + k)$ ,

$$\begin{aligned} l' \cdot (p' + k) &= l'^S \cdot (p'^S + k^S) \\ l' \cdot (p + Q) &= E'^S (E_p'^S + E_{\gamma^*}^S) \\ &\xrightarrow{\gamma_{\text{soft}}} M E' - \frac{Q^2}{2} \simeq M E'^S. \end{aligned}$$

由于  $E = E' - \frac{Q^2}{2M}$ , 因此  $\boxed{E'^S \simeq E}$ 。

4. 考虑 S 系中的能量守恒:

$$E^S + E_p^S = E'^S + E_p'^S + E_{\gamma^*}^S,$$

$$E_p^S = E'^S + E_p'^S + E_{\gamma^*}^S - E^S$$

$$\xrightarrow{\gamma_{\text{soft}}} M + E - E' \simeq E_p'.$$

其中我们已经利用之前推出的 S 系和实验中物理量的对应关系, 因此  $E_p^S \simeq E_p'$ 。

5. 考虑四动量转移  $Q^2 = Q_S^2$ 。在实验系中我们有

$$Q^2 = 2m^2 - 2EE'(1 - \beta\beta'\cos\theta),$$

在 S 系中我们有

$$Q_S^2 = 2m^2 - 2E^S E'^S - 2E^S E'^S (1 - \beta_S \beta'_S \cos\theta_S)$$

$$\xrightarrow{\gamma_{\text{soft}}} 2m^2 - 2E'E(1 - \beta\beta'\cos\theta_S),$$

其中的  $\beta, \beta', \beta_S, \beta'_S$  分别定义为实验系和 S 系中的入射出射轻子速率  $\beta = |\vec{l}|/E, \beta' = |\vec{l}'|/E', \beta_S = |\vec{l}^S|/E^S, \beta'_S = |\vec{l}'^S|/E'^S$ 。因此我们可以得到两个参考系中散射角的关系:  $\cos\theta_S \simeq \cos\theta$ 。

6. 最后考虑四动量守恒式:  $l + p - l' = p' + k$ 。将其模方后分别在实验中和 S 系中写出:

$$2m^2 - 2l \cdot l' + 2M(E - E'^{el}) = 2p'^S \cdot k^S,$$

还记得我们之前定义的实验装置的最大能量分辨率为  $\Delta_{\gamma^*}$ , 我们将其在 S 中记为  $\Delta_S \neq \Delta_{\gamma^*}$ , 即  $E_{\gamma^*}^S = |\vec{k}^S| \leq \Delta_S \ll M$ 。考虑等号存在时, 利用  $\Delta_S$ , 我们可将上式右边写为

$$2p'^S \cdot k^S = 2M\Delta_S \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta_S}{M}\right)^2 + 2\Delta_S^2},$$

忽略轻子质量  $m \ll M$ , 则

$$M(E - E') - EE'(1 - \cos\theta) = M\Delta_S(1 + O(\frac{\Delta_S}{M}))$$

在弹性极限下, 即  $\Delta_S \rightarrow 0$ ,

$$M(E - E'^{el}) - EE'^{el}(1 - \cos\theta) = 0$$

将上式代回上上式中, 可以得到

$$\Delta_S = (E' - E'^{el}) \left[ 1 + \frac{2E}{M} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + O\left(\frac{\Delta_S}{M}\right) \simeq \eta \Delta_{\gamma^*}.$$

其中  $\eta = 1 + 2E \sin^2(\theta/2)/M$  是实验系质子反冲因子。因此在 S 系中软光子积分上限为  $\Delta_S \leq \eta \Delta_{\gamma^*}$ 。

总结: S 系和实验中系中的物理量关系如下, 恰好为弹性过程的交换初末态能量。

$$E_p^S \simeq M, E^S \simeq E' = \frac{E}{\eta}, E^S \simeq E, E_p^S \simeq E_p', \cos\theta_S \simeq \cos\theta, \Delta_S \simeq \eta \Delta_{\gamma^*} \quad (\text{A.17})$$



### 3 EOMS 重整化与 Becher 和 Leutwyler 的红外正规化

低能有效常数通常在考虑高阶修正的时候需要进行重整化，以抵消来自正规化过程中产生的无穷大，比如  $\pi$  介子的质量：

$$m_\pi^2 = \tilde{m}_\pi^2 - \frac{\bar{l}_3}{32\pi^2 F_\pi^2} \tilde{m}_\pi^4 + \mathcal{O}(\tilde{m}_\pi^6), \quad (\text{A.18})$$

其中的  $\tilde{m}_\pi$  表示领头阶中  $\pi$  介子的质量，而重整化后的  $\bar{l}_3$  对数依赖于  $\tilde{m}_\pi$ ，抵消来自  $\pi$  圈的无穷大贡献。

然而在考虑核子存在时，上述重整化方案并不适用，因为核子的质量在手征极限下也不为 0，因此会有无穷多重重整化的贡献。与此同时，拉氏量中按照核子质量的新的展开方式也可能会破坏振幅和形状因子的解析性 [?]。为了克服上述困难，Becher 和 Leutwyler 提出了红外正规化步骤 [?]，其中，振幅解析性得以保持。

为了比较 EOMS 方案和 Becher、Leutwyler 提出的正规化方案，我们首先考虑一个维数正规化下的单圈积分。

$$H(p^2, m^2, M^2; n) = -i \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{[(p-k)^2 - m^2 + i0^+][k^2 - M^2 + i0^+]}, \quad (\text{A.19})$$

其中  $n$  表示维数， $m$  和  $M$  分别是最低阶的核子、 $\pi$  介子质量。接下来利用费曼参数法：

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[az + b(1-z)]^2}, \quad (\text{A.20})$$

其中  $a = (p-k)^2 - m^2 + i0^+$ ,  $b = k^2 - M^2 + i0^+$ ，然后我们可以得到

$$H(p^2, m^2, M^2; n) = -i \int_0^1 dz \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{[k^2 + p^2 z(1-z) - m^2 z - M^2(1-z) + i0^+]^2}. \quad (\text{A.21})$$

利用

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{(k^2)^p}{(k^2 - A)^q} = \frac{i(-)^{p-q}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{\Gamma\left(p + \frac{n}{2}\right)\Gamma\left(q - p - \frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma(q)} A^{p+(n/2)-q}, \quad (\text{A.22})$$

代入  $p=0, q=2$ ，可以得到

$$H(p^2, m^2, M^2; n) = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) \int_0^1 dz [A(z)]^{(n/2)-2}, \quad (\text{A.23})$$

其中  $A(z) = -p^2(1-z)z + M^2(1-z) + m^2z - i0^+$ 。为了简单起见，我们接下来在手征极限下处理积分，即令  $M^2 = 0$ 。新定义两个参数

$$C(z, \Delta) = z^2 - \Delta z(1-z) - i0^+, \quad \Delta = \frac{p^2 - m^2}{m^2}, \quad (\text{A.24})$$

我们可以重新将  $H(p^2, m^2, M^2; n)$  写成

$$H(p^2, m^2, 0; n) = \kappa(m; n) \int_0^1 dz [C(z, \Delta)]^{(n/2)-2}, \quad (\text{A.25})$$

其中

$$\kappa(m; n) = \frac{\Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right)}{(4\pi)^{n/2}} m^{n-4}. \quad (\text{A.26})$$

我们接着将对  $C(z, \Delta)$  的积分写成

$$\int_0^1 dz [C(z, \Delta)]^{(n/2)-2} = (-\Delta)^{(n/2)-2} \int_0^1 dz z^{(n/2)-2} \left(1 - \frac{1+\Delta}{\Delta} z\right)^{(n/2)-2} \quad (\text{A.27})$$

回想合流超几何函数的定义和性质：

$$F(a, b, c; t) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 z^{b-1} (1-z)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dz \quad (\text{A.28})$$

$$F(a, b, c; t) = (1-t)^{-a} F(a, c-b, c; \frac{t}{t-1}) \quad (\text{A.29})$$

代入  $a = 2 - \frac{n}{2}, b = \frac{n}{2} - 1, c = \frac{n}{2}, t = \frac{1+\Delta}{\Delta}$ , 可以得到

$$H(p^2, m^2, 0; n) = \kappa(m; n) \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} F\left(2 - \frac{n}{2}, 1, \frac{n}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right), \quad (\text{A.30})$$

接着利用合流超几何函数的性质：

$$\begin{aligned} F(a, b, c; t) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a, b, a+b-c+1; 1-t) \\ &\quad + (1-t)^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} F(c-a, c-b, c-a-b+1; 1-t), \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

我们可以得到

$$\begin{aligned} H(p^2, m^2, 0; n) &= \frac{m^{n-4}}{(4\pi)^{n/2}} \left[ \frac{\Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right)}{n-3} F\left(2 - \frac{n}{2}, 1, 4-n; -\Delta\right) \right. \\ &\quad \left. + (-\Delta)^{n-3} \Gamma\left\{\frac{n}{2} - 1\right\} \Gamma(3-n) F\left(n-2, \frac{n}{2} - 1, n-2; -\Delta\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

利用合流超几何函数的展开式我们可以将上式接着进行展开,

$$F(a, b, c; z) = 1 + \frac{ab}{c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2} + \dots, \text{ for } |z| < 1 \quad (\text{A.33})$$

我们可以得到

$$H = \frac{m^{n-4}}{(4\pi)^{n/2}} \left[ \frac{\Gamma(2 - \frac{n}{2})}{n-3} + \left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) \ln\left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) + \left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right)^2 \ln\left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) + \dots \right], \quad (\text{A.34})$$

如果从上式中减去第一项，我们就可以得到重整化后的积分：

$$H_R(p^2, m^2, 0; n) = \frac{m^{n-4}}{(4\pi)^{n/2}} \left[ \left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) \ln\left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) + \left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right)^2 \ln\left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) + \dots \right] \quad (\text{A.35})$$

减除的第一项  $\frac{m^{n-4}}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\Gamma(2-\frac{n}{2})}{n-3}$  是关于外动量局域的，即是外动量  $p^2$  的多项式，因此可以在拉氏量中通过有限多项进行吸收，从而使得重整化后的表达式是满足手征 power-counting 的。

实际上，我们可以定义一个新的重整化方案，叫做 EOMS (Extended on-mass-shell) 重整化，我们可以直接从给定积分中减去违背 power-counting 的项，这些项总是一些小量的解析函数，而且不包含红外奇异性。接着以  $H(p^2, m^2, M^2; n)$  为例，考虑下列序列：

$$\begin{aligned} & \sum_0^\infty \frac{(p^2 - m^2)^l}{l!} \left[ \left( \frac{1}{2p^2} p_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} \right)^l \frac{1}{(k^2 + i0^+)[k^2 - 2k \cdot p + (p^2 - m^2) + i0^+]} \right]_{p^2=m^2} \\ &= \frac{1}{(k^2 + i0^+)(k^2 - 2k \cdot p + i0^+)} \Big|_{p^2=m^2} + (p^2 - m^2) \left[ \frac{1}{2m^2} \frac{1}{(k^2 - 2k \cdot p + i0^+)^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2m^2} \frac{1}{(k^2 + i0^+)(k^2 - 2k \cdot p + i0^+)} - \frac{1}{2} \frac{1}{(k^2 + i0^+)(k^2 - 2k \cdot p + i0^+)} \right]_{p^2=m^2} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

上面的序列中，只需要减除掉第一项即可，而其他的高阶项则是包含红外奇异性的，比如第二项中的最后一项会包含如  $\frac{d^4 k}{k^4}$  的行为，从而导致红外奇异性。由于我们总是在  $p^2 = m^2$  处做减除，因此该方案又被称为 EOMS 方案。

而 Becher 和 Leutwyler 提出的红外正规化方案则是将积分  $H(p^2, m^2, M^2; n)$  分成红外部分  $I$  和余下部分  $R$ ，如下：

$$I \equiv \kappa(m; n) \int_0^\infty dz [C(z, \Delta)]^{(n/2)-2}, \quad (\text{A.37})$$

$$R \equiv -\kappa(m; n) \int_1^\infty dz [C(z, \Delta)]^{(n/2)-2}. \quad (\text{A.38})$$

两个积分的解析表达式如下：

$$I = \frac{m^{n-4}}{(4\pi)^{n/2}} (-\Delta)^{n-3} \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) \Gamma(3-n) \frac{1}{(1+\Delta)^{(n/2)-1}} \quad (\text{A.39})$$

$$R = -\kappa(m; n) (1+\Delta)^{(n/2)-1} \frac{\Gamma(3-n)}{\Gamma(4-n)} F\left(2 - \frac{n}{2}, 3-n, 4-n; \frac{\Delta}{1+\Delta}\right) \quad (\text{A.40})$$

接下来我们将  $\Delta$  视作  $\mathcal{O}(q)$  的小量，来探讨  $I$  和  $R$  在  $n \rightarrow 4$  时的行为。当  $n \rightarrow 4$  时， $I$  无法被展开成  $\Delta$  的幂级数，因为

$$(-\Delta)^{n-3} \Gamma(3-n) = -\Delta \left[ \frac{1}{n-4} - \Gamma'(1) - 1 \right] - \Delta \ln(-\Delta) + \mathcal{O}(n-4). \quad (\text{A.41})$$

因此对于  $n$  取非整数， $I$  包含  $\Delta$  的非整数幂。而对于  $R$  而言，由于合流超几何函数是解析函数，因此即使  $n$  取非整数，依旧可以将  $R$  展开为  $\Delta$  的正常泰勒级数形式。然而当  $\Delta \rightarrow 0$  时， $R$  中包含  $q^2$  幂，破坏了 power-counting。

Becher 和 Leutwyler 提出的解决方法是保留  $I$  的贡献, 将其视为积分的结果, 并丢掉  $R$ , 因为  $R$  可以被拉氏量中无穷多的抵消项抵消。同时红外部分  $I$  也包含无穷多发散项, 而  $I$  与  $R$  中的无穷多发散项刚好抵消, 只剩下一个紫外发散项, 即 (A.26)。

## 参考文献

- [1] I. A. Qattan, J. Arrington, R. E. Segel, X. Zheng, K. Aniol, O. K. Baker, R. Beams, E. J. Brash, J. Calarco, A. Camsonne, J.-P. Chen, M. E. Christy, D. Dutta, R. Ent, S. Frullani, D. Gaskell, O. Gayou, R. Gilman, C. Glashausser, K. Hafidi, J.-O. Hansen, D. W. Higinbotham, W. Hinton, R. J. Holt, G. M. Huber, H. Ibrahim, L. Jisonna, M. K. Jones, C. E. Keppel, E. Kinney, G. J. Kumbartzki, A. Lung, D. J. Margaziotis, K. McCormick, D. Meekins, R. Michaels, P. Monaghan, P. Moussiegt, L. Pentchev, C. Perdrisat, V. Punjabi, R. Ransome, J. Reinhold, B. Reitz, A. Saha, A. Sarty, E. C. Schulte, K. Slifer, P. Solvignon, V. Sulkosky, K. Wijesooriya, and B. Zeidman. Precision Rosenbluth Measurement of the Proton Elastic Form Factors. *Physical Review Letters*, 94(14):142301, April 2005.
- [2] O. Gayou, K. A. Aniol, T. Averett, F. Benmokhtar, W. Bertozzi, L. Bimbot, E. J. Brash, J. R. Calarco, C. Cavata, Z. Chai, C.-C. Chang, T. Chang, J.-P. Chen, E. Chudakov, R. De Leo, S. Dieterich, R. Endres, M. B. Epstein, S. Escoffier, K. G. Fissum, H. Fonvieille, S. Frullani, J. Gao, F. Garibaldi, S. Gilad, R. Gilman, A. Glamazdin, C. Glashausser, J. Gomez, V. Gorbenko, J.-O. Hansen, D. W. Higinbotham, G. M. Huber, M. Iodice, C. W. de Jager, X. Jiang, M. K. Jones, J. J. Kelly, M. Khandaker, A. Kozlov, K. M. Kramer, G. Kumbartzki, J. J. LeRose, D. Lhuillier, R. A. Lindgren, N. Liyanage, G. J. Lolos, D. J. Margaziotis, F. Marie, P. Markowitz, K. McCormick, R. Michaels, B. D. Milbrath, S. K. Nanda, D. Neyret, Z. Papan-dreou, L. Pentchev, C. F. Perdrisat, N. M. Piskunov, V. Punjabi, T. Pussieux, G. Quémener, R. D. Ransome, B. A. Raue, R. Roché, M. Rvachev, A. Saha, C. Salgado, S. Širca, I. Sitnik, S. Strauch, L. Todor, E. Tomasi-Gustafsson, G. M. Urciuoli, H. Voskanyan, K. Wijesooriya, B. B. Wojtsekhowski, X. Zheng, and L. Zhu. Measurement of  $G_E p / G_M p$  in  $e \rightarrow p \rightarrow e$   $p \rightarrow \pi^0$   $Q^2 = 5.6 \text{ GeV}^2$ . *Physical Review Letters*, 88(9):092301, February 2002.
- [3] M. K. Jones, K. A. Aniol, F. T. Baker, J. Berthot, P. Y. Bertin, W. Bertozzi, A. Besson, L. Bimbot, W. U. Boeglin, E. J. Brash, D. Brown, J. R. Calarco, L. S. Cardman, C.-C. Chang, J.-P. Chen, E. Chudakov, S. Churchwell, E. Cisbani, D. S. Dale, R. De Leo, A. Deur, B. Diederich, J. J. Domingo, M. B. Epstein, L. A. Ewell, K. G. Fissum, A. Fleck, H. Fonvieille, S. Frullani, J. Gao, F. Garibaldi, A. Gasparian, G. Gerstner, S. Gilad, R. Gilman, A. Glamazdin, C. Glashausser, J. Gomez, V. Gorbenko, A. Green, J.-O. Hansen, C. R. Howell, G. M. Huber, M. Iodice, C. W. de Jager, S. Jaminion, X. Jiang, W. Kahl, J. J. Kelly, M. Khayat, L. H. Kramer, G. Kumbartzki, M. Kuss, E. Lakuriki, G. Lavessière, J. J. LeRose, M. Liang, R. A. Lindgren, N. Liyanage, G. J. Lolos, R. Macri, R. Madey, S. Malov, D. J. Margaziotis, P. Markowitz, K. McCormick, J. I. McIntyre, R. L. J. van der Meer, R. Michaels,

- B. D. Milbrath, J. Y. Mougey, S. K. Nanda, E. A. J. M. Offermann, Z. Papandreou, C. F. Perdrisat, G. G. Petratos, N. M. Piskunov, R. I. Pomatsalyuk, D. L. Prout, V. Punjabi, G. Quémener, R. D. Ransome, B. A. Raue, Y. Roblin, R. Roche, G. Rutledge, P. M. Rutt, A. Saha, T. Saito, A. J. Sarty, T. P. Smith, P. Sorokin, S. Strauch, R. Suleiman, K. Takahashi, J. A. Templon, L. Todor, P. E. Ulmer, G. M. Urciuoli, P. Vernin, B. Vlahovic, H. Voskanyan, K. Wijesooriya, B. B. Wojtsekhowski, R. J. Woo, F. Xiong, G. D. Zainea, and Z.-L. Zhou.  $G_E p / G_M p$  Ratio by Polarization Transfer in  $e \rightarrow p \rightarrow e p \rightarrow$ . *Physical Review Letters*, 84(7):1398–1402, February 2000.
- [4] L Andivahis and P E Bosted. Measurements of the electric and magnetic form factors of the proton from  $Q_a = 1.75$  to  $8.83$  (  $G \sim V / C$  )  $\sim$ . page 31.
- [5] Randolph Pohl, Aldo Antognini, François Nez, Fernando D. Amaro, François Biraben, João M. R. Cardoso, Daniel S. Covita, Andreas Dax, Satish Dhawan, Luis M. P. Fernandes, Adolf Giesen, Thomas Graf, Theodor W. Hänsch, Paul Indelicato, Lucile Julien, Cheng-Yang Kao, Paul Knowles, Eric-Olivier Le Bigot, Yi-Wei Liu, José A. M. Lopes, Livia Ludhova, Cristina M. B. Monteiro, Françoise Mulhauser, Tobias Nebel, Paul Rabinowitz, Joaquim M. F. dos Santos, Lukas A. Schaller, Karsten Schuhmann, Catherine Schwob, David Taqqu, João F. C. A. Veloso, and Franz Kottmann. The size of the proton. *Nature*, 466(7303):213–216, July 2010.
- [6] Ingo Sick. On the rms-radius of the proton. *Physics Letters B*, 576(1-2):62–67, December 2003.
- [7] Peter J. Mohr, Barry N. Taylor, and David B. Newell. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2006. *Reviews of Modern Physics*, 80(2):633–730, June 2008.
- [8] E. J. Gilman, R.and Downie, G. Ron, S. Strauch, A. Afanasev, A. Akmal, J. Arrington, H. Atac, C. Ayerbe-Gayoso, F. Benmokhtar, N. Benmouna, J. Bernauer, A. Blomberg, W. J. Briscoe, D. Cioffi, E. Cline, D. Cohen, E. O. Cohen, C. Collicott, K. Deiters, J. Diefenbach, B. Dongwi, D. Ghosal, A. Golossanov, R. Gothe, D. Higinbotham, D. Hornidge, Y. Ilieva, N. Kalantarians, M. Kohl, B. Krusche, G. Kumbartzki, I. Lavrukhin, L. Li, J. Lichtenstadt, W. Lin, A. Liyanage, W. Lorenzon, K. E. Mesick, Z.-E. Meziani, P. Mohanmurthy, P. Moran, J. Nazeer, E. Piasetzsky, R. Ransome, R. Raymond, D. Reggiani, P. E. Reimer, A. Richter, T. Rostomyan, P. Roy, A. Sarty, Y. Shamai, N. Sparveris, N. Steinberg, I. Strakovsky, V. Sulkosky, A. S. Tadepalli, and M. Taragin. Technical Design Report for the Paul Scherrer Institute Experiment R-12-01.1: Studying the Proton "Radius" Puzzle with  $\{\mu\}p$

Elastic Scattering, September 2017. Number: arXiv:1709.09753 arXiv:1709.09753 [nucl-ex, physics:physics].

- [9] A. Accardi, A. Afanasev, I. Albayrak, S. F. Ali, M. Amarian, J. R. M. Annand, J. Arrington, A. Asaturyan, H. Atac, H. Avakian, T. Averett, C. Ayerbe Gayoso, X. Bai, L. Bardon, M. Battaglieri, V. Bellini, R. Beminiwattha, F. Benmokhtar, V. V. Berdnikov, J. C. Bernauer, V. Bertone, A. Bianconi, A. Biselli, P. Bisio, P. Blunden, M. Boer, M. Bondì, K.-T. Brinkmann, W. J. Briscoe, V. Burkert, T. Cao, A. Camsonne, R. Capobianco, L. Cardman, M. Carmignotto, M. Caudron, L. Causse, A. Celentano, P. Chatagnon, J.-P. Chen, T. Chetry, G. Ciullo, E. Cline, P. L. Cole, M. Contalbrigo, G. Costantini, A. D' Angelo, L. Darmé, D. Day, M. Defurne, M. De Napoli, A. Deur, R. De Vita, N. D' Hose, S. Diehl, M. Diefenthaler, B. Dongwi, R. Dupré, H. Dutrieux, D. Dutta, M. Ehrhart, L. El Fassi, L. Elouadrhiri, R. Ent, J. Erler, I. P. Fernando, A. Filippi, D. Flay, T. Forest, E. Fuchey, S. Fucini, Y. Furletova, H. Gao, D. Gaskell, A. Gasparian, T. Gautam, F.-X. Girod, K. Gnanvo, J. Grames, G. N. Grauvogel, P. Gueye, M. Guidal, S. Habet, T. J. Hague, D. J. Hamilton, O. Hansen, D. Hasell, M. Hattawy, D. W. Higinbotham, A. Hobart, T. Horn, C. E. Hyde, H. Ibrahim, A. Ilyichev, A. Italiano, K. Joo, S. J. Joosten, V. Khachatryan, N. Kalantarians, G. Kalicy, B. Karky, D. Keller, C. Keppel, M. Kerver, M. Khandaker, A. Kim, J. Kim, P. M. King, E. Kinney, V. Klimenko, H.-S. Ko, M. Kohl, V. Kozhuharov, B. T. Kriesten, G. Krnjaic, V. Kubarovsky, T. Kutz, L. Lanza, M. Leali, P. Lenisa, N. Liyanage, Q. Liu, S. Liuti, J. Mammei, S. Mantry, D. Marchand, P. Markowitz, L. Marsicano, V. Mascagna, M. Mazouz, M. McCaughan, B. McKinnon, D. McNulty, W. Melnitchouk, A. Metz, Z.-E. Meziani, S. Miglioni, M. Mihovilović, R. Milner, A. Mkrtchyan, H. Mkrtchyan, A. Movsisyan, H. Moutarde, M. Muhoza, C. Muñoz Camacho, J. Murphy, P. Nadel-Turoński, E. Nardi, J. Nazeer, S. Nicolai, G. Niculescu, R. Novotny, J. F. Owens, M. Paolone, L. Pappalardo, R. Paremuzyan, B. Pasquini, E. Pasyuk, T. Patel, I. Pegg, C. Peng, D. Perera, M. Poelker, K. Price, A. J. R. Puckett, M. Raggi, N. Randazzo, M. N. H. Rashad, M. Rathnayake, B. Raue, P. E. Reimer, M. Rinaldi, A. Rizzo, Y. Roblin, J. Roche, O. Rondon-Aramayo, F. Sabatié, G. Salmè, E. Santopinto, R. Santos Estrada, B. Sawatzky, A. Schmidt, P. Schweitzer, S. Scopetta, V. Sergeyeva, M. Shabestari, A. Shahinyan, Y. Sharabian, S. Širca, E. S. Smith, D. Sokhan, A. Somov, N. Sparveris, M. Spata, H. Spiesberger, M. Spreafico, S. Stepanyan, P. Stoler, I. Strakovsky, R. Suleiman, M. Suresh, P. Sznajder, H. Szumila-Vance, V. Tadevosyan, A. S. Tadeipalli, A. W. Thomas, M. Tiefenback, R. Trotta, M. Ungaro, P. Valente, M. Vanderhaeghen, L. Venturelli, H. Voskanyan, E. Voutier, B. Wojtsekhowski, M. H. Wood, S. Wood, J. Xie, W. Xiong, Z. Ye, M. Yurov, H.-G. Zaunick, S. Zhamkochyan, J. Zhang, S. Zhang,

- S. Zhao, Z. W. Zhao, X. Zheng, J. Zhou, and C. Zorn. An experimental program with high duty-cycle polarized and unpolarized positron beams at Jefferson Lab. *The European Physical Journal A*, 57(8):261, August 2021.
- [10] Mark Thomson. *Modern Particle Physics*. Cambridge University Press, 2013.
- [11] Malcolm N Butler, Martin J Savage, and Roxanne P Springer. Strong and electromagnetic decays of the baryon decuplet. *Nuclear Physics B*, 399(1):69–85, 1993.
- [12] Thomas R Hemmert, Barry R Holstein, and Joachim Kambor. Heavy baryon chiral perturbation theory with light deltas. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 24(10):1831, 1998.
- [13] Elizabeth Jenkins and Aneesh V Manohar. Chiral corrections to the baryon axial currents. *Physics Letters B*, 259(3):353–358, 1991.
- [14] Véronique Bernard, Thomas R Hemmert, and Ulf-G Meissner. Infrared regularization with spin-3/2 fields. *Physics Letters B*, 565:137–145, 2003.
- [15] C Hacker, N Wies, J Gegelia, and S Scherer. Including the  $\delta$  (1232) resonance in baryon chiral perturbation theory. *Physical Review C*, 72(5):055203, 2005.
- [16] Vladimir Pascalutsa and Daniel R Phillips. Effective theory of the  $\delta$  (1232) resonance in compton scattering off the nucleon. *Physical Review C*, 67(5):055202, 2003.
- [17] Terry Pilling. Symmetry of massive rarita–schwinger fields. *International Journal of Modern Physics A*, 20(13):2715–2741, 2005.
- [18] William Rarita and Julian Schwinger. On a theory of particles with half-integral spin. *Physical Review*, 60(1):61, 1941.
- [19] Nadia Fettes, Ulf-G Meißner, Martin Mojžiš, and Sven Steininger. The chiral effective pion-nucleon lagrangian of order p4. *Annals of Physics*, 283(2):273–307, 2000.
- [20] A V Gramolin, V S Fadin, A L Feldman, R E Gerasimov, D M Nikolenko, I A Rachek, and D K Toporkov. A new event generator for the elastic scattering of charged leptons on protons. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 41(11):115001, November 2014.