组合优化期中考试内容复习

题目一

考虑下面的设施选址问题。有n个小区需要某种##服务，有m处地点可以用于开设服务点。在地点i开设服务点所需要的开设费用为f_i,设置在地点i的服务点为小区j提供服务所需要的运营费用为c_{ij}.现在需要选择若干地点开设服务点，并确定每一个服务点的服务对象，使得每个小区至少有一个服务点为其提供服务，并且总费用最小。试着写出该问题数学规划。

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ 如果地点} i \text{的服务点为小区} j \text{提供服务} \\ 0 \text{ 其它} \end{cases}$$

$$min \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} x_{ij}) f_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} c_{ij}$$

满足：

1.每个小区都至少有1个服务点

2.每个地点最多开1个服务点服务1个小区

因此满足：

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq 1$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1$$

题目二

某航空公司计划在全国选若干个机场组建基地。假设在机场j组建基地所需要的费用是$c_j, j = 1, \ldots, n$. 如果这个航空公司在i与j都有基地，那么就可以开通往返两地的航班并获得票款收益$r_{ij}, 1 \leq i < j \leq n$.这个航空公司基地组建费用预算上限为B，应该选择哪些机场组建基地才能使得获取的票款收益最大。写出数学规划

$$u_i = \begin{cases} 1 \text{ 如果第} i \text{个机场开设了基地} \\ 0 \text{ 其它} \end{cases}$$

这里的关键是我们要最大化的东西，我们要最大化票款收益

$max: \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1,j>i}^{n} r_{ij} u_i u_j - \sum_{j=1}^{n} c_i u_i$

s.t.

$$\sum_{i=1}^{n} c_i u_i \le B$$
$$u_i \in \{0,1\}$$

题目三

现在有n个Boolean变量$x_1, x_2, \ldots, x_n$的一个合取范式$F = c_1 \cap c_2 \cap \ldots \cap c_m$,其中子句$c_i$为若干个文字的析取范式，$c_i$的权为$w_i, i = 1, \ldots, m$.求所有变量的一组赋值，使得值为真的子句的权之和最大的问题称为**MAX-SAT**问题

1.写出**MAX-SAT**问题的数学规划：

这里对于子句的规划需要用2个变量来控制，而同时因为ci为合取，只需要ci中有一个真那么ci就是真。

此时规划变量超级多，这是一个套路。

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ 如果 } c_i \text{含有} x_j \\ 0 \text{ 其它} \end{cases}$$
$$b_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ 如果 } c_i \text{含有} \bar{x_j} \\ 0 \text{ 其它} \end{cases}$$
$$y_i = \begin{cases} 1 \text{ 如果 } x_i \text{取真} \\ 0 \text{ 其它} \end{cases}$$
$$z_i = \begin{cases} 1 \text{ 如果 } c_i \text{可满足} \\ 0 \text{ 其它} \end{cases}$$
$$max: \sum_{i=1}^{m} w_i z_i$$

3.F 的每个子句最多含有2个文字的MAX-SAT问题为2MAX-SAT问题，证明它是NP完全问题。

首先证明NP：

1.得出一个可行解是简单的，任意就可以了

2.可行解规模不超过实例规模多项式。

这是显然的

3.多项式时间内验证 ok

再证明NP-完全

写成判定形式

给定一个每个子句最多含2个文字的合取范式（CNF），以及每一个子句的权与阈值B，问是否存在变量的一个赋值，使得取值为真的子句的权之和大于B

如何从3SAT归约：

证明$3SAT \leq_m^p MAX-2SAT$

利用第二题的结论：

对于x, y, z, w为Boolean变量，取3SAT的子句为

$C_i = x \cap y \cap z$

取变量w，使得

$C_i' = x \cup y \cup z \cup w \cup ....$即第二问中有的。

我们证明：

如果存在一个赋值，使得$C_i = 1$，那么存在w的一个赋值，使得C_i'恰好7个子句为1

当有一个赋值使得$C_i = 0$，那么不管怎样赋值，C_i'最多6个子句为1

取3SAT的实例：

每个子句都为3个文字的析取，构造MAX-2SAT的实例如上构造。

证明MAX-2SAT取值为真的子句权之和=7m当且仅当存在一个文字的一种赋值，使得变量为真。

首先如果存在一种赋值的话，我们如上面给w赋值，那么就存在每一个部分7个子句为1，那么取值为真的子句权之和也就$\geq 7m$了

如果取值为真的权$\geq 7m$，如上第二个结论，可知此时无论怎么赋权都小于7，那么此时每一个子句取真的子句都是7，那么不可能有$C_i = 0$，也就是说此时针对这个实例的3SAT问题答案是是。

如何证明NP-Hard：

ANP-Hard，找一个B是NP-Hard。从B的一个实例构造A的一个实例，证明如果能解决A 问题的这个实例，那么B问题的这个实例也能解决。

比如这里A的实例是从3SAT构造的。然后我们A的问题是存不存在大于等于7m的一个判断。如果存在的话，我们可以得到B问题的答案是真。同时B问题答案是真也是存在。这样如果能解决A问题的实例，B问题实例也能解决了。