# 图像分割的变分水平集方法

## —以local binary fitting为例

李佳翔

November 27, 2017

# Outline

# 图像处理

任意一个图像处理器$T$，对输入图像$u_0$进行处理

$$u_0 \xrightarrow{T} F = T[u_0]$$

针对不同的$T$得到的是不同的问题，一般地$u_0$是低质量的图像，而$F$是我们预期通过处理得到的高质量图像。图像处理的难度也就在这里：往往处理问题为反问题。

# 图像处理

任意一个图像处理器$T$，对输入图像$u_0$进行处理

$$u_0 \xrightarrow{T} F = T[u_0]$$

针对不同的$T$得到的是不同的问题，一般地$u_0$是低质量的图像，而$F$是我们预期通过处理得到的高质量图像。图像处理的难度也就在这里：往往处理问题为反问题。
通常关注的图像处理问题有降噪、去模糊、修补或图像插值以及分割。

# 图像处理

以对比度问题为例。如果是$u_0$是原始图像简单的线性变换，那么问题就好解决。如果变换依旧是逐元素进行的，但是不再是线性的，那么问题就会棘手一些。

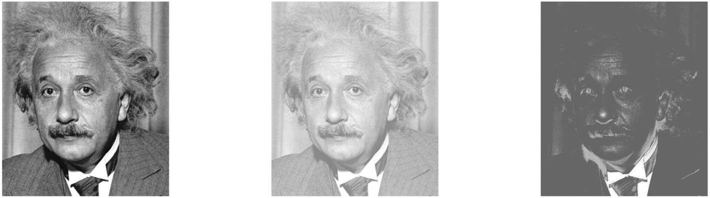

图: Einstein in contrast variations: left: original figure; center: element-wise linear transform; right: element-wise non-linear transform

# 图像处理

图像处理的诸多操作，包括阈值法(thresholding)、滤波器(filter)等，如下图为移动平均阈值：

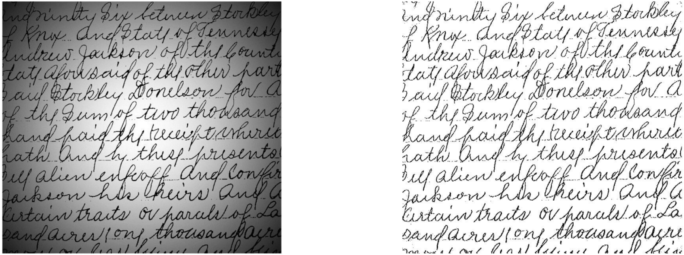

图: Moving average thresholding

# 图像处理

下图为梯度算子：

图: Nabla with Lena

# 图像分割

图像分割在联系底层和高层计算机视觉上至关重要，分割对人类来说很简单，但是对机器而言难度很大。

# 图像分割

图像分割在联系底层和高层计算机视觉上至关重要，分割对人类来说很简单，但是对机器而言难度很大。
数学定义：在给定二维区域$\Omega$上有观察图像$u_0$，求$\Omega$分划$\Omega_0, ..., \Omega_N$，使得$\Omega_i$在“视觉上有意义”。进一步的问题有：确定$N$，甚至真正确定“物体”。

# 图像分割

图像分割在联系底层和高层计算机视觉上至关重要，分割对人类来说很简单，但是对机器而言难度很大。
数学定义：在给定二维区域$\Omega$上有观察图像$u_0$，求$\Omega$分划$\Omega_0, ..., \Omega_N$，使得$\Omega_i$在“视觉上有意义”。进一步的问题有：确定$N$，甚至真正确定“物体”。

图: Image segmentation instance

# 图像处理的变分方法

**一个图像复原的例子**
考虑下面的加性噪声模型：

$$u_0(x) = u(x) + n(x)$$

其中$n$是期望为0的Gauss白噪声场。如果已知$u_0$，那么求解$u$的过程可以通过极小化以下能量泛函得到：

# 图像处理的变分方法

**一个图像复原的例子**

考虑下面的加性噪声模型：

$$u_0(x) = u(x) + n(x)$$

其中$n$是期望为0的Gauss白噪声场。如果已知$u_0$，那么求解$u$的过程可以通过极小化以下能量泛函得到：

$$\hat{u} = argmin_u E(u) = argmin_u \frac{\alpha}{2} \int_\Omega (u - u_0)^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

其中第一项是保真项(fidelity)，第二项是光滑项，它保证了还原出来的图像梯度比较小(从而减小噪声)。

# 一个图像复原的例子

这个例子同时还帮助我们引入了PDE的方法。回忆Poisson方程求解的弱形式:

# 一个图像复原的例子

这个例子同时还帮助我们引入了PDE的方法。回忆Poisson方程求解的弱形式：
$E(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}[|\nabla u|^2 - uf]dx$在Sobolev空间$W^{1,2}(\Omega)$中的临界点在弱导数意义下合于以下Neumann问题:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \ x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \ x \in \partial\Omega \end{cases}$$

# 一个图像复原的例子

这个例子同时还帮助我们引入了PDE的方法。回忆Poisson方程求解的弱形式：
$E(u)=\int_\Omega \frac{1}{2}[|\nabla u|^2-uf]dx$在Sobolev空间$W^{1,2}(\Omega)$中的临界点在弱导数意义下合于以下Neumann问题:

$$\begin{cases} -\Delta u = f,\ \ x\in\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}=0,\ \ x\in\partial\Omega \end{cases}$$

从而优化$E(u)=\frac{\alpha}{2}\int_\Omega (u-u_0)^2dx+\frac{\lambda}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2dx$等价于以下PDE：

$$\begin{cases} -\lambda\Delta u+\alpha u=\lambda u_0,\ \ x\in\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}=0,\ \ x\in\partial\Omega \end{cases}$$

# 一个图像复原的例子

下面我们对于这个问题介绍优化算法：梯度流方法。

# 一个图像复原的例子

下面我们对于这个问题介绍优化算法：梯度流方法。
引入时间参数$t$，我们认为$\frac{\partial u}{\partial t}$是朝着使$E(u)$下降的方向前进的。即

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\delta E(u)}{\delta u}$$

其中$\frac{\delta E(u)}{\delta u}$是$E(u)$关于$u$的一阶变分，它反应了$E(u)$在$u$变化下的变化率。

# 一个图像复原的例子

由一阶变分的公式：若$E(u) = \int_\Omega F(x, u, \nabla u)dx$，且$u$在$\Omega$中紧支，那么

$$\frac{\delta E(u)}{\delta u} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u_x} - \frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial u_y}$$

# 一个图像复原的例子

由一阶变分的公式：若$E(u) = \int_\Omega F(x, u, \nabla u)dx$，且$u$在$\Omega$中紧支，那么

$$\frac{\delta E(u)}{\delta u} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u_x} - \frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial u_y}$$

直接带入$F(u) = \frac{\alpha}{2}(u - u_0)^2 + \frac{\lambda}{2}|\nabla u|^2$中得到

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha(u_0 - u) + \lambda \Delta u$$

# 一个图像复原的例子

由一阶变分的公式：若$E(u)=\int_\Omega F(x,u,\nabla u)dx$，且$u$在$\Omega$中紧支，那么

$$\frac{\delta E(u)}{\delta u}=\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u_x}-\frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial u_y}$$

直接带入$F(u)=\frac{\alpha}{2}(u-u_0)^2+\frac{\lambda}{2}|\nabla u|^2$中得到

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha(u_0-u)+\lambda\Delta u$$

不要忘了Neumann边界条件：$\frac{\partial u}{\partial \nu}=0,\ x\in\partial\Omega$。
这样，通过$u(t+1)=u(t)+\delta\frac{\partial u}{\partial t}$就可以离散化迭代求解$u$

# 图像的水平集表示

图像作为函数，可以被理解为等高线的集合(如灰度图，那么同灰度的点构成等高线)，这样自然地我们就把水平集(level set)引入图像处理之中。

# 图像的水平集表示

图像作为函数，可以被理解为等高线的集合(如灰度图，那么同灰度的点构成等高线)，这样自然地我们就把水平集(level set)引入图像处理之中。

考虑定义在二维有界区域$\Omega$上的灰度图$u = u(x)$. $x \in \Omega$，对$\forall \lambda \in \mathbb{R}$，定义水平集

$$\gamma_\lambda = \{x \in \Omega | u(x) = \lambda\}$$

则$\Gamma_u = \{\gamma_\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\}$是$u$的水平集表示。$\Gamma_u$是$\Omega$的一个分划。

# 图像的水平集表示

如果$u$是光滑正则的(即$\nabla u \neq 0$)。根据正则函数的co-area公式，我们有

$$\int_{\Omega} |\nabla u| dx = \int_{-\infty}^{\infty} length(\gamma_\lambda) d\lambda$$

更一般地说，对任何函数$\phi = \phi(u)$，都有

$$\int_{\Omega} \phi(u) |\nabla u| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\lambda) length(\gamma_\lambda) d\lambda$$

这个公式在诸多模型中都有重要作用。

# Mumford-Shah模型

Mumford和Shah在1989年提出了一种对于图像处理极有启发性的理解：在大多数情况下，一个物体表面具有一致的特征，那么排除光学和表面纹理的影响，任何图像应该都可以由分片常值和分片光滑函数来近似。

# Mumford-Shah模型

Mumford和Shah在1989年提出了一种对于图像处理极有启发性的理解：在大多数情况下，一个物体表面具有一致的特征，那么排除光学和表面纹理的影响，任何图像应该都可以由分片常值和分片光滑函数来近似。
分片常值函数可以表示为$u(x)=\sum_{i=1}^{N}U_i\chi_i(x)$，其中$\chi_i(x)=\chi_{\Omega_i}(x)$是集合$\Omega_i$的示性函数。显然分片光滑函数类似为$u(x)=\sum_{i=1}^{N}U_i(x)\chi_i(x)$。

# Mumford-Shah模型

Mumford和Shah在1989年提出了一种对于图像处理极有启发性的理解：在大多数情况下，一个物体表面具有一致的特征，那么排除光学和表面纹理的影响，任何图像应该都可以由分片常值和分片光滑函数来近似。
分片常值函数可以表示为$u(x)=\sum_{i=1}^{N}U_i\chi_i(x)$，其中$\chi_i(x)=\chi_{\Omega_i}(x)$是集合$\Omega_i$的示性函数。显然分片光滑函数类似为$u(x)=\sum_{i=1}^{N}U_i(x)\chi_i(x)$。
Mumford和Shah认为这一模型尤其适合做图像分割，因为图像内部的一致性直接保证了分割的合理性。如果我们假设区域"理想化"地可以被分为(称为Lipschitz分解)

$$\Omega=\cup_{m=1}^{M}\Omega_m\cup\Gamma$$

其中$\Gamma$是边界，并且有光滑假设：$u_m=u|_{\Omega_m}$，$m=1,...,M$是光滑函数

# Mumford-Shah模型

Mumford和Shah同时对图像的复杂情况作出如下的简单假设:
三维场景$\rightarrow$ 理想图像$u$ $\rightarrow$ 模糊$K$ $\rightarrow$ 噪声$n$ $\rightarrow$ 观察图像$u_0$
即$u_0 = n + Ku$,模糊算子$K$可以是非线性的。

# Mumford-Shah模型

Mumford和Shah同时对图像的复杂情况作出如下的简单假设：
三维场景$\rightarrow$ 理想图像$u$ $\rightarrow$ 模糊$K$ $\rightarrow$ 噪声$n$ $\rightarrow$ 观察图像$u_0$
即$u_0 = n + Ku$,模糊算子$K$可以是非线性的。
有了以上假设，我们可以构造对应的能量泛函形式。根据我们的假设，$\Omega_m$内部应当是光滑甚至是常数，那么光滑项

$$\sum_{m=1}^{M} \int_{\Omega_m} |\nabla u_m|^2 dx = \int_{\Omega \backslash \Gamma} |\nabla u|^2 dx$$

应当足够小。

# Mumford-Shah模型

Mumford和Shah同时对图像的复杂情况作出如下的简单假设：
三维场景→ 理想图像$u$ → 模糊$K$ → 噪声$n$ → 观察图像$u_0$
即$u_0 = n + Ku$,模糊算子$K$可以是非线性的。
有了以上假设，我们可以构造对应的能量泛函形式。根据我们的假设，$\Omega_m$内部应当是光滑甚至是常数，那么光滑项

$$\sum_{m=1}^{M} \int_{\Omega_m} |\nabla u_m|^2 dx = \int_{\Omega\backslash\Gamma} |\nabla u|^2 dx$$

应当足够小。
我们希望分划曲线$\Gamma$长度不要太大，这也保证了分划曲线的光滑性，所以第二项约束是：

$$\mathcal{H}^1(\Gamma) = length(\Gamma)$$

尽可能的小。

# Mumford-Shah模型

Mumford和Shah同时对图像的复杂情况作出如下的简单假设：
三维场景$\rightarrow$ 理想图像$u$ $\rightarrow$ 模糊$K$ $\rightarrow$ 噪声$n$ $\rightarrow$ 观察图像$u_0$
即$u_0 = n + Ku$,模糊算子$K$可以是非线性的。
有了以上假设，我们可以构造对应的能量泛函形式。根据我们的假设，$\Omega_m$内部应当是光滑甚至是常数，那么光滑项

$$\sum_{m=1}^{M}\int_{\Omega_m}|\nabla u_m|^2dx = \int_{\Omega\setminus\Gamma}|\nabla u|^2dx$$

应当足够小。
我们希望分划曲线$\Gamma$长度不要太大，这也保证了分划曲线的光滑性，所以第二项约束是：

$$\mathcal{H}^1(\Gamma) = length(\Gamma)$$

尽可能的小。
最终能量函数的形式为$E(u) = \alpha\mathcal{H}^1(\Gamma) + \beta\int_{\Omega\setminus\Gamma}|\nabla u|^2dx$

# Mumford-Shah模型

第三项约束，目的是降低噪声。假设图像中的加性噪声$n$为方差为$\sigma^2$的均质Gauss白噪声，那么方差可以被近似估计算子所近似：

$$\sigma^2 \approxeq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega (u_0 - Ku)^2 dx$$

其中$|\Omega|$为Lebesgue测度，并假设$u$是已知的。

# Mumford-Shah模型

第三项约束，目的是降低噪声。假设图像中的加性噪声$n$为方差为$\sigma^2$的均质Gauss白噪声，那么方差可以被近似估计算子所近似：

$$\sigma^2 \approxeq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (u_0 - Ku)^2 dx$$

其中$|\Omega|$为Lebesgue测度，并假设$u$是已知的。
通过引入Lagrange乘子$\lambda$，最终的模型是

$$min \ \alpha \mathcal{H}^1(\Gamma) + \beta \int_{\Omega \backslash \Gamma} |\nabla u|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} (u_0 - Ku)^2 dx$$

# Mumford-Shah模型

第三项约束，目的是降低噪声。假设图像中的加性噪声$n$为方差为$\sigma^2$的均质Gauss白噪声，那么方差可以被近似估计算子所近似：

$$\sigma^2 \approxeq \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}(u_0 - Ku)^2 dx$$

其中$|\Omega|$为Lebesgue测度，并假设$u$是已知的。
通过引入Lagrange乘子$\lambda$，最终的模型是

$$min\ \alpha\mathcal{H}^1(\Gamma) + \beta\int_{\Omega\backslash\Gamma}|\nabla u|^2 dx + \lambda\int_{\Omega}(u_0 - Ku)^2 dx$$

显然$Ku$未知，我们不能按照这一模型求解。这一模型有着非常好的理论性质，作为一个模板，为之后人们的改进工作提供了基础。

# 变分方法与图像分割：几个模型概述

**活动轮廓模型**

活动轮廓模型专注于分割边界$\Gamma$的优化。除了我们之前提到的$\mathcal{H}^1(\Gamma)$，也就是长度，我们期望一个关于边像素的能量函数$g = g(u, \nabla u, \Delta u, ...)$，使得它满足以下的性质：

# 变分方法与图像分割：几个模型概述

**活动轮廓模型**

活动轮廓模型专注于分割边界$\Gamma$的优化。除了我们之前提到的$\mathcal{H}^1(\Gamma)$，也就是长度，我们期望一个关于边像素的能量函数$g = g(u, \nabla u, \Delta u, ...)$，使得它满足以下的性质：

- 空间平移不变性：$g(x + a, u(x + a), ...) = g(x, u(x), ...)$对$\forall u$成立，
- 灰度水平平移不变性：$g(x, \lambda + u, ...) = g(x, u, ...)$对$\forall\lambda$成立，
- 旋转不变性：对$\forall Q \in O(2)$即任意平面旋转，$g(Qx, u(Qx), ...) = g(x, u(x), ...)$成立。

# 变分方法与图像分割：几个模型概述

**活动轮廓模型**

活动轮廓模型专注于分割边界$\Gamma$的优化。除了我们之前提到的$\mathcal{H}^1(\Gamma)$，也就是长度，我们期望一个关于边像素的能量函数$g = g(u, \nabla u, \Delta u, ...)$，使得它满足以下的性质：

- 空间平移不变性：$g(x+a, u(x+a), ...) = g(x, u(x), ...)$对$\forall u$成立，
- 灰度水平平移不变性：$g(x, \lambda + u, ...) = g(x, u, ...)$对$\forall \lambda$成立，
- 旋转不变性：对$\forall Q \in O(2)$即任意平面旋转，$g(Qx, u(Qx), ...) = g(x, u(x), ...)$成立。

空间平移不变性说明$g$不可能显式地依赖于$x$，故$g = g(u, \nabla u, ...)$；灰度水平平移不变性说明$g$与$u$无关；最后旋转不变性说明：

$$g(Q^T \nabla u, ...) = g(\nabla u)$$

说明$g = g(|\nabla u|, \kappa_1, \kappa_2)$，其中$\kappa_1, \kappa_2$为Hessian阵的两个特征值，且$\kappa_1 + \kappa_2 = \Delta u$，所以为方便我们经常令

$$g = g(|\nabla u|, \Delta u)$$

这就是满足假设的常用的能量函数形式。

# 活动轮廓模型

一般地，出于减少计算量等原因，我们设$g$是一阶的：$g = g(|\nabla u|)$。我们期望在边像素的梯度应当尽可能的大，这样能够达到最好的区分(不同的物体交界处一般是有剧烈变化的)，所以要求：

$$\frac{\partial g(|\nabla u|)}{\partial |\nabla u|} < 0$$

# 活动轮廓模型

一般地，出于减少计算量等原因，我们设$g$是一阶的：$g = g(|\nabla u|)$。我们期望在边像素的梯度应当尽可能的大，这样能够达到最好的区分(不同的物体交界处一般是有剧烈变化的)，所以要求：

$$\frac{\partial g(|\nabla u|)}{\partial |\nabla u|} < 0$$

文献中经常取$g$为Cauchy衰减函数：

$$g(p) = \frac{1}{1 + ap^2},\ p = |\nabla u|,\ a > 0$$

或Gauss衰减函数：

$$g(p) = e^{-bp^2},\ p = |\nabla u|,\ b > 0$$

# 活动轮廓模型

一般地，出于减少计算量等原因，我们设$g$是一阶的：$g = g(|\nabla u|)$。我们期望在边像素的梯度应当尽可能的大，这样能够达到最好的区分(不同的物体交界处一般是有剧烈变化的)，所以要求：

$$\frac{\partial g(|\nabla u|)}{\partial |\nabla u|} < 0$$

文献中经常取$g$为Cauchy衰减函数：

$$g(p) = \frac{1}{1 + ap^2}, \ p = |\nabla u|, \ a > 0$$

或Gauss衰减函数：

$$g(p) = e^{-bp^2}, \ p = |\nabla u|, \ b > 0$$

这样我们能够推出一个原始的活动边界模型：

$$E(u) = \alpha \int_\Gamma ds + \mu \int_\Gamma g(|\nabla u|) ds$$

比较有名的活动轮廓模型，有Snake模型。

# Chan-Vese模型

活动轮廓模型有许多发展，其中有名的是Chan和Vese提出的模型，他们的模型和Mumford-Shah模型十分相似。我们以分割内外区域(即将图像分割成两部分)的问题介绍这一模型。如果我们已知分割区域内外的平均值$c_1, c_2$，即函数$c(x) = c_1, x$在区域内,且$c(x) = c_2, x$在区域外。通过优化

$$E(\Gamma) = \alpha \int_{\Gamma} ds + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega \setminus \Gamma} (u - c)^2 dx$$

应当也可以得到比较精确的分割。

# Chan-Vese模型

活动轮廓模型有许多发展，其中有名的是Chan和Vese提出的模型，他们的模型和Mumford-Shah模型十分相似。我们以分割内外区域(即将图像分割成两部分)的问题介绍这一模型。如果我们已知分割区域内外的平均值$c_1, c_2$，即函数$c(x) = c_1, x$在区域内,且$c(x) = c_2, x$在区域外。通过优化

$$E(\Gamma) = \alpha \int_{\Gamma} ds + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega \backslash \Gamma} (u - c)^2 dx$$

应当也可以得到比较精确的分割。
回忆Mumford-Shah的优化模型(为方便设$K = I$)：

$$min \ \alpha \int_{\Gamma} ds + \beta \int_{\Omega \backslash \Gamma} |\nabla u|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} (u_0 - u)^2 dx$$

这二者在形式上就有些类似了。

# Chan-Vese：水平集分割

Chan和Vese进一步提出了通过水平集进行分割的模型：首先定义一个新的能量函数形式

$$F(c_1, c_2, C) = \mu \cdot Length(C) + \nu \cdot Area(inside(C)) + \lambda_1 \int_{inside(C)} |u_0 - c_1|^2 dx + \lambda_2 \int_{outside(C)} |u_0 - c_1|^2 dx$$

事实上这与他们提出的原始形式只相差了一个曲线$C$内部的面积。

# Chan-Vese：水平集分割

Chan和Vese进一步提出了通过水平集进行分割的模型：首先定义一个新的能量函数形式

$$F(c_1,c_2,C)=\mu\cdot Length(C)+\nu\cdot Area(inside(C))$$
$$+\lambda_1\int_{inside(C)}|u_0-c_1|^2dx+\lambda_2\int_{outside(C)}|u_0-c_1|^2dx$$

事实上这与他们提出的原始形式只相差了一个曲线$C$内部的面积。引入水平集函数$\phi:\Omega\rightarrow\mathbb{R}$，并且满足以下性质：

$$\left\{\begin{array}{c} C=\{x\in\Omega|\phi(x)=0\} \\ inside(C)=\{x\in\Omega|\phi(x)>0\} \\ outside(C)=\{x\in\Omega|\phi(x)<0\} \end{array}\right.$$

# Chan-Vese：水平集分割

Chan和Vese进一步提出了通过水平集进行分割的模型：首先定义一个新的能量函数形式

$$F(c_1, c_2, C) = \mu \cdot Length(C) + \nu \cdot Area(inside(C)) + \lambda_1 \int_{inside(C)} |u_0 - c_1|^2 dx + \lambda_2 \int_{outside(C)} |u_0 - c_1|^2 dx$$

事实上这与他们提出的原始形式只相差了一个曲线$C$内部的面积。
引入水平集函数$\phi : \Omega \to \mathbb{R}$，并且满足以下性质：

$$\begin{cases} C = \{x \in \Omega | \phi(x) = 0\} \\ inside(C) = \{x \in \Omega | \phi(x) > 0\} \\ outside(C) = \{x \in \Omega | \phi(x) < 0\} \end{cases}$$

引入Heaviside函数$H$和其弱导数Dirac算子$\delta$：

$$H(z) = \begin{cases} 1, & if \ \ z \geqslant 0 \\ 0, & if \ \ z < 0 \end{cases} \quad \delta(z) = \frac{d}{dz} H(z)$$

# Chan-Vese：水平集分割

立刻可以将能量泛函表示为：

$$
\begin{aligned}
F(c_1, c_2, C) = \mu \int_\Omega \delta(\phi)|\nabla\phi|dx + \nu \int_\Omega H(\phi)dx \\
+ \lambda_1 \int_\Omega |u_0 - c_1|^2 H(\phi)dx \\
+ \lambda_2 \int_\Omega |u_0 - c_2|^2 (1 - H(\phi))dx
\end{aligned}
$$

值得注意的是第一项$Length(C) = \int_\Omega \delta(\phi)|\nabla\phi|dx$。

# Chan-Vese：水平集分割

立刻可以将能量泛函表示为：

$$\begin{aligned} F(c_1, c_2, C) = \mu \int_\Omega \delta(\phi)|\nabla\phi|dx + \nu \int_\Omega H(\phi)dx \\ + \lambda_1 \int_\Omega |u_0 - c_1|^2 H(\phi)dx \\ + \lambda_2 \int_\Omega |u_0 - c_2|^2 (1 - H(\phi))dx \end{aligned}$$

值得注意的是第一项$Length(C) = \int_\Omega \delta(\phi)|\nabla\phi|dx$。
回忆co-area公式

$$\begin{aligned} \int_\Omega \delta(u)|\nabla u|dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda) Length(\gamma_\lambda)d\lambda \\ &= Length(\gamma_0) = Length(C) \end{aligned}$$

# Chan-Vese：水平集分割

在水平集模型下，$c_1, c_2$也可以求解(关于$c_1, c_2$极小化$F$即得)：

$$c_1 = \frac{\int_\Omega u_0(x)H(\phi(x))dx}{\int_\Omega H(\phi(x))dx}, \; c_2 = \frac{\int_\Omega u_0(x)(1-H(\phi(x)))dx}{\int_\Omega (1-H(\phi(x)))dx}$$

# Chan-Vese：水平集分割

在水平集模型下，$c_1, c_2$也可以求解(关于$c_1, c_2$极小化$F$即得)：

$$c_1 = \frac{\int_\Omega u_0(x)H(\phi(x))dx}{\int_\Omega H(\phi(x))dx}, \quad c_2 = \frac{\int_\Omega u_0(x)(1 - H(\phi(x)))dx}{\int_\Omega (1 - H(\phi(x)))dx}$$

为了方便数值计算，我们将Heaviside函数光滑化：

$$H_\epsilon(z) = \frac{1}{2}[1 + \frac{2}{\pi} arctan(\frac{x}{\epsilon})], \ \delta_\epsilon(z) = H'_\epsilon(z) = \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + z^2}$$

这时就可以计算梯度流、通过离散方法进行计算了

# Chan-Vese：水平集分割

在水平集模型下，$c_1, c_2$也可以求解(关于$c_1, c_2$极小化$F$即得)：

$$c_1 = \frac{\int_\Omega u_0(x) H(\phi(x)) dx}{\int_\Omega H(\phi(x)) dx}, \quad c_2 = \frac{\int_\Omega u_0(x)(1 - H(\phi(x))) dx}{\int_\Omega (1 - H(\phi(x))) dx}$$

为了方便数值计算，我们将Heaviside函数光滑化：

$$H_\epsilon(z) = \frac{1}{2}[1 + \frac{2}{\pi} arctan(\frac{x}{\epsilon})], \ \delta_\epsilon(z) = H'_\epsilon(z) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + z^2}$$

这时就可以计算梯度流、通过离散方法进行计算了
水平集演化过程中往往会出现梯度过大或过小的情况，这不利于数值稳定性。使用re-initialization修正：

$$H(z) = \begin{cases} \psi_t = sign(\phi(t))(1 - |\nabla \psi|) \\ \psi(0, \cdot) = \phi(t, \cdot) \end{cases}$$

每次更新结束后再解出$\psi$，将$\psi$当做下一轮迭代的$\phi$。

# Local binary fitting

下面我们讨论一个具体的模型。
引自：Li, Chunming, et al. "Implicit Active Contours Driven by Local Binary Fitting Energy." Computer Vision and Pattern Recognition, 2007. CVPR '07. IEEE Conference on IEEE, 2007:1-7.

Chan-Vese方法利用水平集解决了迭代求解中的诸多问题，使得这一领域变得活跃起来。但是我们依旧能总结出他们方法中的诸多不足：

Chan-Vese方法利用水平集解决了迭代求解中的诸多问题，使得这一领域变得活跃起来。但是我们依旧能总结出他们方法中的诸多不足：

- 模拟内外部的$c_1, c_2$太粗糙，在内部有差异的模型中效果欠佳。医疗图像(如MRI等)往往呈现出这样的特点，所以Chan-Vese方法在医疗图像中效果不好。
- re-initialization比较繁琐，每次迭代后相当于又要做一次迭代。

Chan-Vese方法利用水平集解决了迭代求解中的诸多问题，使得这一领域变得活跃起来。但是我们依旧能总结出他们方法中的诸多不足：

- 模拟内外部的$c_1, c_2$太粗糙，在内部有差异的模型中效果欠佳。医疗图像(如MRI等)往往呈现出这样的特点，所以Chan-Vese方法在医疗图像中效果不好。
- re-initialization比较繁琐，每次迭代后相当于又要做一次迭代。

Chunming Li等人提出了基于Chan-Vese模型的改进模型：Local binary fitting。

# 方法

针对Chan-Vese模型的不足，李纯明提出了两点改进。

# 方法

针对Chan-Vese模型的不足，李纯明提出了两点改进。
其一是舍弃面积项(事实上面积项表意不明)，引入Signed distance regularization：

$$D(\phi) = \int_{\Omega} \frac{1}{2}(|\nabla \phi| - 1)^2 dx$$

这一项保证了$\phi$具有接近于1的梯度，从而不再需要re-initialization作为修正。

# 方法

针对Chan-Vese模型的不足，李纯明提出了两点改进。
其一是舍弃面积项(事实上面积项表意不明)，引入Signed distance regularization：

$$D(\phi) = \int_{\Omega} \frac{1}{2}(|\nabla\phi| - 1)^2 dx$$

这一项保证了$\phi$具有接近于1的梯度，从而不再需要re-initialization作为修正。
如果一个函数任意一点的值都可以表示为距离某个曲线/曲面的最短距离(在内部为正，在外部为负)，那么称这个函数为Signed distance function。Signed distance function都满足：$|\nabla\phi| = 1$。

# 方法

其二是引入了Local binary fitting：尽管很多图像并不能在全局范围内设为二值，但是他们在某点$x \in \Omega$附近应当是可以近似二值化的。如果该点周围包含了内外边界，那么局部二值拟合应该比全局二值拟合更加精确。

用数学语言来说，就是$c_1, c_2$变成了函数$f_1(x), f_2(x)$。并且在某一点周围我们只采集局部信息：

# 方法

其二是引入了Local binary fitting：尽管很多图像并不能在全局范围内设为二值，但是他们在某点$x \in \Omega$附近应当是可以近似二值化的。如果该点周围包含了内外边界，那么局部二值拟合应该比全局二值拟合更加精确。
用数学语言来说，就是$c_1, c_2$变成了函数$f_1(x), f_2(x)$。并且在某一点周围我们只采集局部信息：

$$
\begin{aligned}
E_x^{LBF}(C, f_1, f_2) = \lambda_1 & \int_{inside(C)} K_\sigma(x-y)|I(y)-f_1(x)|^2 dy \\
& + \lambda_2 \int_{outside(C)} K_\sigma(x-y)|I(y)-f_2(x)|^2 dy
\end{aligned}
$$

其中$K_\sigma(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma} e^{-|x|^2/2\sigma^2}$是Gauss核，它的存在使得上式只采集局部信息，较远的信息权重极小。

# 方法

使用水平集描述，就是：

$$
\begin{aligned}
E_x^{LBF}(\phi, f_1, f_2) = \lambda_1 \int_\Omega K_\sigma(x-y)|I(y)-f_1(x)|^2 H(\phi(y))dy \\
+ \lambda_2 \int_\Omega K_\sigma(x-y)|I(y)-f_2(x)|^2 (1-H(\phi(y)))dy
\end{aligned}
$$

# 方法

使用水平集描述，就是：

$$E_x^{LBF}(\phi, f_1, f_2) = \lambda_1 \int_\Omega K_\sigma(x-y)|I(y)-f_1(x)|^2 H(\phi(y))dy$$
$$+ \lambda_2 \int_\Omega K_\sigma(x-y)|I(y)-f_2(x)|^2 (1-H(\phi(y)))dy$$

全局能量函数表示为：

$$E^{LBF}(\phi, f_1, f_2) = \int_\Omega E_x^{LBF}(\phi, f_1, f_2)dx$$

再结合两个正则项我们得到：

$$F(\phi, f_1, f_2) = E^{LBF}(\phi, f_1, f_2) + \beta \int_\Omega \frac{1}{2}(|\nabla\phi|-1)^2 dx + \nu \int_\Omega \delta(\phi(x))|\nabla\phi(x)|dx$$

这就是总能量函数。

# 方法

是两点实现上的注意事项：

# 方法

是两点实现上的注意事项：
其一是对于Heaviside函数的光滑化与之前类似：

$$H_\epsilon(z) = \frac{1}{2}[1 + \frac{2}{\pi} arctan(\frac{x}{\epsilon})],\ \delta_\epsilon(z) = H'_\epsilon(z) = \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + z^2}$$

对应的光滑化能量函数记为$F_\epsilon(\phi, f_1, f_2)$

# 方法

是两点实现上的注意事项：
其一是对于Heaviside函数的光滑化与之前类似：

$$H_\epsilon(z) = \frac{1}{2}[1 + \frac{2}{\pi}arctan(\frac{x}{\epsilon})],\ \delta_\epsilon(z) = H'_\epsilon(z) = \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + z^2}$$

对应的光滑化能量函数记为$F_\epsilon(\phi, f_1, f_2)$
其二是迭代过程中对$f_1(x), f_2(x)$的更新也是通过求极小化$F$得到的。
譬如将$F_\epsilon$关于$f_1$求偏导得到：

$$\int_\Omega K_\sigma(x-y)H_\epsilon(\phi(y))(I(y) - f_1(x))dy = 0$$

即得

$$f_1(x) = \frac{K_\sigma(x) * [H_\epsilon(\phi(x))I(x)]}{K_\sigma(x) * H_\epsilon(\phi(x))}$$

同理

$$f_2(x) = \frac{K_\sigma(x) * [(1 - H_\epsilon(\phi(x)))I(x)]}{K_\sigma(x) * (1 - H_\epsilon(\phi(x)))}$$

其中$*$是卷积算子，离散化之后就是求和。

# 方法

下面求梯度流。根据变分求法可以得到：

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\delta_\epsilon(\phi)(\lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2) + \nu\delta_\epsilon(\phi) div(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}) + \beta(\Delta\phi - div(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}))$$

其中

$$e_1(x) = \int_\Omega K_\sigma(y-x)|I(x) - f_1(y)|^2 dy$$

$$e_2(x) = \int_\Omega K_\sigma(y-x)|I(x) - f_2(y)|^2 dy$$

# 方法

下面求梯度流。根据变分求法可以得到:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial t} = & -\delta_\epsilon(\phi)(\lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2) + \nu\delta_\epsilon(\phi) div(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}) \\
& + \beta(\Delta\phi - div(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}))
\end{aligned}
$$

其中

$$e_1(x) = \int_\Omega K_\sigma(y-x)|I(x) - f_1(y)|^2 dy$$

$$e_2(x) = \int_\Omega K_\sigma(y-x)|I(x) - f_2(y)|^2 dy$$

推导

# 实现与结果

梯度用差分代替，卷积用求和代替

# 实现与结果

梯度用差分代替，卷积用求和代替
血管图像结果：


图: Vessel image result

# 实现与结果

大脑图像结果：

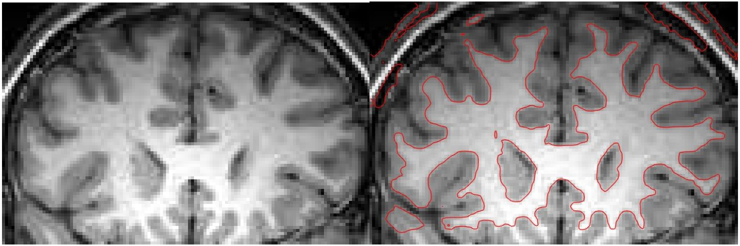

图: Brain image result

**谢谢大家!**