chap 5 图与网络优化

顶点相邻，顶点关联，边关联

顶点相邻指顶点在一个边两侧，同顶点关联

边关联就是有个公共顶点

图是什么：

图是有序二元组$G=(V,E)$,V是顶点集，V中的元素称为顶点。E为边集，E中的元素称为边。E的每条边e都与V中的两个顶点u，v相关联。

如果u，v有序，那么G就是有向图，有向图中的边也称为弧，u为e的起点，v为e的终点。

如果u，v无序，那么就是无向图，u，v称e的端点。

子图：

图$G' = (V', E')$称为图$G = (V, E)$的子图，iff$V' \subset V, E' \subset E$，且G中**边的关联关系在$G'$中保持不变**

生成的子图V'=V,导出的子图$G = (V'), G\backslash \mathrm{V}', G(E'), G\backslash \mathrm{E}'$

图同构问题:

称图$G = (V, E)$与图$G' = (V', E')$同构，如果存在双射$\sigma : V \to V'$,使得G中的两顶点相邻（也就是有边连接）当且仅当G‘的两个对应的顶点$\sigma(u). \sigma(v)$相邻。

图同构问题:

给定两个图，判断他们是否同构

简单图

两个端点相同的边称为环，两个端点分别相同的边称为平行边。

既没有环，也没有平行边的图称为简单图

完全图

任意两个不同顶点之间都有边相连的简单图称为完全图。

定义团

G的顶点子集$V' \subset V$称为团，如果其导出的子图$G(V')$是完全图)

路:

顶点与边交替出现的序列$W = v_{i_0} e_{i_1} v_{i_1} \ldots e_{i_k} v_{i_k}$

称为连接首末顶点长度为k的途径

图为简单图可以省略边的符号

图为有向图，那么所有边的方向都是从前一个顶点指向后一个顶点。

经过边互不相同的途径称为迹，经过顶点互不相同的迹称为路

（也就是说一个途径称为路，那么这个路里边不能重复，点也不能重复）

如果无向图两顶点之间有途径相连，那么一定有迹。如果两无向图两顶点之间有迹，那么一定有路。

最短路：

连通的定义

如果图中的顶点u，v之间有路连接，那么称u，v是连通的(connected)

连通是图中顶点之间的一种等价关系，连通关系将V划分为w个等价类 $V_1, V_2, ..., V_w$,而$G(V_i)$称为G的连通分支

连通图

连通分支为1的图称为连通图（也就是说所有的顶点都连通）

有向图G称为强连通的，如果对于任意顶点对u，v，图中既有从u到v的有向路，又有从v到u的有向路。

二部图：

如果图的顶点集可以划分为两个空集合X，Y，使得X，Y中的任意两个顶点都没有边相连，那么该图称为二部图，记作$G = (X \cup Y, E)$

(注意是X与Y中的任意两个顶点都**没有边相连**)

如果X与Y中的任意两个顶点都有边相连，那么称这个二部图为完全二部图。

G是一个二部图，iff G中不存在奇圈。

奇圈

什么是奇圈？就是长度为奇数的圈。

如果G是二部图，那么长度为奇数的路起点与终点都在X，Y中，因此不存在奇圈（此时令路的长度为1）

如果不存在奇圈，任取图中一个顶点u令

$X = v \in V|d_G(u,v)\text{为奇数}$

$Y = \{v \in V|d_G(u,v)\text{为偶数}\}$

这样就分成了两个图

假设存在v,w \in X,e=vw\in E

那么我们记P_v为u到v的最短路，P_w为u到w的最短路，z是P_v, P_w的最后一个公共端点。$d(z,v) = P'_v, d(z,w) = P'_w$

那么我们可以知道，此时我们有奇圈

$P_v + P_w - 2k + 1$为奇数

度定义

与顶点v相关联的边的数目称为v的度，记作$deg_G(v)$

我们用$\Delta(G), \delta(G)$表示图的最大度，最小度

度为0的点为孤立点

正则图

所有顶点度相等的图称为正则图

$\sum_{v \in V} deg_G(v) = 2|E|$

度的总数=边数的2倍

无向图中度为奇数的顶点总为偶数个

有向图中以v为起点的弧的数目称为v的出度，以v为终点的弧的数目称为v的入度

总出度=总入度=边长

关联矩阵

（关于边与顶点的）

邻接矩阵

点之间的

独立集与支配集

V的子集S称为G的独立集，如果S的任意两个顶点在G（Graphic）中都不相邻。

顶点数最多的独立集称为最大独立集。

V的子集S称为G的支配集，如果任意V\S中的顶点都和某个S中的顶点关联。顶点数最少的支配集称为最小支配集

最大独立集与最小支配集的问题都是NP-C问题

匹配

图$G=(V,E)$边集E的一个非空子集M称为G的一个匹配，如果M中任意两条边在G中都不相邻。（也就是边不共点）

如果G中所有顶点都与匹配M中某条边关联（也就是说匹配M覆盖了所有顶点），称M为完美匹配（此时G中没有孤立点）

图的最优匹配：

边数最多的匹配称为最大基数匹配

赋权图中总权重最大的匹配称为最大权匹配（同最小权匹配）

Hall定理：

Frobenuis定理

顶点着色问题：

图G的每一个顶点之一用k个颜色着色，使得相邻顶点不染同一种颜色

（将图G划分为k个两两不交的独立集）

最小k称为图的色数

对任意简单图$X(G)\leq\Delta(G)+1$

连通图（也就是连通分支为1的图）满足$X(G)=\Delta(G)+1$

当且仅当G为奇圈或完全图（任意两个顶点有边连接）

贪婪算法：

给定顶点的一个顺序，依顺序着色，着能着色的最小颜色

使用的颜色数最多为$\Delta(G)+1$

证明：

令$G_i=G(v_1,...,v_i)$,算法对v_i着色后得到了一种G_i的着色方案，记录ki为当前颜色数目

我们需要证明对任意ki，有

$k_i\leq 1+max_{1\leq j\leq i}d_{G_i}(v_i)$

首先i=1成立

如果对v_i未用新颜色，那么显然也成立

如果用了一种新颜色呢？

就说明此时我们的$d_{G_i}(v_i)$与前面的所有东西都是关联的，那么它的出度至少是k_i-1个

因此此时满足

$k_i=k_{i-1}+1\le d_{G_i}(v_i)+1\le 1+\Delta(G)$

归纳法得证

边着色：

相邻边不染同一颜色

相当于将边集划分为k个两两不相交的匹配之并

生成树：

连通图的一个包含所有顶点的无圈子图

最小生成树：

权值最小的生成树

有给定的算法的

最短路

Dijkstra算法