组合优化

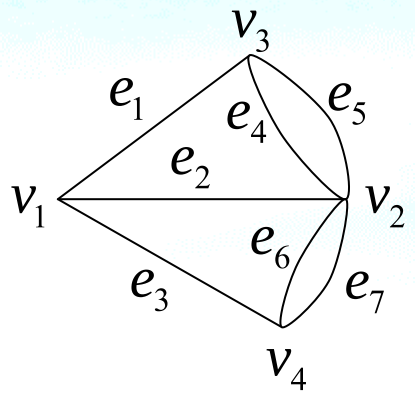
浙江大学数学系　谈之奕

图与网络优化

图

组合优化

- 图（**graph**）：有序二元组 $G=(V,E)$
  - V 为顶点集，V 中元素称为顶点（**vertex**）
  - E 为边集，E 中元素称为边（**edge**），E 中每条边 e 与 V 中两个顶点 u,v 关联（**incident**）
    - 若 u,v 有序，则称 G 为有向图（**digraph**），有向图中的边也称作弧（**arc**），u 为 e 的起点，v 为 e 的终点
    - 若 u,v 无序，则称 G 为无向图，u,v 称为 e 的端点
- 图可以用以点表示顶点，以曲线段表示边的图形来表示，但图与上述表示中点和曲线段在图形中的相对位置无关



$$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$$

$$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}$$

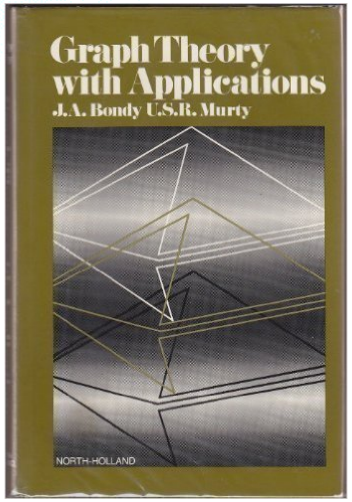
$e_1=v_1v_3$，$e_2=v_1v_2$，$e_3=v_1v_4$，

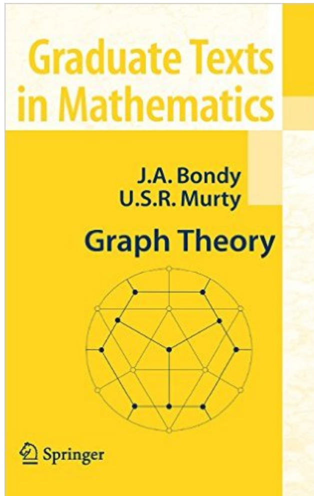
$e_4=v_2v_3$，$e_5=v_2v_3$，

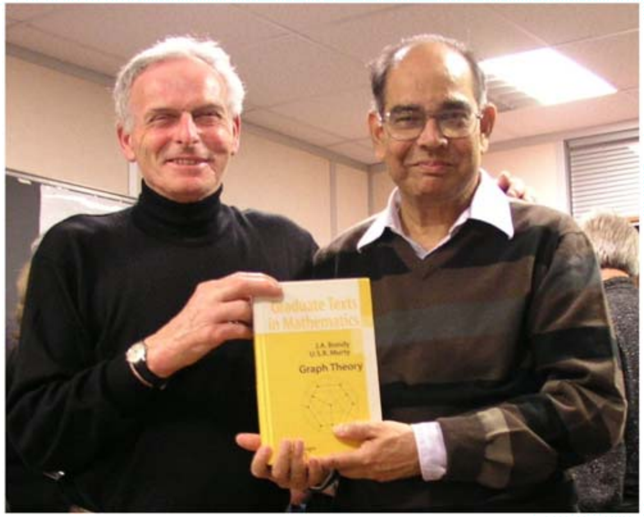
$e_6=v_2v_4$，$e_6=v_2v_4$

参考资料

组合优化







Bondy JA, Murty USR, *Graph Theory with Applications*, North Holland, 1976. (中译本， 图论及其应用， 吴望名、李念祖、吴兰芳、谢伟如、梁文沛译， 科学出版社， 1984.)

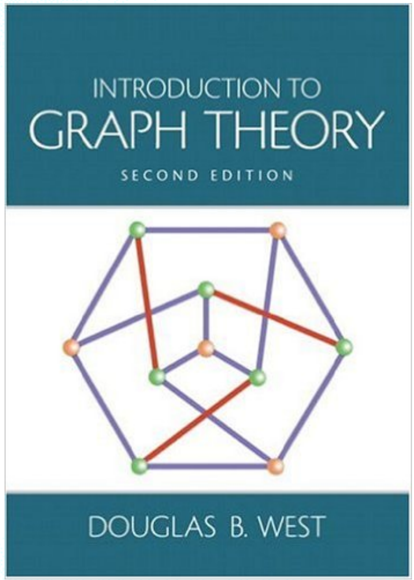
Bondy JA, Murty USR. *Graph theory*, Springer, 2008.

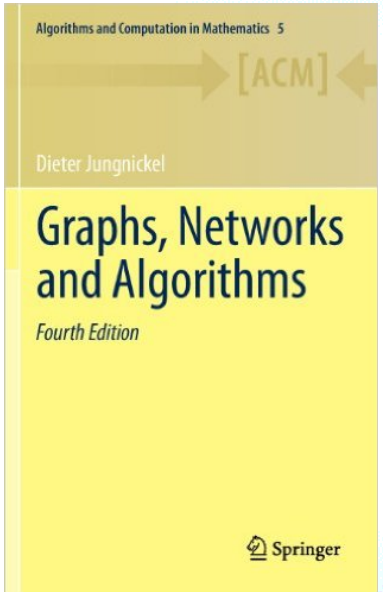
John Adrian Bondy
英裔数学家
Uppaluri Siva Ramachandra Murty
印裔数学家
原滑铁卢大学组合与优化系教授

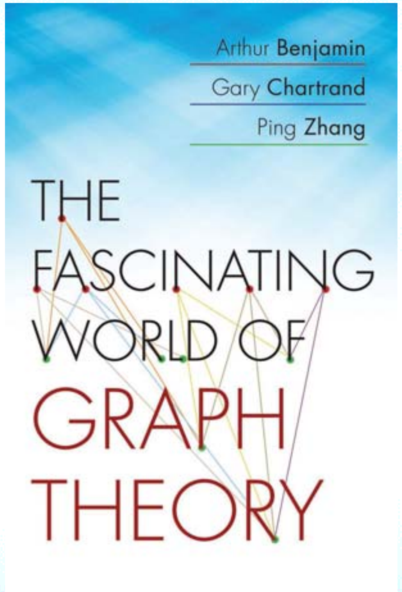
参考资料

浙江大学 ZheJiang University

组合优化







West DB, *Introduction to graph theory*. Pearson, 2001.

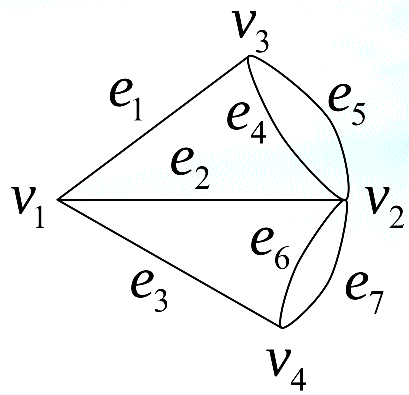
徐俊明, 图论及其应用, 中国科学技术大学出版社, **2010.**

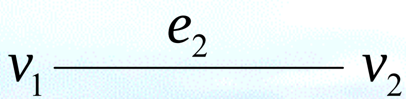
Jungnickel D, *Graphs, networks and algorithms*, Springer, 2012.

Benjamin A, Chartrand G, Zhang P. *The Fascinating World of Graph Theory*. Princeton University Press, 2015.

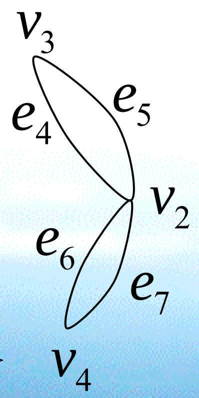
子图

- 图 $G'=(V',E')$ 称为图 $G=(V,E)$的子图（**subgraph**），若 $V'\subseteq V$, $E'\subseteq E$ 且 G 中边的关联关系在 G'中保持不变
  - 生成子图：$V'=V$
  - 导出子图：$G(V')$，$G\setminus V'$，$G(E')$，$G\setminus E'$

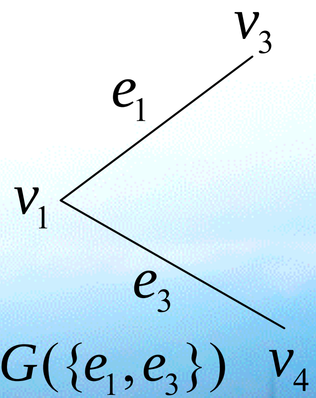




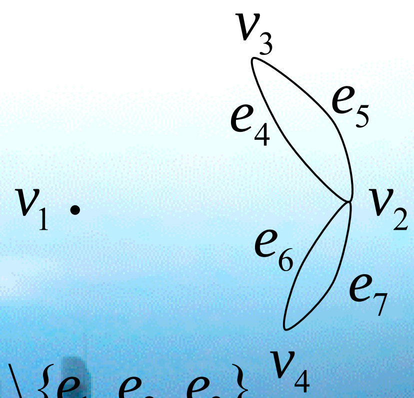
$G(\{v_1,v_2\})$



$G\setminus\{v_1\}$



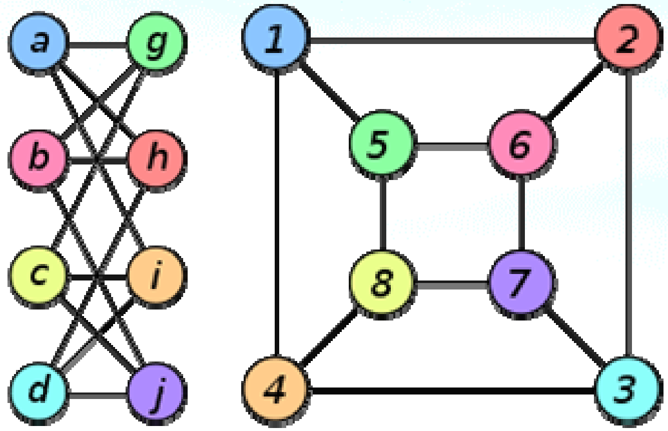
$G(\{e_1,e_3\})$

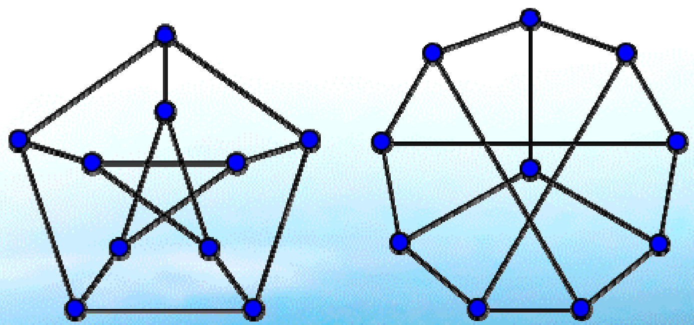


$G\setminus\{e_1,e_2,e_3\}$

图同构

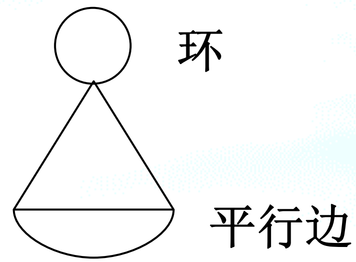
- 称图 $G=(V,E)$ 与图 $G'=(V',E')$ 同构（**isomorphic**），若存在双射 $\sigma:V\rightarrow V'$，使得 G 中两顶点 u,v 相邻（**adjacent**）当且仅当 G' 中两顶点 $\sigma(u),\sigma(v)$ 相邻
- 图同构问题（**Graph Isomorphism, GI**）：给定图 G 与图 G'，判断 G 与 G' 是否同构
  - 图同构问题是复杂性迄今未决的重要 $\mathcal{NP}$ 问题之一

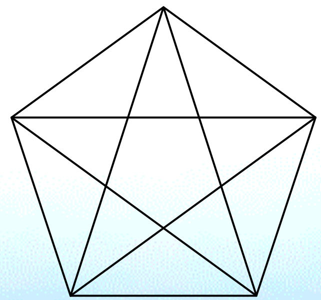




简单图

- 两端点相同的边称为环（**loop**），两端点分别相同的两条边称为平行边（**parallel edges**）
- 既没有环，也没有平行边的图称为简单图（**simple graph**）
  - 若 $|V|=n$，则 $|E|\le \frac{n(n-1)}{2}$
- 任何两个不同顶点之间都有边相连的简单图称为完全图（**complete graph**）
  - G 的顶点子集 $V'\subseteq V$ 称为团（**clique**），若其导出子图 $G(V')$ 是完全图





完全图 K_5

路

组合优化

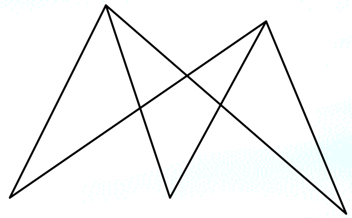
- 顶点和边交替出现的序列 $W = v_{i_0} e_{i_1} v_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} v_{i_k}$ 称为连接顶点 v_{i_0}和 v_{i_k}的长度为 k的途径（**walk**）
  - 若图为简单图，则可省略途径中边的符号
  - 若图为有向图，所有边的方向均为自 v_{i_j}指向 $v_{i_{j+1}}$，W为从 v_{i_0}到 v_{i_k}的有向途径
- 经过边互不相同的途径称为迹（**trail**），经过顶点互不相同的迹称为路（**path**），起点和终点相同的路称为圈（**cycle**）
- 若无向图中两顶点之间有途径相连，则必有迹相连；若无向图中两顶点之间有迹相连，则必有路相连
- 设 $u, v \in V$，G 中所有从 u到 v 的路的最短长度称为从 u到 v 的距离（**distance**），记为 $d_G(u,v)$。长度等于距离的路称为最短路（**shortest path**）

连通

- 若图中顶点 u,v 之间有路相连，则称 u,v 连通（**connected**）
  - 连通是图中顶点之间的一种等价关系，连通关系将 V 划分为 ω 个等价类 $V_1,\cdots,V_\omega$
  - $G(V_i), i=1,\cdots,\omega$ 称为 G 的连通分枝（**connect component**）
  - 连通分枝数为 1 的图称为连通图（**connect graph**）
- 有向图 G 称为强连通（**strongly connected**）的，若对任意顶点对 u,v，图中既存在从 u 到 v 的有向路，又存在从 v 到 u 的有向路

二部图

- 若图的顶点集可以划分为两个非空集合 X 和 Y，使得 X, Y 中任何两顶点之间无边相连，则称该图为二部图（**bipartite graph**），记为 $G=(X\cup Y, E)$
  - X 中所有顶点与 Y 中所有顶点都有边相连的二部图称为完全二部图

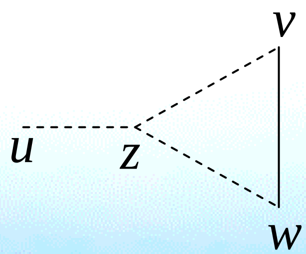


完全二部图 $K_{2,3}$

- G 是二部图当且仅当 G 中不存在奇圈
  - 若 G 是二部图 $(X\cup Y, E)$，则长度为奇数的路的起点与终点分别在 X 与 Y 中，G 中不存在奇圈
  - 若 G 中不存在奇圈，任取 $u\in V$，令

    $$X=\{v\in V \mid d_G(u,v)\text{为奇数}\},\ Y=\{v\in V \mid d_G(u,v)\text{为偶数}\}$$

    若存在 $v,w\in X$，$e=vw\in E$，记 P_v 是从 u 到 v 的最短路，P_w 是从 u 到 w 的最短路。z 是 P_v 与 P_w 的最后一个公共端点，P_v, P_w 上自 z 到 v, w 的部分分别记为 P'_v, P'_w，则 $P'_v e P'_w$ 为一个奇圈



奇数+奇数$-2k+1$

度

浙江大学 ZheJiang University

组合优化

- 与顶点 v 关联的边的数目称为 v 的度（**degree**），记为 $\deg_G(v)$
  - $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 分别表示图的最大度和最小度
  - 度为 0的点称为孤立点（**isolated vertex**）
  - 所有顶点度相等的图称为正则图（**regular graph**）
  - （**Handshaking**引理）$\sum_{v\in V}\deg_G(v)=2|E|$
  - 无向图中度为奇数的顶点总有偶数个
- 有向图中以 v 为起点的弧的数目称为 v 的出度（**out-degree**），以 v 为终点的弧的数目称为 v 的入度（**in-degree**），分别记为 $\deg_G^+(v)$ 和 $\deg_G^-(v)$
  - $\sum_{v\in V}\deg_G^+(v)=\sum_{v\in V}\deg_G^-(v)=|E|$

浙江大学 ZheJiang University

组合优化

图与矩阵

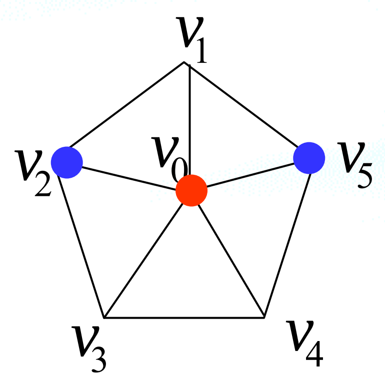
- 设 $|V|=n, |E|=m$
  - 矩阵 $\mathbf{M}=(m_{ij})_{n\times m}$ 称为图的关联矩阵（**incidence matrix**），其中

$$\text{(有向图)}\quad m_{ij}=\begin{cases}1 & e_j\text{以}v_i\text{为起点}\\ -1 & e_j\text{以}v_i\text{为终点}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\qquad \text{(无向图)}\quad m_{ij}=\begin{cases}1 & e_j\text{以}v_i\text{为端点}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

  - 矩阵 $\mathbf{A}=(\mu_{ij})_{n\times n}$ 称为图的邻接矩阵（**adjacency matrix**），其中 μ_{ij} 为（有向图）以 v_i 为起点，v_j 为终点的边的数目或（无向图）连接 v_i, v_j 的边的数目

独立集与支配集

- V 的子集 S 称为 G 的独立集（**independent set**），若 S 中任何两个顶点在 G 中均不相邻。顶点数最多的独立集称为最大独立集
- V 的子集 S 称为 G 的支配集（**dominated set**），若任意 $V \setminus S$ 中顶点均与某个 S 中顶点关联。顶点数最少的支配集称为最小支配集
- 最大独立集与最小支配集问题都是 $\mathcal{NP}$ –难的



$\{v_2, v_5\}$ 是最大独立集，也是支配集
$\{v_0\}$ 是最小支配集，也是独立集

独立集　支配集　顶点覆盖　团

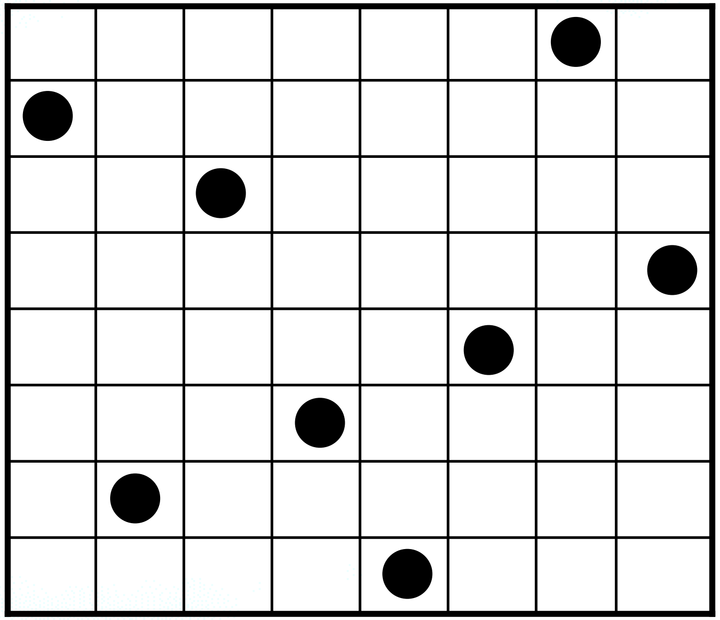
皇后问题

组合优化

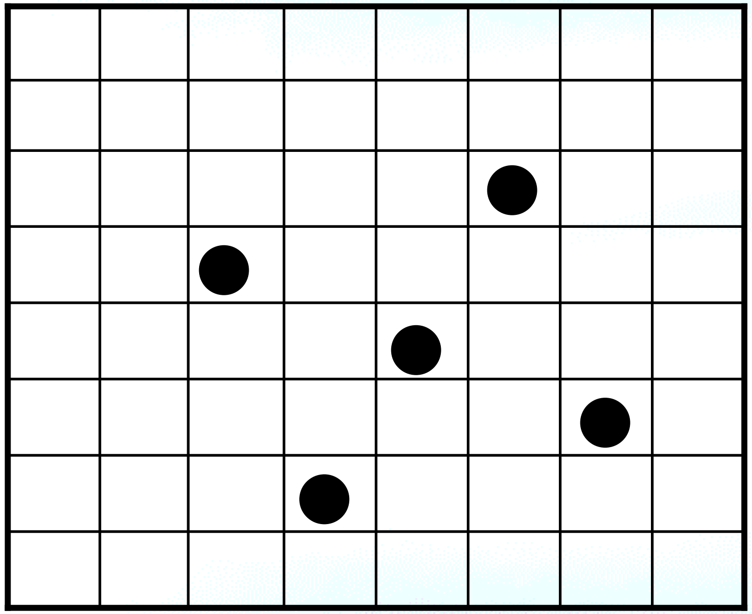
- 在 8×8 国际象棋棋盘上
  - 最多可放置几个皇后，使得任一皇后不会被其他皇后吃掉
  - 最少需放置几个皇后，使得任何一个格子上的棋子可被至少一个皇后吃掉
- 构造“皇后图”，每个格子为图的一个顶点，两个格子之间有边相连当且仅当位于一个格子中的皇后可吃掉另一个格子中的子

Karl Friedrich Gauss (1777-1855)
德国数学家

皇后问题



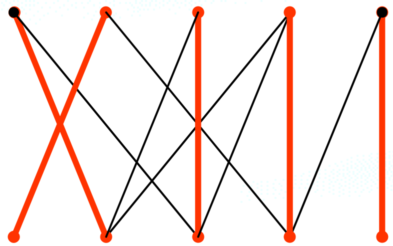
八皇后问题　最大独立集



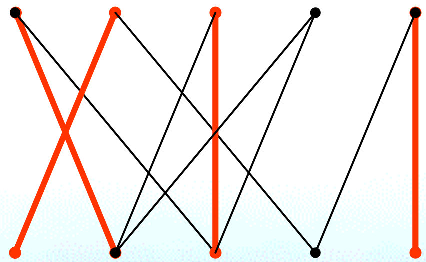
五皇后问题　最小支配集

匹配

- 图 $G=(V,E)$ 边集 E 的一个非空子集 M 称为 G 的一个匹配（**matching**），若 M 中任何两条边在 G 中均不相邻
- 若 G 中所有顶点都与匹配 M 中某条边关联，则称 M 为完美匹配（**perfect matching**）
- 图的最优匹配
  - 边数最多的匹配称为最大基数匹配
  - 赋权图中总权重最大的匹配称为最大权匹配
  - 赋权图中总权重最小的完美匹配称为最小权完美匹配



完美匹配

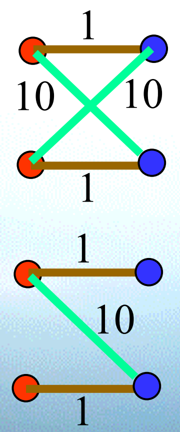


最大基数匹配

匹配

	最大基数匹配	最大权匹配	最大权完美匹配	最小权完美匹配
完全二部图 $K_{m,n}$	平凡		Kuhn，1955（指派问题）	$\neq$ $\Leftrightarrow$
二部图	Egervary, 1931 $\neq$	$\neq$		
任意图	Edmonds, 1965	Edmonds, 1965		

任意图的完美匹配必为最大基数匹配



完全二部图

最小权完美匹配

最大权完美匹配

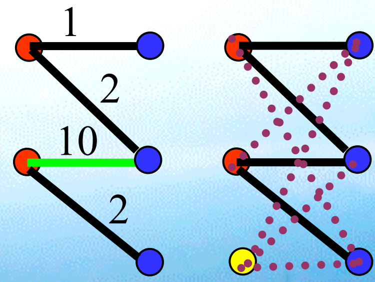
二部图

完美匹配、

最大基数匹配

最大权匹配

完全二部图的最大权完美匹配必是最大权匹配，若 $m=n$，必有一最大权匹配是最大权完美匹配



增加虚拟顶点和权为**0**的虚拟边后可将二部图的最大权匹配问题转化为完全二部图的最大权完美匹配问题

二部图、子集族、矩阵

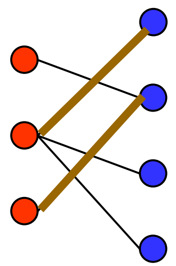
浙江大学 ZheJiang University

组合优化

二部图 $G=(X\cup Y,E)$，其中 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$

集合 $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，子集族 $\mathcal{X}=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$，其中 $A_i\subseteq Y$

$m\times n$ 矩阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，其中 $a_{ij}=\{0,1\}$



$Y=\{a,b,c,d\}$

$A_1=\{b\}$

$A_2=\{a,c,d\}$

$A_3=\{b\}$

x_1 的邻点集

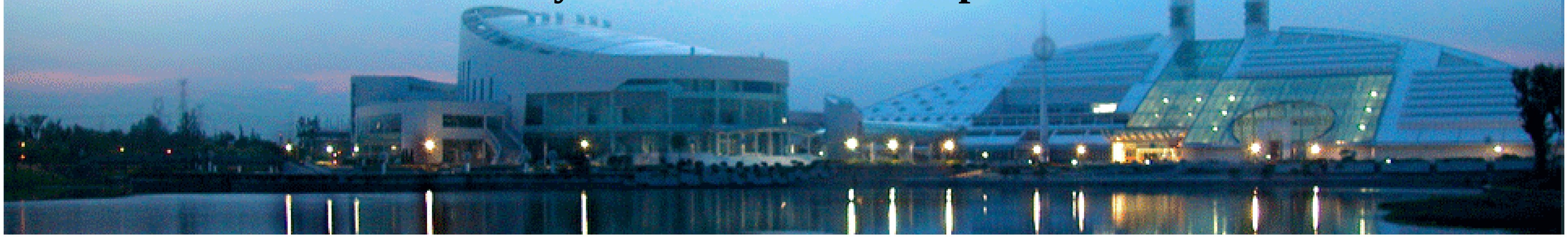
$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

G 中存在关联 X 中所有顶点的匹配

存在 Y 中 m 个互不相同的元素 $y_{i_1},y_{i_2},\cdots,y_{i_m}$，使得 $y_{i_j}\in A_j,\ j=1,\cdots,m$

$\mathbf{A}$ 中存在 m 个不同行不同列的元素 1

相异代表元系（**system of distinctive representation，SDR**）



Hall定理

- 设 $G=(X\cup Y,E)$为二部图，则 G 存在匹配 M，使得 X 中的任一个顶点均与 M 中某条边关联的充要条件是
$$|S|\le|N_G(S)|,\forall S\subseteq X,$$
这里 $N_G(S)$ 为 G 中所有与 S 相邻的顶点集合
- 设有集合 $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，Y 的一个子集族 $(A_1,A_2,\cdots,A_m)$ 存在**SDR**，当且仅当
$$|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|\ge k,$$
$$\forall 1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le s,1\le k\le m$$

Philip Hall
（1904－1982）
英国数学家

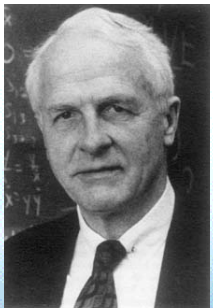
浙江大学
ZheJiang University
组合优化

Hall定理的等价定理

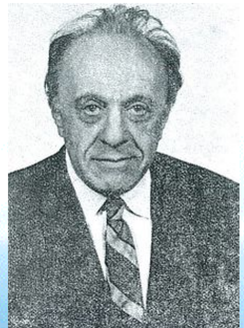
Hall定理	完美匹配存在性
König–Egerváry定理	**0-1**矩阵的项秩与覆盖
König定理	二部图的匹配与边覆盖
Menger定理	顶点互不相同的路
最大流最小割定理	网络流
Birkhoff–Von Neumann定理	双随机矩阵分解
Dilworth定理	偏序集中的链与反链

Denes König
匈牙利数学家
(1884-1944)

Jenő Egerváry
匈牙利数学家
(1891-1958)



Garrett Birkhoff
美国数学家
(1911-1996)

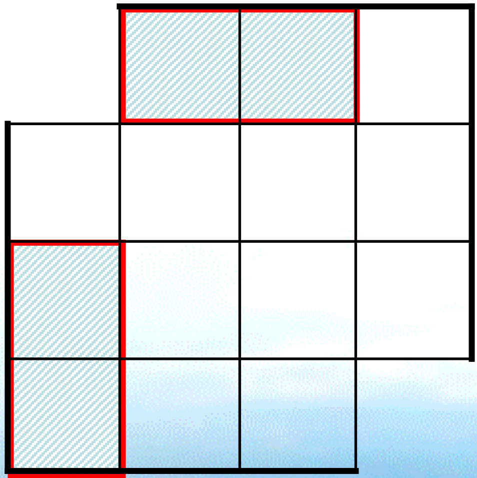


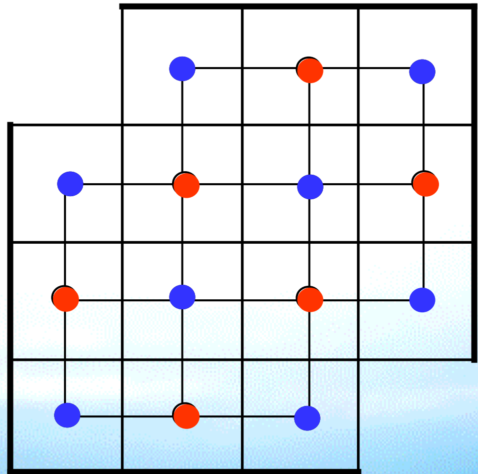
Karl Menger
奥地利数学家
(1902-1985)

Robert Palmer Dilworth
美国数学家
(1914-1993)

Frobenius定理

- 设 $G=(X\cup Y,E)$ 为二部图，则 G 有完美匹配 M 的充要条件是 $|X|=|Y|$ 且对任意 $S\subseteq X$ 或 $S\subseteq Y$ ，均有 $|S|\le|N_G(S)|$





Ferdinand Georg Frobenius
（1849－1917）
德国数学家

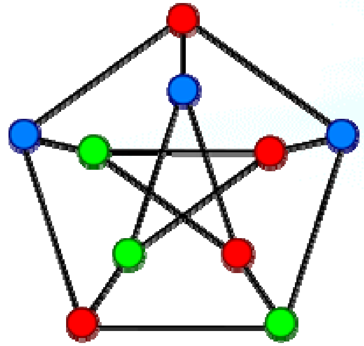
顶点着色

组合优化

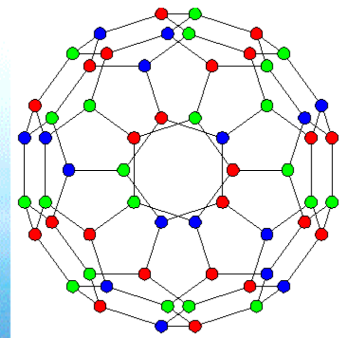
- 图G的顶点k着色是指将图G的每一个顶点用k种颜色之一着色，使得相邻的顶点不染同一种颜色
  - 图的顶点k着色等价于将图的顶点集划分为k个两两不相交的独立集之并
  - 图可顶点k着色的最小的k值称为图的色数（**chromatic number**），记为$\chi(G)$
- 对任意简单图$\chi(G) \le \Delta(G)+1$
  - 连通图G满足$\chi(G)=\Delta(G)+1$当且仅当G为奇圈或完全图
- 图的顶点着色问题：给定图G，求$\chi(G)$
  - 存在最坏情况界为$O\left(n\frac{(\log\log n)^2}{(\log n)^3}\right)$的多项式时间近似算法
  - 任意多项式时间近似算法的最坏情况界至少为$n^{1-\varepsilon}$，除非$\mathcal{P}=\mathcal{NP}$

Brooks RL, On colouring the nodes of a network. ***Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*****, 37, 194–197, 1941**
Halldórsson MM. A still better performance guarantee for approximate graph coloring. ***Information Processing Letters*****, 45, 19-23, 1993**
Zuckerman D. Linear degree extractors and the inapproximability of max clique and chromatic number. ***Theory of Computing*****, 3, 103–128, 2007**

$\chi(G)=3$



Petersen 图



Buckyball图

贪婪算法

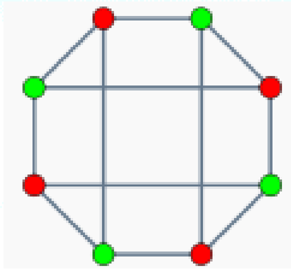
- 贪婪算法
  - 给定顶点的一个顺序 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，依此顺序对每个顶点进行着色
  - 对当前顶点 v_i 着它可着的**最小**颜色
- 贪婪算法所用颜色数至多为 $\Delta(G)+1$
  - 令 $G_i = G(\{v_1, v_2, \cdots, v_i\})$，算法对 v_i 着色后得到了 G_i 的一种着色方案，记 k_i 为所用的颜色数
  - $k_i \le 1 + \max\limits_{1\le j\le i} d_{G_i}(v_j)$
    - $k_1 = 1 = 1 + d_{G_1}(v_1)$
    - 若对 v_i 着色时未用一种新的颜色，则

      $$k_i = k_{i-1} \le 1 + \max_{1\le j\le i-1} d_{G_{i-1}}(v_j) \le 1 + \max_{1\le j\le i} d_{G_i}(v_j)$$

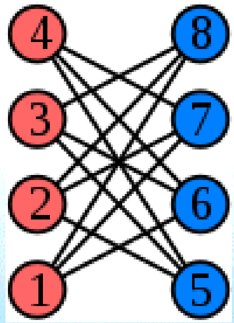
    - 若对 v_i 着色时用了一种新的颜色，则 $d_{G_i}(v_i) \ge k_{i-1}$，

      $$k_i = k_{i-1} + 1 \le d_{G_i}(v_i) + 1 \le 1 + \max_{1\le j\le i} d_{G_i}(v_j)$$

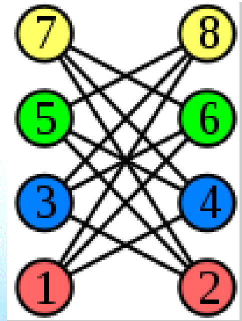
$$k_n \le 1 + \max_{1\le j\le n} d_{G_n}(v_j) = 1 + \Delta$$



Crown graph



$\chi(G) = 2$



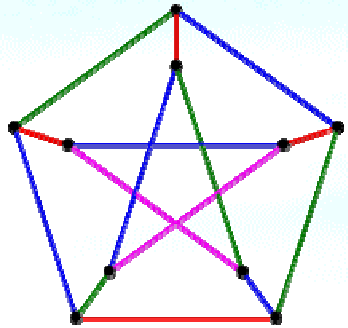
$\frac{n}{2}$ 种颜色

边着色

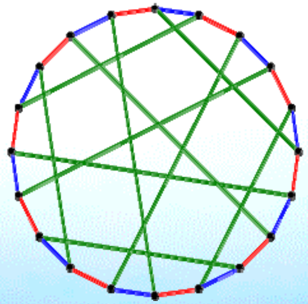
- 图 G 的边 k 着色是指将图 G 的每一条边用 k 种颜色之一着色，使得相邻的边不染同一种颜色
  - 图的边 k 着色等价于将图的边集划分为 k 个两两不相交的匹配之并
  - 图可边 k 着色的最小的 k 值称为图的边色数（**edge chromatic number**），记为 $\chi'(G)$
- 若 G 是非空简单图，则 $\Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G)+1$
  - 若 G 是二部图，则 $\chi'(G) = \Delta(G)$
- 图的边着色问题：给定图 G，求 $\chi'(G)$
  - 判断图 G 是否满足 $\chi'(G) = \Delta(G)$ 是 $\mathcal{NP}$-完全的

Vizing VG, On an estimate of chromatic class of a P-graph. *Diskretn Analiz*, 3, 25–30, 1964

Holyer I. The NP-completeness of edge-coloring. *SIAM Journal on Computing*, 10, 718-720, 1981



$\chi'(G) = 4$



Desargues图

$\chi'(G) = 3$

最小生成树

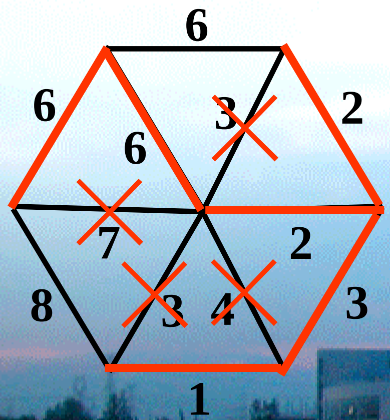
浙江大学 ZheJiang University

组合优化

- **Kruskal 算法**
  - 将连通图 $G=(V,E)$ 的所有边按权非降顺序排列
  - $F=\varnothing$，$j=1$
  - 若图 $T=(V,F\cup\{e_j\})$ 不含圈，则令 $F=F\cup\{e_j\}$
  - 若 $|F|=|V|-1$，终止，$T=(V,F)$ 即为最小生成树。否则，返回上一步

Otakar Borůvka
（1899－1995）
捷克数学家

Joseph Bernard Kruskal
(1928 –2010)
美国数学家、计算机科学家



Borůka O, O jistém problému minimálním (About a certain minimal problem), *Práce mor. Přírodově d. spol. v Brně III*, 3, 37-58, 1926

Kruskal JB. On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 7, 48-50, 1956

最短路

组合优化

- 最短路（Shortest Paths）
  - 赋权图：边 v_iv_j 的权为 w_{ij}。若 v_i, v_j 之间无边相连，则令 $w_{ij}=\infty$
  - 赋权图中某条路的权为该条路所经过的所有边的权之和
  - 赋权图上的最短路一般要求图中不存在负圈，但某条边的权可以为负
- 最短路算法
  - **Bellman–Ford**算法：某个顶点到其余顶点的最短路
  - **Dijkstra**算法：非负权图上某个顶点到其余顶点的最短路
  - **Floyd–Warshall**算法：所有点对之间的最短路

Robert W Floyd
（1936 –2001）
美国计算机科学家
1978年**Turing**奖得主

Bellman R. On a routing problem. *Quarterly of Applied Mathematics*, 16, 87–90, 1958.
Ford LR Jr, Network Flow Theory, Paper P-923, The RAND Corporation, 1956.
Floyd RW. Algorithm 97: shortest path. *Communications of the ACM*, 5, 345, 1962.
Warshall S. A theorem on boolean matrices. *Journal of the ACM*, 9, 11-12, 1962.

Dijkstra算法

- **Dijkstra算法**
  - 令 $S^{(1)}=\{v_1\}$, $l_1^{(1)}=0$，$l_j^{(1)}=w_{1j}$, $j=2,3,\cdots,n$ 。$i=1$
  - 在 $V\backslash S^{(i)}$ 中选择顶点 v_k，使得 $l_k^{(i)}=\min\limits_{v_j\in V\backslash S^{(i)}} l_j^{(i)}$ ，令 $S^{(i+1)}=S^{(i)}\cup\{v_k\}$ $\longleftarrow$ 集合 S 每次增加一个顶点
  - 令 $l_j^{(i+1)}=\begin{cases} l_j^{(i)}, & \text{对任意} v_j\in S^{(i+1)} \\ \min\{l_j^{(i)}, l_k^{(i)}+w_{kj}\}, & \text{对任意} v_j\in V\backslash S^{(i+1)} \end{cases}$ 。

  若 $i=n-1$，停止，v_1 到 v_j 的最短路长度为 $l_j^{(n)}$。否则，$i=i+1$，返回上一步

Edsger Wybe Dijkstra
（1930 –2002）
荷兰计算机科学家
1972年Turing奖得主

对任意 $v_j\in S^{(i)}$，$l_j^{(i)}$为自 v_1（经过图中任意顶点）到 v_j 的最短路长度
对任意 $v_j\notin S^{(i)}$，$l_j^{(i)}$为自 v_1（只经过 $S^{(i)}$ 中顶点）到 v_j 的最短路长度

Dijkstra EW. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische mathematik*, 1, 269-271, 1959.

谢　谢