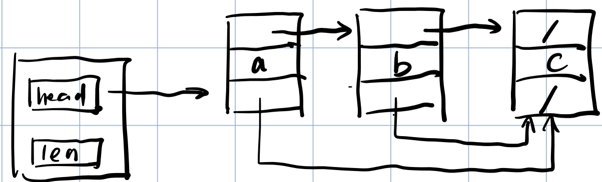
HWK 11　尹凯宁　2023202269.

21.2-5. 对每个集合对象维护一个指针 head 和长度 length.

head 指向链表尾，链表中每个元素的一个指针指向链表的第一个元素，另一个指针指向下一个元素



MAKE-SET 如上述

FIND-SET：直接通过尾指针访问并返回第一个元素，

如果为空则返回自身.

UNION：将较大链表接在较小链表后，并更新较小链表元素的尾指针域

21.1 a. extracted：4 3 2 6 8 1

b. 使用归纳法：第一步迭代显然正确

假设前 k 次迭代 extracted 数组都被更新正确

那证第 k+1 步得到 extracted[j]=k+1 正确

假设第 k+1 步不正确，即 extracted[j] != k+1

1) 当 extracted[j] > k+1

而 k+1 显然是第 j 次 extracted-min 操作之间就加入数组

∴ 不可能

2) 当 extracted[j] < k+1

那么 extracted[j] 已经被遍历过

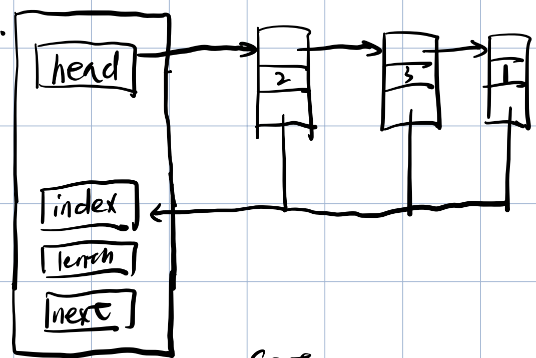
而根据集合的更新法则不可能两个元素对应到同一次 extracted_min 操作

∴ 矛盾.

∴ 第k+1步正确

∴ 该算法正确.

c.



set

对每个set维护 head: 指向一个链表头元素,

其中每个元素维护一个指向index的指针.

index: set的标号

lenth: set大小

next: 多个set维护为一个链表, next指向下一个set, 并且升序排列

操作: Find(i) $O(1)$

union(j): 将j与后面一个set合并, 短的连到长的后面并更新每一个元素的index指针和set的index值.

设较短链表有k个元素则为 $O(k)$.

最坏时间复杂度为 $O(n\lg n)$

23-1. a. 假设有两棵不同的最小生成树，将它们的边按照权重从小到大排列：$[e_{k_1}, e_{k_2}, e_{k_3} \dots e_{k_m}]$

$[e_{j_1}, e_{j_2}, e_{j_3} \dots e_{j_n}]$

设 e_{k_t}、e_{j_t} 为这两个序列从左到右第一对不同的边

设前面的边构成的点集为 S，总点集为 V.

S. $V-S$ 为 V 的一对划分，设 E 为连接 S, $V-S$ 的边集

则根据生成 MST 的通用算法

$$W_{e_{k_t}} = W_{e_{j_t}} = \min W_E$$

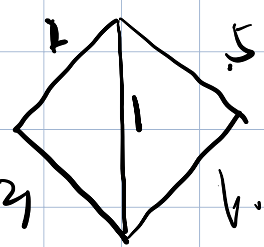
又所有边权重互不相同

$\therefore e_{k_t} = e_{j_t}$

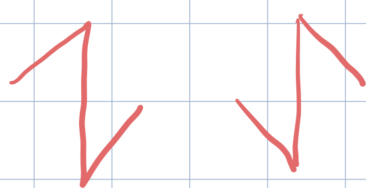
$\therefore$ 矛盾 $\Rightarrow$ 最小生成树唯一。

下证 次优MST不一定唯一：

取反例：



次优：



$\therefore$ 不一定唯一。

b. 设最优 MST 的边集为 M　点集为 V.

次优 MST 的边集为 N

下证：引理1：$|M - M \cap N| = 1$

显然 $|M-M\cap N|\neq 0$.

下证 $|M-M\cap N|$不能大于1

由生成树的性质：对于任意 $e_1\in|M-M\cap N|$

可以找到一个V的划分 V_1. $V-V_1$

使得e_1连接 V_1 和 $V-V_1$

相对应的也能找到 $e_2\in|N-M\cap N|$

使得e_2连接 V_1 和 $V-V_1$

由最小生成树的性质 $W_{e_1}>W_{e_2}$

假设 $|M-M\cap N|>1$

则至少能找到2对这样的不同边 (e_{11},e_{12}) (e_{21},e_{22})

使得 $W_{e_{11}}>W_{e_{12}}$

$W_{e_{21}}>W_{e_{22}}$

此时把 N中的e_{11}换成e_{12}得到新的生成树N'

$W_M>W_{N'}>W_N$

则N不是次优生成树

$\therefore |M-M\cap N|=1$

回到本题证明：$|E|\geq|V|$ 说明对于点集V的某个划分

的分割边肯定不止一条

对于所有这样的分割边集找到所有的次最小边

将最小的次最小边与对应的最小边交换

得到一棵生成树

由引理1易得该生成树一定是次优生成树.

$\therefore$原命题成立.

c. for u in V.

do DFS(u)

在DFS过程中记录u->v路径上最长边

d. 该算法已经在b中给出