

思考题 (3)

即证 以 $1-\frac{1}{b}$ 的概率所有盒子的球数不超过 $O(\log b / \log \log b)$

即证 以 $\frac{1}{b}$ 的概率有盒子的球数超过 $O(\log b / \log \log b)$

设 X 为盒子的球数, $X \sim B(b, \frac{1}{b})$

由 Chernoff bound $P(X_i > k) < (\frac{e}{k})^k = (\frac{e}{k})^k$

$$\text{则 } P(X_{\max} > k) < b P(X_i > k) = \frac{b \cdot e^k}{k^k}$$

令 $k = C \log b / \log \log b$.

$$\text{即证 } \frac{e^k}{k^k} \leq \frac{1}{b^2}$$

$$\Leftrightarrow k \ln \frac{e}{k} \leq -2 \ln b.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{e \log \log b}{C \log b} \approx -\log \log b.$$

$$\text{即证 } -C \log b \leq -2 \ln b$$

当 $C \geq 2$ 时成立.

\therefore 该命题成立.