思考题 12. 24-5.

a. 不失一般性. 假设 G 为连通图.
$\mu^* = 0$ 则 G 中不含负权环, 否则 $\mu^* < 0$.
则对 $\forall s, v \in V$ s 到 v 的最短路径不会超过 $n-1$
所以 s 到 v 的最短路径长度只可能为 $1, 2, \ldots, n-1$
显然 $\delta(s,v) = \min\limits_{0 \le k \le n-1} \delta_k(s,v)$、

又 $\mu^* = 0$ 则说明 G 中包含环, 因为如果无环, μ^* 不存在.
且显然包含非负环, 因为如果环权和都大于0 则 $\mu^* > 0$.

b. 设 $\delta(s,v) = \delta_{k_0}(s,v)$.
又 $\delta(s,v)$ 为 s 到 v 的最短路径权重
$\therefore \delta(s,v) \le \delta_n(s,v)$.
$\therefore \dfrac{\delta_n(s,v) - \delta_{k_0}(s,v)}{n-k_0} \ge 0$.
$\therefore \max\limits_{0 \le k \le n-1} \dfrac{\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v)}{n-k} \ge 0$.

C. 假设 $\delta(s,v) \ne \delta(s,u) + x$
设 $\delta(s,v) = \delta(s,u) + x'$
则 $x' < x$.
则存在一条从 u 到 v 的简单路径权重为 x'
则这条路径与环上 $v \to u$ 的简单路径可组成一个新环.
新环的权重为 $x' - x < 0$
又 $\mu^* = 0$

∴ 矛盾

∴ $\delta(s,v)=\delta(s,u)+x$

d. 对于最小平均权重环路 c.

设 c 的长度为 t.

由(c)中结论. s 到最小权重环的点的最短路径随最小权重环扩展.

∴ c 上存在点 m. s 到 m 的最短路径长度 k_1

$k_1 \% t = n \% t$ 又 $\mu(c)=0$.

那么 $\delta(s,v)=\delta_n(s,v)=\delta_{k_1}(s,v)$

此时 $\max\limits_{0\le k_1\le n-1} \frac{\delta_n(s,v)-\delta_{k_1}(s,v)}{n-k_1}=0$

∴ 原命题成立.

e. 由(d) $\exists v$. s.t $\max\limits_{0\le k\le n-1} \frac{\delta_n(s,v)-\delta_k(s,v)}{n-k}=0$

又由(b) 对 $\forall v\in V$ $\max\limits_{0\le k\le n-1} \frac{\delta_n(s,v)-\delta_k(s,v)}{n-k}\geq 0$.

$$\therefore \min_{v\in V}\max_{0\le k\le n-1} \frac{\delta_n(s,v)-\delta_k(s,v)}{n-k}=0.$$

f. 对于每条边的权重增加一个 t, $\mu^{*'}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(w(e_i)+t)$

$=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}w(e_i)+t$

$=\mu^*+t.$

设 G 的 $\mu^*=t$, 给 G 的每条边的权重减 t 得到 G'

由(e)可知对于 G'

$$\min_{v\in V}\max_{0\le k\le n-1}\frac{\delta'_n(s,v)-\delta'_k(s,v)}{n-k}=0=(u^*)'$$

则对于 G:

$$\min_{v\in V}\max_{0\le k\le n-1}\frac{\delta'_n(s,v)+nt-\delta'_k(s,v)-kt}{n-k}=t=u^*$$

∴原命题成立.

9. 先运行Bellman-Ford算法，但外层扩展循环n次（对应n条边），不用检测负权环，并且每次循环都分别存下结果，第i次的结果为δ_i，最后遍历每一个顶点和路径长度得到顶点的 $\max_{0\le k\le n-1}\frac{\delta_n(s,v)-\delta_k(s,v)}{n-k}$，再得到$u^*$

时间复杂度为 $O(\underbrace{VE}_{\text{Bellman Ford}}+\underbrace{VE}_{\text{遍历}})=O(VE)$