HWK 2:

4.3-3：证：利用数学归纳法证明，$\exists n_0, c$ s.t 对 $\forall n > n_0$, $T(n) \geq cn\log n$.

不妨设 $T(1)=1$

① 当 $n=2$ 时 $\exists c$ s.t. $T(2)=4 \geq c2\log 2$

当 $c \leq 2$ 时满足条件.

② 假设当 $n<k$ 时 都 $\exists c$ s.t $T(n) \geq cn\log n$

当 $n=k$ 时 $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor)+n$

$\geq 2c(\frac{n}{2}\log\frac{n}{2})+n = cn\log n - cn + n$

$= cn\log n + (1-c)n$

当 $c=1$ 时满足条件.

∴ 解为 $\Theta(n\log n)$

4.2-5 $\log_{68}^{132464} = 2.79513$

$\log_{70}^{143640} = 2.79512$ $\log_{72}^{155424} = 2.79515$

最快的是用于计算 70×70 的算法

与 Strassen 相比更快.

4.2-7 $(a+b)(c-d) = ac+bc-ad-bd$

ad bc

Calcu (a,b,c,d):

$A = (a+b)*(c-d)$

$B = ad$

$C = bc$

return $A-C+B$, $B+C$

4.3 a. 由主定理, $\Theta(n^{\log_3 4})$

b. 由递归树得猜测 $T(n)=\Theta(n\log_3\log_3 n)$

假设当 $k<n$，$T(k)\le cn\log_3\log_3 n$

$T(n)=c3\cdot\frac{n}{3}\log_3\log_3\frac{n}{3}+n/\lg n$

$=cn\log_3\log_3\frac{n}{3}+\frac{n}{\lg n}$

令 $n=3^k$.

$=c3^k\log_3^{k-1}+\frac{3^k}{k}$

$=3^k(c\log_3^{k-1}+\frac{1}{k})$

即证 $c\log_3^{k-1}+\frac{1}{k}\le c\log_3^{k}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{k}\le c\log_3\frac{k}{k-1}$

$\Leftrightarrow 1\le c\ln(1+\frac{1}{k-1})^k$

$\Leftrightarrow 1\le c\ln e=c$.

∴ 得证.

下界同理可得.

c. 由主定理：$T(n)=\Theta(n^2\sqrt{n})$

d. 还是可用主定理：$T(n)=\Theta(n\log n)$

e. 同b. $T(n)=\Theta(n\log_2\log_2 n)$

f. 令 $T(n)=8n$

$T(n)=4n+2n+n+n=8n$.

∴ $T(n)=\Theta(n)$

g. $T(n)=1+\dots+\frac{1}{n}$ 调和级数 $T(n)=\Theta(\ln n)$

$\ln\frac{n+1}{n}\le\frac{1}{n}\le\ln\frac{n}{n-1}$ 易证 $T(n)=\Theta(\ln n)$

h. $T(n)=\lg 1+\lg 2+\dots+\lg n=\lg(n!)$

$n!=\Theta((\frac{n}{e})^{n+\frac{1}{2}})$

$\therefore T(n) = \Theta(n\lg n)$

i. $T(n) = \frac{1}{\lg n} + \frac{1}{\lg(n-2)} + \frac{1}{\lg(n-4)} + \dots = \Theta\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lg i}\right)$

$$= \Theta\left(\int_2^n \frac{1}{\lg x}\,dx\right)$$

$$= \Theta\left(\frac{n}{\lg n}\right).$$

j. 利用递归树猜测得：$T(n) = \Theta(n\log\log n)$

假设当 $k < n$ 时 $T(k) = \Theta(k\log\log k)$

当 $n = k$ 时 $T(n) = \sqrt{n}\,T(\sqrt{n}) + n$

$$\le \sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\log\log\sqrt{n} + n$$

$$= n\log\lg\sqrt{n} + n$$

$$= n\log\tfrac{1}{2}\log n + n$$

$$= n\log\log n$$

同理可证下界

∴得证。

4.5. a. 假设坏芯片多于好芯片，对于任意一个好芯片都能给它匹配一个坏芯片模拟它的行为，那么显然此时无法分辨好坏。

b. 将芯片配对测验，如果总数为单数则保留余下的一块。
如果结论是都好或都坏 则任意丢一块。
如果结论是至少一块坏 则两个都丢掉
余下的芯片仍然是好>坏。

c. 按以下的步骤进行，最后：

①如果剩下1块，则是好芯片。

②如果剩下2块，若最后结果是都好/坏 则这两块都好。

若最后结果是至少一坏，则上一步丢掉的是好。

（eg. 因为产生2块的途径只有（好，好-坏）最后丢弃好或坏）

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{2}$$

$$T(n) = \Theta(n)$$