HWK5. 卢嘉宇 2023202269.

8.2-4. COUNT_ab(A, a, b)

```
new array C[0,...,k]
for i=0 to k
    C[i]=0.
for j=1 to A.length.
    C[A[j]]++
for i=1 to k
    C[i] += C[i-1]
return C[b]-C[a-1]
```

8.3-5 需要d轮排序，记录10d堆卡片.

8.4-2 如果所有数都落入同一区间，按照插入排序则其时间复杂度为$\Theta(n^2)$
将插入排序改为快排即可.

9.3-1 被分成7组仍会是线性的.

如果是分成3组.

$2(\lceil \frac{1}{2}\lceil \frac{n}{3}\rceil\rceil - 2) \le \frac{n}{3}$

$T(n) \ge T(\frac{n}{3}) + T(\frac{2}{3}n) + O(n)$

假设如 $T(n)$ 是线性的.

则 $T(n) \ge T(n) + O(n)$ 矛盾.

$\therefore T(n)$ 非线性.

9-3. a. algorithm:

1. 如果 $i \ge \frac{n}{2}$ 调用SELECT算法.

2. 如果 $i < \frac{n}{2}$ 把 n 个数两两配对比较，较小数(包括配对后落单的数)

组成新set调用此算法找到第 i 小的数，把较小数小于等于 i 的

组 组成新set调用SELECT算法找到第 i 小的数返回

b. 不妨假设所有情况下都能整除

$U_i(i)=1$

$$U_i(n) = \frac{n}{2} + U_i\left(\frac{n}{2}\right) + T(2i)$$

$$U_i\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{4} + U_i\left(\frac{n}{4}\right) + T(2i)$$

$\vdots$ $\Bigg\}$ $\lg(n/i)$ 层

$$U_i(i) = 1$$

$$\therefore U_i(n) \le \left(\frac{n}{2} + \dots + 1\right) + T(2i)\lg(n/i)$$

$$= n + O(T(2i)\lg(n/i))$$

c. 由b可得 当 i 为常数 $U_i(n) = n + T(2i)\,O(\lg n - \lg i)$

$$= n + O(\lg n)$$

d. 由b可得 当 $i = n/k$ $(k \ge 2)$，$U_i(n) = n + O(T(2n/k)\lg k)$

9-4: a. $E[X_{ijk}] = \begin{cases} \frac{2}{j-i+1} & 当 i \le k \le j \\ \frac{2}{k-i+1} & 当 j < k. \\ \frac{2}{j-k+1} & 当 i > k. \end{cases}$

b. $$E[X_k] = \sum_{1 \le i < j \le n} E[X_{ijk}]$$

$$= 2\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j-i+1} + \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i}^{k-1}\frac{1}{k-i+1} + \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{j-k+1}\right)$$

$$= 2\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j-i+1} + \sum_{i=1}^{k-2}\frac{k-i-1}{k-i+1} + \sum_{j=k+2}^{n}\frac{j-k-1}{j-k+1}\right)$$

$$\le 2\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j-i+1} + \sum_{i=1}^{k-2}\frac{k-i-1}{k-i+1} + \sum_{j=k+1}^{n}\frac{j-k-1}{j-k+1}\right)$$

c. $E[X_k] \le 2(\lg n + k - 2 + n - k - 1) = 2(\lg n + n - 3)$

$\le 4n$.

d. 由 a.b.c 易得 RANDOMIZED-SELECT 期望时间为 $O(n)$