证明主定理：令 $a\geq 1, b>1$，$f(n)$ 为一个函数，$T(n)$ 为定义在非负整数上的

递归式：$T(n)=aT(n/b)+f(n)$，$T(n)$ 有如下渐近界：

1) 如果 $\exists \varepsilon>0$, s.t $f(n)=O(n^{(\log_b a)-\varepsilon})$，$T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$

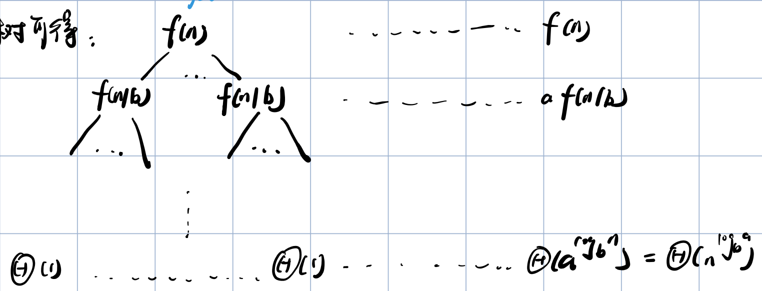
2) 如果 $f(n)=\Theta(n^{\log_b a})$，$T(n)=\Theta(\lg n\cdot n^{\log_b a})$

3) 如果 $\exists \varepsilon>0$, s.t $f(n)=O(n^{(\log_b a)+\varepsilon})$，并且 $\exists c, n_0>0$. 当 $n>n_0$, $af(n/b)\leq cf(n)$

那么，$T(n)=\Theta(f(n))$

证：先证 $T(n)=\Theta(n^{\log_b a})+\sum_{j=0}^{\log_b n-1}a^j f(n/b^j)$ ①

由递归树可得：



∴ ①式成立。

由此在前提假设下，主定理可作如下转化。

设 $g(n)=\sum_{j=0}^{\log_b n-1}a^j f(n/b^j)$

1) 情形1：$T(n)=\Theta(n^{\log_b a}) \Leftarrow g(n)=O(n^{\log_b a})$

2) 情形2：$T(n)=\Theta(\lg n\cdot n^{\log_b a}) \Leftarrow g(n)=\Theta(\lg n\cdot n^{\log_b a})$

3) 情形3：$T(n)=\Theta(f(n)) \Leftarrow g(n)=\Theta(f(n))$

对于1)：即证 $g(n)=O(n^{\log_b a})$

由假设：$g(n)=O\left(\sum_{j=0}^{\log_b n-1}a^j(n/b^j)^{\log_b a-\varepsilon}\right)=O\left(n^{\log_b a-\varepsilon}\sum_{j=0}^{\log_b n-1}\left(\frac{a\cdot b^{\varepsilon}}{b^{\log_b a}}\right)^j\right)$

$$=O\left[n^{\log_b a-\varepsilon}\cdot\sum_{j=0}^{\log_b n-1}(b^{\varepsilon})^j\right]$$

$$=O\left[n^{\log_b a-\varepsilon}\cdot\frac{(b^{\varepsilon})^{\log_b n}-1}{b^{\varepsilon}-1}\right]$$

$$=O\left[n^{\log_b a-\varepsilon}\cdot\frac{n^{\varepsilon}-1}{b^{\varepsilon}-1}\right]$$

$$=O(n^{\log_b a})$$

对于2)：即证 $g(n)=\Theta(\lg n\cdot n^{\log_b a})$

由假设：$g(n)=\Theta\left(\sum_{j=0}^{\log_b n-1}a^j(n/b^j)^{\log_b a}\right)$

$=\Theta\left(\sum_{j=0}^{\log_b n-1}a^j\frac{n^{\log_b a}}{\ldots}\right)=\Theta(\ldots n^{\log_b a})$

$$= \Theta\left(\sum_{j=1} a \cdots \frac{\cdots}{a^j}\right) = \Theta\left(\log_b n \cdot n^{\cdots}\right)$$

$$= \Theta\left(\lg n \cdot n^{\log_b a}\right)$$

对于3)：即证 $g(n) = \Theta(f(n))$

由于 $g(n) \geq f(n)$ $\therefore g(n) = \Omega(f(n))$

又由于 $n > n_0$, $af(n/b) \leq cf(n)$

易得 $g(n) = O(f(n))$ $\therefore g(n) = \Theta(f(n))$