Entrega 3 - GRAFOS

Enzo Giannotta

22 de abril de 2023

0.1. Teorema de Menger

Como vimos en clase:

Teorema 0.1.1 (Versión global de Menger)**.** (I) *Un grafo es k-conexo si y solo si contiene k-caminos internamente disjuntos entre cada par de vértices.*

(II) *Un grafo es k-aristaconexo si y solo si contiene k caminos arista disjuntos entre cada par de vértices.*

0.2. Entrega 3 - Viernes 21/04/2023

Ejercicio 0.2.1. 1. Para $n, m \geqslant 3$, determine $\kappa(G)$ cuando G es: el camino en n aristas P_n; el ciclo en n aristas C_n; el bipartito completo $K_{m,n}$.

2. En clase enunciamos que el grafo bloque de cualquier grafo conexo es un Ã¡rbol. Demuestre este resultado.

3. Sea G un grafo k-conexo, y sea xy una arista de G. Demuestre que G/xy es k-conexo si y sólo si $G - \{x, y\}$ es $(k-1)$-conexo.

Solución. 1. Utilizaré la versión global del teorema de Menger, que caracteriza el número de k-conexión y k-aristaconexión. El autor de esta entrega de ejercicios reconoce que es exagerado usar el teorema, sin embargo piensa que es una divertida y sencilla aplicación de este bello resultado.

Sea P_n un camino con $n \geqslant 3$ vértices, el primer ítem de 0.1.1 dice que P_n es 1-conexo, pues claramente entre cualquier par de vértice de un camino existe un máximo de 1 camino. Recíprocamente, como no puede haber más de un camino internamente disjuntos entre cualquier par de vértices se sigue que $\kappa(P_n) = 1, \forall n \geqslant 1$.

Sea C_n un cíclo con $n \geqslant 3$ vértices, insisto en usar 0.1.1, en este caso es evidente que entre cualquier par de vértices hay dos caminos internamente disjuntos (uno por cada sentido de las agujas del reloj). Recíprocamente, no puede haber más de 3 caminos internamente disjuntos entre cualquier par de vértice, i.e. $\kappa(G) = 2$.

Sea $K_{n,m}$ un grafo completo bipartito con $n, m \geqslant 3$, afirmo que $\kappa(K_{n,m}) = \min\{n, m\}$. Nuevamente aplicaremos Menger (reconociendo que se puede resolver muy fácilemnte de manera elemental). Sin pérdida de generalidad supongamos que $n \leqslant m$, es decir que $n = \min\{n, m\}$, veamos entonces que $\kappa(K_{n,m}) = n$. Escribamos $A \bigcup B = K_{n,m}$ para la partición natural de $K_{n,m}$, con $|A| = n$ y $|B| = m$. Por un lado, si elegimos dos vértices distintos x e y, pueden estar en la misma parte A o B, o estar en partes opuestas. En el primer caso, los caminos internamente disjuntos que salen de x y llegan a y si o si tienen que pasar por un vértice de la parte opuesta, esto dice que el número máximo k de caminos internamente disjuntos entre x, y es $\leqslant |A| = n$ o $\leqslant |B| = m$, dependiendo de si x, y están en B o A respectivamente; es más, siempre podemos encontrar al menos n caminos int. disjuntos (si $x, y \in B$) o m caminos int. disjuntos (si $x, y \in A$): por ejemplo, podemos armar un camino que empiece con una arista en $x \in A$ y se conecte a cualquier vértice de B y luego la segunda arista que se conecte directamente con $y \in A$; análogamente si $x, y \in B$. El otro caso es si miramos dos vértices en partes opuestas, digamos $x \in A$ e $y \in B$, aquí se ve que todo camino que sale de y tiene que pasar por vértice de A, luego si k es el número de caminos internamente disjuntos entre x e y se tiene que $k \leqslant |A| = n$; además, efectivamente podemos construir n caminos internamente disjuntos entre x e y: empezando en y construimos una arista que vaya a cualquier vértice de A, luego para la siguiente arista elegimos un vértide de B distinto por cada camino (se puede pues $n \leqslant m$) y finalmente nos conectamos con x. En resumen, entre cualquier par de vértices hay n caminos internamente disjuntos, y hay pares de vértices en los que no pueden haber más de n, por ejemplo cuando x, y son dos vértices en partes distintas. Con lo cual, 0.1.1 dice que $\kappa(K_{n,m}) = n = \min\{n, m\}$.

2. Notación: al grafo bloque de G lo denotamos por $Block(G)$. A un subgrafo conexo sin vértices de corte maximal, i.e. un bloque, lo vamos a denotar con las letras mayusculas B, C, D. Y denotaremos con la misma letra al vértice que inducen en el grafo $Block(G)$. A los vértices de corte los denotaremos por una letra minúscula como x, y, z, u, v, w y los denotaremos de la misma manera en el grafo $Block(G)$. Quedará claro dependiendo del contexto, a qué grafo pertenece cada vértice en esta notación. Haremos el abuso de notación y llamaremos bloque tanto al subgrafo de G como al vértice de $Block(G)$. Análogamente, cuando digamos vértice de corte de $Block(G)$ nos estamos refiriendo a un vértice que proviene de un vértice de corte de G.

   Si G es conexo, luego $Block(G)$ es conexo. Antes notemos que basta probar que entre dos blockes de $Block(G)$ existe un camino, pues todo vértice de corte de $Block(G)$ es adyacente a algún bloque en $Block(G)$ por definición de grafo bloque. Sean B, B' dos bloques de $Block(G)$, consideremos luego a partir de un B, B'-camino siempre podemos construir un camino que no puede entrara y salir de un bloque más de una vez, por conexión del bloque. Este camino nos induce un camino en $Block(G)$ dado por $\tilde{P} : B_0 v_0 B_1 v_1 \cdots B_{r-1} v_{r-1} B_r$, donde cada bloque o vértice aparece en el orden en el cual el camino P se intersecó por primera véz con estos en G.

   Ahora vevamos que $Block(G)$ es aciclico. En efecto, supongamos que no, sea C un ciclo en $Block(G)$. Como $Block(G)$ es bipartito (particionamos entre vértices de corte y bloques), no tiene ciclos impares, luego C tiene al menos 4 vértices (pueden ser cortes o bloques). Con lo cual, existen dos bloques distintos B_1, B_2 y dos vértices de corte distintos v_1, v_2 tal que podemos escribir $C : B_1 v_1 B_2 \cdots v_2 B_1$. Pero esto quiere decir que hay otro B_1, B_2-camino en G que no pasa por v_1, es decir que v_1 no era vértice de corte, absurdo.

3. Primero notemos que G/xy tiene más de k vértices, si y solo si $G \backslash \{x, y\}$ tiene más de $k - 1$ vértices.

   Veamos que G/xy implica $G \backslash \{x, y\}$ es $(k-1)$-conexo. En efecto, sea X un conjunto de menos de $k - 1$ vértices en $G \backslash x, y$, quitarlos sigue manteniendo la conexión, pues si no quitar extos vértices y v_{xy} de G/xy forma una separación de k vértices, que es imposible.

Recíprocamente, si tenemos un conjunto X de menos de k vértices en G/xy, entonces pueden ocurrir dos casos:

(I) $v_{xy} \in X$, luego debe quedar conexo, de lo contrario obtendríamos una $k-1$ separación de $G \backslash \{x, y\}$, dado por quitar los vértices de X distintos de v_{xy}.

(II) $v_{xy} \notin X$, luego debe quedar conexo, de lo contrarío obtendríamos una k separación de G, dado por quitar este conjunto de k elementos a G, que es k-conexo.

□