

Entrega 5 - GRAFOS

Enzo Giannotta

1 de julio de 2023

Entrega 6 - Viernes 30/05/2023

Ejercicio 0.1. En clase demostramos que para todo grafo bipartito se tiene $\chi'(G) = \Delta(G)$. Sin usar este resultado, demuestre que $\chi'(G) = k$ para todo grafo bipartito k -regular G .

Solución. Como G es k -regular, tenemos que $k = \Delta(G) \leq \chi'(G)$. Probemos por inducción en $k \geq 1$. Si $k = 1$ es trivial.

Sea M un matching perfecto de G , existe por el Teorema ???. Pintemos todas esas aristas de un color 1. Consideremos ahora G' , es un grafo bipartito $(k-1)$ -regular, por hipótesis inductiva G' tiene un $(k-1)$ -arista-coloreo, digamos con colores $2, \dots, k$. Juntando el coloreo de G' con el coloreo de M , obtenemos un k -arista-coloreo de G . \square

Ejercicio 0.2. Sea G un grafo línea. Encuentre una cota superior para $\text{ch}(\cdot)(G)$ en términos de $\chi(G)$.

Solución. Sabemos que $G = L(H)$ para un grafo G y que $\chi(G) = \chi'(H) \geq \Delta(H)$. Notemos que el algoritmo glotón permite probar de manera análoga que el caso del número cromático:

$$\text{ch}(\cdot)(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Por otro lado, $\Delta(G) \leq 2\Delta(H) - 2$. Más aún, el Teorema de Vizing ?? implica que $\Delta(H) \leq \chi'(H) = \chi(G)$. Con lo cual, juntando todo:

$$\text{ch}(\cdot)(G) \leq 2\chi(G) - 1.$$

\square