

Apuntes - GRAFOS

Enzo Giannotta

17 de mayo de 2023

Índice general

1. Parte I: Introducción a grafos	2
1.1. Clase 1: 16/03/23	2
1.2. Clase 2: 18/03/23	5
1.2.1. El grado de un vértice	6
1.2.2. Caminos y Ciclos	8
1.3. Clase 3: 20/03/23	10
1.3.1. Conexidad	16
1.4. Clase 4: 23/03/23	18
1.4.1. Árboles y bosques	20
1.5. Clase 5: 27/03/23	23
1.5.1. Grafos bipartitos	26
1.5.2. Paseos Eulerianos	30
1.6. Clase 6: 30/03/23	31
1.6.1. Conexidad	33
1.7. Clase 7: 03/04/23	36
1.7.1. Grafos 2-conexos	37
1.8. Clase 8: 06/04/23	40
1.8.1. Contracciones y menores	42
1.8.2. subdivisiones	43
1.9. Clase 9: 17/04/23	46
1.9.1.	48
1.10. Clase 10: 20/04/23	48
1.11. Ejercicios	51
1.12. Clase 11: 27/04/23	59
1.12.1. Relaciones min-máx	62
1.12.2. Ejercicios	67
1.13. Clase 12: 8/05/23	69
1.13.1. Caminos aumentantes	70
1.14. Clase 13: 15/05/23	71
1.14.1. Grafos planares	71
A. Primera parte de la materia (primer capítulo del Diestel)	74
A.1.	74
A.2.	80
B. Orden parcial completo-dirigido y teorema del punto fijo de Kleene	83

Capítulo 1

Parte I: Introducción a grafos

Bibliografía: [DSS10].

Evaluaciones:

Nota: sumativa significa examen.

1. Sumativa 1 : Lunes 24 abril. 30 porciento.
2. Sumativa 2: Lunes 22 mayo: 25 porciento.
3. Sumativa 3: Jueves 6 julio: 25 porciento.
4. Talleres (usualmente los viernes): 20 porciento (hay que trabajar y entregar lo que se hizo en el taller, te pueden hacer resolver en clase al azar el ejercicio al siguiente taller).

1.1. Clase 1: 16/03/23

Definición 1.1.1. Un **Grafo** es un par ordenado $G = (V, E)$, donde V es un conjunto de **vértices** y E es un conjunto de **Aristas**. Es decir, las aristas son pares (v_1, v_2) con $v_1, v_2 \in V$. En un principio si el grafo **no es dirigido**, no importa el orden de los vértices que aparece en un par (v_1, v_2) .

La manera de visualizar un grafo es dibujar cada vértice y unir dos pares de vértices $v_1, v_2 \in V$ por un segmento que representa la arista (v_1, v_2) .

Ejemplo 1.1.2. Sea $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $E = \{\{1, 3\}, \{3, 4\}, \{5, 4\}, \{4, 1\}, \{1, 2\}\}$

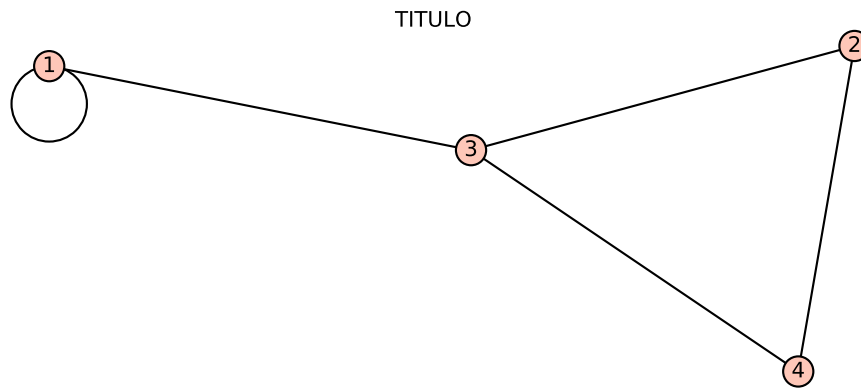


Figura 1.1.1: Dibujo del grafo V .

Definición 1.1.3. Para un grafo $G = (W, R)$, denotamos por $V(G)$ a W (los vértices) y por $E(G) = R$ (las aristas).

El número de vértices de G se denota como $|G|$ o $|V(G)|$, y se llama **orden** de G . El número de aristas lo denotamos como $||G||$ o simplemente $|E(G)|$. Un grafo con orden 1 o 0 se llama **trivial**.

Definición 1.1.4. Si $v \in V(G)$ y $e \in E(G)$, y además $v \in e$, decimos que v es **incidente** en e y viceversa, i.e. e es incidente en v . Los dos vértices que inciden en una arista son sus **extremos**.

Dos vértices x, y son **adyacentes** o **vecinos** si $(x, y) \in E$ (Otra notación: $xy \in E$ donde xy es la arista).

Observación 1.1.5. Si mi grafo tiene n vértices, entonces tiene a lo sumo $\binom{n}{2}$ aristas. Luego, la cantidad de grafos que se pueden construir es $2^{\binom{n}{2}}$.

Definición 1.1.6. Si en un grafo todo par de vértices es adyacente, decimos que el grafo es **completo**. Notamos: K_n para todo $n \geq 1$, al grafo completo con n vértices.

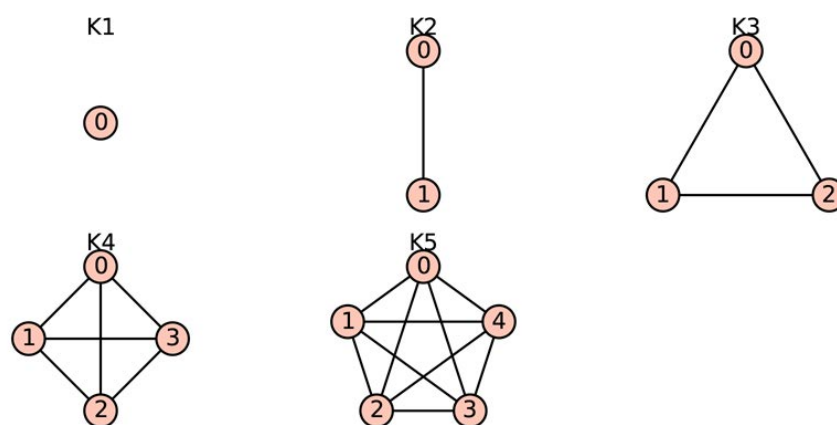


Figura 1.1.2: Ejemplo de grafos completos de orden 1, 2, 3 y 5.

Definición 1.1.7. Si un par de vértices no es adyacente, decimos que son **independientes** o **estables**.

Si $V' \subset V(G)$ es tal que cada par de vértices en V' es independiente, entonces decimos que V' es **independiente**.

Definición 1.1.8. Sean $G1 = (V1, E1)$ y $G2 = (V2, E2)$ grafos, decimos que $\varphi : V1 \rightarrow V2$ es un **isomorfismo** si para todo par de vértices $x, y \in V1$ se tiene que $xy \in E1 \Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E2$.

Usualmente no hacemos distinciones entre dos grafos isomorfos. De hecho en ese caso escribimos $G1 = G2$.

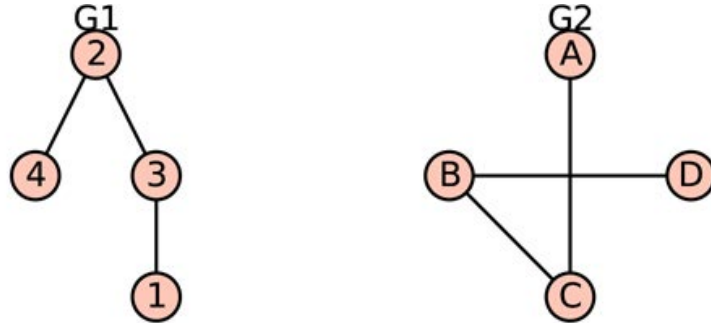


Figura 1.1.3: Ejemplo de isomorfismo de grafos.

En este ejemplo un isomorfismo válido entre $G1$ y $G2$ es

$$\begin{aligned}\varphi : 1 &\mapsto A \\ 2 &\mapsto B \\ 3 &\mapsto C \\ 4 &\mapsto D\end{aligned}$$

Definición 1.1.9. Definimos:

- $G \cup G' := (V \cup V', E \cup E')$
- $G \cap G' := (V \cap V', E \cap E')$

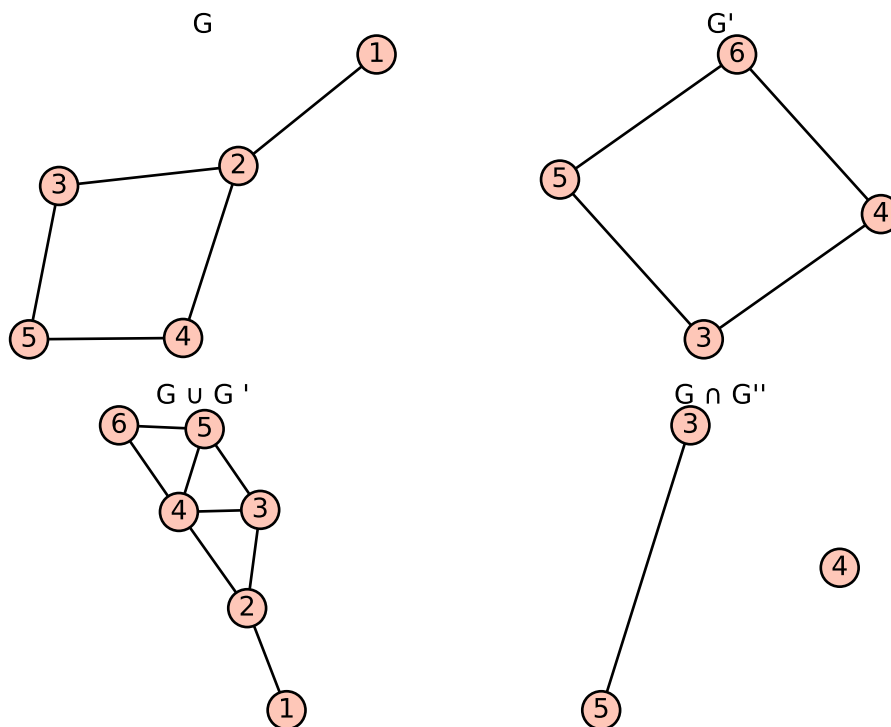


Figura 1.1.4: Ejemplo de unión e intersección de grafos.

Definición 1.1.10. Si $G \cap G' = \emptyset$, decimos que son **disjuntos**.

Si $V' \subset V$ y $E' \subset E$, decimos que G' es **subgrafo** de G , y que G es **supergrafo** de G' . Notamos $G' \subset G$. Si G' es subgrafo de G pero $G \neq G'$, decimos que G' es **subgrafo propio** de G y análogamente decimos que G **supergrafo propio** de G' ; notamos $G' \subsetneq G$.

Definición 1.1.11. Sea $G' \subset G$, tal que G' contiene todas las aristas $xy \in E$ tal que $x, y \in V'$. Decimos que G' es un **subgrafo inducido** de G .

En este caso diremos que V' **induce** G' en G , y escribimos $G' = G[V']$ para un subconjunto $V' \subset V$.

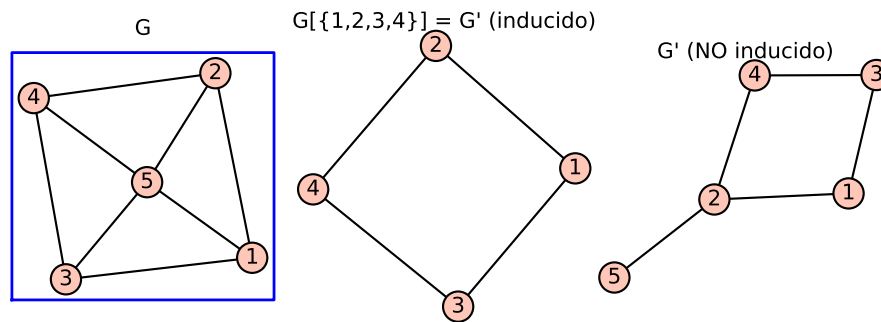


Figura 1.1.5: Ejemplo de grafo inducido y no inducido.

1.2. Clase 2: 18/03/23

Definición 1.2.1. Si $U \subset V(G)$, escribimos $G \setminus U$ para denotar $G[V \setminus U]$. Es decir, $G \setminus U$ se obtiene de borrar los vértices de U y sus aristas incidentes.

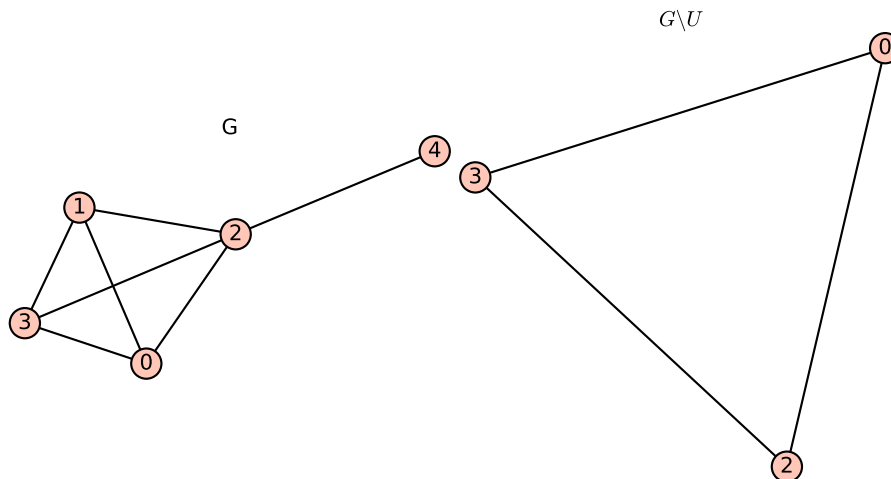


Figura 1.2.6: Ejemplo de $G \setminus U$.

Definición 1.2.2. El **complemento** \overline{G} de un grafo G , es el grafo con vértices $V(G)$ y que tiene una arista xy si y solo si $xy \notin E(G)$.

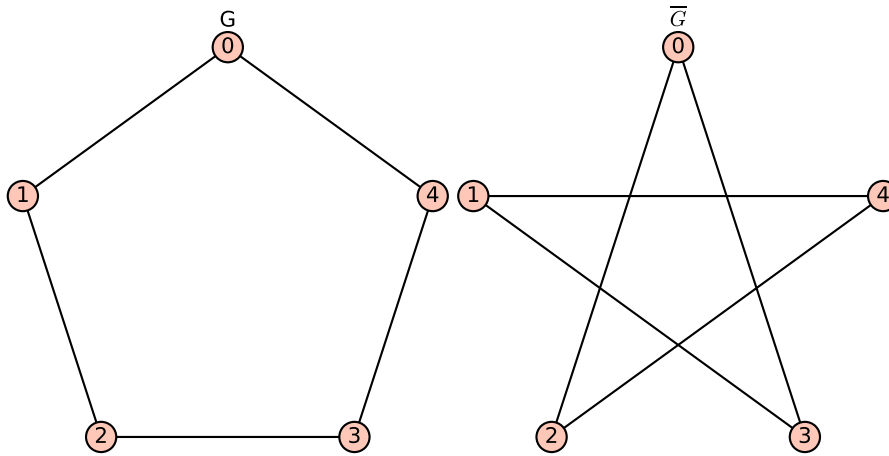


Figura 1.2.7: Ejemplo de complemento.

Notar que en el ejemplo de arriba, G y \bar{G} son isomorfos. Esto no pasa necesariamente, por ejemplo el complemento de un grafo completo es el grafo sin aristas.

1.2.1. El grado de un vértice

Definición 1.2.3. Sea G un grafo no vacío, y sea $v \in V(G)$. El conjunto de vecinos de v lo denotamos como $N(v)$ o si el contexto no es claro $N_G(v)$. Llamamos a este conjunto el **vecindario** de v .

Más en general, si $U \subset V(G)$, no vacío. El **vecindario** de U es el subconjunto de vértices de $V(G) \setminus U$ que contiene vecinos de algún elemento de U . Notamos $N(U)$ o $N_G(U)$.

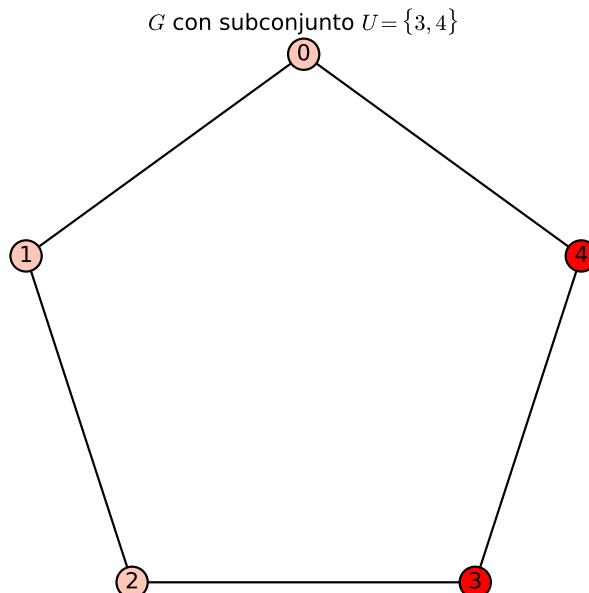


Figura 1.2.8: Ejemplo de vecindario de $U = \{3, 4\}$. Tenemos que $N(U) = \{0, 2\}$.

Definición 1.2.4. El **grado** de un vértice $v \in V(G)$ es el número de aristas que inciden en v y lo denotamos como $d(v)$ o $d_G(v)$. Notar que

$$d(v) = |N(v)|,$$

porque no permitimos multigrafos.

Si v tiene grado 0, decimos que es **aislado**.

Definición 1.2.5. Definimos la cantidad de G :

$$\delta(G) := \min_{v \in V(G)} \{d(v)\}.$$

Es el **grado mínimo** de G .

Análogamente, tenemos la cantidad G :

$$\Delta(G) := \max_{v \in V(G)} \{d(v)\}.$$

Es el **grado máximo** de G .

En el caso que todos los vértices tienen el mismo grado, i.e. $\delta(G) = \Delta(G)$, decimos que G tiene grado k y que G es **k -regular** o simplemente **regular**.

Definición 1.2.6. Definimos la cantidad del grafo G :

$$d(G) := \frac{1}{|V(G)|} \sum_{v \in V(G)} d(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{v \in V(G)} d(v).$$

Es el **grado promedio** de G .

Observación 1.2.7.

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)| = 2||G||.$$

Con lo cual,

$$d(G) = 2 \frac{|E(G)|}{|V(G)|} = 2 \frac{||G||}{|G|}.$$

Proposición 1.2.8. El número de vértices de grado impar en un grafo siempre par.

Demostración. Por la observación anterior, $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|G| \equiv 0 \pmod{2}$ con lo cual,

$$\#\{v \in V(G) \mid d(v) \equiv 1 \pmod{2}\} = \sum_{v \mid d(v) \equiv 1 \pmod{2}} d(v) \equiv 0 \pmod{2}.$$

□

Proposición 1.2.9. *Para todo grafo G con al menos una arista, existe un subgrafo H tal que*

$$\delta(H) > \frac{|E(H)|}{|V(H)|} \geq \frac{|E(G)|}{|V(G)|}.$$

Demostración. En efecto, la idea es la siguiente: construimos una secuencia de grafos $G = G_0 \supset G_1 \supset \dots$ de subgrafos inducidos, tales que si G_i tiene un vértice de grado $d(v_i) \leq \frac{|E(G_i)|}{|V(G_i)|}$, entonces tomamos $G_{i+1} := G_i \setminus v_i$; si no, la secuencia termina en $H := G_i$. Por la elección de v_i se sigue que $\frac{|E(G_{i+1})|}{|V(G_{i+1})|} \geq \frac{|E(G_i)|}{|V(G_i)|}$, pues esto sucede si y solo si

$$\begin{aligned} \frac{|E(G_i)| - d(v_i)}{|V(G_i)| - 1} &\geq \frac{|E(G_i)|}{|V(G_i)|} \\ \Leftrightarrow (|E(G_i)| - d(v_i)) |V(G_i)| &\geq |E(G_i)| (|V(G_i)| - 1) \\ \Leftrightarrow -d(v_i) |V(G_i)| &\geq -|E(G_i)| \\ \Leftrightarrow \frac{|E(G_i)|}{|V(G_i)|} &\geq d(v_i). \end{aligned}$$

En particular, $\frac{|E(H)|}{|V(H)|} \geq \frac{|E(G)|}{|V(G)|}$.

Afirmamos que H tiene al menos una arista, de lo contrario $\frac{|E(H)|}{|V(H)|} = 0 < \frac{|E(G)|}{|V(G)|}$, por tener G al menos una arista. En particular, $H \neq \emptyset$. Como H es el mínimo de esta construcción, se tiene que $\delta(H) > \frac{|E(H)|}{|V(H)|}$. □

1.2.2. Caminos y Ciclos

Definición 1.2.10. Un **camino** es un grafo no vacío $P = (V, E)$ de la forma

$$V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}, \quad k \geq 0.$$

Con

$$E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\}.$$

Donde todos los x_i son distintos.

Decimos que $|G|$, i.e. el número de aristas, es su **longitud**.

Usualmente denotamos al camino P como la secuencia de vértices

$$P = x_0x_1 \dots x_k.$$

En este caso diremos que P es un **camino entre** x_0 y x_k .

Notar que $|G| = k + 1$, y que $|G| = k$.

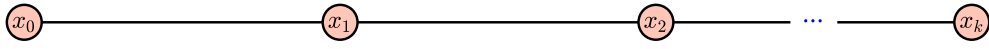


Figura 1.2.9: Dibujo de un camino de $k + 1$ vértices.

Definición 1.2.11. Sea C un grafo que se construye a partir de un camino $P = x_0x_1 \cdots x_k$ con $k \geq 1$, en donde agregamos la arista x_kx_0 . Este grafo se llama **ciclo**. Notamos a esta construcción $C := P + x_kx_0$ o $x_0x_1 \cdots x_kx_0$.

La **longitud** de un ciclo es su número de aristas, es decir $|C|$.

Notar que $|C| = k$.

Definición 1.2.12. Sea G un grafo. Definimos la **cintura** de G como la mínima longitud $g(G)$ de un ciclo en G .

Definimos la **circunferencia** como la máxima longitud de un ciclo en G .

Si G no tiene ciclos, definimos $g(G) := \infty$ y circunferencia 0.

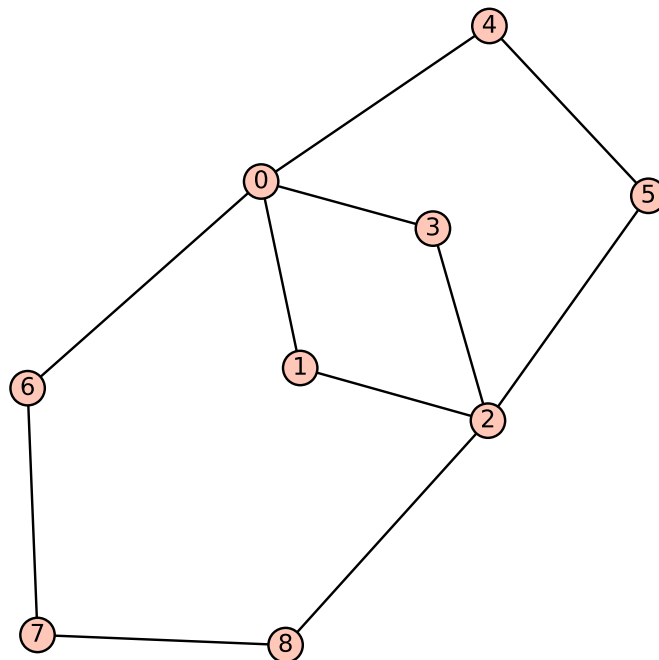


Figura 1.2.10: Ejemplo de ciclos en un grafo de cinutro igual a 4.

Definición 1.2.13. Una arista que une a dos vértices de un ciclo C , pero que no pertenece a $E(C)$, se la llama **cuerda**.

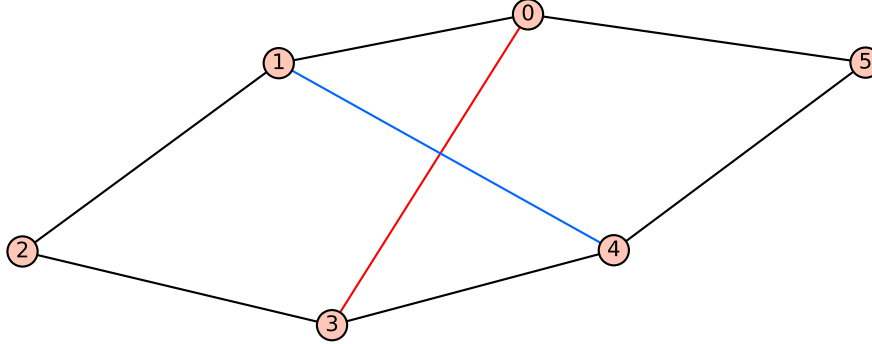


Figura 1.2.11: Ejemplo de dos cuerdas de un ciclo C .

Proposición 1.2.14. *Todo grafo G contiene un camino de largo $\geq \delta(G)$. Más aún, si $\delta(G) \geq 2$, entonces también contiene un ciclo de largo $\geq \delta(G) + 1$.*

Demostración. Sea $P = x_0x_1 \dots x_k$ un camino de largo k máximo en G . El caso $k = 1$ es inmediato, luego supongamos que $k \geq 1$.

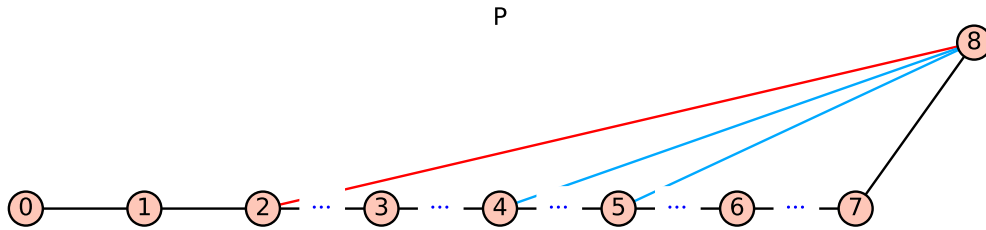


Figura 1.2.12: Camino P de longitud maximal k . Imaginemos que $x_0 = 0$ y que $x_k = 8$ (no pude cambiar las etiquetas en sage math cuando grafique el grafo).

Notar que por maximalidad de P , todos los vecinos de x_k están en $V(P)$, de lo contrario habria un camino más largo. Con lo cual

$$|V(P)| = k \geq d(x_k) + 1 \geq \delta(G) + 1.$$

Con lo cual, $|P| \geq \delta(G)$.

Ahora, sea $i < k$ el menor índice tal que $x_i x_k \in E(G)$. Como $\delta(G) \geq 2$, se sigue que $i < k - 1$, i.e. x_i y x_k no son adyacentes, luego tomamos el ciclo $C = x_i x_{i+1} \dots x_k x_i$. Notar que entonces la longitud de $|C| \geq \delta(x_k) + 1 \geq \delta(G) + 1$. \square

1.3. Clase 3: 20/03/23

Definición 1.3.1. La **distancia** entre dos vértices x, y de un grafo G , es la longitud de un camino con longitud mínima entre x, y , la notamos

$$d(x, y).$$

Si no hay un camino entre x e y , escribimos

$$d(x, y) = \infty.$$

El **diámetro** de G es el máximo de las distancias entre todos los pares de vértices, lo notamos

$$\text{diam}(G).$$

Notar que $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.

Definición 1.3.2. El **radio** de un grafo G , denotado $\text{rad}(G)$, es la cantidad

$$\text{rad}(G) = \min_{x \in V(G)} \max_{y \in V(G)} d(x, y).$$

Decimos que un vértice $v \in V(G)$ es **central**, si

$$\max_{y \in V(G)} d(v, y) = \text{rad}(G).$$

Es decir, v minimiza la función $x \mapsto \max_{y \in V(G)} d(x, y)$.

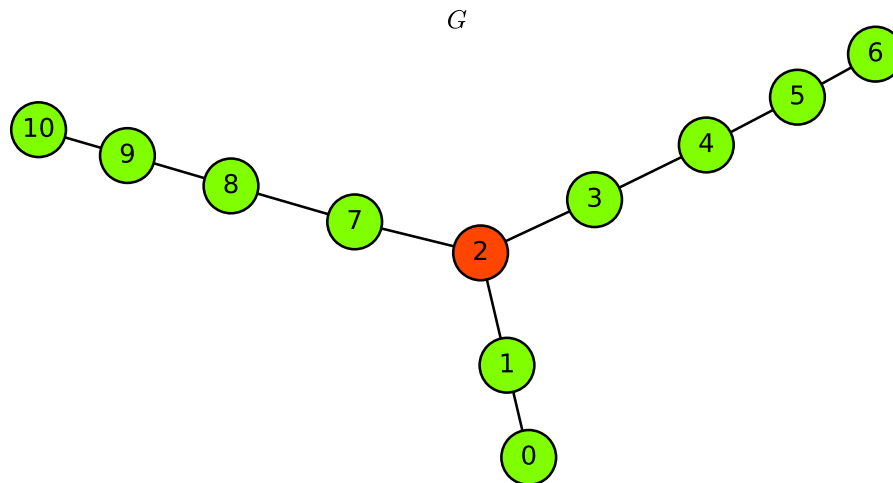


Figura 1.3.13: Ejemplo de vértice central es 3 y tiene radio 4. El grafo G tiene diámetro 8.

Ejercicio 1.3.3 (Entrega de taller). Probar que

$$\text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq 2\text{rad}(G).$$

Solución. Si el grafo G no es conexo, luego el radio y el diámetro son infinito, luego vale la desigualdad. En efecto, por un lado si $x \in V(G)$ está fijo, como G no es conexo existe $y \in V(G)$ tal que $d(x, y) = \infty$, con lo cual $\max_{y \in V(G)} d(x, y) = \infty$ para x fijo, luego si tomamos mínimo sobre los x se tiene que $\text{rad}(G) = \infty$. Por otro lado, $\text{diam}(G) = \infty$ porque es el máximo sobre todas las distancias entre dos vértices, y como mencionamos recién, al no ser conexo el grafo tiene que haber una distancia infinita entre algún par de vértices.

Ahora supongamos que G es conexo, es decir para todo par de vértices x, y existe un camino P_{xy} que los conecta, sin pérdida de generalidad supongamos que es el más corto, i.e. $d(x, y)$ es la longitud de P_{xy} . Se deduce que $d(x, y) \leq \text{diam}(G)$ por definición de diámetro. Tomando máximo sobre y y luego mínimo sobre x se sigue por definición que

$$\text{rad}(G) \leq \text{diam}(G).$$

Esto prueba la primera desigualdad. Ahora veamos la segunda.

Sea o un vértice que minimice la función $x \mapsto \max_{y \in V(G)} d(x, y)$, es decir, o es central. Ahora tomemos dos vértices arbitrarios x, y . Como o minimiza la función anterior, tenemos que $d(x, o) \leq \text{rad}(G) = \max_{z \in V(G)} d(o, z)$, es decir existe un camino de longitud $\leq \text{rad}(G)$ que une x con o . Análogamente, existe un camino de longitud $\leq \text{rad}(G)$ que une o con y . Concatenando ambos caminos obtenemos un camino entre x e y de longitud $\leq 2\text{rad}(G)$. Tomando máximo sobre x, y obtenemos la otra desigualdad:

$$\text{diam}(G) \leq 2\text{rad}(G).$$

□

Si queremos relacionar el radio o diámetro con el grafo mínimo, promedio o máximo debemos tener otros parámetros como intermediario. Por ejemplo, los caminos tienen grado mínimo 1 pero pueden tener radio y diámetro arbitrariamente grandes. O podemos tener radio y diámetro arbitrariamente grande y grado mínimo arbitrario. Antes de dar un ejemplo, necesitamos la siguiente definición:

Definición 1.3.4. Sea G un grafo, definimos G^k como la **potencia** de G . Es el grafo que contiene los mismos vértices y las aristas son las originales pero agregando a cada vértice x una arista incidente con cada vértice y a distancia $d(x, y) \leq k$.

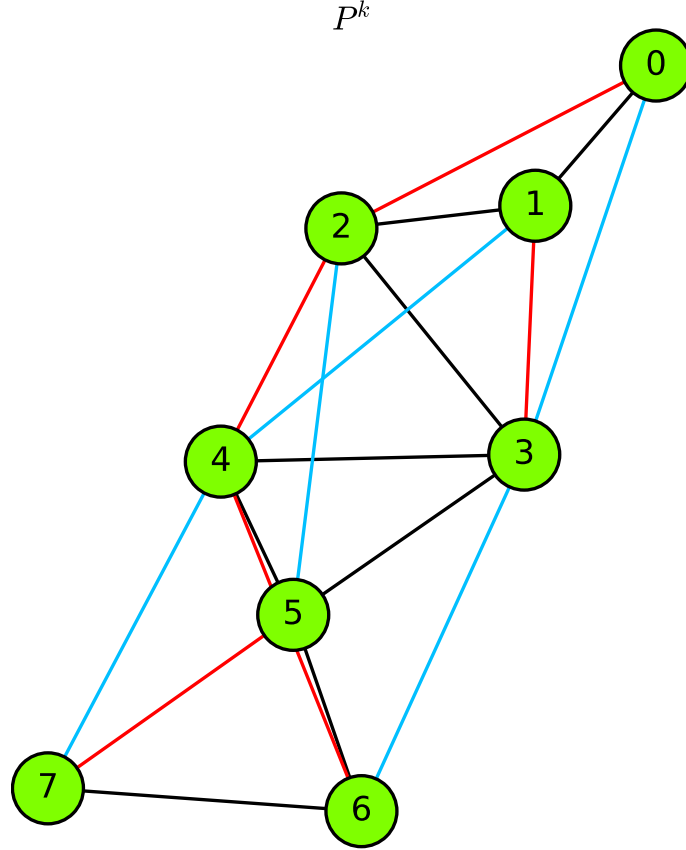


Figura 1.3.14: El camino $P : 0, 1, 2, \dots, 7$ dibujado en negro, le agregamos aristas para dibujar P^3 . Las aristas rojas conectan nodos a distancia 2 y las azules 3.

Por ejemplo, todo camino de longitud $2n$ tiene $2n + 1$ vértices, radio n , diámetro $2n$. Luego P^k tiene misma cantidad de vértices (pero no aristas), mismo radio y diámetro, pero grado k para todo $1 \leq k \leq 2n$.

Vamos a relacionar el radio y grado máximo a través de el número de vértices. Un grafo puede tener muchos vértices, por ejemplo si tiene radio alto, o si tiene grado máximo alto,

Proposición 1.3.5. Sea $d \geq 3$. Un grafo G con radio a lo más k y grado máximo a lo más d . Entonces tiene menos que $\frac{d}{d-2}(d-1)^k$ vértices.

Demostración. Sea z un vértice central de G y D_i el conjunto de los vértices a distancia i de z .

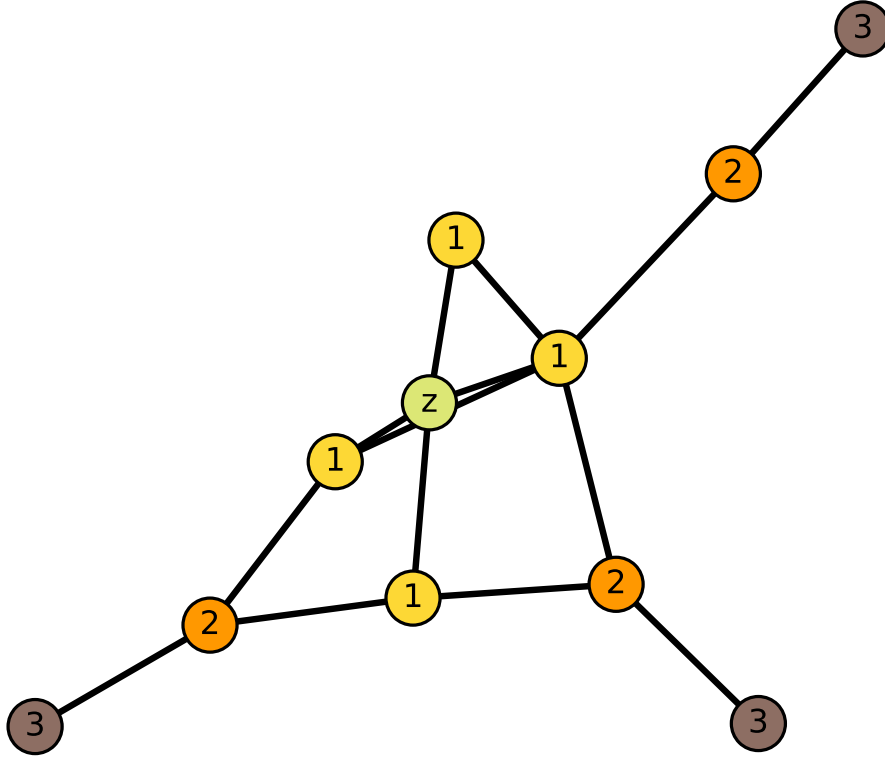


Figura 1.3.15: D_0 son los verdes, D_1 los amarillos, y así...

Tenemos que $|D_0| = 1, |D_1| \leq \Delta \leq d$. Notar que cada vértice de D_1 tiene como vecino en D_2 a lo sumo $d - 1$ vértices, pues ya es vecino de z . En general, tenemos que

$$|D_{i+1}| \leq |D_i|(d - 1), \quad i \geq 1.$$

Con lo cual

$$|D_{i+1}| \leq |D_1|(d - 1)^i = d(d - 1)^i, \quad i \geq 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned} |V(G)| &= \sum_{i=0}^k |D_i| \leq 1 + d \sum_{i=0}^{k-1} (d - 1)^i \\ &= 1 + d(d - 1)^k - 1/d - 2 \\ &< \frac{d}{d - 2} (d - 1)^k. \end{aligned}$$

□

Observación 1.3.6. 1. Cuando el radio es $k = 1$, por ejemplo en un grafo estrella, la cantidad de vértices es asintóticamente igual a $\frac{d}{d-2}(d-1)^k$ cuando $d \rightarrow \infty$.

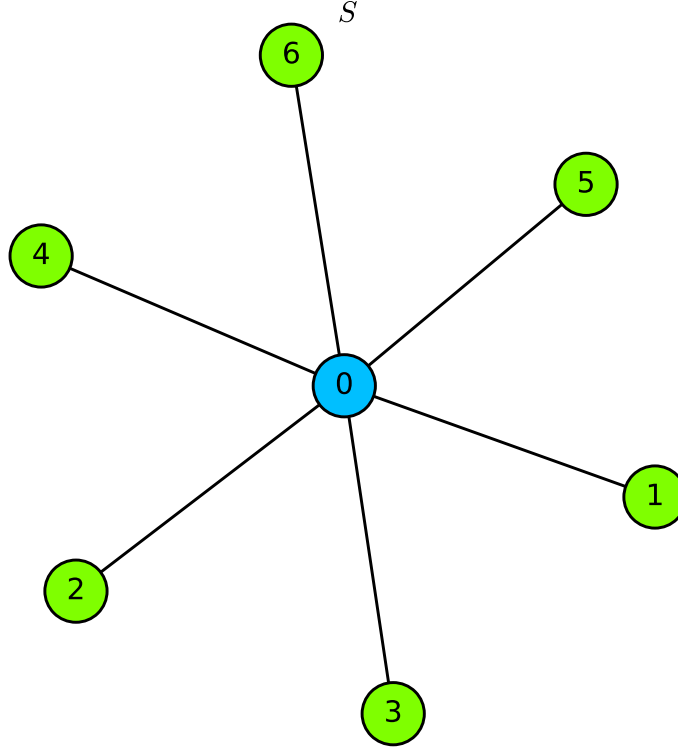


Figura 1.3.16: Ilustración del grafo estrella.

2. La cota no es para nada óptima para grafos de potencia P^k de caminos. Por ejemplo, si P tiene $2n + 1$ vértices, $k = n$ y $d = k \geq 3$. Luego en el mejor de los casos con $d = 3$, tenemos que

$$|P^k| = 2n + 1 \ll 3 \cdot 2^n.$$

O sea que la diferencia es exponencial.

Similarmente, podemos acotar el orden de G por abajo, si es que podemos controlar inferiormente δ y g . Definamos la cantidad para $d \in \mathbb{R}$ y $g \in \mathbb{N}$:

$$n_0(d, g) := \begin{cases} 1 + d \sum_{i=0}^{r-1} (d-1)^i & \text{si } g = 2r + 1 \text{ es impar,} \\ 2 \sum_{i=0}^{r-1} (d-1)^i & \text{si } g = 2r \text{ es par.} \end{cases}$$

Teorema 1.3.7 (Versión débil). ¹ Sea G un grafo con $\delta(G) \geq d \geq 2$ y $g(G) \geq g \in \mathbb{N}$. Entonces

$$|G| \geq n_0(d, g).$$

En particular, $|G| \geq n_0(d(G)/2, g)$.

Demostración. Notar que la función es creciente en ambas variables para todo $d \geq 2$ y $g \in \mathbb{N}$. Con lo cual, basta probar la afirmación para $d = \delta(G)$ y $g = g(G)$.

Sea v un vértice de un ciclo C de largo mínimo, i.e. $\geq g$. Consideremos como D_i al conjunto de vértices a distancia i de v en G . Como antes, $|D_0| = 1$, para cada vértice de D_{i+1} tiene un vecino en D_i si $i > 0$; como cada vértice de D_i tiene un vecino

¹La versión fuerte de este teorema, por Alon, Hoory and Linial, 2002, dice que si $d(G) \geq d \geq 2$ y $g(G) \geq g \in \mathbb{N}$, entonces $|G| \geq n_0(d, g)$.

en D_{i-1} , se sigue que $|D_{i+1}| \geq (d-1)|D_i|$ si $i < r$, ya que de lo contrario existiría un ciclo de longitud más chica que r . Reiterando recursivamente esta igualdad, se sigue que $|D_{i+1}| \geq (d-1)^i |D_1|$ para todo $i < r$

Luego como

$$G = \sqcup_i D_i \supset \sqcup_{0 \leq i \leq r} D_i,$$

se sigue que

Caso $g = 2r + 1$

$$|G| \geq \sum_{0 \leq i \leq r} |D_i| = 1 + \sum_{i=0}^{r-1} |D_{i+1}| \geq 1 + \sum_{i=0}^{r-1} (d-1)^i |D_1| \geq 1 + \sum_{i=0}^{r-1} (d-1)^i d.$$

Caso $g = 2r$ Análogo.

La última afirmación vale, pues sea $d = d(G)/2 = \epsilon(G)$, luego por la Proposición ??, existe un subgrafo H de G tal que $\delta(H) > d$, y por lo tanto aplicando este teorema a H se tiene que $|G| \geq |H| \geq n_0(\delta(H), g(H))$, pero como $\delta(H) > d$ y $g(H) \geq g(G) = g$, y n_0 es creciente en ambas variables, se sigue que $|G| \geq n_0(d, g)$. \square

Corolario 1.3.8. Si $\delta(G) \geq 3$, entonces $g(G) < 2 \log_2 |G|$.

Demostración. Tomamos $g = g(G)$. Si es par, entonces

$$n_0(3, g) = 2 \frac{2^{g/2} - 1}{2 - 1} = 2^{g/2} + (2^{g/2} - 2) > 2^{g/2}.$$

Si g es impar, entonces

$$n_0(3, g) = 1 + 3 \frac{2^{(g-1)/2} - 1}{2 - 1} = \frac{3}{\sqrt{2}} 2^{g/2} - 2 > 2^{g/2}.$$

Luego por el teorema anterior el resultado se sigue luego de tomar logaritmo en base 2. \square

Proposición 1.3.9. Todo grafo G que contiene al menos un ciclo, satisface

$$g(G) \leq 2 \text{diam}(G) + 1.$$

Demostración. Supongamos que no. Es decir, si C es el ciclo de G con menor longitud, se tiene que $|C| = g(G) \geq 2 \text{diam}(G) + 2$. Es decir, existen dos vértices de C , digamos x, y tales que su distancia en C es mayor o igual a $\text{diam}(G) + 1$. En G , estos vértices están a distancia menor que $\text{diam}(G) + 1$, sea P el camino mas corto en G que une a x, y (i.e. tiene longitud $< \text{diam}(G) + 1$), luego P no es subgrafo de G . Con lo cual, existe un subcamino de P que es un C -camino; luego este camino unión el $x - y$ camino más corto de C es un ciclo de longitud más chica que la de C , absurdo. \square

1.3.1. Conexidad

Definición 1.3.10. Un grafo es **conexo** si es no vacío y para todo par de vértices, existe un camino que los une a ambos.

Proposición 1.3.11. Los vértices de un grafo conexo G se pueden enumerar, digamos v_1, v_2, \dots, v_n tal que $G_i = G[v_1, v_2, \dots, v_i]$ es conexo para todo $i = 1, \dots, n$.

Demostración. Probaremos la proposición por inducción en n . Sea v arbitrario, y asumamos por inducción que v_1, \dots, v_i han sido escogidos para $i < |V(G)|$ y que G_i es conexo

Escojo un vértice v no enumerado aún. Como G es conexo existe un camino P entre v_1 y v .

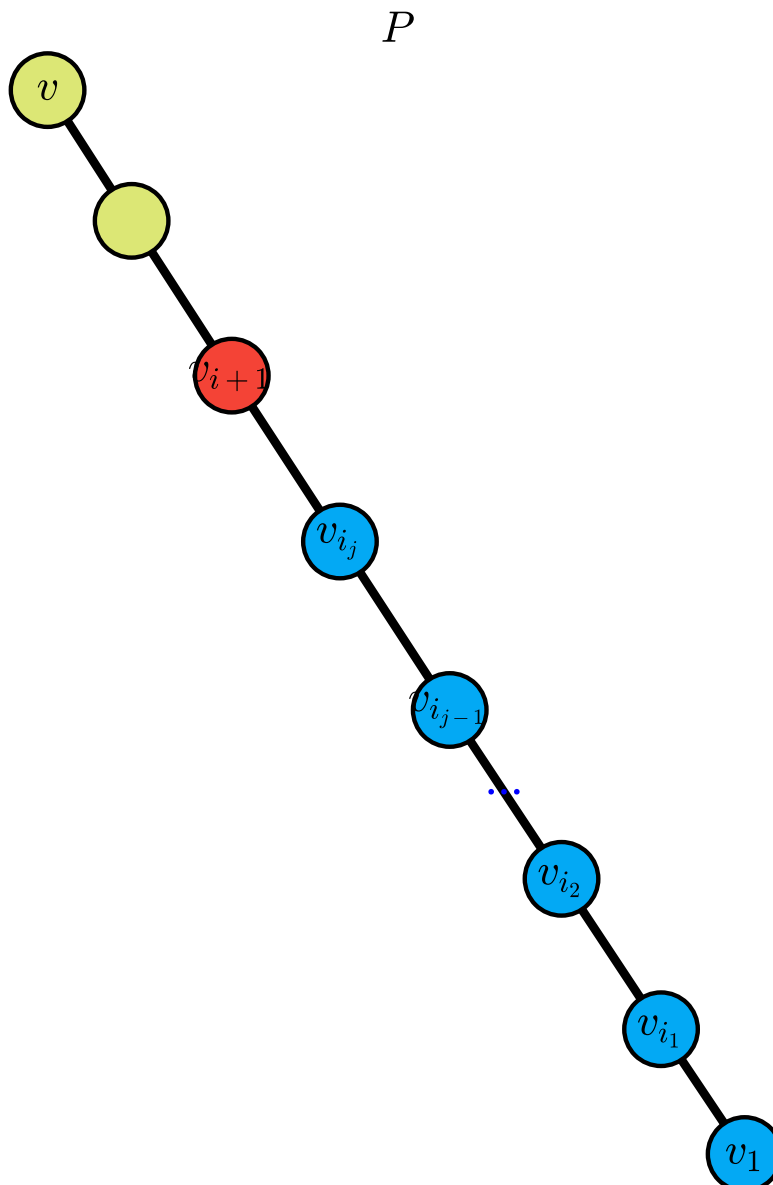


Figura 1.3.17: Camino P que une a v y v_1 . En color azul representa los vértice de G_i en P .

Tomamos como v_{i+1} al último vértice en P , contado desde v , que no está en G_i . Como v_{i+1} tiene vecino en G_i y G_i es conexo se tiene que G_{i+1} es conexo.

□

Ejemplo 1.3.12. El siguiente dibujo es un mal ejemplo:

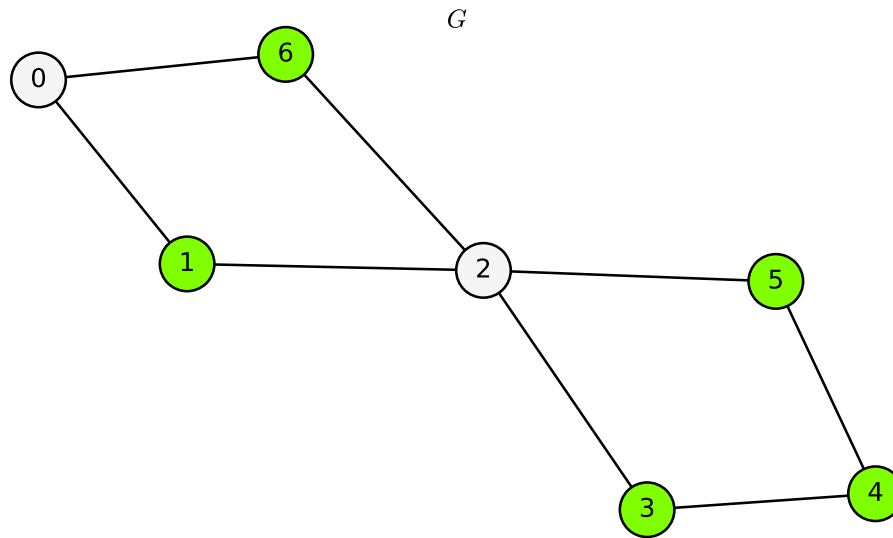


Figura 1.3.18: Mal ejemplo, pues 0 y 2 no inducen un grafo conexo $G[0,2]$.

1.4. Clase 4: 23/03/23

Definición 1.4.1 (Maximalidad). Consideremos una propiedad P , para para algún grafo, conjunto de vértices, etc. Decimos que un conjunto de vértices U es maximal para P , si U cumple P , y $U \cup \{v\}$ con $v \notin U$ no cumple P .

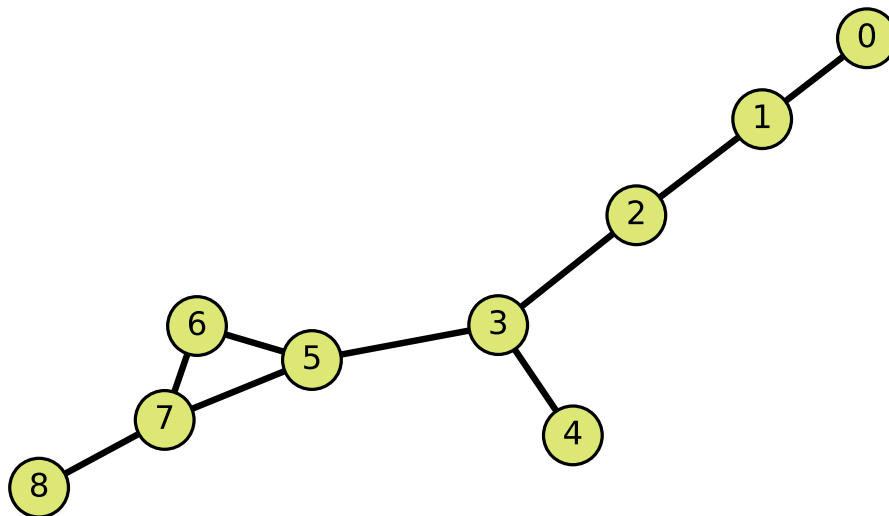


Figura 1.4.19: Ejemplo de camino maximal: 0,1,2,3,5,6,7,8. Sin embargo, 5,7,8 no lo es.

Definición 1.4.2. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Un subgrafo conexo maximal de G es llamado una **componente** o **componente conexa** de G .

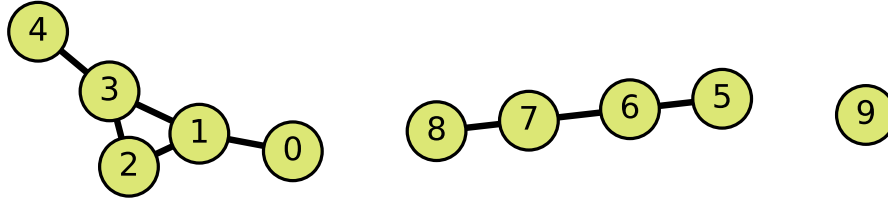


Figura 1.4.20: Ejemplo de componentes: tiene 3.

Notación 1.4.3. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Vamos a notar a la cantidad de aristas por vértice como la cantidad:

$$\epsilon(G) = \frac{|E|}{|V|}.$$

Teorema 1.4.4. Sea $k \in \mathbb{N}$. Todo grafo G con $d(G) \geq 4k$ tiene un subgrafo H que es $(k-1)$ -conexo tal que $\epsilon(H) > \epsilon(G) - k$.

Demostración. Notemos por $\gamma = \epsilon(G)$; como $\gamma = \frac{1}{2}d(G)$, tenemos que $\gamma \geq 2k$. Consideremos los subgrafos $G' \subset G$ tales que

$$|G'| \geq 2k \quad \text{y} \quad ||G'|| > \gamma(|G'| - k);$$

esta familia es no vacía, pues G cumple esta condición; notemos por H al subgrafo de menor orden que cumple esta condición. En efecto, G cumple ambas condiciones, pues por un lado $||G|| > \gamma(|G| - k) = ||G|| - \gamma k$, y por otro lado

$$\Delta(G) \geq d(G) \geq 4k,$$

con lo cual existe un vértice de G de grado máximo, con al menos $4k$ vecinos, es decir $|G| \geq 4k + 1 \geq 2k$.

Notar que ningún grafo G' que cumpla la condición tiene orden exactamente $2k$, ya que esto implicaría que $||G'|| > \gamma k \geq 2k^2 > \binom{|G'|}{2} = k(2k-1)$, lo cual contradice la cantidad máxima de aristas que puede tener un grafo de $|G'|$ vértices. Por minimalidad de H , se tiene que $\delta(H) > \gamma$: de lo contrario podríamos eliminar un vértice de grado a lo más γ y obtener un grafo $G' \subsetneq H$ que satisface la condición. En particular, como existe un vértice de grado $> \gamma$, se sigue que $|H| \geq \gamma$. Dividiendo la desigualdad $||H|| > \gamma|H| - \gamma k$ de la condición por $|H|$, tenemos que $\epsilon(H) > \gamma - k$, como queríamos.

Falta ver que H es efectivamente $(k+1)$ -conexo. De lo contrario, H tendría una separación propia $\{U_1, U_2\}$ de orden a lo más k ; escribamos $H[U_i] =: H_i$. Como todo vértice $v \in U_1 \setminus U_2$ tiene $d(v) \geq \delta(H) > \gamma$ vecinos de H en H_1 , tenemos que $|H_1| \geq \gamma \geq 2k$. Similarmente, $|H_2| \geq 2k$. Por la minimalidad de H , ninguno de los H_1, H_2 puede satisfacer la condición, con lo cual

$$||H_i|| \leq \gamma(|H_i| - k), \quad i = 1, 2.$$

Sin embargo, tenemos que

$$\begin{aligned} ||H|| &\leq ||H_1|| + ||H_2|| \\ &\leq \gamma(|H_1| + |H_2| - 2k) = \gamma(|H| + |H_1 \cap H_2| - 2k) \\ &\leq \gamma(|H| - k) \quad (\text{pues } |H_1 \cap H_2| \leq k), \end{aligned}$$

contradiendo la condición. □

1.4.1. Árboles y bosques

Definición 1.4.5. Un grafo acíclico, es decir, sin ciclos, es llamado un **bosque**.

A un bosque conexo lo llamamos **árbol**, es decir un grafo conexo y acíclico.

Los vértices de grado 1 son sus **hojas**, los otros vértices son sus **vértices interiores**.

Notar que las componentes conexas de un bosque son árboles.

Observación 1.4.6. Los subgrafos conexos de un árbol son árboles.

Figura 1.4.21: Un árbol con hojas y vértices interiores.

Ejercicio 1.4.7. Todo árbol tiene al menos 1 hoja. Más aún, si el árbol tiene más de un vértice entonces tiene al menos 2 hojas. En particular los árboles tienen grado mínimo $\delta = 1$.

Solución. Sea P un camino maximal en el árbol, y miro uno de los extremos (podría haber solo uno si el camino tiene un solo vértice). Ese extremo si tuviera grado ≥ 2 , el otro vecino debería caer en el camino por maximalidad, luego existe un ciclo, absurdo!. Más aún, si el árbol tiene más de un vértice entonces el camino maximal que tomamos tiene dos vértices, i.e. dos hojas. \square

Esto implica lo mismo para caminos, pues los caminos son árboles.

Teorema 1.4.8. Sea T un grafo. Las siguientes definiciones son equivalentes:

- (I) T es árbol.
- (II) Cada par de vértices en T están unidos por un único camino.
- (III) T es conexo, pero $T \setminus e$ es desconexo para todo $e \in E(T)$. Es decir, es minimalmente conexo.
- (IV) T es conexo, pero $T \setminus v$ es desconexo para todo $v \in V(T)$ que no sea hoja.
- (V) T es acíclico, pero $T \cup xy$ tiene un ciclo para cualquier par de vértices x, y no adyacentes. Es decir, es maximalmente acíclico.

Demostración.

- (i) \Rightarrow (ii) Si no, existe al menos un camino por ser conexo, luego si hay dos caminos distintos entonces podemos construir un ciclo.
- (ii) \Rightarrow (iii) Sea e una arista entre xy , entonces xy es un camino entre esos vértices, por hipótesis es el único, luego al quitarlo debe quedar desconexo, de lo contrario es que había otro camino.
- (iii) \Rightarrow (iv) Como v no es una hoja, es vecino de al menos dos vértices distintos, digamos a, b . Si todo camino entre a y b pasa por v , entonces quitar este vértice haría que T fuera desconexo. Supongamos que existe un camino que une a, b pero que no contiene a v . Luego si quitamos la arista av o vb el grafo sigue siendo conexo, pues tenemos un ciclo avb , absurdo.
- (iv) \Rightarrow (v) T es acíclico, pues de lo contrario podríamos quitar un vértice y que siga quedando conexo. En efecto, sea C un ciclo en T , digamos con vértices $x_0, x_1, \dots, x_n, x_0$ y $n \geq 2$. Si quitamos cualquier vértice v de C , este queda conexo, pero veamos que T también. De lo contrario, es que v separa a T en dos componentes conexas, es decir, todos los caminos entre C y $T \setminus C$ pasan por v , con lo cual tomando otro vértice de C que no sea v y quitándolo, nos quedaría que T menos ese punto es conexo, absurdo.

Sean x, y no adyacentes. Consideremos P un camino entre x, y . Como no son adyacentes este camino necesariamente tiene al menos un vértice en intermedio, digamos z . Por hipótesis, si quitamos z el grafo nos queda desconexo, y esto lo podemos hacer para cualquier $z \neq x, y$ en P . Con lo cual, $P \cup xy$ es un ciclo en $T \cup xy$.

- (v) \Rightarrow (i) Por hipótesis, T es acíclico. Sean $x, y \in V(G)$. Por hipótesis tenemos que $T \cup xy$ tiene un ciclo C_{xy} , luego C_{xy} debe contener la arista xy pues T es acíclico. Entonces $C_{xy} \setminus xy$ conecta a xy . Como x, y eran arbitrarios, tenemos que T es conexo.

□

Definición 1.4.9. Sea G un grafo. Un **árbol generador** de G es un subgrafo de G que es árbol y que contiene a todos los vértices de G .

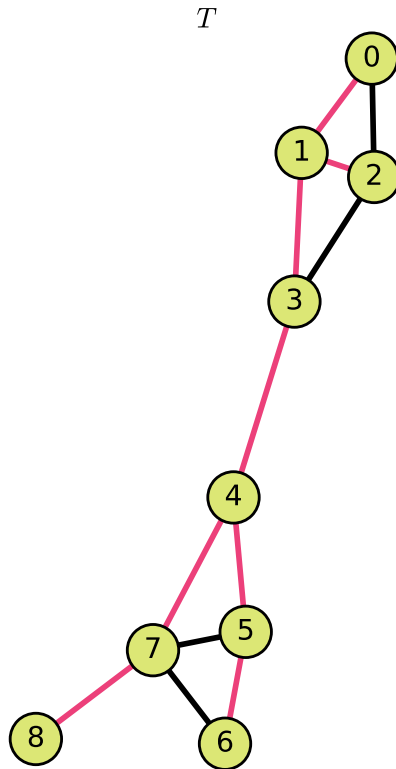


Figura 1.4.22: Ejemplo: árbol generador, con aristas en rojo.

Observación 1.4.10. Del dibujo anterior podemos ver que el árbol generador no necesariamente es único, y de hecho, puede haber otro que no sea isomorfo. Por ejemplo cambiemos los vértices del árbol en rojo, de manera que ya no tenga vértices de grado 3:

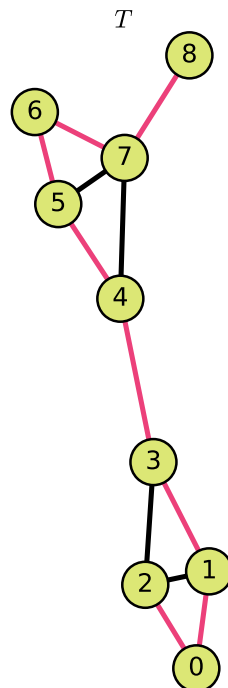


Figura 1.4.23: Otro árbol generador.

Proposición 1.4.11. *Todo grafo conexo tiene un árbol generador.*

\Leftrightarrow) Como T es conexo tiene árbol generador T' , y por la implicación anterior tiene $n - 1$ aristas, entonces $T = T'$, i.e. T es árbol. □

Corolario 1.5.2. *Todo grafo conexo de n vértices tiene al menos $n - 1$ aristas.*

Demostración. Tiene un árbol generador, que debe tener $n - 1$ aristas. □

Corolario 1.5.3. *Si T es un árbol y G es un grafo con $\delta(G) \geq |T| - 1$, entonces $T \subset G$, es decir G tiene un subgrafo isomorfo a T .*

Demostración. Sea v_1, \dots, v_n con $n = |T|$, una numeración de los vértices de T tal que $v_i, i \geq 2$ es una hoja de $T[v_1, \dots, v_{i-1}]$. Haremos inducción en estos vértices. El caso base es trivial. Veamos el paso inductivo: supongamos que G tiene a $T[v_1, \dots, v_{i-1}]$ como subgrafo con $i \leq n$, entonces como $\delta(G) \geq n - 1$, tenemos que $v_j, 1 \leq j \leq i - 1$ (el único vecino de v_i) tiene al menos $\delta(G) \geq n - 1$ vecinos en G , es decir, tiene un vecino que no está en $T[v_1, \dots, v_{i-1}]$, luego agregamos a ese vértice como v_i junto con la arista que le corresponde a v_j . □

De vez en cuando, es útil fijar un vértice r de un árbol T , que llamaremos **raíz**. Un árbol con una raíz fija, se denomina **árbol enraigado** (o en inglés, **rooted tree**). Recordemos que para todo $y \in V(T)$, existe un único camino entre r e y que denotaremos rTy ; esto induce un orden parcial $x \leq y$ si y solo si $x \in rTy$. Este orden en $V(T)$ se lo llama el **orden del árbol** asociado a T y r . Definimos los conjuntos:

$$[y] := \{x \mid x \leq y\} \quad \text{y} \quad [x] := \{y \mid y \geq x\}$$

la **clausura inferior** de y , y la **clausura superior** de x , respectivamente. En general, definimos $[X] := \bigcup_{x \in X} [x]$ y análogamente $[X]$, para un conjunto $X \subset V(T)$. Un conjunto X que coincide con $[X]$, se dice **cerrado inferiormente**, análogamente en el otro caso tenemos que es **cerrado superiormente**.

Notar que r es el *mínimo* en este orden, y todas las hojas de T son *maximales*. Los extremos de una arista son siempre comparables entre sí, y los elementos de una clausura inferior forman una *cadena* (i.e. son comparables entre sí), sin embargo los elementos de una clausura superior no tienen por qué formar una cadena. Decimos que los vértice a distancia k de r tienen **altura** k y el conjunto de estos vértices forma el k -ésimo **nivel** de T .

Un árbol enraigado T contenido en un grafo G se dice **normal** en G , si los extremos de todo T -camino en G son comparables en el orden de T . Si T genera G , esto equivale a pedir que dos vértices de T sean comparables siempre que sean adyacentes en G ; ver la siguiente figura:

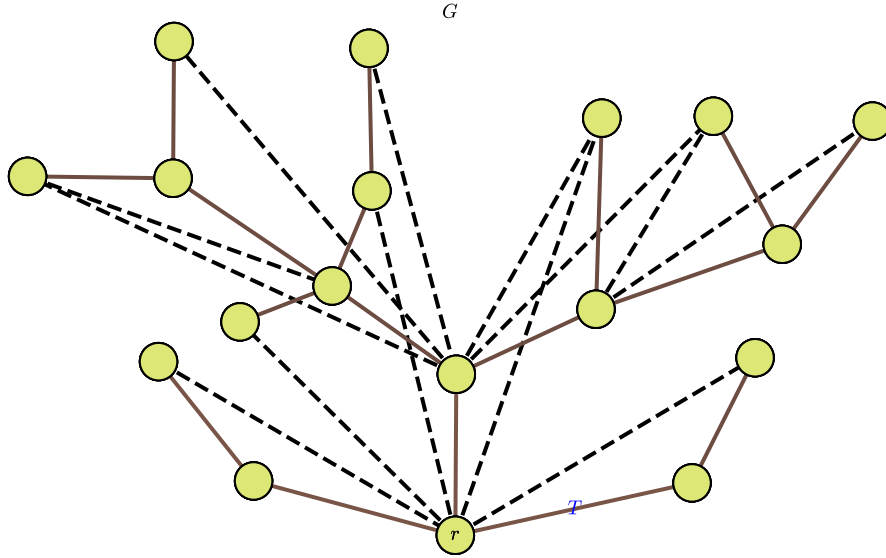


Figura 1.5.25: Un árbol generador normal con raíz r de un grafo G .

Un árbol normal puede ser una herramienta realmente útil para examinar la estructura de su grafo subyacente, ya que este grafo refleja las propiedades de separación de T :

Lema 1.5.4. Sea T un árbol normal en G . Tenemos que:

- (I) Dados $x, y \in V(T)$, están separados en G por el conjunto $[x] \cap [y]$.
- (II) Supongamos que T genera G . Si $S \subset V(T) = V(G)$ y S es inferiormente cerrado, luego las componentes conexas de $G \setminus S$ están generadas por los conjuntos $[x]$ con x minimal en $T \setminus S$.

Demostración. (I) Sea P cualquier camino entre x, y en G ; veamos que P interseca $[x] \cap [y]$. Sea t_1, \dots, t_n una sucesión de vértices en $P \cap T$, minimal con la propiedad que $t_1 = x$ y $t_n = y$ y t_i, t_{i+1} son comparables en el orden del árbol T para todo i . Dicha sucesión existe, pues el conjunto de todos los vértices en $P \cap T$, con el orden natural inducido por P , tiene esta propiedad, ya que como T es normal todo segmento $t_i P t_{i+1}$ es una arista de T o un T -camino. En nuestra secuencia minimal no podemos tener $t_{i-1} < t_i > t_{i+1}$ para ningún i , pues t_{i-1}, t_{i+1} son comparables y podríamos eliminar a t_i de nuestra secuencia, obteniendo así una secuencia más chica. Entonces nuestra secuencia tiene la forma

$$x = t_1 > \dots > t_k < \dots < t_n = y$$

(se podrían retirar los elementos en el "medio"). Así, $t_k \in [x] \cap [y] \cap V(P)$.

- (II) Consideremos una componente C de $G \setminus S$, y tomemos x un elemento minimal (T genera G) de $V(G)$. Afirmamos que x es único, en efecto, si x' fuera otro, ambos serían no comparables entre sí, pero por el ítem (i), cualquier camino entre x, x' contiene un vértice más chico que ambos, contradiciendo minimalidad en C . Por lo tanto todo vértice de C yace arriba de x : nuevamente por el ítem (i) hay un vértice debajo de ambos que por minimalidad es x . Recíprocamente, todo vértice $y \in [x]$ está en C , pues como S es cerrado inferiormente, el camino creciente xTy yace en $T \setminus S$. Consecuentemente, $V(C) = [x]$.

Ahora veamos que x es minimal no solo en $V(C)$, sino también en $T \setminus S$. Los vértices por debajo de x forman una cadena $[t]$ en T . Como t es vecino de x en T , la maximalidad de C como componente conexa de $G \setminus S$ implica que $t \in S$, y por lo tanto $[t] \subset S$ porque S es cerrado inferiormente. Esto completa la demostración de que toda componente de $G \setminus S$ está generada por un conjunto $[x]$ con x minimal en $T \setminus S$.

Recíprocamente, si x es un elemento minimal en $T \setminus S$, claramente también es minimal en la componente C de $G \setminus S$ que lo contiene. Eso significa que $V(C) = [x]$. □

Proposición 1.5.5. *Sea G un grafo conexo y $r \in V(G)$ arbitrario. Entonces existe un árbol generador normal T_r de G , con el orden inducido por r .*

Demostración. Sea G un grafo conexo y $r \in G$ un vértice fijo. Sea T un árbol normal maximal con raíz r , veamos que $V(T) = V(G)$, i.e. genera G .

Supongamos por el absurdo que no, y sea C una componente conexa de $G \setminus T$. Como T es normal, la vecindad $N_G(C)$ (que está contenida en T) es una cadena en T , obviamente porque C permite construir T -caminos entre cualquier par de vértices de $N_G(C)$. Sea x su máximo elemento (recordemos que estamos en una cadena), y sea $y \in C$ adyacente a x . Sea T' el árbol obtenido de T agregando la arista yx ; el orden de árbol de T' extiende al de T . Veamos que T' también es normal en G , contradiciendo maximalidad.

Sea P un T' -camino en G . Si sus extremos están en T , luego son comparables con el orden de T , y por lo tanto por el de T' también, ya que P es un T -camino también porque $T \subset T'$ y T es normal. Si alguno de los extremos de P fuera y , tenemos que $P \subset C$ salvo por su otro extremo z , que yace en $N_G(C)$. Como x era máximo, tenemos que $z \leq x$. Luego z, y serán comparables si vemos que $x < y$, es decir que $x \in rT'y$. Lo cual es claro ya que y es una hoja de T' con vecino x . □

1.5.1. Grafos bipartitos

Definición 1.5.6. Sea $r \geq 2$ entero. Decimos que un grafo $G = (V, E)$ es **r -partito** si podemos particionar a V en r partes tal que cada arista tiene sus extremos en partes distintas. Es decir, cada parte es un conjunto independiente.

2-partito es **bipartito**, 3-partito es **tripartito**, etc.

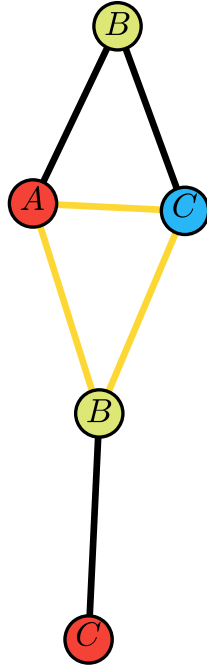


Figura 1.5.26: Ejemplo de grafo 3-partito, 4-partito y 5-partito, pero no 2-partito porque siempre existirían dos vértices del triángulo **amarillo** en la misma partición, pero eso es imposible porque son adyacentes. Se ilustran dos triparticiones distintas: A, B, C y por otro lado **rojo**, **azul**, **verde**.

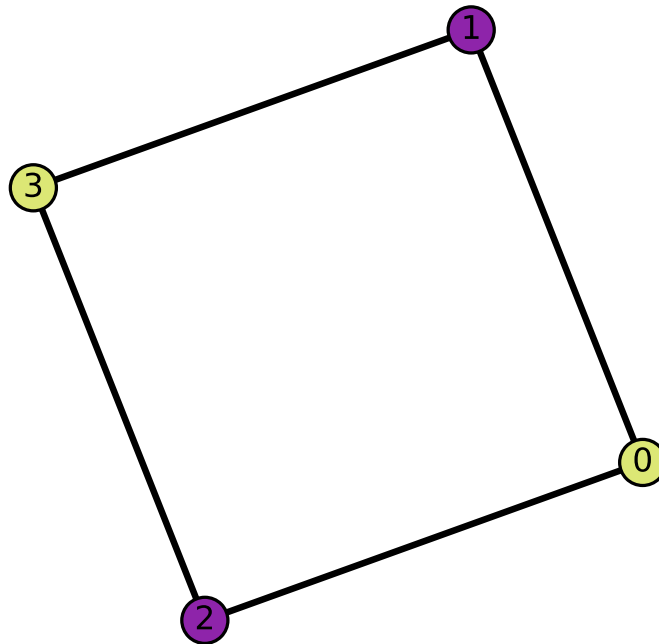


Figura 1.5.27: Ejemplo de grafo 2-partito.

Definición 1.5.7. Un grafo r -partito G , donde cada par de vértices de partes distintas son adyacentes, decimos que G es **r -partito completo**.

Un grafo r -partito completo con partes de tamaño n_1, n_2, \dots, n_r se denota K_{n_1, n_2, \dots, n_r} .

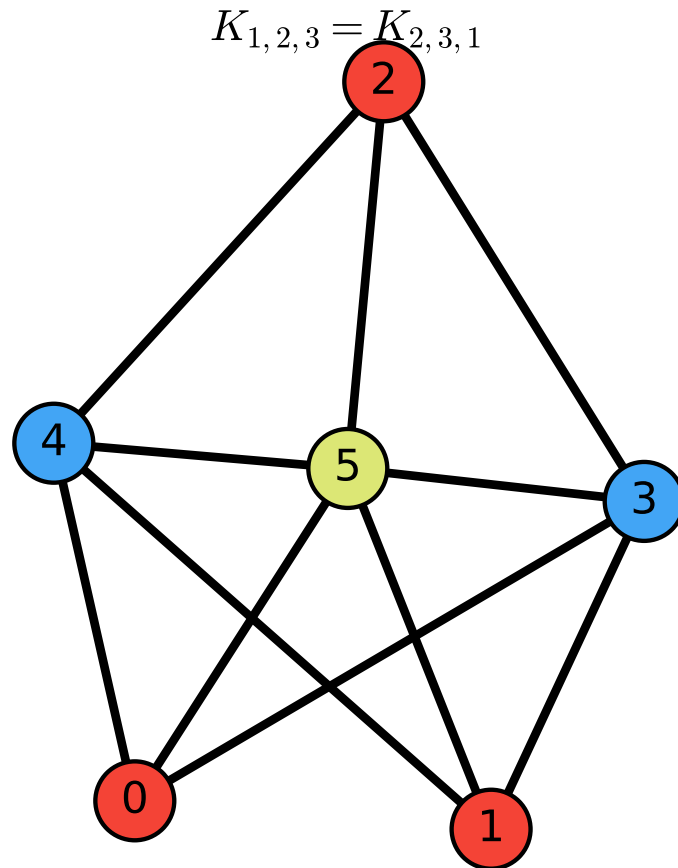


Figura 1.5.28: Ejemplo de grafo 3-partito completo.

Observación 1.5.8. Un grafo $K_{1,n}$ es una *estrella*.

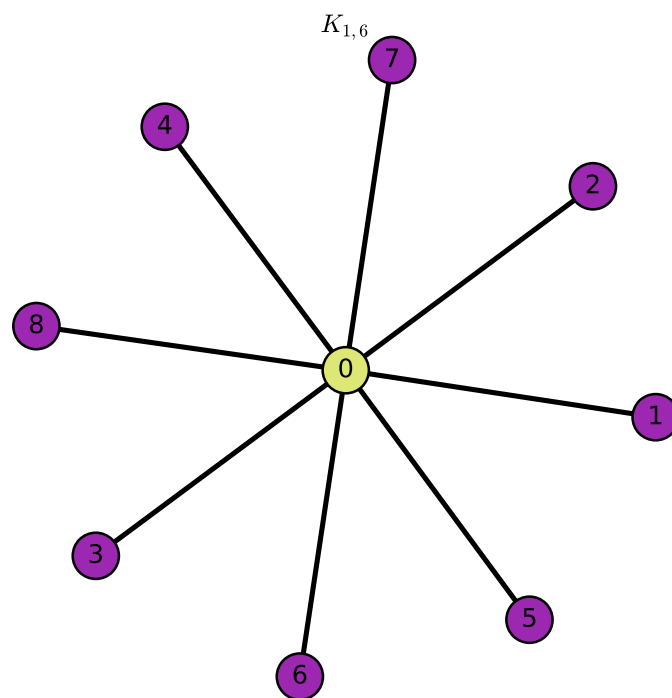


Figura 1.5.29: $K_{1,5}$

Observación 1.5.9. Si G es bipartito, entonces no tiene ciclos impares.

Demostración. Sea $C = C_{2k+1}$ con $k \geq 1$ un subciclo de longitud $2k+1$ de G . Si G fuera bipartito, entonces C también. En efecto, numerando $C : x_0, x_1, \dots, x_{2k}, x_0$, ser bipartito equivale a que existe una función $\rho : x_i \mapsto 0, 1 \in \{0, 1\}$ tal que $\rho(x) \neq \rho(y)$ para todo par de vértices adyacentes $x, y \in C$. Sin pérdida de generalidad $\rho(x_0) = 0$. Pero como x_i y x_{i+1} son siempre adyacentes, debe ser que $\rho(x_0) = 0, \rho(x_1) = 1, \dots, \rho(x_i) = i \bmod 2$ (lo podemos probar recursivamente). Con lo cual, $\rho(x_{2k}) = 0 = \rho(x_0)$, lo cual es absurdo porque x_{2k} y x_0 son adyacentes. \square

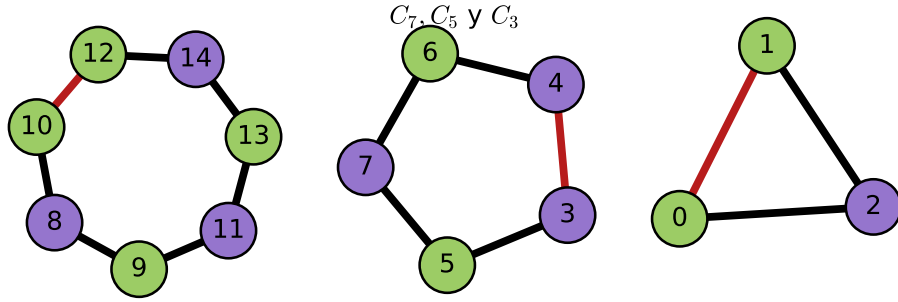


Figura 1.5.30: Como se ilustra en el dibujo, no podemos 2-particionar a C_7, C_5 ni C_3 . Pues siempre que pintamos con dos colores quedan dos vértices adyacentes.

Teorema 1.5.10. Un grafo es bipartito si y solo si no tiene ciclos impares.

Demostración. La observación anterior prueba la necesidad. Veamos la suficiencia. Sea G un grafo sin ciclos impares. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que es conexo. Sea T un árbol generador, r un vértice de G que llamaremos raíz (de T). Para $v \in V(G)$ denotamos por rTv al único camino entre r y v en T (por la caracterización de árboles). Por último, si $w, v \in V(G)$, entonces decimos que $w \leq v$, si $w \in rTv$.

Definimos la partición de G : los vértices v tales que rTv tiene largo par, y por otro lado los vértices v tales que rTv tiene largo impar. Veamos que en efecto esto es una partición, i.e., no hay vértices adyacentes en la misma partición. Sea $e = xy$ una arista de G .

CASO 1: Si $e \in E(T)$, tendremos $x < y$ o $y < x$, pero nunca igualdad. Más aún, $\|rTx\| = \|rTy\| \pm 1$, i.e. tienen paridades distintas.

CASO 2: Si $e \notin E(T)$, entonces rTx, rTy y e forman un ciclo (por la caracterización de árbol). Por la hipótesis, el ciclo es par. Esto implica que $\|rTx\|$ y $\|rTy\|$ tienen distinta paridad:

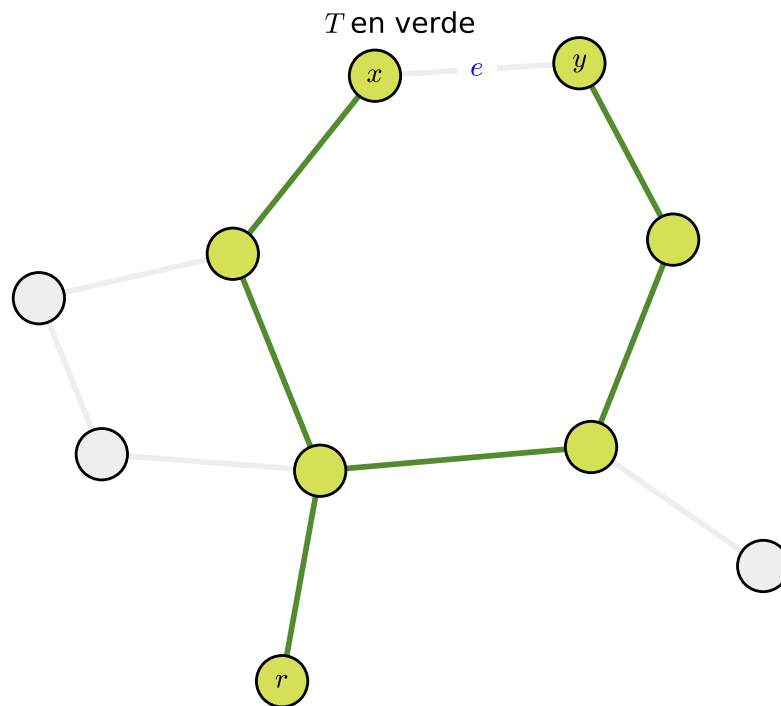


Figura 1.5.31: Ilustración de este hecho.

□

Corolario 1.5.11. *Los árboles y los bosques son bipartitos.*

1.5.2. Paseos Eulerianos

Viajamos a Prusia, siglo XVIII, a la ciudad de Königsberg.

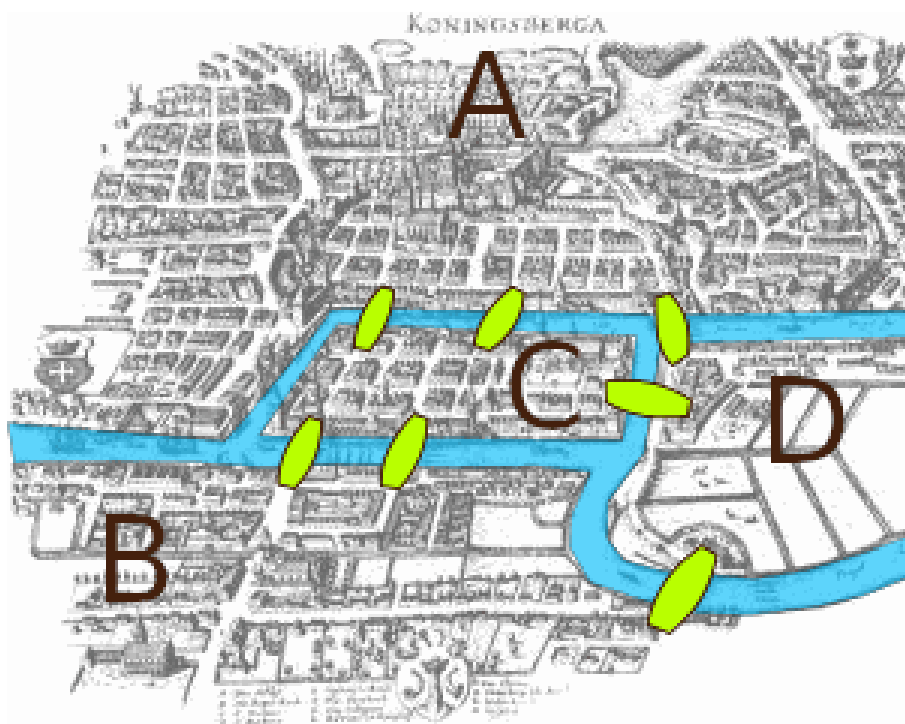


Figura 1.5.32: Los siete puentes de Königsberg.

La gente de la ciudad se preguntaba si se podía partir de un punto $x \in A$ o B de la ciudad, cruzar cada puente exactamente una sola vez y volver a x . Euler se propuso a responder la pregunta.

Podemos modelar el problema como un *multigrafo* (i.e. dos vértices pueden estar unidos por más de una arista):

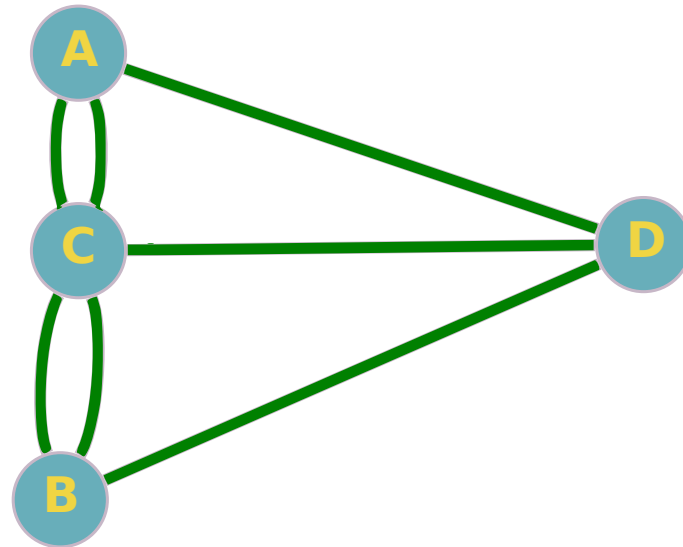


Figura 1.5.33: Multigrafo de los puentes de Königsberg.

Definición 1.5.12. Un **paseo** en un multigrafo, es una secuencia de vértices x_0, x_1, \dots , tal que $x_i x_{i+1}$ es arista para todo $i \geq 0$, y ninguna de estas aristas se repite.

Un **paseo cerrado** comienza y termina en el mismo vértice.

Un paseo es **Euleriano** si es cerrado y recorre todas las aristas del multigrafo.

Un **grafo Euleriano**, es un multigrafo que contiene un paseo Euleriano.

Teorema 1.5.13. *Un multigrafo conexo es Euleriano si y solo si todos sus vértices tienen grado par.*

Veremos la demostración la clase siguiente.

1.6. Clase 6: 30/03/23

Teorema 1.6.1. *Un multigrafo conexo es Euleriano si y solo si todos sus vértices tienen grado par.*

Demostración.

- \Rightarrow) Asumimos que G tiene un paseo Euleriano P . Cada vez que el paseo "entra" en una vértice, lo hace por medio de una arista, y debe salir por otra. Cada vez que v aparece en P se utilizan otras dos aristas incidentes en v . Como se ocupan todas esas aristas, $d(v)$ es par.
- \Leftarrow) Supongamos que todos los grados son pares. Haremos inducción en $\|G\|$. El caso base es $\|G\| = 2$ que claramente tiene un paseo Euleriano:

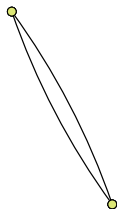


Figura 1.6.34: $\|G\| = 2$.

Supongamos que $\|G\| > 2$. Cuando todos los grados son pares, puedo encontrar un paseo cerrado no trivial. Tomemos como P el de largo máximo, y sea F su conjunto de aristas. Si F es todo, la demostración está terminada. Luego supongamos que no. Sea $G \setminus F = G'$, tiene una arista e que incide en un vértice de P , pues G es conexo. Sea C la componente de G' que contiene a e . Todo vértice de G , posee un número par de aristas incidentes en F , luego la cantidad de aristas en G' sigue siendo par. Aplicando la hipótesis inductiva, podemos encontrar un paseo Euleriano en C , llamémoslo P' . Como P y P' unidos son un paseo cerrado más grande que P , llegamos a un absurdo.

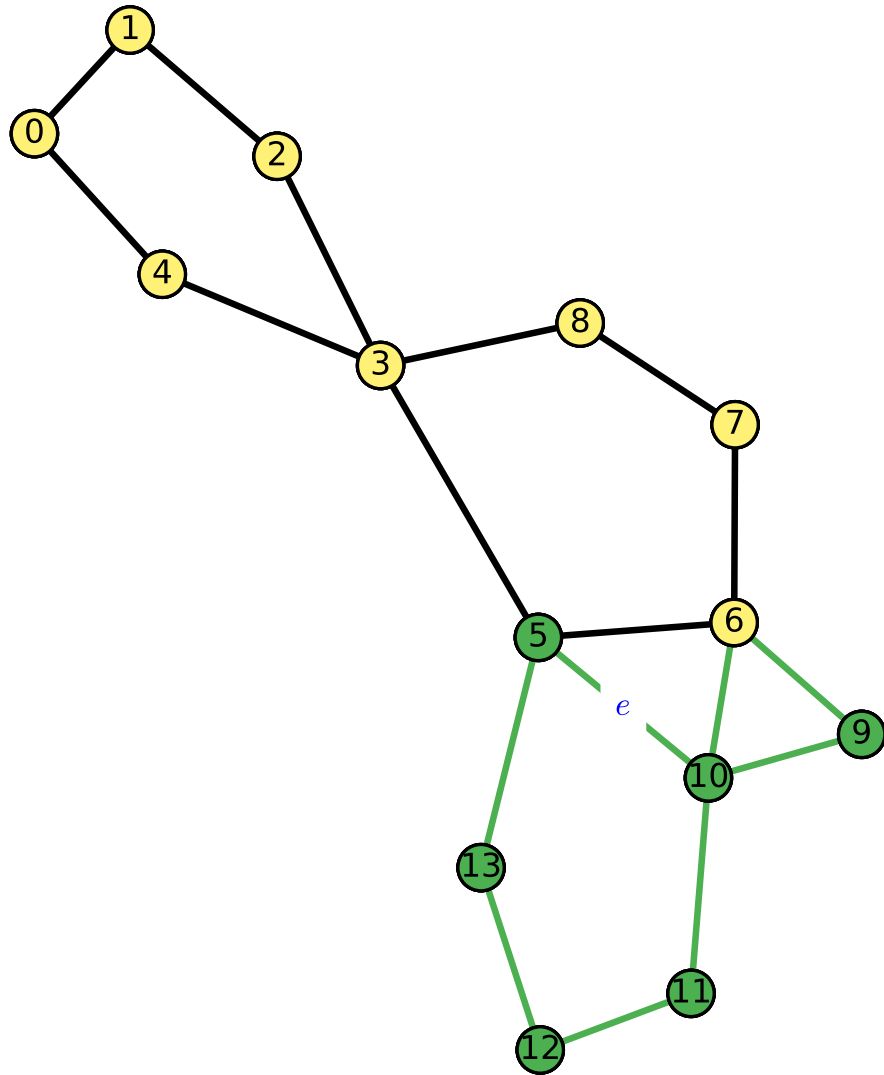


Figura 1.6.35: Esta es una ilustración de lo que podría suceder: $P : 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 4, 0$ es el camino negro y C es el grafo conexo.

□

1.6.1. Conexidad

Definición 1.6.2. Decimos que un conjunto X de vértices o aristas **separa** a $u, v \in V$ si $u, v \notin X$ y todo camino entre u y v tiene un elemento de X .

Si X separa un par de vértices, decimos que es **separador** (de u, v). Si un vértice solo, i.e. X es un singleton, es separador, decimos que es un **vértice de corte**. Un pequeño abuso de notación será simplemente referirnos a ese vértice en lugar del conjunto que lo contiene.

Análogamente, una arista sola $X = \{e\}$ que separa sus vértices se dice **punte**. Un pequeño abuso de notación será simplemente referirnos a ese vértice en lugar del conjunto que lo contiene.

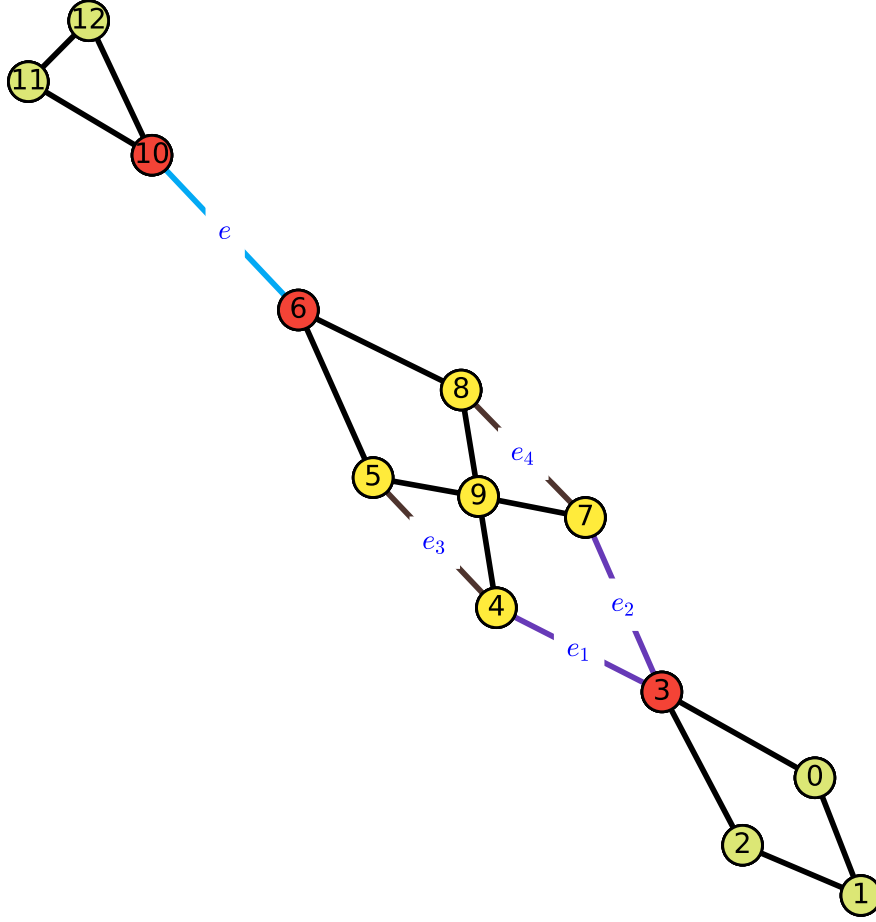


Figura 1.6.36: Ejemplo: $X = \{4, 5, 7, 8, 9\}$ separa a $u = 3, v = 6$. También $Y = \{e_1, e_2\}$ e $Y' = \{e_3, e_4\}$ son separadores de u, v . La arista $e = (6, 10)$ es un puente.

Definición 1.6.3. Para $k \geq 0$ decimos que $G = (V, E)$ es **k -conexo** si $|V| > k$ y $G \setminus X$ es conexo para todo $X \subset V$ con $|X| < k$. Es decir, ningún conjunto de menos de k -vértices separa.

Ejemplo 1.6.4. ■ 0-conexo: Todo grafo no vacío.

- 1-conexo: grafos conexos no triviales (tiene que tener al menos una arista).

Definición 1.6.5. La **conexidad**, $\mathcal{K}(G)$ de G , es el máximo $k \geq 0$ tal que G es k -conexo.

Ejemplo 1.6.6. ■ $\mathcal{K}(G) = 0$: Todo grafo desconexo no vacío o K_1 .

- $\mathcal{K}(K_n) = n - 1, \forall n \geq 1$.

Definición 1.6.7. Sea G no vacío y sea $\ell \geq 1$. Decimos que G es **ℓ -arista conexo**, si $G \setminus F$ es conexo para todo $F \subset E$ con $\|F\| < \ell$.

Ejemplo 1.6.8. 1-arista conexo: los grafos conexos no vacíos.

Definición 1.6.9. La **arista conexidad**, $\lambda(G)$ de G , es el máximo ℓ tal que G es ℓ -arista conexo.

Figura 1.6.37: Ejemplo de grafo que tiene $\mathcal{K} = 4, \lambda = 4$.

Ejemplo 1.6.10. $\lambda(K_n) = n - 1, \forall n \geq 1$. Con lo cual, por el Ejemplo 1.6.6 tenemos que

$$\lambda(K_n) = \mathcal{K}(K_n).$$

Ejercicio 1.6.11. Calcular \mathcal{K} y λ del siguiente grafo G :

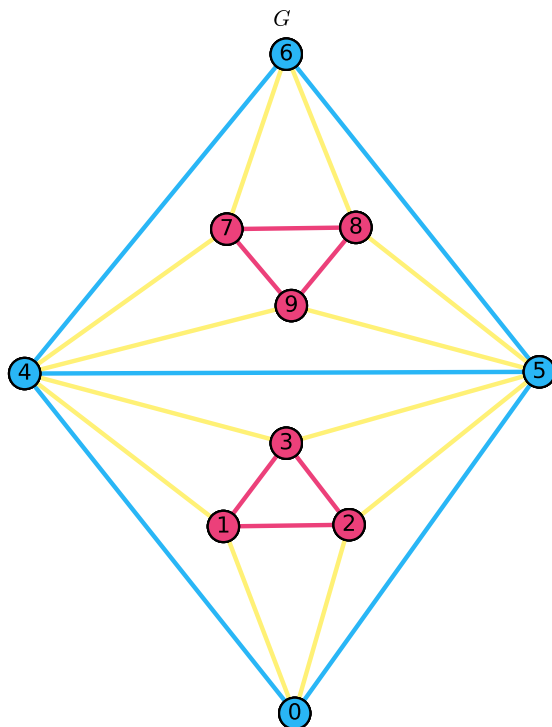


Figura 1.6.38: Grafo G .

Solución. Si quitamos los **vértices 4,5** entonces nos queda G desconexo, luego $\mathcal{K}(G) < 3$. Si quito cualquier vértice, entonces el grafo sigue siendo conexo, luego es 2-conexo, i.e. $\mathcal{K}(G) \geq 2$. Luego $\mathcal{K}(G) = 2$.

En el anterior ejemplo teníamos $\lambda = 4$ en cada **triángulo azul**, y como sacar 3 aristas incidentes a **4,5** no evita que G siga siendo conexo, tenemos que G es 4-

arista conexo, i.e. $\lambda(G) \geq 4$. Por otro lado, si quitamos las 4 aristas incidentes en el **vértice 1**, queda el aislado del resto del grafo, i.e. $\lambda(G) < 5$. Luego $\lambda(G) = 4$. \square

1.7. Clase 7: 03/04/23

Proposición 1.7.1. Si G es no trivial, entonces $\mathcal{K}(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$

Demostración. La segunda desigualdad se tiene porque todas las aristas incidentes en un vértice fijo separan a G .

Veamos ahora la primera desigualdad. Sea F un conjunto de aristas que separa a G , con $|F| = \lambda(G)$, tal que $G \setminus F$ es desconexo. *Observación:* F es un conjunto de aristas minimal con la propiedad de ser separador.

CASO 1: Existe $v \in V(G)$ que no incide en F . Sea C la componente conexa que contiene a v en $G \setminus F$. No puede haber una arista f de F con extremos en C , pues de lo contrario $F \setminus \{f\}$ sería un conjunto más chico tal que es separador, lo cual contradice la minimalidad de F .

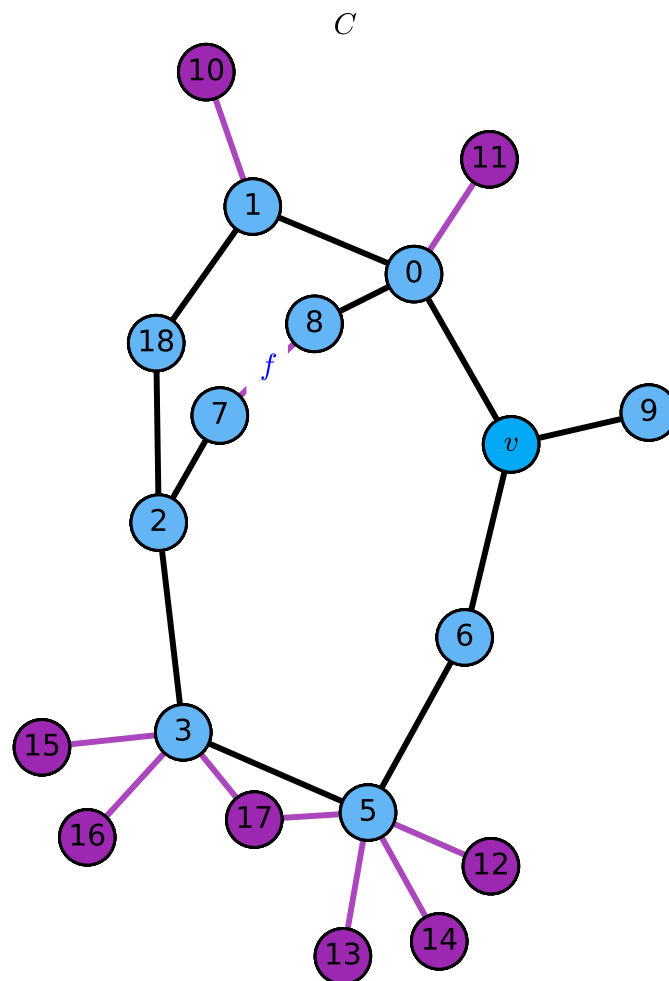


Figura 1.7.39: Ilustración de C , donde las **aristas violeta** corresponden a aristas de F .

Luego, si quitamos los vértices de las aristas de F incidentes en C , las cuales solo comparten un vértice de C , nos queda que v estaría separado del resto del grafo. Esta cantidad de vértices es a lo sumo $|F| = \lambda(G)$. Con lo cual $\mathcal{K}(G) \leq |F| = \lambda(G)$.

CASO 2: Todo $v \in V(G)$ incide en F . Fijemos $v \in V(G)$ y C la componente conexa de $G \setminus F$ que lo contiene. Consideremos $N_G(v)$, los vecinos de v . Cada $w \in N_G(v)$ incide en una arista de F .

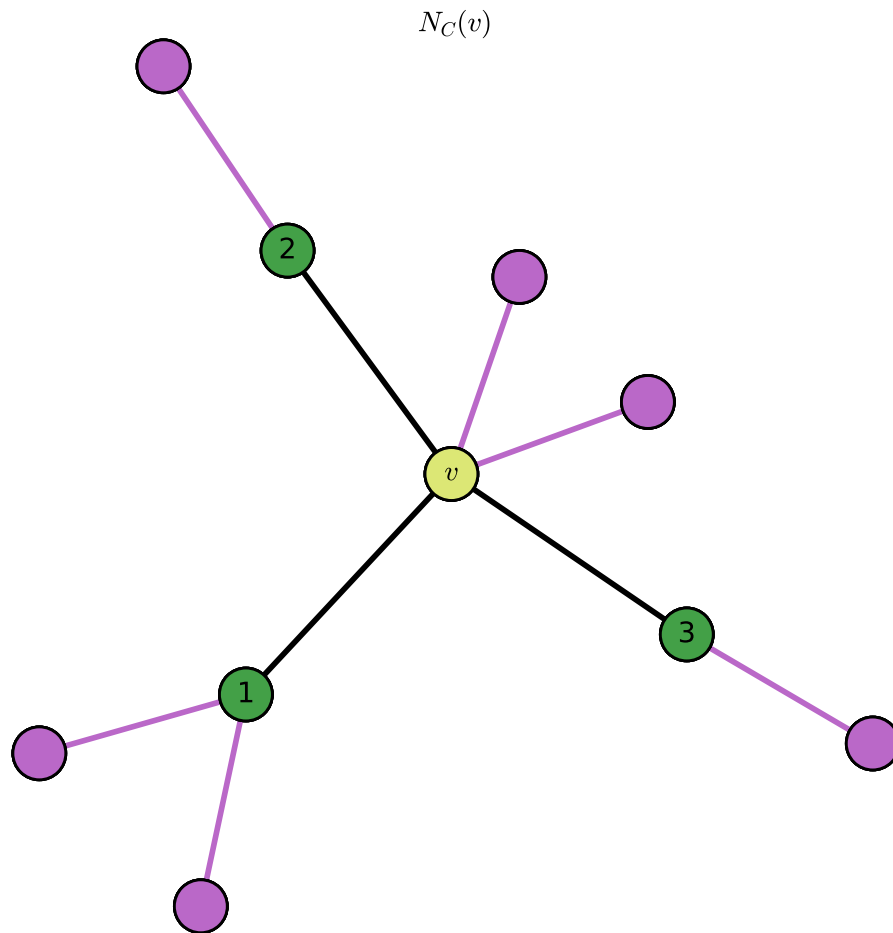


Figura 1.7.40: Ilustración de lo que sucede: los **vecinos** de v inciden en una **arista de F** .

Entonces $d_G(v) \leq |F| = \lambda(G)$. Por lo tanto, salvo que $V(G) = \{v\} \cup N_G(v)$, tenemos que $N_G(v)$ separa a v del resto del grafo, y salvo ese caso tendríamos que $\mathcal{K}(G) \leq |N_G(v)| \leq \lambda(G)$. Pero v era arbitrario, entonces en el peor de todos los casos, tenemos que $V(G) = \{v\} \cup N_G(v)$ para todo $v \in G$, i.e. G es un grafo completo. Pero en este caso vale la igualdad por el Ejemplo 1.6.10.

□

1.7.1. Grafos 2-conexos

Definición 1.7.2. Sea H un grafo. Decimos que un camino P es un H -camino si es no trivial (tiene al menos una arista) e interseca a H exactamente en sus extremos (P no tiene ni vértices ni aristas en H , salvo por sus extremos).

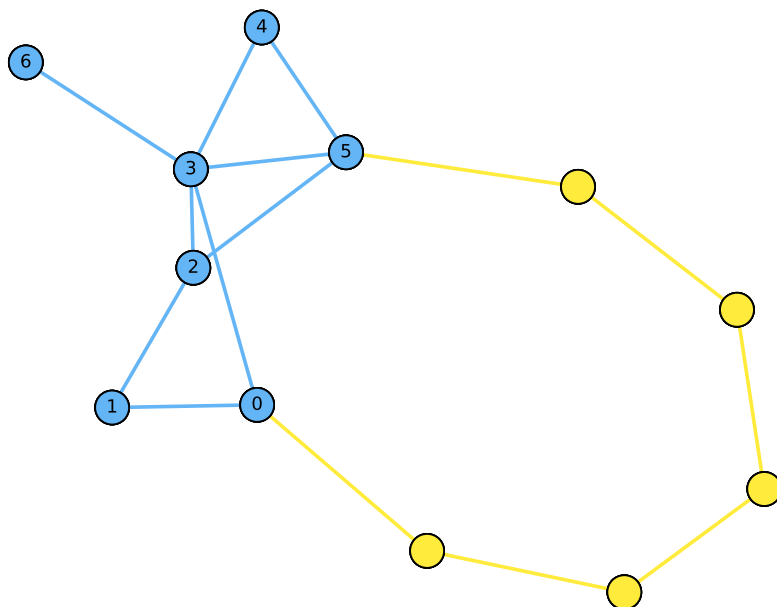


Figura 1.7.41: Ejemplo de H -camino P de un grafo H . Notar que en el dibujo consideramos a los vértices 0, 5 como extremos de P .

Los ciclos son los grafos 2-conexos más elementales. Veamos que todos los demás se pueden construir a partir de ellos.

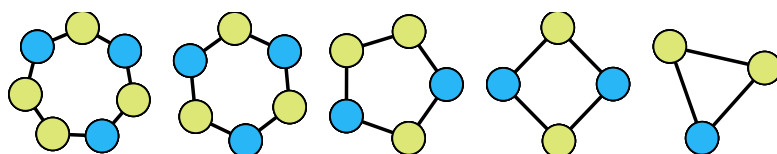


Figura 1.7.42: Ejemplos de ciclos: C_7, C_6, C_5, C_4 y C_3 .

Proposición 1.7.3. Un grafo es 2-conexo si y solo si se puede construir a partir de un ciclo añadiendo sucesivamente H -caminos a grafos H ya construidos.

Comentario 1.7.4. Es decir, si H_0 es un ciclo, le agregamos un H_0 -camino, y a la unión la llamamos H_1 , el cual es 2-conexo, si quisieramos podemos agregar un H_1 -camino y seguiría siendo 2-conexo, etc.

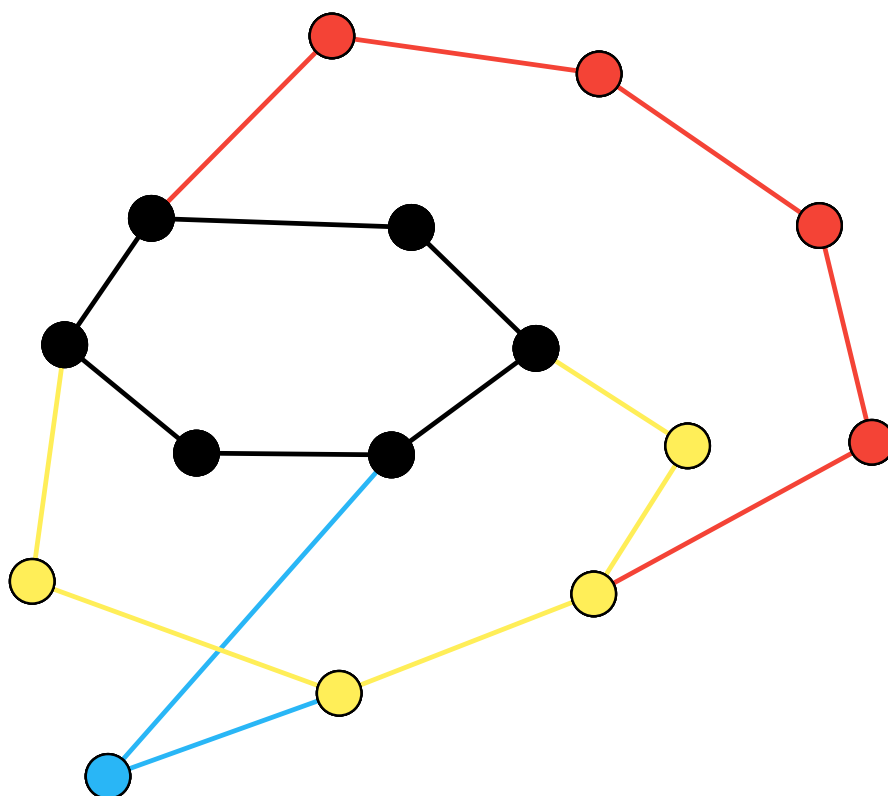


Figura 1.7.43: Ilustración de un ciclo H_0 en negro, al que le agregamos H -caminos en el siguiente orden: H_0 -camino, H_1 -camino y por último H_2 -camino.

Demostración.

- (\Leftarrow) Claramente un grafo construido de esta manera no se puede separar por un solo vértice. Y por su puesto que tiene más de 2 vértices.
- (\Rightarrow) Tomemos un grafo G , 2-conexo (en particular es también conexo). Como es 2-conexo, debe tener algún ciclo C , pues de lo contrario sería un árbol con al menos 3-vértices, y quitando un vértice que no es hoja nos quedaría separado. Nos fijamos si tiene un C -camino, si esto es así lo agregamos, y luego seguimos agregando hasta que no podamos más. Consideremos el subgrafo maximal H de G construido de esta manera a partir de C . Entonces toda arista $xy \in E(G) \setminus E(H)$ tal que $x, y \in V(H)$, es un H -camino, con lo cual no puede existir por maximalidad de H . Es decir, H es un subgrafo inducido de G . Entonces todas las aristas de G que no están en H tienen un extremo fuera de H . Si H es G habríamos terminado, luego por el absurdo supongamos que no. Por conexión existe un vértice $v \in G \setminus H$, y conectándolo por un camino con H podemos asumir que v es incidente en H , es decir existe $w \in H$ tal que vw es una arista incidente en H . Como G es 2-conexo, si quitamos a w el grafo sigue siendo conexo, luego debe ser que existe otro camino P de v a H , con lo cual $P \cup vw$ es un H -camino. Absurdo por maximalidad de H .

□

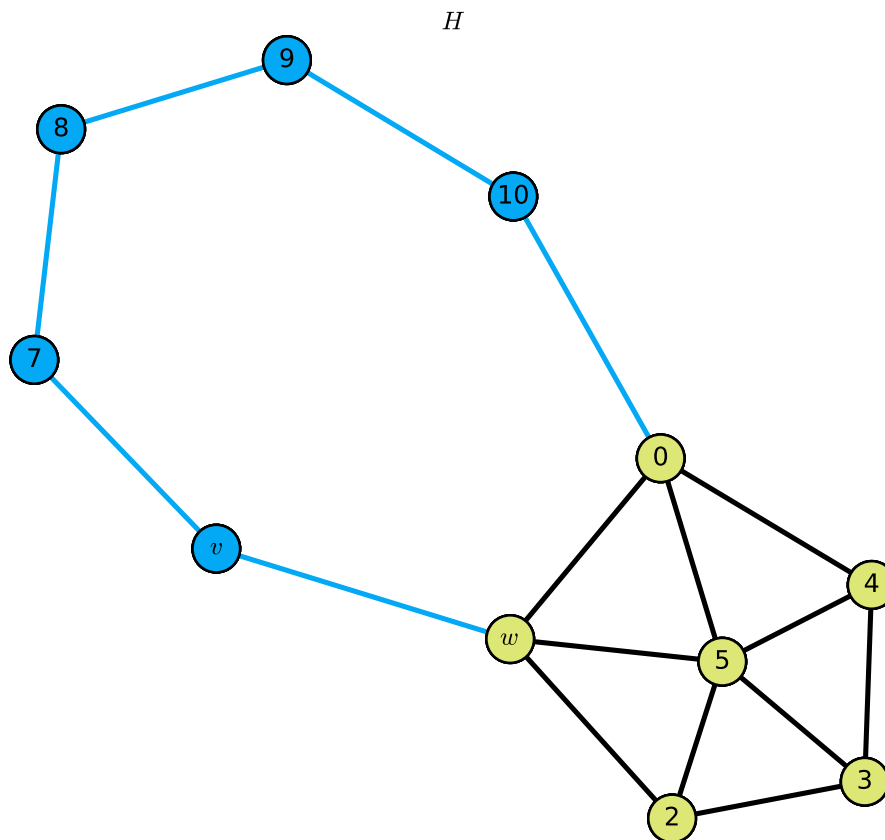


Figura 1.7.44: Ilustración: H contiene a w , con una arista incidente de extremo v , que se extiende a un H -camino P .

1.8. Clase 8: 06/04/23

Todo grafo *sin vértices aislados* se puede particionar en subgrafos 1-conexos. Y podemos intentar lo mismo para subgrafos 2-conexos. Pero pueden ocurrir problemas, por ejemplo:

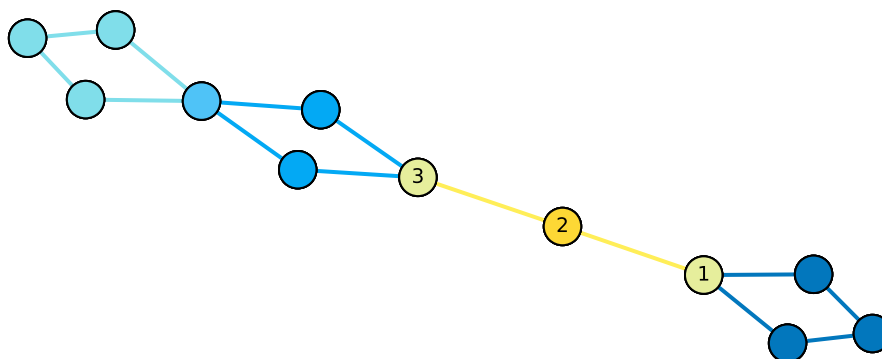


Figura 1.8.45: Ejemplo de problemas para particionar en subgrafos 2-conexos maximales. Las componentes 2-conexas del dibujo son sus **ciclos** que comparten vértices con otras estructuras como por ejemplo las dos **aristas** 12 y 23; o comparten aristas entre dos ciclos.

Como ilustra la figura de arriba, los subgrafos 2-conexos maximales no siempre

abarcan todo el grafo ni son siempre disjuntos. Veamos como se arregla: podemos simplificar la noción para poder abarcar todo el grafo.

Definición 1.8.1. Un **bloque** es un subgrafo conexo maximal sin vértices de corte.

En la figura anterior, los bloques del grafo con los **ciclos** y las **aristas** 12 y 23.

Observación 1.8.2. Es fácil ver que los bloques van a ser o subgrafos 2-conexos o una *arista* o un *vértice*.

Proposición 1.8.3. Los ciclos de un grafo son los ciclos de sus bloques.

Demostración. Todo ciclo es 2-conexo, luego es conexo sin vértices de corte, y debe estar contenido en un subgrafo maximal con esta propiedad, i.e. un bloque. \square

Proposición 1.8.4. Sean $e, f \in E(G)$. Entonces pertenecen a un mismo bloque si y solo si pertenecen a un mismo ciclo.

Demostración. Si pertenecen al mismo ciclo, entonces por la proposición anterior están en el mismo bloque.

Recíprocamente, como e, f son dos aristas en un mismo bloque, puedo asumir que el bloque es un subgrafo 2-conexo (no es arista sola o vértice solo). La idea es la siguiente: este subgrafo 2-conexo se construye a partir de un ciclo uniendo H -caminos, luego no es difícil ver que las dos aristas están contenidas en un mismo ciclo. \square

Definición 1.8.5. El **grafo bloque** de un grafo G tiene un vértice por cada bloque y por cada vértice de corte de G ; hay una arista entre dos vértices si una representa un bloque y si el otro representa un vértice de corte que está dentro del bloque.

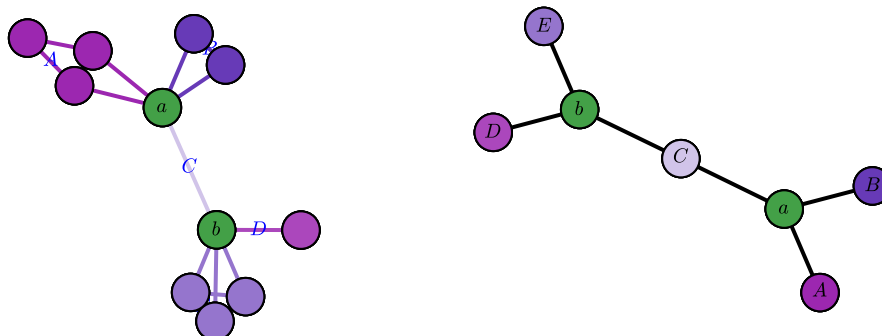


Figura 1.8.46: Ejemplo: G (izquierda) tiene 5 **bloques** (denotados por letras mayúscula: A, B, C, D, E) y 2 **puntos de corte** (denotados por letras minúscula: a, b). Luego el grafo bloque (derecha) de G tiene 7 vértices.

Notar que en nuestro ejemplo, el grafo bloque es un árbol. Esto no es casualidad:

Ejercicio 1.8.6. El grafo bloque de un grafo conexo es un árbol.

Demostración. Notación: al grafo bloque de G lo denotamos por $Block(G)$. A un subgrafo conexo sin vértices de corte maximal, i.e. un bloque, lo vamos a denotar con las letras mayusculas B, C, D . Y denotaremos con la misma letra al vértice que inducen en el grafo $Block(G)$. A los vértices de corte los denotaremos por una letra minúscula como x, y, z, u, v, w y los denotaremos de la misma manera en el grafo

$Block(G)$. Quedará claro dependiendo del contexto, a qué grafo pertenece cada vértice en esta notación. Haremos el abuso de notación y llamaremos bloque tanto al subgrafo de G como al vértice de $Block(G)$. Análogamente, cuando digamos vértice de corte de $Block(G)$ nos estamos refiriendo a un vértice que proviene de un vértice de corte de G .

Si G es conexo, luego $Block(G)$ es conexo. Antes notemos que basta probar que entre dos bloques de $Block(G)$ existe un camino, pues todo vértice de corte de $Block(G)$ es adyacente a algún bloque en $Block(G)$ por definición de grafo bloque. Sean B, B' dos bloques de $Block(G)$, consideremos luego a partir de un B, B' -camino siempre podemos construir un camino que no puede entrara y salir de un bloque más de una vez, por conexión del bloque. Este camino nos induce un camino en $Block(G)$ dado por $\tilde{P} : B_0 v_0 B_1 v_1 \cdots B_{r-1} v_{r-1} B_r$, donde cada bloque o vértice aparece en el orden en el cual el camino P se intersecó por primera vez con estos en G .

Ahora veamos que $Block(G)$ es aciclico. En efecto, supongamos que no, sea C un ciclo en $Block(G)$. Como $Block(G)$ es bipartito (particionamos entre vértices de corte y bloques), no tiene ciclos impares, luego C tiene al menos 4 vértices (pueden ser cortes o bloques). Con lo cual, existen dos bloques distintos B_1, B_2 y dos vértices de corte distintos v_1, v_2 tal que podemos escribir $C : B_1 v_1 B_2 \cdots v_2 B_1$. Pero esto quiere decir que hay otro B_1, B_2 -camino en G que no pasa por v_1 , es decir que v_1 no era vértice de corte, absurdo. \square

1.8.1. Contracciones y menores

Definición 1.8.7. Contraer una arista $e = xy$ equivale a borrar x e y , y añadir un nuevo vértice v_{xy} adyacente a todos los vértices que eran vecinos a x o y .

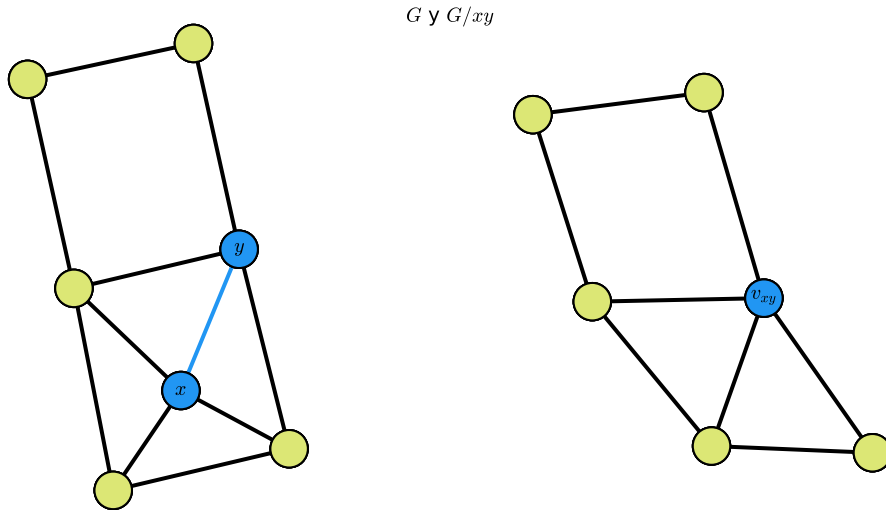


Figura 1.8.47: Ejemplo. Contraemos los vértices x, y y formamos v_{xy} .

Notación 1.8.8. Dado un grafo G y $e = xy \in E(G)$, notamos como G/e al grafo que se obtiene de G al contraer la arista e .

Definición 1.8.9. Decimos que H es un **menor** de G si se puede obtener H a partir de G al utilizar las siguientes operaciones:

1. Borrar vértices.

2. Borrar vértices y aristas.

3. Contraer aristas. O equivalentemente, contraer subgrafos conexos.

Ejemplo 1.8.10. Los subgrafos y contracciones de G son *menores* de G . No necesariamente vale la vuelta:

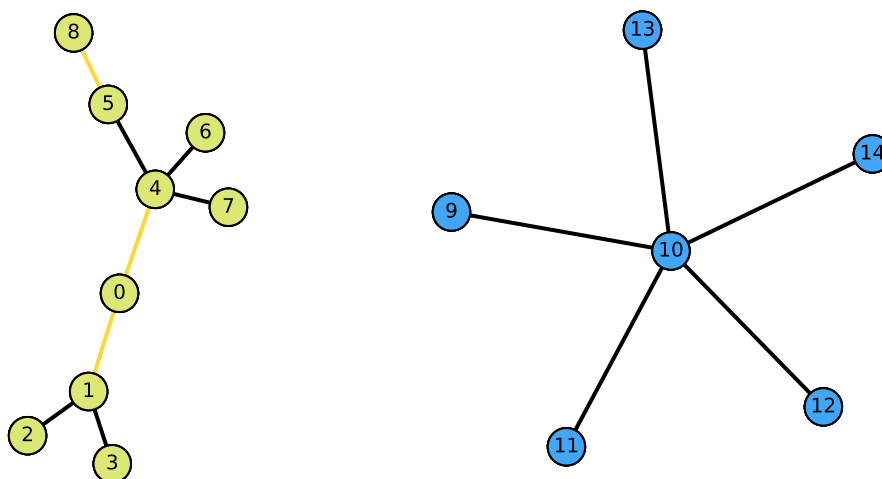


Figura 1.8.48: Ejemplo de menor H de G , que no es subgrafo porque tiene grado máximo $\Delta(H) = 5$. Pues H se obtiene luego de contraer las aristas de G

1.8.2. subdivisiones

Sea X un grafo fijo.

Definición 1.8.11. Llamamos **subdivisión** de X a cualquier grafo G que se obtiene de *subdividir* algunas aristas de X y dibujando encima nuevos vértices. Más precisamente, reemplazamos las aristas de X con nuevos caminos entre sus extremos, de manera que estos caminos no se intersecan entre si y tampoco intersecan a $V(X)$ salvo en los extremos. Diremos que G es un TX .

Llamaremos a los vértices originales de X , **vértices de ramificación de los de TX** ; a los nuevos vértices los llamaremos **vértices subdivisores**.

Si un grafo Y contiene a TX como subgrafo, diremos que X es una **menor topológica** de Y .

Notar que los vértices subdivisores tienen grado 2 y los vértices de ramificación no cambian de grado.

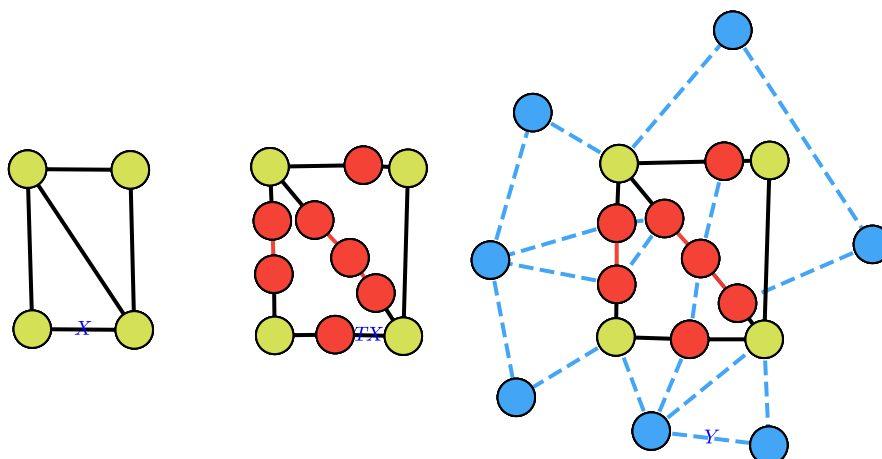


Figura 1.8.49: De izquierda a derecha, tenemos la construcción prograssia de X , luego le agregamos **vértices subdivisores** formando TX , y finalmente ilustramos un ejemplo de grafo Y con X como menor topológico.

Definición 1.8.12. Similarmente, reemplazando los vértices $x \in X$ con grafos conexos disjuntos G_x , y las aristas $xy \in X$ con conjuntos no vacíos de $G_x - G_y$ aristas, obtenemos un grafo que llamaremos IX . Recíprocamente, decimos que X se obtiene a partir de G **contrayendo** subgrafos G_x (y fusionando las $G_x - G_y$ aristas), y lo llamamos una **menor contraída** de G .

Si un grafo Y contiene un IX como subgrafo, decimos entonces que X es una **menor** de Y , llamamos a IX un **modelo** de X en Y , y denotamos $X \leq Y$

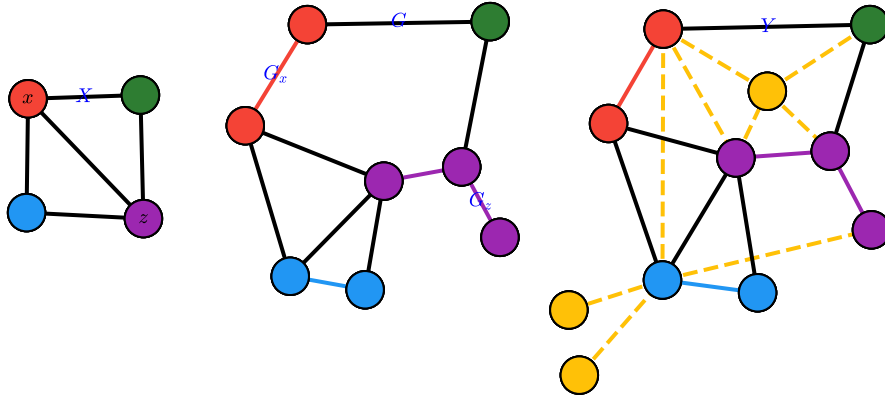


Figura 1.8.50: De izquierda a derecha, tenemos el grafo X , que se obtiene de contraer **subgrafos** de G ; finalmente, el grafo Y tiene a X como menor y a G como modelo de X en Y

Por lo tanto, X es un menor de Y si y solo si existe una función $\varphi : S \subset V(Y) \rightarrow V(X)$ tal que para todo vértice $x \in X$ si preimagen $\varphi^{-1}(x)$ es conexa en Y y para toda arista $xx' \in E(X)$ existe una arista en Y entre conjuntos de ramificación $\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(x')$. Si el dominio de φ es todo $V(Y) = S$, y si $xx' \in E(X)$ siempre que $x \neq x'$ e Y tiene una arista entre $\varphi^{-1}(x)$ y $\varphi^{-1}(x')$ (es decir Y es una IX), decimos que φ es una **contracción** de Y en X .

Proposición 1.8.13. La relación de menores \leq y la relación de menores topológicos son ordenes parciales en la clase de grafos finitos. Es decir, son reflexivos, antisimétricos, y transitivos.

Si G es una IX , luego $P = \{G_x \mid x \in X\}$ es una partición de $V(G)$, y notamos $G/P := X$. Si $U = G_x$ es el único conjunto de ramificación que no es un singleton, escribimos $G/U := X$, y notamos v_U al vértice $x \in X$ al que se contrae U , y pensamos al resto de X como un subgrafo inducido de G . El caso más simple es cuando U contiene exactamente dos vértices que forman una arista $e = U$, aquí escribiremos $G/e = X$, el grafo que se obtiene de **contraer la arista** e .

Proposición 1.8.14. Sean X e Y grafos finitos. Entonces X es una menor de Y si y solo si existen grafos G_0, \dots, G_n tales que $G_0 = Y$ y $G_n = X$, y además G_{i+1} se obtiene a partir de G_i borrando aristas, contrayendo aristas, o borrando vértices.

Demostración. Estas tres últimas operaciones claramente producen una menor X , pues la relación de menor es transitiva. Recíprocamente, se puede hacer inducción en $|Y| + ||Y||$. □

Finalmente, tenemos la siguiente relación entre menores y menores topológicos:

Proposición 1.8.15. (I) *Todo TX es también un IX (ver la siguiente figura); por lo tanto, toda menor topológica de un grafo es su menor (ordinaria).*

(II) *Si $\Delta(X) \leq 3$, entonces todo IX contiene un TX ; con lo cual, toda menor con grado máximo a lo sumo 3 de un grafo es también su menor topológico.*

Demostración. Veamos solo (ii), el primer ítem es obvio. En efecto, IX es el grafo que se obtiene de X reemplazando cada vértice x de él por un subgrafo conexo G_x y cada arista por un conjunto de aristas no vacío, luego tomando una arista de ese conjunto, basta con escoger un vértice de G_x que tenga por cada vecino de x en X un camino distinto hacia cada arista incidente en G_x . Esto es posible: empezamos eligiendo de manera inocente al vértice que es extremo de una arista incidente con G_x , de este vértice, llamémoslo x , tendríamos que contrar dos caminos disjuntos con extremo final, en el peor de los casos pues $\Delta(X) \leq 3$, en otras dos aristas de X ; ahora si no se cruzan ya ganamos, de lo contrario se fusionan a partir de un momento, incluso varias veces, pero luego movemos nuestro vértice x a la última vez que se fusionan los caminos, y llamémoslo x' :

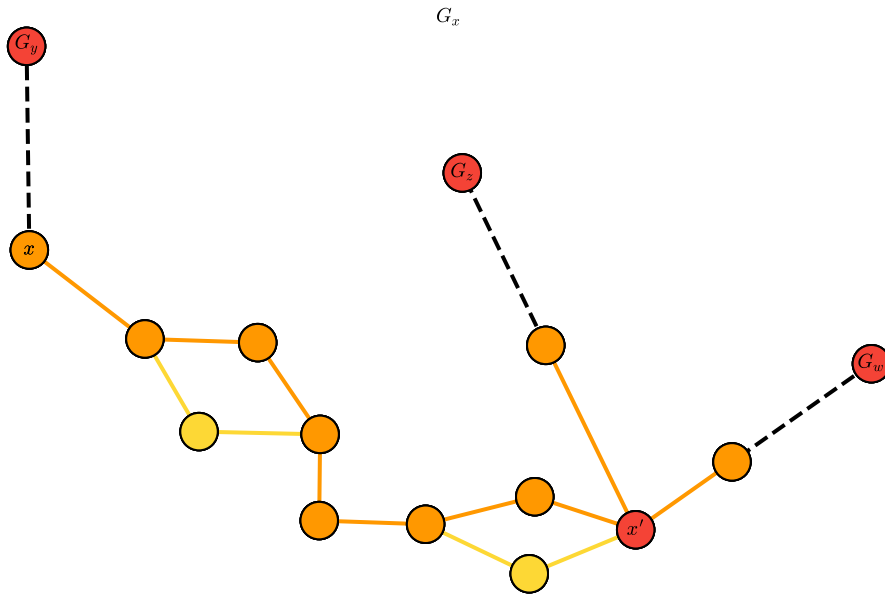


Figura 1.8.51: Ilustración de cómo se ven dos caminos, ambos de color amarillo pero uno más claro que el otro, que salen de nuestro vértice x y tienen que llegar a las aristas incidentes en G_x . Al final movemos nuestro vértice a x' .

□

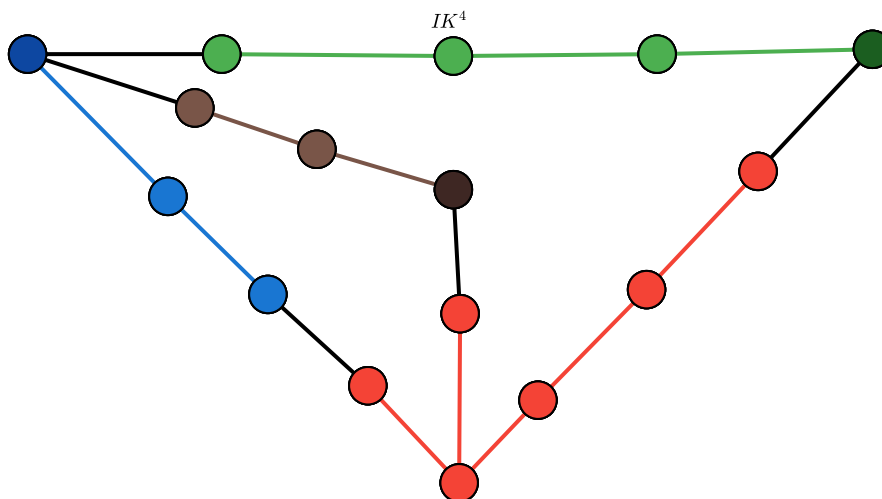


Figura 1.8.52: Ejemplo: Una subdivisión de K^4 visto como IK^4 .

Ahora que conocemos todas las relaciones standard entre grafos, podemos definir lo que significa embeber a un grafo en otro.

Definición 1.8.16. Básicamente, una **inmersión** (o **embedding** en inglés) de H en G es un mapa inyectivo $\varphi : V(H) \rightarrow V(G)$ tal que preserva la estructura en la que estamos interesados. Con lo cual, φ embebe a H en G como un subgrafo si preserva la adyacencia entre vértices, y como subgrafo inducido si preserva tanto la adyacencia como la no adyacencia. Si φ está definido también en $E(H)$ como en $V(H)$ y manda xy en caminos independientes de G entre $\varphi(x)$ y $\varphi(y)$, decimos que φ embebe a H en G como un menor topológico. Similarmente, decimos que es una inmersión de H en G como un menor, si mapea a $V(H)$ en conjuntos disjuntos de vértices en G conexos, de manera que G tiene una arista entre los conjuntos $\varphi(x)$ y $\varphi(y)$ siempre que xy es una arista de H . Más variantes existen, pero depende del contexto en el que estemos; por ejemplo, se pueden definir de manera obvia las inmersiones de 'subgrafos generadores', y 'menores inducidas', etc.

1.9. Clase 9: 17/04/23

Lema 1.9.1. *Todo grafo 3-conexo, distinto de K_4 , tiene una arista e tal que G/e es 3-conexo.*

Demostración. Supongamos que no hay una arista con esta propiedad. Es decir, para toda $xy \in E(G)$, el grafo G/xy tiene un conjunto separador S de a lo más 2 vértices. Como G es 3-conexo, v_{xy} (el vértice que sale de contraer la arista xy) tiene que estar en S y $|S| = 2$, ya que $|S| = 0$ es imposible porque el grafo es conexo y por otro lado si $|S| = 1$, estamos diciendo que G se puede separar con un solo vértice si $v_{xy} \notin S$ o si $v_{xy} \in S$ entonces podemos desconectar a G con los vértices x, y , imposible. Luego, escribimos $S = \{z, v_{xy}\}$ con $z \notin \{x, y\}$ separador de G/xy . Con lo cual, $T = \{z, x, y\}$ separa a G . Como ningún subconjunto propio de T separa, cada vértice de T tiene un vecino en cada componente de $G \setminus T$.

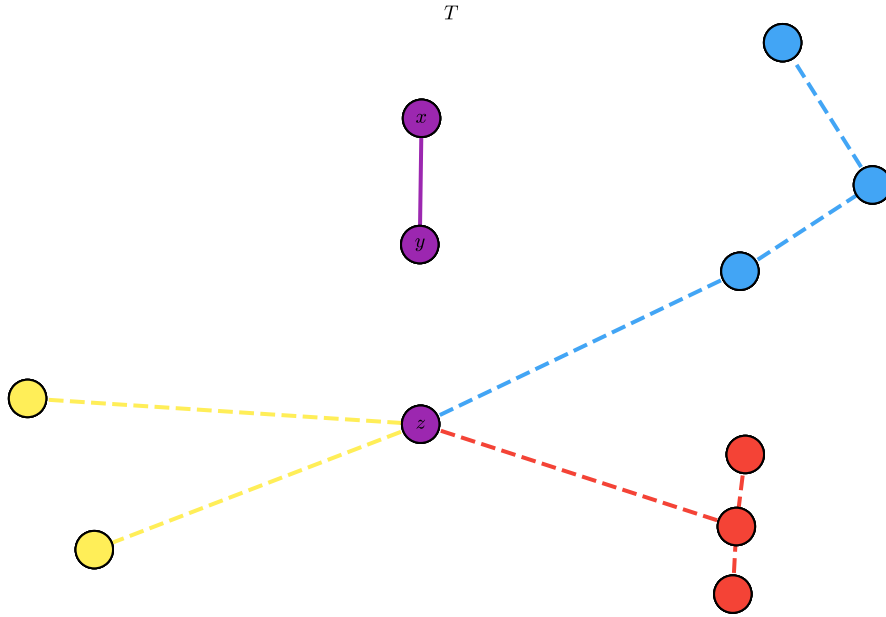


Figura 1.9.53: Ilustración del conjunto T , donde se muestra que el vértice z tiene vecinos en cada componente de $G \setminus T$.

Como xy era arbitrario, podemos elegir la arista xy , el vértice z y la componente C tal que $|C|$ es mínimo. Tomo $v \in C$ y es vecino de z . Entoncces G/vz tampoco es 3-conexo, o sea que existe w tal que v, z, w (distintos) separan G . Como antes cada una de v, z, w tiene un vecino en cada conponente de $G \setminus \{v, z, w\}$. Como x e y son adyacentes, existe D componente de $G \setminus \{v, z, w\}$ tal que $D \cap \{x, y\} = \emptyset$ (porque $G \neq K_4$!).

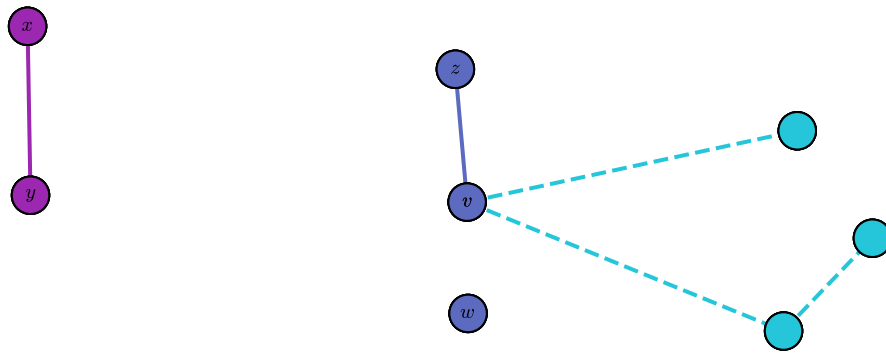


Figura 1.9.54: D está contenido en el subgrafo azul.

Dado que $v \in C$, los vecinos de v en D están en C . Tenemos que $D \cap C \neq \emptyset$, más aún, $D \subsetneq C$. Contradiciendo la minimalidad del orden de C . \square

Teorema 1.9.2 (Teorema de Tutte, 1961). *Un grafo G es 3-conexo si y solo si existe una secuencia de grafos G_0, G_1, \dots, G_n que cumple lo siguiente:*

- (I) $G_0 = K_4$ y $G_n = G$.
- (II) G_{i+1} tiene una arista xy tal que $d(x), d(y) \geq 3$ y $G_i = G_{i+1}/xy$ para todo $i < n$.
Más aún, cada G_i es 3-conexo.

Demostración. Por el lema anterior, podemos quitar una arista recursivamente hasta llegar a K_4 . La vuelta esta en el DIESTEL. \square

1.9.1. Teorema de Menger

Definición 1.9.3. Si $A, B, X \subset V(G)$ son tales que todo A, B -camino tiene un vértice de X , decimos que X separa a A y B en G .

Teorema 1.9.4 (Menger, 1927). Sea $G = (V, E)$ un grafo y sean $A, B \subset V$. El mínimo número de vértices que separa a A y B es igual al máximo número de A, B -caminos disjuntos.

1.10. Clase 10: 20/04/23

Teorema 1.10.1 (Menger, 1927). Sea $G = (V, E)$ un grafo y sean $A, B \subset V$. El mínimo número de vértices que separa a A y B es igual al máximo número de A, B -caminos disjuntos.

Demostración. Sea k el mínimo número de vértices que separan A y B . No es difícil convencerse que G no puede contener más de k caminos entre A y B , i.e. $k \geq$ al máximo número de A, B -caminos disjuntos.

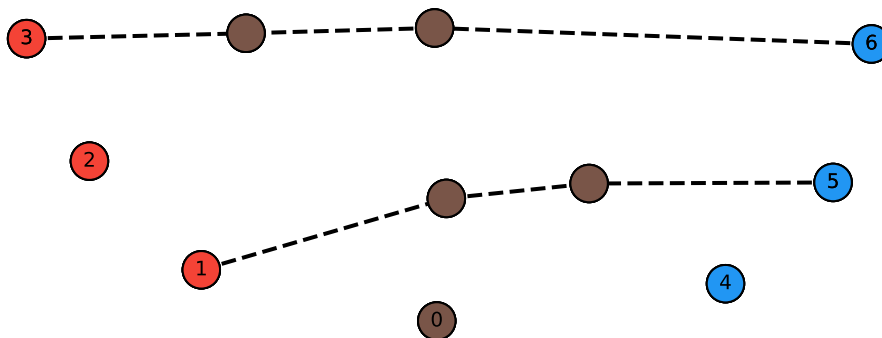


Figura 1.10.55: El conjunto separador con k -elementos se ilustra en el medio de los conjuntos A y B , formados por los vértices $0, 1, 2, 3$ y $0, 4, 5, 6$ respectivamente.

Para la otra desigualdad, haremos inducción en el número de aristas. Si G no tiene aristas entonces los A, B -caminos son puntos de $A \cap B$! y trivialmente vale la igualdad. Ahora, si existe una arista $e = xy$ de G , y si G no tiene k caminos entre A, B disjuntos (es decir tiene $< k$), entonces G/e tampoco pues G/e no puede tener más A, B -caminos (contamos a v_e como elemento de A (o B) si alguna de x o y está en A (o B)). Luego por hipótesis inductiva, G/e tiene un A, B -separador Y con menos de k vértices. El vértice v_e debe estar en Y , porque si no Y sería separador de G , contradiciendo minimalidad de k . Entonces $X = (Y \setminus v_e) \cup \{x, y\}$ es un A, B -separador de G con exactamente k vértices. En efecto, por minimalidad $k \leq |X|$, y por construcción $|X| = |Y| + 1 < k + 1 \leq k$.

Consideremos ahora $G \setminus e$. Como $x, y \in X$, todo A, X -separador en $G \setminus e$ es un A, B -separador en G con al menos k -vértices por minimalidad de k .

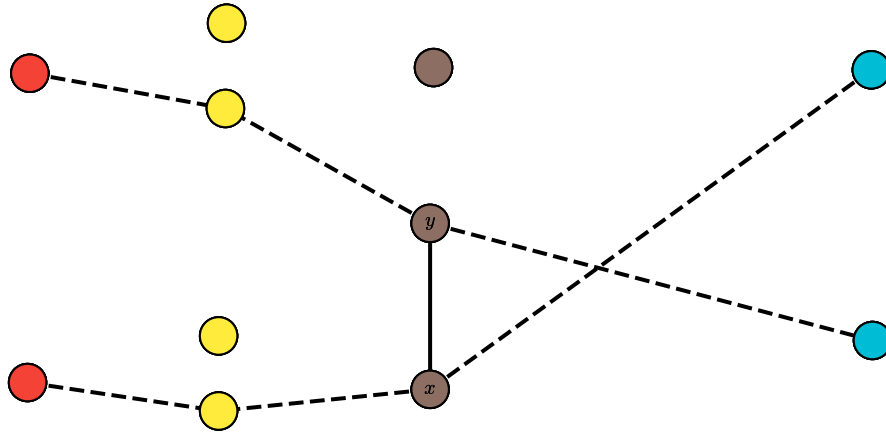


Figura 1.10.56: Ilustración del conjunto separador X y los conjuntos de vértices A y B . Notar que todos los A,B -caminos deben pasar por el A,X -separador.

Por inducción, hay al menos k caminos entre A,X disjuntos en $G \setminus e$. Lo mismo pasa con los B,X -caminos. Como X separa a A y B , estos caminos solo se encuentran en X y los puedo combinar para tener al menos k caminos entre A y B (disjuntos), contradicción. \square

Definición 1.10.2. El **grafo línea** $L(G)$ de un grafo $G = (V, E)$ es aquel cuyo conjunto de vértices es E y hay una arista entre dos elementos de E si y solo si las aristas son adyacentes en G , es decir comparten un extremo.

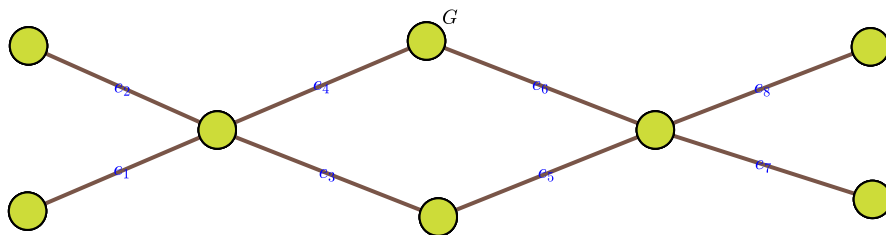


Figura 1.10.57: Ejemplo de un grafo G .

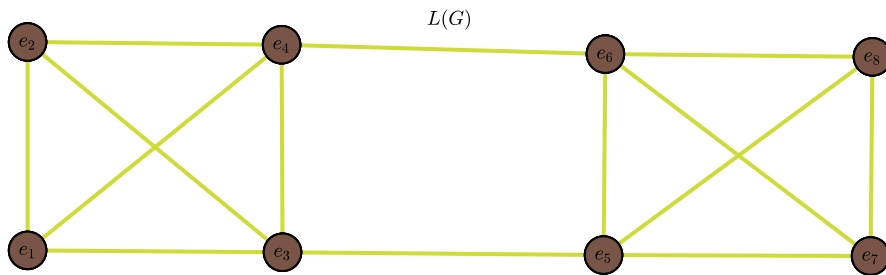


Figura 1.10.58: Grafo de línea de G , donde se puede ver que sus **vértices** son las **aristas** de G .

Definición 1.10.3. Un conjunto de a,B -caminos es un a,B -**abanico** si cada par de estos caminos se intersecta SOLO en a .

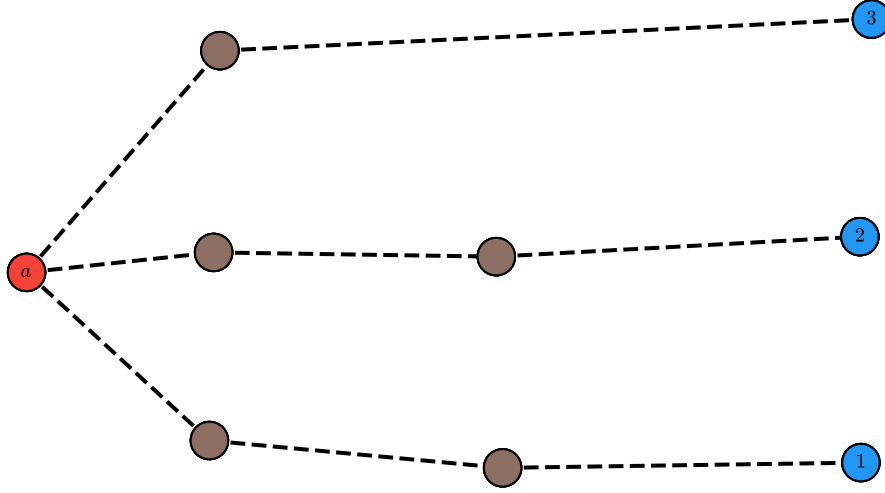


Figura 1.10.59: Ejemplo de a, B -abanico.

Corolario 1.10.4. Para $B \subset V$ y $a \in V \setminus B$, el mínimo número de vértice que separan a de B en G es igual al máximo número de caminos en un a, B -abanico en G .

Demostración. Aplicamos el Teorema de Menger a $G \setminus a$ con conjuntos $A = N_G(a)$ y B como en el enunciado.

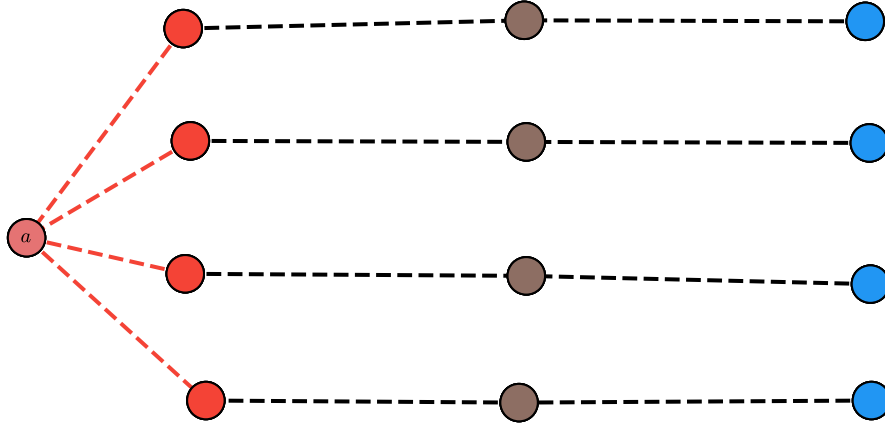


Figura 1.10.60: Ilustración del procedimiento: en rojo los **vecinos** de a , en azul el conjunto B , y en marrón a un conjunto A, B -separador X .

□

Corolario 1.10.5. Sean a y b vértices distintos de $G = (V, E)$.

- (I) Si $ab \notin E$ (a, b no son adyacentes), entonces el mínimo número de vértices que separan a de b en G es igual al máximo número de a, b -caminos INTERNAMENTE disjuntos.
- (II) El mínimo número de aristas que separan a de b es igual al máximo número de a, b -caminos arista-disjuntos.

Demostración. (I) Aplicamos el Teorema de Menger a $G \setminus \{a, b\}$ con $A = N_G(a)$ y $B = N_G(b)$.

- (II) Aplicamos el Teorema de Menger al grafo $L(G)$ con conjuntos $A = E(a)$ y $B = E(b)$ los conjuntos de aristas incidentes en a y b , respectivamente.

□

Notar que en el segundo ítem de la demostración anterior usamos que hay una correspondencia biyectiva entre aristas A, B -separadoras y vértices separadores de $E(A), E(B)$ en $L(G)$, y también entre los A, B -caminos arista-disjuntos y los $E(A), E(B)$ -caminos disjuntos de $L(G)$.

Teorema 1.10.6 (Versión global de Menger). (I) *Un grafo es k -conexo si y solo si contiene k -caminos internamente disjuntos entre cada par de vértices.*

(II) *Un grafo es k -aristaconexo si y solo si contiene k caminos arista disjuntos entre cada par de vértices.*

Demostración. □

1.11. Ejercicios

Ejercicio 1.11.1. Sea G un grafo que contiene un ciclo C , y supongamos que G contiene un camino de longitud al menos k entre dos vértices de C . Probar que G contiene un ciclo de longitud al menos \sqrt{k} .

Solución. Si C tiene longitud \sqrt{k} entonces la afirmación vale. Si no, denotemos por P al camino de longitud k entre dos vértices $x, y \in C$. Como $\|C\| < \sqrt{k}$, P interseca con C en menos de \sqrt{k} vértices, por lo tanto existen dos vértices $a, b \in P \cap C$ tales que, en el orden inducido por el camino P , no hay otro vértice de C entre estos, y aPb tiene longitud $\geq \sqrt{k}$. Luego el ciclo $aPbCa$ tiene longitud $\geq \sqrt{k}$. □

Ejercicio 1.11.2. Probar que los grafos de cintura ≥ 5 y orden n tienen $\delta = o(n)$. Es decir, existe $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(n)/n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y $\delta(G) \leq f(n)$ para todo G de orden n .

Solución. En efecto, tenemos que

$$n = |G| \geq n_0(\delta, 5) = 1 + \delta(1 + (\delta - 1)) = 1 + \delta^2$$

por el Teorema débil ??, si $\delta \geq 2$. □

Ejercicio 1.11.3. Probar que todo grafo conexo G contiene un camino o un ciclo de longitud al menos $\min\{2\delta(G), |G|\}$.

Solución. Comentario, el resultado es falso solo para $n = 2$. En efecto, veremos en la demostración que vale para $n \neq 2$, y un camino de longitud uno no cumple pues $2\delta = 2$ y $n = 2$ pero la longitud de cualquier sub camino o ciclo es a lo más uno.

Procederemos por inducción en $|G| = n$. Vale trivialmente para $n = 1$; vimos que para $n = 2$ es falso; pero para $n = 3$ vale pues G es un camino o un ciclo de longitud 3 y aquí si vale la afirmación. En general, supongamos que es falso para algún $n \geq 4$, el cual podemos tomarlo mínimo. Sea P un camino o ciclo de longitud máxima m en G , notar que $m < 2\delta(G), n$. Supongamos que P es un camino, luego sus extremos no pueden ser adyacentes (por maximalidad de P), pero tampoco pueden tener vecinos

SEGUIR PENSANDO Sea $v \in G \setminus P$. Debe ser que todos sus vecinos son vértices de P . En efecto, completar... Luego, notar que si $x, y \in N_G(v)$ son distintos, entonces no pueden ser adyacentes por maximalidad de P , luego P tiene longitud $\geq 2(\delta(G))$ si

v no tiene grado mínimo, con lo cual todos los vértices fuera de P tienen grado $\delta(G)$ y además P tiene longitud $\geq 2(\delta(G) - 1)$.

Si P es un ciclo la demostración es una versión más fácil de la anterior y es análoga.

Si P

□

Ejercicio 1.11.4. Sean α, β dos invariantes de grafos en \mathbb{N} .

Ejercicio 1.11.5. Probar que todo árbol T tiene al menos $\Delta(T)$ hojas.

Demostración. En efecto, fijemos una raíz r con $d(r) = \Delta(t)$. Afirmamos que hay una hoja distinta por cada vecino de r , más aún, estos son los elementos maximales en el orden de árbol con raíz r . Y hay al menos $d(r)$ de estos, tomándolos el máximo de cada conjunto $w^{\geq} := \{v \in T \mid v \geq w\}$, con $w \in N_T(r)$. Son distintos, pues de lo contrario, sean m_1 al mínimo vértice de w_1^{\geq} y m_2 el de w_2^{\geq} tales que no son más grandes que w_2 y w_1 respectivamente. En particular, existe $m \geq w_1, w_2$. Luego tenemos un ciclo $r < w_1 < \dots < m_1 < m > m_2 > \dots > w_2 > r$, lo cual es imposible. □

Ejercicio 1.11.6. Sean F, F' dos bosques en el mismo conjunto de vértices, y $\|F\| < \|F'\|$. Probar que F' tiene una arista e tal que $F + e$ es nuevamente un bosque.

Solución. En efecto, si F tuviera más de una componente, entonces cualquier arista $e \in F'$ con extremo en ambas funcionaría. Luego supongamos que F' no tiene aristas que conectan ninguna componente de F , es decir por inducción en $\|F\|$ se sigue el resultado. Luego supongamos que F es conexo, es decir es un árbol, como $\|F'\| = |F'| - \# \text{componentes}$, se sigue de la desigualdad del enunciado que F' también es conexo. Ahora si consideramos el grafo $G = F + F'$, este grafo tiene dos árboles generadores F y F' . Si F y F' tuvieran una arista en común, luego el resultado se sigue. De lo contrario, tendríamos que por cada arista $e \in F'$, tenemos un ciclo en $T + e$, es decir un ciclo fundamental C_e . Pero por la Proposición ??:

$$\|F\| + \|F'\| = \dim \mathcal{E}(G) = n - 1 + \dim \mathcal{C}(G)$$

con $n = |F| = |F'|$, y como F es árbol $n - 1 = \|F\|$. Luego $\dim \mathcal{C}(G) = \|F'\|$. Análogamente, $\dim \mathcal{C}(G) = \|F'\| < \|F'\|$, imposible. □

Ejercicio 1.11.7. Probar que todo grafo es 2-arista-conexo, si y solo si, tiene una orientación **fuertemente conexa**, es decir, tiene una orientación en la cual para todo par de vértices x, y existe un camino dirigido \vec{P} con dirección de x hacia y .

Solución. (\Rightarrow) Lo probaremos para multigrafos 2-arista-conexos, por inducción en el número de aristas. Primero supongamos que $\delta(G) \geq 3$, digamos con $d(x) \geq 3$ y e aristas incidentes en x . Consideremos el grafo $G \setminus e$. Si sigue siendo 2-arista conexo, luego por inducción tenemos que tiene una orientación fuertemente conexa y en particular G también. De lo contrario, es porque existe otra arista f , distinta de e , tal que $G \setminus \{e, f\}$ tiene exactamente dos componentes 2-conexas, conectadas entre sí por e y f , digamos H_1, H_2 y por hipótesis inductiva tienen una orientación fuertemente conexa cada una, las cuales podemos extender a todo G declarando a f como la orientación H_1 hacia H_2 y a e como la orientación opuesta.

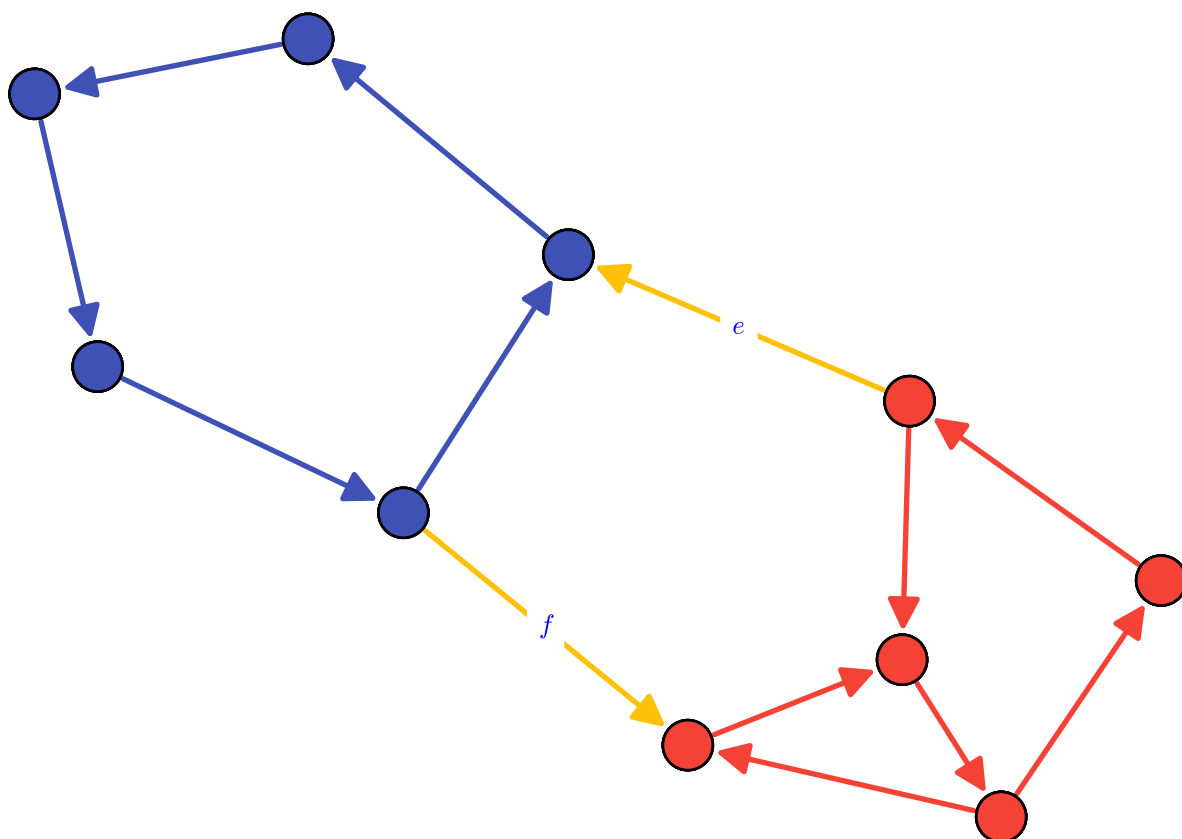


Figura 1.11.61: Por un lado tenemos a H_1 y por el otro H_2 , conectados por e y f .

Ahora, si $\Delta(G) \leq 2$, tenemos que como $2 \leq \lambda(G) \leq \delta(G) \leq \Delta(G)$, en realidad vale la igualdad, es decir G es 2-regular. Si G tiene solo vértice no hay nada que probar, en general sea $x \in V(G)$, luego tiene dos vecinos o era el multi-grafo con solo dos vértices de grado 2; en el primer caso podemos *remove* a x , es decir, los vecinos de x ahora van a estar unidos por una arista en vez de conectarse a x , como la cantidad de aristas disminuye pero sigue siendo 2-conexo, luego por inducción tiene una orientación fuertemente conexa, la cual sencillamente podemos extender a todo G como lo muestra el dibujo:

(\Leftarrow) Quitar una arista no nos puede remover la conexión de G , de lo contrario, sean x, y dos vértices adyacentes tales que $e = xy$ es un puente, i.e. $G \setminus e$ es arista desconexo, tenemos que e tenía la orientación, digamos x a y , sin embargo existe un camino en G con orientación de y en x , el cual no puede tener ninguna arista igual a e , con lo cual x, y seguían siendo arista-conectados en $G \setminus e$, absurdo.

□

Ejercicio 1.11.8. Dar una demostración corta por inducción de la existencia de un árbol normal generador en cualquier grafo finito conexo (para cualquier orden de árbol).

Solución. Afirmamos que existe un vértice v de G que se puede eliminar y sigue siendo conexo: G tiene un árbol generador, luego quitamos una hoja. Ahora por inducción, $G \setminus v$ tiene un árbol generador normal T' . Afirmamos que el árbol generador

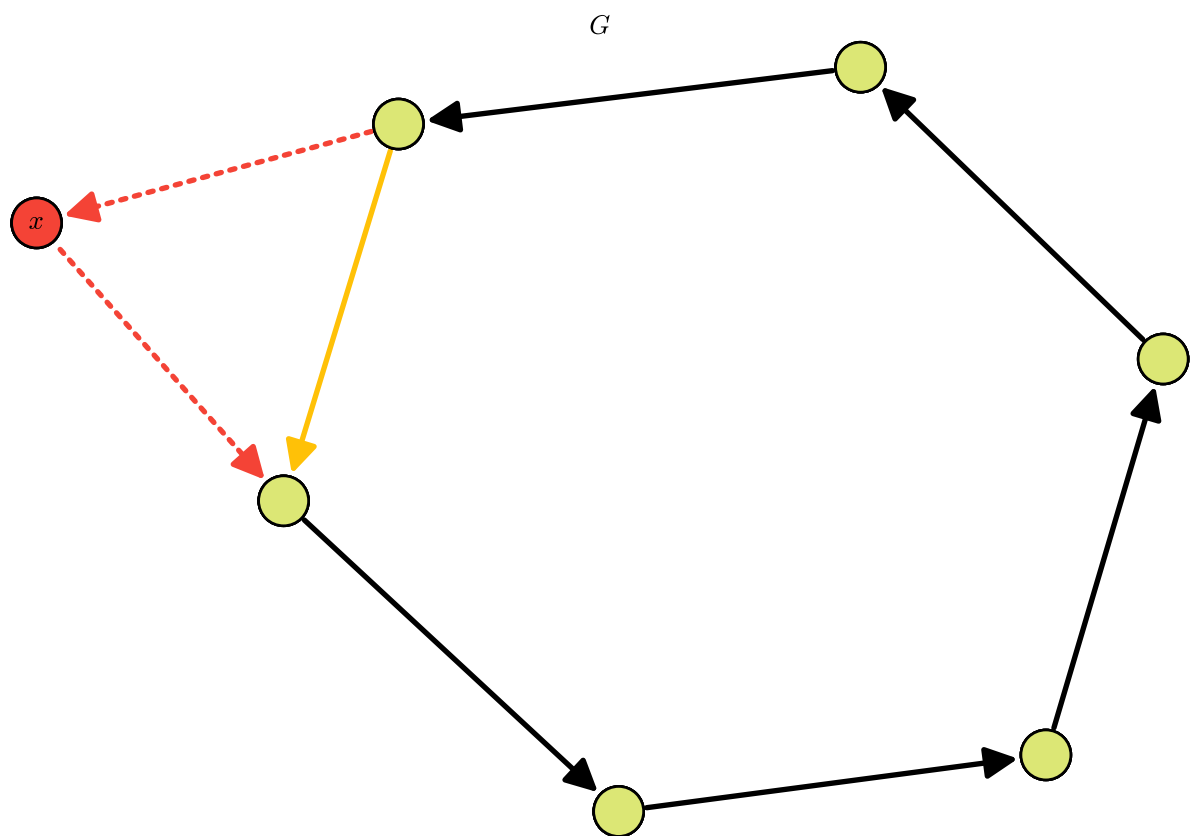


Figura 1.11.62: Remover x es equivalente a unir a sus vecinos por una **arista** y quitar **las aristas incidentes** en x .

$T = T'vx$ de G es también normal, donde $x \in T'$ es adyacente a v en G , maximal en el orden de T' . Ahora, el orden de T' se extiende al de T para cualquier raíz r de T' . Sea P un T -camino entre dos vértices distintos de v , luego son comparables en T' ; por otro lado, si uno de los vértices es v y el otro es y , digamos, entonces $xvPy$ es un T' -camino, luego x e y son comparables, y por lo tanto v e y también, pues por la maximalidad de x , $x \geq y$. (Notar que luego vale para v como raíz también.) \square

Ejercicio 1.11.9 (Depth-first search). Sea G un grafo conexo, y $r \in G$ un vértice arbitrario. Empezando desde r , nos movemos a través de las aristas de G , priorizando movernos a un vértice que no hayamos visitado aún. Si no hay ningún vértice, retrocedemos por las aristas que visitamos por última vez, ordenadamente: la más reciente primero, intentando ocupar un vértice no visitado nuevamente. El algoritmo para cuando regresamos a r . Probar que las aristas recorridas forman un árbol normal generadores de G con raíz r .

Solución. Debemos probar varias cosas, primero que este recorrido, que llamaremos T , es un árbol: basta ver que no tiene ciclos; que es generador; y que es normal.

1. Sea C un ciclo con vértices consecutivos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$ en T . Podemos suponer que x_k fue el último en haber sido visitado. Luego x_0 tuvo que haber sido el vértice que se visitó primero de C y en consecuencia se visitó en orden: x_0, x_1, \dots, x_k . Pero una vez visitado x_k el algoritmo siguió corriendo sin volver a x_0 pues este ya fue visitado, pero esto significa que C no puede tener la arista $x_k x_0$, absurdo.
2. Supongamos que existe un vértice no visitado, luego existe un vértice sin visitar a distancia mínima de T , i.e. adyacente a $x \in T$. Luego el algoritmo tuvo que pasar por este vértice cuando volvió a x por última vez.
3. Como T genera, se sigue que es normal si y solo si para todo par de vértices adyacentes en $G \setminus T$ son comparables. En efecto, supongamos que el algoritmo visitó primero a x y luego a y , con lo cual $x \leq y$.

\square

Ejercicio 1.11.10. Sea \mathcal{T} un conjunto de subárboles de un árbol T , y $k \in \mathbb{N}$.

- (I) Mostrar que si los árboles de \mathcal{T} son disjuntos dos a dos, entonces $\bigcap_{S \in \mathcal{T}} S \neq \emptyset$.
- (II) Mostrar que o \mathcal{T} tiene k árboles disjuntos o existe un conjunto de a lo sumo $k - 1$ vértices de T en $\bigcap_{S \in \mathcal{T}} S$.

Notar que \mathcal{T} tiene que ser finito, por ejemplo si T es finito, porque si no el primer ítem falla tomando una cadena (con el orden de inclusión) de conjuntos de caminos infinitos.

Solución. (I) Lo probaremos por inducción en $n = |T|$. Si $n = 1$ es trivial. En general, si $n > 1$, tomamos una hoja $x \in T$ y consideramos $T' = T \setminus x$. Sea \mathcal{T} un subconjunto de árboles de T con la propiedad de intersección dos a dos del enunciado. Si $x \in \bigcap \mathcal{T}$, entonces ganamos. Supongamos luego que no, y consideremos \mathcal{T}' el conjunto de los $T'_i := T_i \setminus x$ con $T_i \in \mathcal{T}$. Este es un subconjunto de árboles en T' , luego si vemos que cumple la propiedad de intersección dos

a dos, se seguirá por inducción que $\emptyset \neq \bigcap \mathcal{T}' \subset \bigcap \mathcal{T}$. En efecto, si existieran $T'_1, T'_2 \in \mathcal{T}'$ tales que $T'_1 \cap T'_2 = \emptyset$, quiere decir que $T_1 \cap T_2 = \{x\}$, pero esto es imposible salvo que T_1 o T_2 sea igual a $\{x\}$, ya que x es una hoja de T , pero entonces por la intersección dos a dos de \mathcal{T} , tenemos que $x \in \bigcap \mathcal{T}$, pero ya habíamos descartado este caso.

- (II) Lo haremos por inducción en el número de vértices n de T . Si $n = 1$, el resultado es trivial. En general, tomemos una hoja $x \in T$, y consideremos un conjunto \mathcal{T} de árboles de T . Supongamos que no contiene $k \in \mathbb{N}$ árboles disjuntos. Sea $\mathcal{T}' := \{T \setminus \{x\} \mid T \in \mathcal{T}\}$, una familia de subárboles de $T' = T \setminus \{x\}$. Pueden ocurrir dos casos: en el primero \mathcal{T}' no tiene $k - 1$ árboles disjuntos, luego por hipótesis inductiva, existe un conjunto de vértices $S \subset T' := T \setminus \{x\}$ con a lo más $k - 2$ vértices que interseca a todos los árboles de \mathcal{T}' . Si ningún árbol de T fuera exactamente $\{x\}$, entonces se seguiría que esos vértices también intersecan a los de \mathcal{T} . De lo contrario, agregando a x tenemos un subconjunto de a lo más $k - 1$ vértices que también sirve para \mathcal{T} . El segundo caso es cuando \mathcal{T}' tiene $k - 1$ árboles disjuntos pero no tiene k . El mismo procedimiento nos daría un conjunto $S \subset T'$ de a lo más $k - 1$ elementos que interseca a los árboles de \mathcal{T}' , pero como hay $k - 1$ disjuntos, debe ser exactamente $k - 1$. Ahora, estos $k - 1$ árboles de \mathcal{T}' , originalmente a lo más uno podía contener a x , de lo contrario con x es hoja, su vecino y estaría en la intersección de dos árboles de \mathcal{T}' . Como \mathcal{T} no puede tener k árboles disjuntos, debe ser que el árbol $\{x\}$ interseca a alguno de los que no se degeneraron en T' , o sea que hay exactamente un árbol T_0 en \mathcal{T} , tal que $x, y \in T_0$ pero que no están en ningún otro árbol, reemplazando al elemento de $S \cap T'_0 = S \cap (T_0 \setminus \{x\} = \{z\})$ por x , obtenemos que S tiene $k - 1$ elementos e interseca a todos los árboles de \mathcal{T} . □

Comentario 1.11.11. Utilizando el vocabulario del Capítulo B del Apéndice, los ítems del ejercicio anterior se pueden traducir. Antes, vamos a considerar el conjunto $\text{Trees}(T)$, de subárboles de T , el cual es un orden parcial con la inclusión, pero nos va a interesar mirar el orden opuesto $\leq := \supset$. Así, la operación supremo entre un conjunto arbitrario de subárboles de T , digamos \mathcal{T} , es $\bigvee \mathcal{T} = \bigcap \mathcal{T}$, cuando el supremo exista, y este sea un subárbol de T . Notar que siempre que dos árboles en T no sean disjuntos, entonces la intersección está en $\text{Trees}(T)$, es decir tienen supremo. Con lo cual:

- (I) La hipótesis que todo par de elementos de \mathcal{T} tengan intersección dos a dos, equivale a decir que \mathcal{T} es un conjunto dirigido del orden parcial $(\text{Tree}(T), \leq)$; y que $\bigcap \mathcal{T} \neq \emptyset$ equivale a que \mathcal{T} tenga supremo en $\text{Tree}(T)$ (pues la intersección de árboles sigue siendo un árbol, si el conjunto es dirigido). En resumen, en el ejercicio anterior probamos que $(\text{Tree}(T), \leq)$ es un *orden parcial completo-dirigido*.
- (II) Más aún, el segundo ítem nos dice que todo $\mathcal{T} \subset \text{Tree}(T)$ tiene k elementos sin relacionar o existe un conjunto de a lo más $k - 1$ vértices (pensados como árboles) en $\text{Tree}(T)$ cada uno \leq que algún árbol de \mathcal{T} . Intuitivamente, \mathcal{T} no tiene supremo, pero tenemos un poco de control que “tan lejos está de tener supremo”: a lo más $k - 1$, pues si fuera 1, tendríamos que $\sup \mathcal{T} = \bigcap \mathcal{T}$ existe.

Ejercicio 1.11.12. Probar que todo automorfismo de un árbol fija un vértice o una arista.

Solución. Probaremos el enunciado por inducción en el cardindinal de T . Si $|T|$ es 1 el resultado es trivial. En general, consideramos $f : T \rightarrow T$ endomorfismo de grafos, luego induce un endomorfismo $f^* : L(T) \rightarrow L(T)$ entre grafos de línea, que manda $e = xy \mapsto f^*(e) = f(x)f(y)$ (siempre está bien definido el morfismo de grafos f^* inducido por un morfismo de grafos $f : G_1 \rightarrow G_2$). Como $L(T)$ es un árbol también (en efecto, es el grafo de bloque de T) y tiene $n - 1$ vértices si $n = |T|$, se sigue por inducción que f^* deja fijo a una arista o a un vértice de $L(T)$. En ambos casos se implica que f tiene un punto fijo. \square

Ejercicio 1.11.13. Mostrar que en un grafo conexo los conjuntos de aristas que son minimales con la propiedad de contener una arista de cada árbol generador son precisamente los enlaces del grafo.

Solución. Por un lado, un corte de G tiene que tener una arista de cada árbol generador, pues el árbol es conexo y no se puede separar por las partes que inducen el corte; luego los enlaces son minimales con esta propiedad. Por otro lado, lo anterior implica que los conjuntos de aristas minimales con esta propiedad, cumplen que si son cortes entonces son enlaces. Luego basta probar que estos conjuntos son cortes. En efecto, sea E un conjunto de aristas minimal con la propiedad que interseca a todos los árboles generadores de G . Sea $f \in E$, por minimalidad tenemos que existe un árbol generador T tal que $E(T) \cap E = \{f\}$. Afirmamos que el corte fundamental

$$D_f = D_f(T) \subset E;$$

con lo cual, como D_f es un enlace, interseca a todos los árboles generadores, luego por minimalidad de E deben ser iguales, i.e. E es un corte (de hecho un enlace). Finalmente, veamos la afirmación: ya sabemos que $f \in D_f \cap E$; sea ahora $g \in D_f \setminus \{f\}$, consideremos el árbol $T' = T - f + g$ que es también generador de G . Notemos que T' debe intersectar a E porque es árbol generador, pero por cómo elegimos a T , la única arista que puede estar en E es g . Como g era arbitrario, $D_f \subset E$, como queríamos. \square

Ejercicio 1.11.14. Probar que el espacio de ciclos de un grafo está generado por:

- (I) sus ciclos inducidos;
- (II) sus ciclos geodésicos;
- (III) sus ciclos sin cuerdas.

(Un ciclo $C \subset G$ se dice **geodésico** en G , si para todo par de vértices de C , su distancia en G coincide con su distancia en C .)

Solución. Como todo elemento del espacio de ciclos se escribe como unión disjunta de ciclos, basta ver que los ciclos sin cuerdas generan a los ciclos. En efecto, sea C un ciclo, entonces consideremos la cuerda xPy de C en G con $x, y \in V(C)$. Podemos tomar la cuerda (si es que tiene, si no ya ganamos) de manera que el ciclo $C' = xPyCx$ es un ciclo sin cuerdas, además

$$C = (C \setminus C' + P) + C'$$

donde $C \setminus C' + P$ es un ciclo de G al que le podemos repetir este procedimiento recursivamente, así,

$$C = D_1 + D_2 + \cdots + D_k$$

se escribe como la suma de ciclos sin cuerdas.

Como los ciclos sin cuerdas son geodésicos y los ciclos geodésicos son ciclos inducidos, el ejercicio se sigue. \square

Ejercicio 1.11.15. Sea F un conjunto de aristas en G .

1. Probar que F se extiende a un elemento de $\mathcal{B}(G)$ si y solo si no contiene ciclos impares.
2. Probar que F se extiende a un elemento de $\mathcal{C}(G)$ si y solo si no contiene cortes impares.

Solución. 1. Por un lado ningún elemento de $\mathcal{B}(G)$ puede tener un ciclo impar pues el subgrafo inducido es bipartito. Recíprocamente, podemos agregar aristas de F tal que siga sin contener ciclos impares hasta obtener un conjunto maximal con esta propiedad. Claramente obtenemos una bipartición; cuya unión da G por maximalidad de F .

2. Por un lado, si F se extiende a un elemento de $\mathcal{C}(G)$, digamos \bar{F} , entonces no contiene cortes impares, pues de lo contrario, digamos que contiene a un corte E impar, luego tenemos que por ortogonalidad $\langle E, \bar{F} \rangle = 0$, i.e. \bar{F} interseca una cantidad par de veces a E , pero como $E \subset F \subset \bar{F}$, interseca en su totalidad a E que es una cantidad impar: absurdo. Recíprocamente, si no contiene cortes impares, podemos considerar el conjunto de aristas F maximal con la propiedad de no contener cortes impares, obtenido a partir de F agregando aristas. Luego para ver que está en el espacio de ciclos, hay que probar la propiedad de ortogonalidad: F interseca una cantidad par de veces a todos los cortes. Probemoslo por el absurdo, si no fuera así, existiría corte E que interseca a F una cantidad impar de veces, en particular, E no está contenido en F . \square

Ejercicio 1.11.16. Sea $A = (a_{ij})_{n \times n}$ la matriz de adyacencia de un grafo G . Probar que la matriz $A^k = (a'_{ij})_{n \times n}$, tiene la propiedad de que $a'_{i,j}$ es la cantidad de **paseos** (es decir caminatas donde se pueden repetir aristas) de longitud k que hay de v_i hasta v_j en G .

Solución. Por inducción en k . Si $k = 1$ es trivial. En general, supongamos que vale para $k \geq 1$. Luego $A^{k+1} = A^k \cdot A = (a''_{ij})$ donde

$$a''_{ij} = \sum_{1 \leq l \leq n} a'_{i,l} a_{l,j},$$

con $A^k = (a'_{i,l})$ la cantidad de paseos de longitud k entre v_i y v_l . Luego la afirmación se sigue de la cantidad de $k+1$ paseos entre v_i y v_j es igual a la cantidad de k paseos entre v_i y v_l , y luego de v_l a v_j para cada vértice v_l adyacente a v_j . \square

1.12. Clase 11: 27/04/23

Definición 1.12.1. Un **matching** o **emparejamiento** en un grafo $G = (V, E)$ es un subconjunto $M \subset E$ tal que ningún par de aristas en M comparten un vértice.

Un matching es **maximal** si al añadirle cualquier otra arista deja de ser matching.

Un matching es **máximo** si no hay otro matching con mayor tamaño (número de aristas).

Decimos que un matching **cubre** a los vértices de sus aristas.

Un matching que cubre a todo $V(G)$ es **perfecto**.

Notar que un matching de un grafo G , es la definición dual de conjuntos de vértices aislados en su grafo de línea $L(G)$.

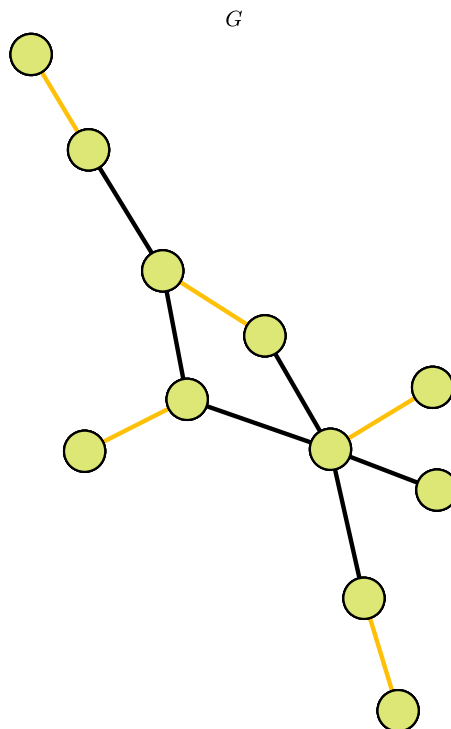


Figura 1.12.63: Ilustración de un **matching** de un grafo G . Observar que este matching es maximal, no perfecto. ¿Será máximo?

Comentario 1.12.2. Hay grafos sin matchings perfectos. Por ejemplo, el grafo de la ilustración anterior:

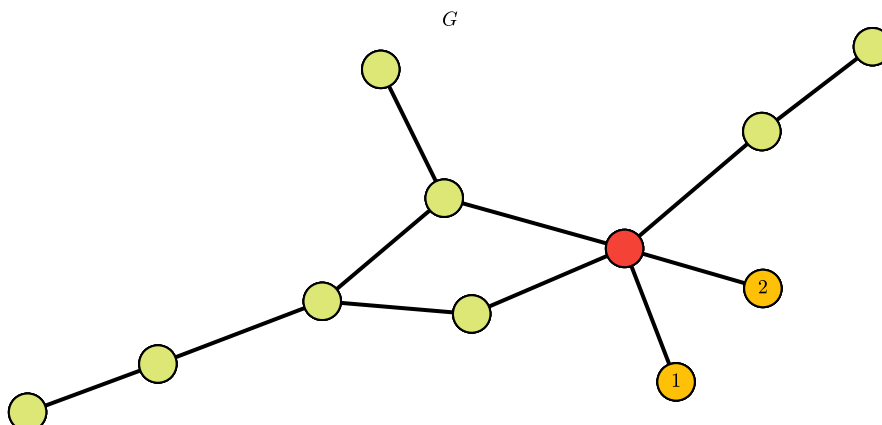


Figura 1.12.64: En efecto, todo matching perfecto debe cubrir a los vértices de grado uno: 1 y 2, pero esto es imposible porque haría que sus aristas fueran adyacentes.

En particular, el ejemplo anterior muestra que todo grafo con un par vértices de grado 1, a distancia 2 entre sí, no puede tener un matching perfecto.

Observación 1.12.3. Sea T un árbol. Luego T tiene un matching perfecto si y solo si la distancia entre cualquier par de hojas es impar.

Demostración. En efecto, la noción dual de que un árbol T tenga un matching perfecto, es que podamos pintar el grafo línea $L(T)$ (que también es un árbol en este caso) con dos colores: rojo y azul, el primero para representar las aristas que no pertenecen al matching y el segundo para las que sí, de manera que partiendo de cualquier hoja podamos llegar a otra hoja pintando la primera de azul y luego intercalando colores llegar a la otra hoja, nuevamente de color azul. Es decir, entre dos hojas de color azul el único camino que las une debe tener longitud par (estamos pensando en el grafo de línea $L(T)$). Ahora, esto se traduce al grafo T cambiándo la paridad, pues la distancia entre dos hojas de T disminuye en uno cuando miramos el camino que las une en $L(G)$.

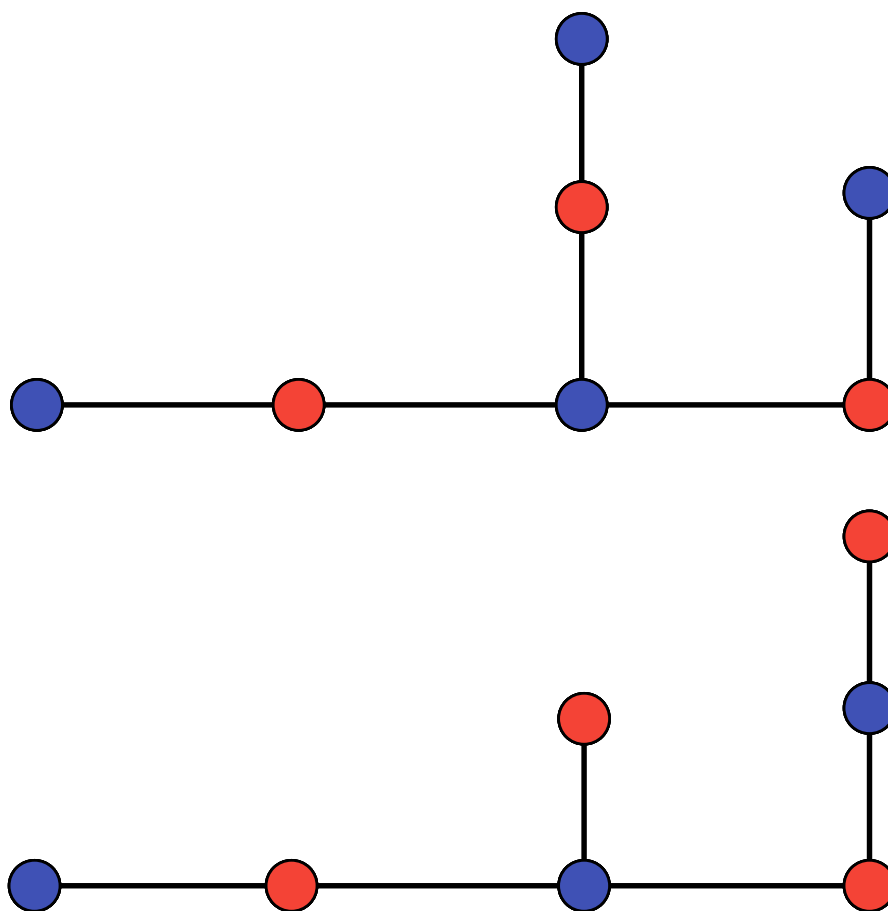


Figura 1.12.65: Los ejemplos de grafos de línea de dos árboles distintos, uno sí tiene un matching perfecto y el otro no, pues el primero tiene distancia par entre cualquier par de hojas pero el otro no.

□

Sea $G = (X \sqcup Y, E)$ un grafo bipartito (hablamos de un X, Y -**bigrafo**). Si G tiene un matching de tamaño $|X|$ (en particular cubre a X) los elementos de cualquier $S \subset X$ tienen

$$|N(S)| \geq |S|. \quad (1.1)$$

Definición 1.12.4 (Condición de Hall). Si subconjunto de vértices $S \subset G$ cumple (1.1), decimos que S cumple la **condición de Hall**.

Teorema 1.12.5 (Teorema de Hall (1935)). *En un X, Y -bigrafo, existe un matching que cubre a X si y solo si S cumple la condición de Hall (1.1) para todo $S \subset X$.*

Demostración. La primera implicación la vimos antes de la definición de condición de Hall.

Veamos la recíproca. Lo haremos por inducción en $|X| =: n$. Si $n = 1$ es trivial. En general, si $n > 1$, queremos ver que vale para $n + 1$. Hay dos casos:

Caso 1: $|N(S)| > |S|$ para todo subconjunto $S \subsetneq X$ no vacío. Tomemos un par de vértices que sean vecinos $x \in X$ e $y \in Y$, luego consideramos la $X', Y' = X \setminus \{x\}, Y \setminus \{y\}$ -bipartición proveniente de G al eliminar x, y ; todos los subconjuntos de X' siguen cumpliendo la condición de Hall, luego tiene un matching que cubre a X' por hipótesis inductiva, luego agregando xy obtenemos un matching que cubre a X en G .

Caso 2: Sea $S \subset X$ no vacío tal que $|N(S)| = |S|$.

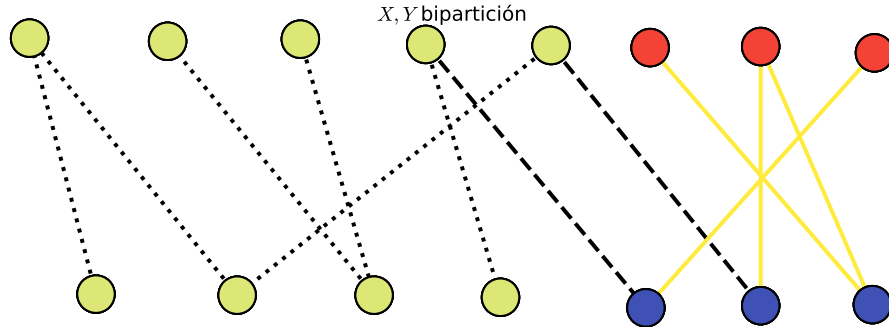


Figura 1.12.66: Ilustración: S y $N(S)$ tienen el mismo cardinal, pero $N(S)$ podría tener otros vecinos en X además de S . Junto con las aristas, los vértices de S y $N(S)$ forman el grafo inducido $G[S \cup N(S)]$.

Sea G_1 el grafo inducido por los vértices $S \cup N(S)$, y sea G_2 el subgrafo inducido por $G \setminus (S \cup N(S))$. Notar que G_1 cumple la condición de Hall. Por lo tanto, usando hipótesis inductiva, hay un matching en G_1 que cubre a S . Veamos que la condición de Hall se tiene que cumplir también en G_2 . Consideremos $T \subset X \setminus S$ y notemos que

$$N_{G_2}(T) = N_G(T \cup S) \setminus N_G(S).$$

Así tenemos que

$$|N_{G_2}(T)| = |N_G(T \cup S)| - |N_G(S)| \geq |T \cup S| - |N_G(S)| = |T \cup S| - |S| = |T|.$$

Entonces G_2 cumple la condición de Hall, luego tiene un matching que cubre a $X \setminus S$ por hipótesis inductiva. Uniendo los dos matchings obtenidos, conseguimos un matching que cubre a X .

□

Corolario 1.12.6 (König-Frobenius). *Todo X, Y -bigrafo regular (no trivial) tiene un matching perfecto. En particular $|X| = |Y|$.*

Demostración. En un X, Y -bigrafo k -regular G , consideramos $S \subset X$. Veamos que $|N(S)| \geq |S|$. Antes, notemos que la cantidad de aristas que inciden en S es $k \cdot |S|$. Análogamente, hay $k \cdot |N(S)|$ aristas que inciden en $N(S)$. Todas las aristas que inciden en S también lo hacen en $N(S)$, pero no son las únicas, podría haber más aristas incidentes en $N(S)$ que provienen de vértices de $X \setminus S$. (Pasa lo mismo que en la figura anterior.) Es decir,

$$k|S| \leq k|N(S)| \Leftrightarrow |S| \leq |N(S)|.$$

Como $S \subset X$ era arbitrario, se cumple la condición de Hall, y luego por el Teorema anterior existe un matching de G que cubre a X .

De la misma manera, podemos conseguir un matching de G que cubra a Y . Consecuentemente, $|X| = |Y|$ y luego el matching es perfecto. □

1.12.1. Relaciones min-máx

El Teorema de Hall nos dice cuándo podemos encontrar un matching que cubre una de las partes de un grafo bipartito. Pero quizá, sabiendo que no puedo cubrir ninguna de las partes, igual quiero saber el tamaño máximo de un matching en mi grafo.

Notación 1.12.7. Denotamos por $\alpha'(G)$ al tamaño máximo de un matching en un grafo G (cantidad de aristas del matching).

Observación 1.12.8. En un grafo G con un matching M de tamaño m , tenemos que $2m \leq |G|$, pues los vértices que cubre cada arista de M son disjuntos por definición de matching. Consecuentemente,

$$2\alpha'(G) \leq |G|.$$

Definición 1.12.9. Para un X, Y -bigrafo, el **defecto** $\text{df}(S)$ de un conjunto $S \subset X$ es la cantidad

$$|S| - |N(S)|.$$

Corolario 1.12.10 (Fórmula del defecto). *En un X, Y -bigrafo G , se tiene*

$$\alpha'(G) = \min_{S \subset X} \{|X| - \text{df}(S)\}.$$

Demostración. Todo matching de G no cubre $\text{df}(S)$ vértices de S , para cualquier subconjunto $S \subset X$ arbitrario. Es decir, todo matching tiene a lo más $|X| - \text{df}(S)$ elementos. Así,

$$\alpha'(G) \leq |X| - \text{df}(S), \forall S \subset X.$$

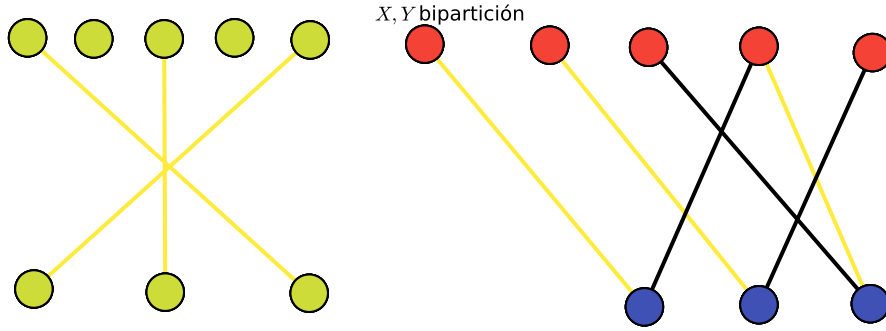


Figura 1.12.67: Visualización: por un lado está $S \subset X$, y por otro $N(S) \subset Y$. En matching no cubre $\text{df}(S) = 5 - 2$ vértices de S , con lo cual cubre a lo más $|X| - \text{df}(S) = 8 - 2 = 6$ vértices de X .

Para la otra desigualdad construiremos un matching de tamaño mínimo. Como vimos recién $\alpha'(G) \leq |X| - \text{df}(S), \forall S \subset X$. Si tomamos $d = \max_{S \subset X} \{\text{df}(S)\}$, en particular tenemos que

$$\alpha'(G) \leq |X| - d.$$

Luego basta encontrar un matching de tamaño al menos $|X| - d$. Construyamos un grafo G' añadiendo d vértices a Y , cada uno adyacente a todo X .

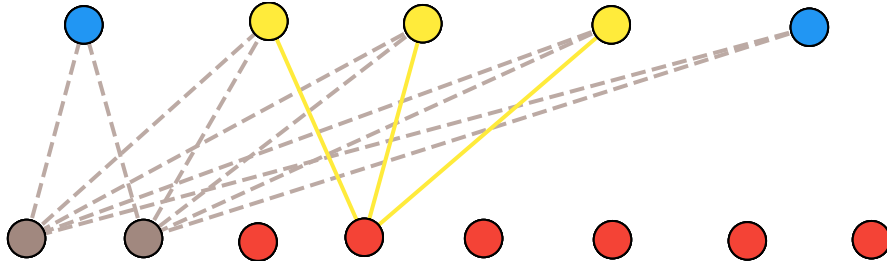


Figura 1.12.68: Ilustración de G' : agregamos en el dibujo dos vértices adyacentes a todos los vértices de X (fila superior con vértices azules y amarillos). Notar que en este caso 2 es el defecto de S .

El grafo G' cumple la condición de Hall, pues para cada subconjunto $S \subset X$ le añado $d \geq \text{df}(S)$ vecinos nuevos. Con lo cual G' tiene un matching que cubre a X . En el peor de los casos, este matching tiene que cubrir a los d vértices nuevos que agregamos a Y , es decir, que quitando estos vértices obtenemos un matching con al menos $|X| - d$ vértices de X cubiertos. \square

El tamaño de un matching está acotado por un parámetro “dual” natural.

Definición 1.12.11. Un **cubrimiento por vértices** es un conjunto de vértices que contiene al menos un extremo de cada arista.

Denotamos por $\beta(G)$ al tamaño mínimo de un cubrimiento por vértices.

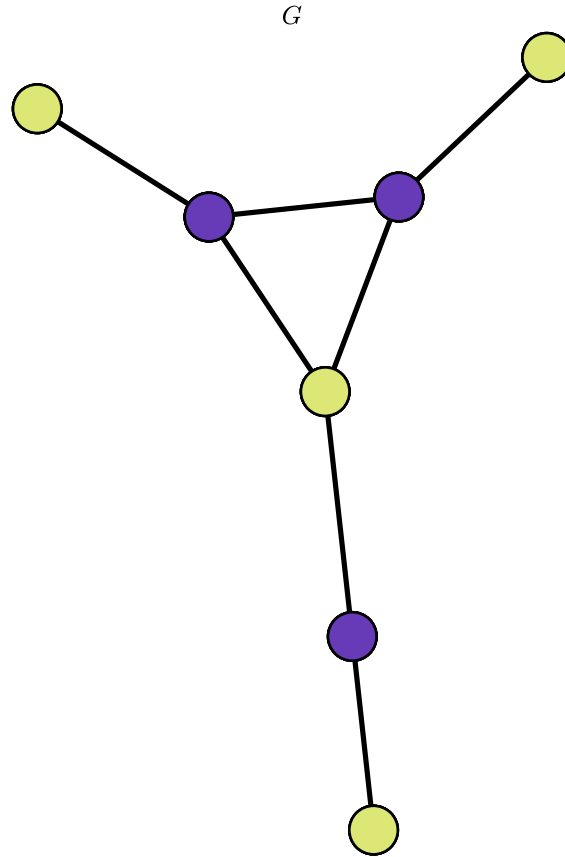


Figura 1.12.69: Ejemplo de **cubrimiento por vértices** de un grafo G .

Notar que un cubrimiento obvio, pero poco interesante, de un grafo G es todo el conjunto de vértices $V(G)$.

Observación 1.12.12. Tenemos que

$$\#\{\text{Componentes conexas no triviales de } G\} \leq \beta(G) \leq \min\{|G|, ||G||\}.$$

Demostración. Por un lado, cada componente conexa no trivial debe tener una arista, que debe ser cubierto por al menos un vértice. Así se ve la primera desigualdad. Notar que esta cota es tight porque podemos considerar un grafo que sea la unión disjunta de k estrellas de cualquier cantidad de aristas y l vértices aislados.

Por otro lado, cada vértice u de un cubrimiento U por vértices de G de tamaño mínimo $\beta(G)$ es extremo de alguna arista e_u cuyo otro extremo está fuera de U . Luego si $u y u'$ son distintos, es porque sus aristas e_u y $e_{u'}$ también lo son. Esto nos dice que G tiene al menos $|U| = \beta(G)$ aristas. Como trivialmente $|U| \leq |G|$, se tiene la segunda desigualdad. Notar que esta cota es tight porque podemos considerar a G como la unión disjunta de una cantidad k de 1-caminos. \square

Teorema 1.12.13 (König-Egevary (1931)). Si G es bipartito, entonces

$$\alpha'(G) = \beta(G).$$

Comentario 1.12.14. 1. En todo grafo (no necesariamente bipartito) se cumple

$$\alpha'(G) \leq \beta(G).$$

En efecto, tomemos un cubrimiento de tamaño mínimo $\beta(G)$, dados un matching de G , toda arista del matching cubre a algún vértice del cubrimiento, pero dadas dos aristas distintas del matching, no tienen el mismo vértice del cubrimiento pues no son adyacentes.

2. El Teorema de König-Egevary nos garantiza que en un grafo bipartito podemos demostrar la optimalidad de un matching al encontrar un cubrimiento por vértices del mismo tamaño (y viceversa).

Teorema. Puede entrar en el control Sea G un X, Y -bigrafo. Ya vimos una de las desigualdades, ahora veamos la otra. Vamos a buscar un cubrimiento por vértices, de tamaño $\alpha'(G)$. La fórmula del defecto nos dice que $\alpha'(G) = \min_{S \subset X} \{|X| - \text{df}(S)\}$, tomando $T \subset X$ que realice el mínimo:

$$\alpha'(G) = |X| - \text{df}(T) = |X| - |T| + |N(T)| = |X \setminus T| + |N(T)|.$$

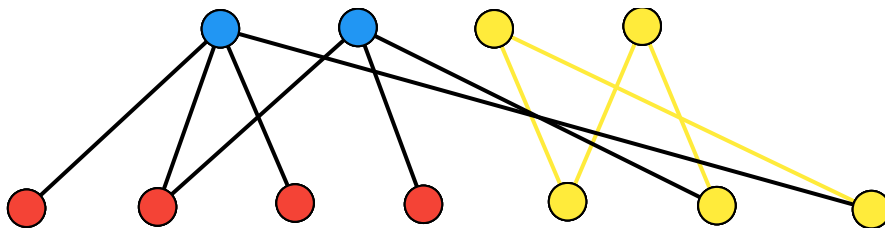


Figura 1.12.70: Inspiremonos con el dibujo. Del lado X tenemos a T , y del lado Y tenemos $N(T)$.

Un cubrimiento por vértices de tamaño $\alpha'(G)$ es entonces $(X \setminus T) \cup N(T)$, luego el cubrimiento mínimo debe ser $\beta(G) \leq \alpha'(G)$. \square

Como corolario, este teorema nos dice que en un bigrafo encontrar un matching máximo, o un cubrimiento por vértices mínimo son problemas de optimización duales.

Ejercicio 1.12.15. Calcular $\alpha'(K_n)$ para todo $n \geq 3$. (Notar que $\alpha'(K_2) = 1$).

Solución. Vamos a probar por inducción que

$$\alpha'(K_{n+1}) = \alpha'(K_n) + 1, \quad \forall n \geq 3. \quad (1.2)$$

Esto, junto con el hecho de que $\alpha'(K_3) = 1$, prueba la afirmación:

$$\alpha'(K_n) = n - 2, \quad \forall n \geq 3.$$

Claramente vale (1.2) para $n = 3$. En general, tomando un vértice $x \in K_{n+1}$ y considerando $K_n = K_{n+1} \setminus \{x\}$ se ve por inducción que agregando una arista incidente a x a un matching de K_n de tamaño $\alpha'(K_n)$, obtenemos un matching de K_{n+1} una unidad mayor, i.e. $\alpha'(K_n) + 1 \leq \alpha'(K_{n+1})$. Por otro lado, un matching de K_{n+1} de tamaño $\alpha'(K_{n+1})$ se convierte en un matching de K_n si quitamos un vértice de K_{n+1} cubierto por él, i.e. $\alpha'(K_{n+1}) - 1 \leq \alpha'(K_n)$. Probando así la igualdad (1.2). \square

Veamos otro par de problemas duales.

Definición 1.12.16. El **número de independencia** de un grafo G es el tamaño máximo de un conjunto independiente de vértices en G . Denotamos a esta cantidad $\alpha(G)$.

Notar que $\alpha'(G) = \alpha(L(G))$, es decir que independencia de vértices y matchings son conceptos *duales*.

En un X, Y -bigrafo, ambas partes X, Y son conjuntos independientes, pero podría pasar que $\alpha(G) > \max\{|X|, |Y|\}$:

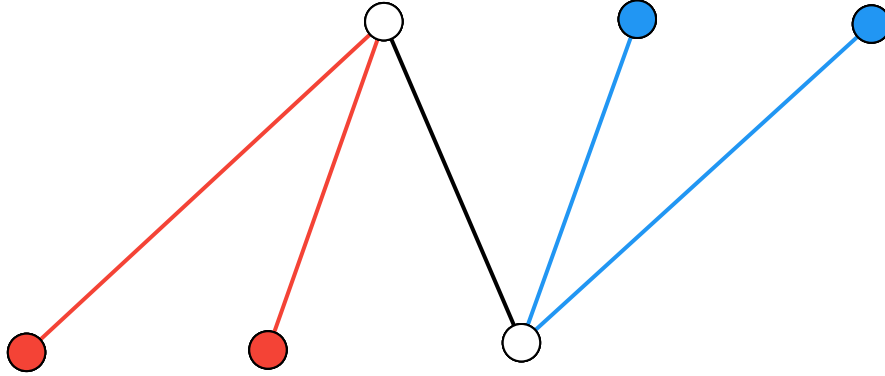


Figura 1.12.71: Ejemplo.

Observación 1.12.17. Si S es un conjunto de vértices independientes de tamaño máximo $\alpha(G)$, se tiene todo vértice en $V(G) \setminus S$ es adyacente a algún vértice de S . Luego

$$|G| - \alpha(G) \leq ||G|| \Leftrightarrow |G| - ||G|| \leq \alpha(G).$$

Pero en la mayoría de los casos no nos dice nada, pues el lado izquierdo es negativo.

Definición 1.12.18. Un **cubrimiento por aristas** de G es un conjunto de aristas tal que todo vértice de G es extremo de alguna arista en el conjunto. Notemos a esta cantidad $\beta'(G)$.

Notar que lo más inocente que uno podría intentar hacer en un grafo G para encontrar un cubrimiento por aristas, es elegir el conjunto de todas las aristas E , sin embargo, si G tiene vértices aislados entonces no hay cubrimiento! (En este caso definimos $\beta'(G) := \infty$). Es decir, solamente los grafos sin vértices aislados tienen cubrimiento por aristas.

Observación 1.12.19. Tenemos que

$$|G|/2 \leq \beta'(G) \leq |G| - \#\{\text{componentes conexas de } G\}.$$

Demostración. Sea S un cubrimiento por aristas de G de tamaño mínimo $\beta'(G)$. Por minimalidad de S , ambos extremos de una arista de S no pueden tener otras aristas incidentes de S , luego en el peor de los casos, se necesitan $|G| - 1$ aristas para cubrir G . Luego $\beta'(G) \leq |G| - 1$. Este argumento se puede luego aplicar a cada componente de G , pues un cubrimiento de G es la unión disjunta de los cubrimientos de sus componentes. Esta cota es tight porque podemos considerar un grafo que sea la unión disjunta de k estrellas de grado n .

Por otro lado, por cada arista $e \in S$ cubrimos a lo más dos vértices, luego en el peor de los casos $|G|/2 \leq |S| = \beta'(G)$. \square

Ejercicio 1.12.20. Probar que $\alpha(G) \leq \beta'(G)$.

Solución. Claramente si G tiene puntos aislados la desigualdad se cumple trivialmente. Tomemos un conjunto U de vértices de G que son aislados de tamaño máximo $\alpha(G)$. Consideremos un conjunto de aristas F de G de tamaño mínimo que cubre a G . Todo vértice x de U es extremo de una arista de F , más aún, dos vértices distintos de U no pueden compartir la misma arista porque no son adyacentes, luego $\alpha(G) = |U| \leq |F| = \beta'(G)$. \square

Teorema 1.12.21 (König (1916)). Si G es bipartito sin vértices aislados

$$\alpha(G) = \beta'(G).$$

Demostración. El ejercicio anterior prueba una desigualdad. Para probar la otra desigualdad basta encontrar un cubrimiento por aristas de tamaño $\leq \alpha(G)$. Tomemos un conjunto de vértices independiente U de tamaño máximo $\alpha(G)$. Por maximalidad, cualquier vértice de $V(G) \setminus U$ es adyacente a un vértice de U . Es decir, el conjunto F de aristas que inciden en U cubre G . Sin pérdida de generalidad, supongamos que F es minimal. Veamos que por cada vértice de $u \in U$ hay a lo más una arista incidente; como consecuencia se sigue que $|F| \leq \alpha(G)$ como queríamos encontrar. En efecto, de lo contrario, si u tuviera dos vecinos distintos v, v' en el complemento de U (digamos $u \in X$ y $v, v' \in Y$), por minimalidad de F debe ser que v y v' no tienen otro vecino en U que no sea u . Luego llegamos a un absurdo construyendo un conjunto de vértices independiente más grande: $U \setminus \{u\} \cup \{v, v'\}$. \square

1.12.2. Ejercicios

Ejercicio 1.12.22. (a) Si M es un matching en un grafo G tal que $|M| < \delta(G)/2$, entonces M no es máximo. Concluya que $\alpha'(G) \geq \delta(G)/2$ para todo grafo G .

(b) Demuestre para todo grafo G bipartito, $\alpha'(G) \geq \delta(G)$.

(c) En cada caso, encontrar una familia infinita de grafos donde se cumple la igualdad.

Solución. (a) Esto equivale a probar que todo grafo G tiene un matching the tamaño al menos $\lceil \delta(G)/2 \rceil$. En efecto, sabemos que todo grafo contiene un camino de longitud $\geq \delta(G)$, luego en ese camino podemos construir un matching obvio de longitud $\geq \lceil \delta(G)/2 \rceil \geq \delta(G)/2$: elegimos la primera arista (en un orden natural inducido por el camino) y luego la siguiente arista no adyacente más cercana, y repetimos el procedimiento de manera recursiva. (En un camino de longitud $n = 2k$ este algoritmo construye un matching de tamaño k , y en un camino de longitud $n = 2k + 1$ construye uno de tamaño $k + 1$). Esto implica que $\alpha'(G) \geq \delta(G)/2$.

(b) En un X, Y -bigrafo. Tomemos $y_0 \in Y$. Como y tiene $d(y) \geq \delta(G)$ vecinos en X , sabemos que X tiene al menos $\delta(G)$ vértices. Tomemos un subconjunto $T \subset X$ de tamaño $\delta(G)$ (por ejemplo los vecinos de y). Notemos que T cumple la Condición de Hall. En efecto, para todo $S \subset T$ no vacío, sabemos que cualquier vértice de S tiene al menos $\delta(G)$ vecinos, en particular

$$|N(S)| \geq \delta(G) = |T| \geq |S|.$$

Con lo cual, el Teorema de Hall no dice que existe un matching de G que cubre a T , es decir, un matching con $|T| = \delta(G)$ aristas. Consecuentemente $\alpha'(G) \geq \delta(G)$.

- (c) (a) Consideremos la familia $G_k = (P_{2k})^{2k}$, es decir, la familia de las $2k$ -potencias de caminos de longitud $2k$ con $k \in \mathbb{N}$. Recordar que la i -potencia de un grafo G es un grafo con los mismos vértices pero donde dos vértices son adyacentes si y solo si estaban a distancia a lo más i en G . Afirmamos que $\delta(G_k) = 2k$ y que $\alpha'(G_k) = k$. Numerando a los vértices de $P_{2k} : x_0 x_1 \cdots x_{2k}$, tenemos que claramente x_i es adyacente a x_j en G_k , para todo $0 \leq i, j \leq 2k$, luego G_k es $2k$ -regular, en particular $\delta(G_k) = 2k$. Ahora, notemos que el conjunto de aristas de G_k dado por $\{e_i\}_{i=1}^k$ con $e_i = x_{2i-1} x_{2i}$ es un matching de G_k con k aristas. Esto nos dice que $\alpha'(G) \geq k$. Por otro lado, observemos que un grafo G arbitrario, con un matching de r aristas, se tiene que $2r \leq |G|$, pues el matching cubre $2r$ vértices distintos, con lo cual $2\alpha'(G) \leq |G|$. Aplicando esta observación a G_k , se sigue que $\alpha'(G_k) \leq |G_k|/2 = k$. En resumen, hemos visto que $\alpha'(G_k) = k = \delta(G_k)/2$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
- (b) Consideremos ahora la familia $G_k = K_{k,k}$ de grafos bipartitos completos con dos particiones de k elementos, para $k \in \mathbb{N}$. G_k es k -regular, en particular $\delta(G_k) = k$. Por otro lado, vimos en el ítem (b) que $\alpha'(G_k) \geq \delta(G_k) = k$. Veamos que no puede haber un matching con más de k aristas. En efecto, todo matching de G_k cubre a lo más k vértices en una de las particiones de $K_{k,k} = G_k$. Esto concluye la demostración de que $\alpha'(G_k) = k = \delta(G_k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

□

Ejercicio 1.12.23. Demuestre que un grafo G es bipartito si y solo si $\alpha'(H) = \beta(H)$ para todo subgrafo H de G .

Solución. En clase vimos la demostración del Teorema de König-Egevary, que dice que vale la igualdad $\alpha'(G) = \beta(G)$ para todo grafo bipartito G , luego como todo subgrafo H de G es también bipartito, salvo por el subgrafo trivial donde no hay nada que probar, se tiene una de las implicaciones del ejercicio.

Veamos la recíproca, es decir, veamos que si un grafo G cumple la igualdad para todo subgrafo H de G , entonces es bipartito. En efecto, supongamos por el absurdo que G no es bipartito, i.e. G contiene un ciclo impar H . Llegaremos a un absurdo si logramos probar que para todo ciclo impar, no se cumple la igualdad del enunciado.

Así es, pues si escribimos $C : x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdots x_{2k} \cdot x_0$ para cualquier ciclo impar con $k \geq 1$, entonces $\beta(C) = k + 1$ ya que los vértices de índice par cubren todas las aristas y con k vértices no se pueden cubrir todas las aristas, pues cada vértice cubre 2 aristas de C pero C tiene $2k + 1$ aristas; por otro lado, sabemos que en todo grafo $\alpha'(C) \leq \beta(C)$, entonces basta ver que no hay un matching en C de tamaño $k + 1$: como notamos en el ejercicio anterior, en un matching con $r = k + 1$ aristas, $2r \leq |C| = 2k + 1$, imposible. Esto prueba que G no puede tener ciclos impares. □

Ejercicio 1.12.24. Sea G un X, Y -bigrafo tal que $|X| = \alpha(G)$, donde $\alpha(G)$ es el tamaño máximo de un conjunto de vértices independiente de G . Demuestre que G tiene un matching que cubre a Y .

Solución. Notemos primero que la igualdad $|X| = \alpha(G)$ nos dice que $|Y| \leq |X|$, ya que Y también es un conjunto independiente. Para probar que G tiene un matching que cubre a Y , esto equivale a probar que todos los subconjuntos de Y cumplen la Condición de Hall. En efecto, supongamos por el absurdo que no, es decir, existe un subconjunto $S \subset Y$ no vacío de tamaño mínimo tal que no cumple la condición de Hall. Claramente $|S| > 1$, pues si no $S = \{y\}$ con y sin vecinos en X , pero luego $X \cup S$ es independiente y $\alpha(G) > |X|$. Ahora tomemos $y \in S$, y notemos $S' = S \setminus \{y\} \neq \emptyset$. Por minimalidad de S , el conjunto S' cumple la condición de Hall, i.e. existe un matching de G que cubre a S' ; más aún, $|N(S')| = |S'|$, de lo contrario S cumpliría la condición de Hall. Consideramos ahora el conjunto $X \setminus N(S') \cup S = X \setminus N(S') \cup S' \cup \{y\}$ de G de tamaño $|X| + 1$. Por hipótesis, no puede ser independiente, y por construcción, debe ser que y tiene un vecino en $X \setminus N(S')$, es decir, $|N(S)| \geq |N(S')| + 1 = |S'| + 1 = |S|$, lo cual es imposible porque S no cumplía la condición de Hall. \square

1.13. Clase 12: 8/05/23

Proposición 1.13.1. *Tenemos la fórmula*

$$\alpha(G) + \beta(G) = |G|.$$

Demostración. Tomemos un conjunto U de vértices independiente de tamaño máximo $\alpha(G)$. Sea $W := V(G) \setminus U$, tenemos que todos los vértices de W son adyacentes a algún vértice de U por maximalidad. Notar que W debe ser un cubrimiento de G porque no hay aristas con ambos extremos en U . Con lo cual

$$\alpha(G) + \beta(G) \leq \alpha(G) + |W| = |G|.$$

Recíprocamente, tomemos un cubrimiento por vértices S de G de tamaño mínimo $\beta(G)$. Por minimalidad de G tenemos que el conjunto $T := V(G) \setminus S$ es independiente. Es decir,

$$|G| = |T| + \beta(G) \leq \alpha(G) + \beta(G).$$

\square

Análogamente:

Proposición 1.13.2. *Si G no tiene vértices aislados:*

$$\alpha'(G) + \beta'(G) = |G|.$$

Demostración. Sea S un matching de tamaño máximo $\alpha'(G)$ en G . Consideremos U el conjunto de vértices de G que no son cubiertos por S , i.e. $|U| = |G| - 2\alpha'(G)$. Por maximalidad de S , todas las aristas incidentes a un vértice $u \in U$ deben tener su otro extremo en $W = V(G) \setminus U$. Por cada vértice de U , tomemos una de estas aristas. Luego este conjunto de aristas junto con S cubren a G , i.e.

$$\beta'(G) \leq |S| + |U| = \alpha'(G) + (|G| - 2\alpha'(G)) = |G| - \alpha'(G),$$

obteniendo así una desigualdad.

Para obtener la otra, consideremos un conjunto S de aristas que cubren a G de tamaño mínimo, consideremos también a S' matching de G compuesto de aristas

de S de tamaño más grande. Sea U' el conjunto de vértices cubiertos por S' , i.e. $|U'| = 2|S'|$. Tomemos $U = V(G) \setminus U'$, este es cubierto por una única arista de $S \setminus S'$. En efecto, sea $u \in U$, está cubierto por una arista de S que no puede estar en S' por definición de U , y de hecho si hubiera otra arista de S incidente en u , entonces cualquier otro extremo que no sea u tiene que estar cubierto por S' , de lo contrario podríamos agrandar S' agregando esta arista (contradiciendo maximalidad de S'), pero esto es imposible por minimalidad de S (podríamos quitar esta arista y seguiríamos teniendo un cubrimiento de G). Con lo cual, $|U| \leq |S \setminus S'| = |S| - |S'|$. Juntando todo:

$$|G| = |U| + |U'| \leq |S| + |S'| = \beta'(G) + |S'| \leq \beta'(G) + \alpha'(G),$$

pues S' es un matching de G . □

1.13.1. Caminos aumentantes

Definición 1.13.3. Dado un matching M de un grafo G . Llamamos **camino M -alternante** a un camino de G que alterna entre aristas de M y aristas de $E(G) \setminus M$.

Un camino M -alternante cuyos vértices extremos no están cubiertos por M se llama **M -aumentante**.

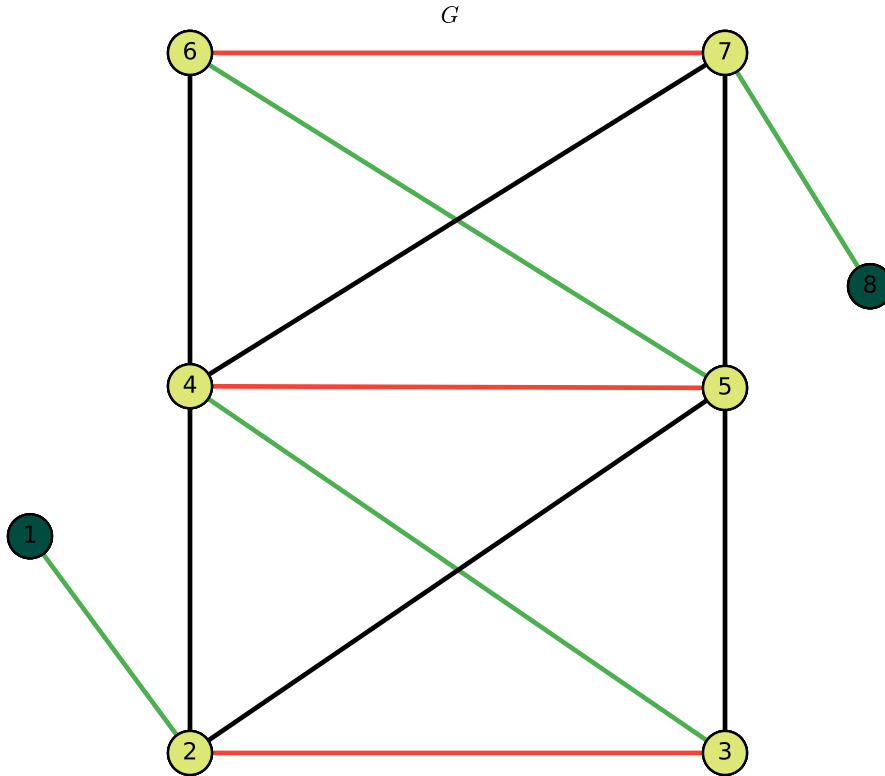


Figura 1.13.72: Ejemplo de camino M -aumentante: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Si P es un camino M -aumentante, entonces reemplazando las aristas de M que están en P por las aristas de $E(G) \setminus M$ en P obtenemos un nuevo matching M' de tamaño estrictamente mayor a M . De aquí el nombre “aumentante”. Así, un matching máximo M no tiene caminos M -aumentantes. Más aún, vale la recíproca:

Teorema 1.13.4 (Berge (1957)). Sea M un conjunto de aristas en un grafo G . M es un matching de tamaño máximo si y solo si G no tiene caminos M -aumentantes.

Demostración. Acabamos de observar una de las implicaciones, veamos la vuelta. Supongamos que sí hay un matching M' de tamaño estrictamente más grande que un matching M sin caminos M -aumentantes. Sea $F = M \Delta M'$ la diferencia simétrica entre estos dos conjuntos. Como M y M' son matchings, cada vértice incide en a lo más una arista de M y una de M' . Así, $\Delta(H) \leq 2$ si vemos a F como un grafo $H := (V(G), F)$. Entonces H es unión disjunta de ciclos y caminos.

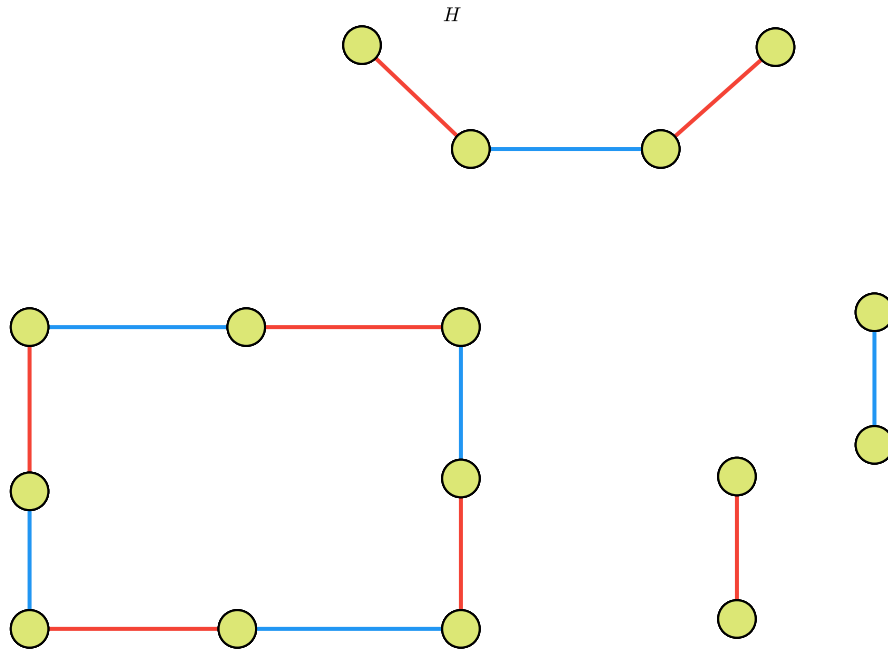


Figura 1.13.73: Ilustración de H , donde por un lado tenemos las aristas de $M \setminus M'$ y las de $M' \setminus M$.

Cada componente de H alterna entre M y M' , y por lo tanto sus ciclos son pares. Al tener $|M'| > |M|$ tiene que haber en H una componente que no es ciclo. Más aún, alguna de las componentes que no son ciclos tiene que tener más aristas de M' que de M . Por lo tanto, hay una componente que es camino que empieza y termina con aristas de M' . Esta componente nos da un camino M -aumentante, lo cual es imposible. \square

1.14. Clase 13: 15/05/23

1.14.1. Grafos planares

Prerequisitos topológicos

Definición 1.14.1. (a) Un **segmento de recta** en el plano Euclídeo es un conjunto de puntos de la forma $\{P + \lambda(Q - P) | 0 \leq \lambda \leq 1\}$ para un par de puntos fijos $P, Q \in \mathbb{R}^2$.

- (b) Un **polígono** es un subconjunto de \mathbb{R}^2 que es unión de un número finito de segmentos que es homeomorfo² al círculo unitario.
- (c) Un **arco** (poligonal) es la unión de un número finito de segmentos que es homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$. En particular, un arco es cerrado. Fijado un homeomorfismo, las pre-imágenes de 0 y 1 son los **extremos** del arco y decimos que el arco **une** o **va entre** sus extremos. Observar que los extremos de un arco son distintos, pues un homeomorfismo es biyectivo. Si P es un arco entre x e y , denotamos por $I(P)$ al **interior** del arco, es decir, $I(P) := P \setminus \{x, y\}$.
- (d) Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto. Estar unido por un arco en A , define una relación de equivalencia en los elementos de A . Las clases de equivalencia las llamamos **regiones**. (Notar que las regiones son las componentes arco-conexas (por curvas continuas), o equivalentemente, las componentes conexas).
- (e) La **frontera** de un conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ es el conjunto Y de todos los puntos $y \in \mathbb{R}^2$ tal que todo vecindario de y intersecta a ambos X y $\mathbb{R}^2 \setminus X$.

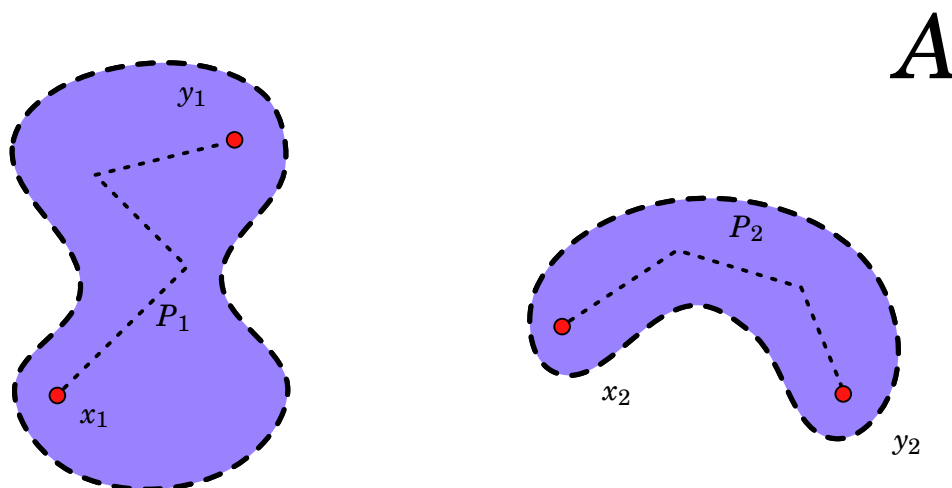


Figura 1.14.74: Ilustración de un abierto A . Ilustramos los puntos $x_1, y_1 \in A$ equivalentes, ya que podemos dibujar un arco $P_1 \subset A$ entre ellos. Similarmente, x_2, y_2 están unidos por un arco P_2 en A , luego son equivalentes entre sí. Las regiones de A son el *maní* y el *boomerang*. La frontera de A es la “cáscara” del maní (líneas punteadas) y el “borde” del boomerang.

Teorema 1.14.2 (De la curva de Jordan para polígonos). *Para todo polígono $P \subset \mathbb{R}^2$, el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus P$ tiene dos regiones: una acotada³ y otra no acotada. Cada región tiene a P como frontera.*

Con este teorema no es difícil probar lo siguiente:

²Recordar que un **homeomorfismo** $\varphi : X \rightarrow Y$ entre dos espacios topológicos X e Y , es una función continua y biyectiva tal que su función inversa $\varphi^{-1} : Y \rightarrow X$ también es continua.

³En \mathbb{R}^2 o más en general en \mathbb{R}^n , decimos que un conjunto es **acotado**, si está contenido en alguna bola de tamaño lo suficientemente grande.

Lema 1.14.3. Sean P_1, P_2, P_3 arcos disjuntos salvo en sus extremos, donde cualquier par de arcos comparten ambos extremos. Entonces:

- (I) $\mathbb{R}^2 \setminus (P_1 \cup P_2 \cup P_3)$ tiene exactamente tres regiones con fronteras $P_1 \cup P_2$, $P_2 \cup P_3$ y $P_1 \cup P_3$.
- (II) Si P es un arco entre un punto en $I(P_1)$ y otro en $I(P_3)$, tal que $I(P)$ está en la región $\mathbb{R}^2 \setminus (P_1 \cup P_3)$ que contiene a $I(P_2)$, entonces $I(P) \cap I(P_2) \neq \emptyset$.

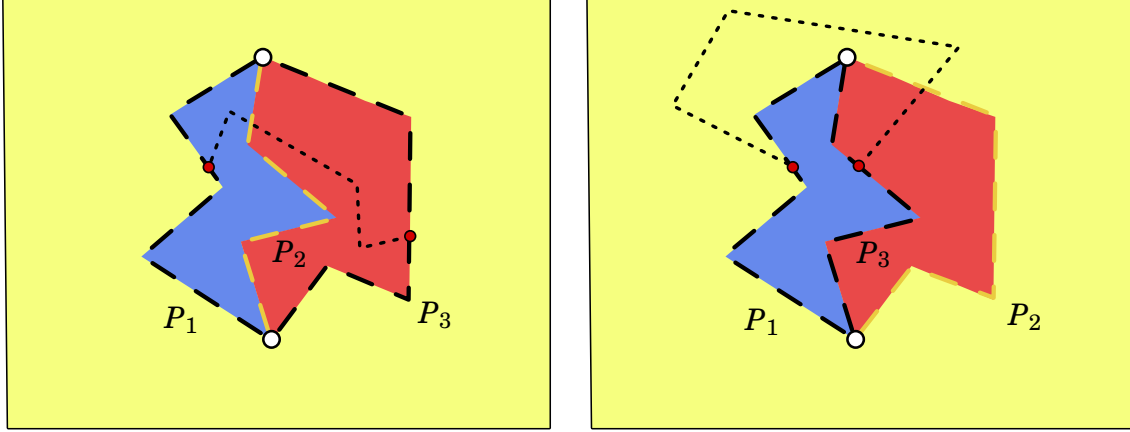


Figura 1.14.75: Dos ilustraciones del lema.

Lema 1.14.4. Para todo arco P , el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus P$ tiene una sola región.

Definición 1.14.5. Un **grafo plano** (no confundir con *grafo planar*) es un par (V, E) que cumple:

1. $V \subset \mathbb{R}^2$ es finito.
2. E es un conjunto de arcos entre elementos de V .
3. Aristas distintas tienen distintos conjuntos de extremos.
4. El interior de una arista no contiene ningún vértice y ningún punto de otra arista.

Todo grafo plano (V, E) define un grafo G en V de manera natural.

Definición 1.14.6. Decimos que G es un **grafo planar** si se puede construir a partir de un grafo plano.

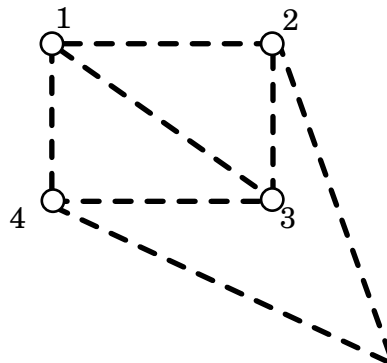


Figura 1.14.76: Ejemplo de grafo plano, correspondiente a K_4 .

Es conveniente pensar al *grafo plano* asociado a un *grafo planar* G , como el “dibujo” de G . A veces haremos el abuso de notación, y hablaremos de grafo plano y de su grafo planar asociado refiriéndonos a cualquiera de los dos sin preocuparnos por ser correctos con la terminología.

Apéndice A

Primera parte de la materia (primer capítulo del Diestel)

A.1. Un poco de álgebra lineal

Sea $G = (V, E)$ un grafo con n vértices y m aristas, digamos $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $E = \{e_1, \dots, e_m\}$.

Definición A.1.1. El **espacio de vértices** $\mathcal{V}(G)$ de G , es el \mathbb{F}_2 -espacio vectorial de todas las funciones $V \rightarrow \mathbb{F}_2$.

Todo elemento de $\mathcal{V}(G)$ corresponde naturalmente con un subconjunto de V , más precisamente con la preimagen de 1, y más aún todo subconjunto de V se representa de manera única de esta manera por su función indicadora. Con lo cual, podemos identificar a $\mathcal{V}(G)$ con el conjunto de subconjuntos de V , i.e. 2^V ; así tenemos un espacio vectorial de los subconjuntos de V : $U + U' = U \Delta U'$ es la diferencia simétrica! y $U = -U$. El cero en este espacio vectorial corresponde con el subconjunto vacío $\emptyset \subset V$. Notar que $\{\{v_1\}, \dots, \{v_n\}\}$ es una base de $\mathcal{V}(G)$, llamada la **base standard**; tenemos entonces que $\dim \mathcal{V}(G) = n$.

Definición A.1.2. Análogamente, podemos definir el **espacio de aristas** $\mathcal{E}(G)$ de G , más precisamente, el \mathbb{F}_2 -espacio vectorial de funciones $E \rightarrow \mathbb{F}_2$.

Nuevamente, los elementos de $\mathcal{E}(G)$ se corresponden con subconjuntos de E : tomamos la preimagen de 1. En este caso, la suma de vectores es la diferencia simétrica de conjuntos de aristas, y el conjunto vacío $\emptyset \subset E$ corresponde con el cero, además $F = -F$ para todo $F \subset E$. La **base standard** es $\{\{e_1\}, \dots, \{e_m\}\}$, luego $\dim \mathcal{E}(G) = m$.

Dados $F, F' \in \mathcal{E}(G)$, vistos como funciones, podemos definir:

$$\langle F, F' \rangle := \sum_{e \in E} F(e)F'(e) \in \mathbb{F}_2.$$

Esta cantidad es cero si y solo si F y F' tienen una cantidad par de aristas en común, i.e. $|F \cap F'| \equiv 0 \pmod{2}$; en particular ciertamente puede suceder que $\langle F, F' \rangle = 0$ con $F \neq \emptyset$. De todas formas, es simétrico y \mathbb{F}_2 -bilineal. De manera la manera usual, para cualquier subespacio $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}(G)$, podemos definir el subespacio ortogonal:

$$\mathcal{F}^\perp := \{D \in \mathcal{E}(G) \mid \langle F, D \rangle = 0, \forall F \in \mathcal{F}\}.$$

Que es un subespacio. Se tiene que

$$\dim \mathcal{F} + \dim \mathcal{F}^\perp = m.$$

Pues se sigue de la demostración standard, ya que este producto es *no degenerado*, es decir el morfismo de espacios vectoriales $F \mapsto \langle \cdot, F \rangle$ es inyectivo, luego la ecuación se sigue de álgebra lineal (estudiando el espacio dual).

Definición A.1.3. El **espacio de ciclos** $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G)$ es el subespacio de $\mathcal{E}(G)$ generado por todos los ciclos de G (por sus aristas). La dimensión de este espacio se lo llama a veces **número ciclomático** de G .

Proposición A.1.4. Las siguientes afirmaciones son equivalentes para conjuntos de aristas $D \subset E$:

1. $D \in \mathcal{C}(G)$;
2. D es una unión (posiblemente vacía) disjunta de ciclos en G ;
3. Todos los grados de los vértices de (V, D) son pares.

Demostración. Como los ciclos tienen grados pares y tomar diferencia simétrica preserva esta propiedad, luego 1. implica 3. por inducción en la cantidad de ciclos que generan D con la suma. Que 3. implica 2. se sigue por inducción en $|D|$: si $D \neq \emptyset$ entonces (V, D) contiene un ciclo por la Proposición 1.2.14, borrando las aristas de C podemos proceder inductivamente pues los vértices siguen teniendo grado par. Finalmente la implicación 2. \Rightarrow 1. es inmediata de la definición de $\mathcal{C}(G)$. \square

Definición A.1.5. Un conjunto F de aristas se dice un **corte**¹ de G si existe una partición $\{V_1, V_2\}$ de V tal que $F = E(V_1, V_2)$. Decimos que las aristas de F **cortan** esta partición. Los conjuntos V_1, V_2 son los **lados** del corte. A un corte no vacío minimal lo llamamos **enlace**.

Proposición A.1.6. Junto con el conjunto vacío \emptyset , los cortes en G forman un subespacio $\mathcal{B} = \mathcal{B}(G) \subset \mathcal{E}(G)$. Este espacio está generado por los cortes de la forma $E(v)$ (es decir los conjuntos de aristas incidentes a un vértice).

Demostración. Sea \mathcal{B} el subespacio generado por los cortes de la forma $E(v)$ en $\mathcal{E}(G)$. Todo corte de G , con partición $\{V_1, V_2\}$, coincide con $\sum_{v \in V_1} E(v)$ y por lo tanto está en \mathcal{B} . En efecto, el conjunto $\sum_{v \in V_1} E(v)$ es la diferencia simétrica de los conjuntos $E(v)$, i.e. las aristas que están en algún $E(v)$, $v \in V_1$ pero no en todos, es decir, las aristas que inciden en un vértice de V_1 y que su otro extremo no puede estar en V_1 , es decir tiene que estar en V_2 . Recíprocamente, todo conjunto $\sum_{u \in U} E(u) \in \mathcal{B}$ es vacío, por ejemplo si $U \in \{\emptyset, V\}$, o es el corte $E(U, V \setminus U)$ (mismo razonamiento de antes). \square

Definición A.1.7. El espacio $\mathcal{B}(G)$ es el **espacio de cortes**, o el **espacio de enlaces** de G .

¹No vamos a incluir el caso de particiones vacías. Luego la única manera de que el conjunto vacío de aristas sea un corte es que el grafo subyacente sea desconexo.

Observación A.1.8. Los enlaces son para \mathcal{B} , lo que son los ciclos para \mathcal{C} : elementos minimales no vacíos.

Si G es conexo, entonces los enlaces son justamente sus cortes minimales: un corte en un grafo conexo es minimal si y solo si ambos lados de la partición inducen subgrafos conexos. En efecto, por un lado, dados un corte minimal con bipartición $\{V_1, V_2\}$ induce subgrafos conexos $G[V_1], G[V_2]$, pues de lo contrario eligiendo un vértice $v_1 \in V_1$ aislado en $G[V_1]$, se sigue que el corte $E(V_1 \setminus \{v_1\}, V_2 \cup \{v_1\})$ pierde todas la V_1, V_2 aristas incidentes en v_1 (G es conexo), contradiciendo minimalidad; por otro lado, un corte con bipartición $\{V_1, V_2\}$ de conjuntos de vértices que inducen subgrafos conexos tiene que ser minimal, de lo contrario es que se le pueden quitar aristas y sigue siendo un corte, luego es porque uno de los subgrafos inducidos no era conexo. Ahora, si G es desconexo, luego sus enlaces son los cortes minimales de sus componentes conexas, pues unir cortes de cada componente conexa sigue dando un corte (y por lo tanto un corte no es minimal a menos que esté contenido en una componente).

Lema A.1.9. *Todo corte es la unión disjunta de enlaces.*

Demostración. Haremos inducción en el tamaño del corte F a considerar. Para $F = \emptyset$ no hay nada que probar. Si $F \neq \emptyset$, y no es un enlace, luego contiene propiamente a algún corte F' . Por la proposición anterior, la suma de cortes es un corte (forman un subespacio), es decir $F \setminus F' = F + F'$ es un corte más chico no vacío. Por inducción tenemos que F' y $F \setminus F'$ son ambos unión disjunta de enlaces, y por lo tanto F también. \square

Ejercicio A.1.10. Hallar una base de $\mathcal{B}(G)$ dada por conjuntos de aristas de la forma $E(v)$.

Solución. Sabemos que los $E(v), v \in V(G)$ generan $\mathcal{B}(G)$; afirmamos que si G es conexo, entonces para todo $w \in V(G)$ el siguiente conjunto forma una base del subespacio de cortes:

$$\{E(v)\}_{v \in V(G) \setminus \{w\}}.$$

En efecto, el conjunto de generadores de $\mathcal{B}(G)$ es linealmente dependiente porque $\sum_{v \in V(G)} E(v) = \emptyset$, pero si quitamos cualquier vértice se vuelve linealmente independiente, pues que sea linealmente dependiente equivale a que existe un subconjunto $S \subsetneq V(G)$ no vacío tal que

$$\emptyset = \sum_{v \in S} E(v) = E(S, V(G) \setminus S),$$

que es imposible si G es conexo.

En general, si G no es conexo escribimos $G = \bigsqcup_i C_i$, donde C_i son sus componentes conexas, luego una base de $\mathcal{B}(G)$ es la unión de las bases de $\mathcal{B}(C_i)$, pues podemos hacer el abuso de notación $\mathcal{B}(G) = \bigoplus_i \mathcal{B}(C_i)$. \square

Corolario A.1.11. *Se sigue que*

$$\dim \mathcal{B}(G) = \sum_{C \text{ componente de } G} (|C| - 1) = |G| - \#\{\text{componentes de } G\}.$$

En particular si G es conexo,

$$\dim \mathcal{B}(G) = |G| - 1.$$

Ejercicio A.1.12. Construir de manera explícita la partición en enlaces de un corte: sea F un corte en G , con partición $\{V_1, V_2\}$. Para $i = 1, 2$ escribamos $C_1^i, \dots, C_{k(i)}^i$ a las componentes conexas de $G[V_i]$. Usar los C_j^i para definir los enlaces que forman una unión disjunta para F .

Solución. Vamos a considerar el caso G conexo, pues el caso desconexo directamente escribimos a un corte como la unión disjunta de sus aristas en cada componente. Ahora, si G es conexo consideremos los conjuntos de aristas

$$E(C_i^1 \cup \bigcup_{C_j^2 \cap N(C_i^1) \neq \emptyset} C_j^2, \bigcup_{C_j^2 \cap N(C_i^1) = \emptyset} C_j^2 \cup \bigcup_{C_k^1 \neq C_i^1} C_k^1),$$

para todo $1 \leq i \leq k(1)$ fijo. Hay que verificar que estos son disjuntos entre sí, y su unión da $E(V_1, V_2)$, y además que son enlaces (basta ver que su partición induce subgrafos conexos). En efecto, $E(V_1, V_2)$ está claramente contenido en su unión; recíprocamente, las aristas de $E(C_i^1 \cup N(C_i^1) \cap V_2, *)$ están en $E(V_1, V_2)$ pues hay dos posibilidades: o la arista está en $E(C_i^1, C_j^2)$ con $C_j^2 \cap N(C_i^1) = \emptyset$ o está en $E(C_j^2, C_{i'}^1)$. Por construcción son enlaces porque cada parte de la partición es un subgrafo inducido conexo, pues la parte $\bigcup_{C_j^2 \cap N(C_i^1) = \emptyset} C_j^2 \cup \bigcup_{C_k^1 \neq C_i^1} C_k^1$ tiene que ser conexa porque G lo es y las C_j^i con i fijo no están conectadas entre sí porque son las componentes de V_i . Finalmente, tienen que ser claramente disjuntas. \square

Teorema A.1.13. El espacio de ciclos $\mathcal{C}(G)$ y el espacio de cortes $\mathcal{B}(G)$ de cualquier grafo satisfacen

$$\mathcal{C} = \mathcal{B}^{\text{perp}} \quad \text{y} \quad \mathcal{B} = \mathcal{C}^\perp.$$

Demostración. Consideremos un grafo $G = (V, E)$. Claramente todo ciclo en G tiene un número par de aristas en cada corte, luego los ciclos son ortogonales a los cortes, es decir

$$\mathcal{C}(B) \subset \mathcal{B}(G)^\perp \quad \text{y} \quad (B)(G) \subset \mathcal{C}(G)^\perp.$$

Para probar $\mathcal{B}(G)^\perp \subset \mathcal{C}$ hay que usar la anteúltima proposición que caracteriza los vectores del subespacio de ciclos, es decir $F \notin \mathcal{C}(G)$ si y solo si tiene un vértice incidente con un número impar de aristas en F . Luego $\langle E(v), F \rangle = 1$, entonces como $E(v) \in \mathcal{B}(G)$ se sigue que $F \notin \mathcal{B}(G)^\perp$. Esto termina de probar que $\mathcal{C} = \mathcal{B}^\perp$ en G .

Finalmente, para probar $(G)^\perp \subset \mathcal{B}(G)$, tomemos $F \in \mathcal{C}(G)^\perp$. Consideremos el multigrafo H obtenido a partir de G luego de contraer las aristas de $E \setminus F$. Todo ciclo en H tiene sus aristas en F . Como lo podemos extender a cualquier ciclo en G agregando aristas de $E \setminus F$, entonces el número de aristas del ciclo extendido que están en F (es decir las aristas del ciclo en H original) debe ser par, pues $F \in \mathcal{C}^\perp$. Usando la caracterización de grafos bipartitos, tenemos que H es bipartito. Su partición induce una partición (V_1, V_2) de V (ya que las aristas que habíamos contraído convierten la bipartición en un corte), tal que $E(V_1, V_2) = F$, i.e. $F \in \mathcal{B}(G)$. \square

Consideremos ahora un grafo conexo $G = (V, E)$ con un árbol generador $T \subset G$. Para toda cuerda $e \in E \setminus E(T)$ existe un único ciclo C_e en $T + e$, que llamaremos el **ciclo fundamental** de e con respecto a T . Similarmente, para toda arista $f \in T$, el bosque tiene exactamente dos componentes (por la caracterización de árbol). El conjunto $D_f \subset E$ de aristas de G entre ambas componentes es un *enlace* (usando una de las propiedades probadas en esta sección, pues ambos lados de la partición

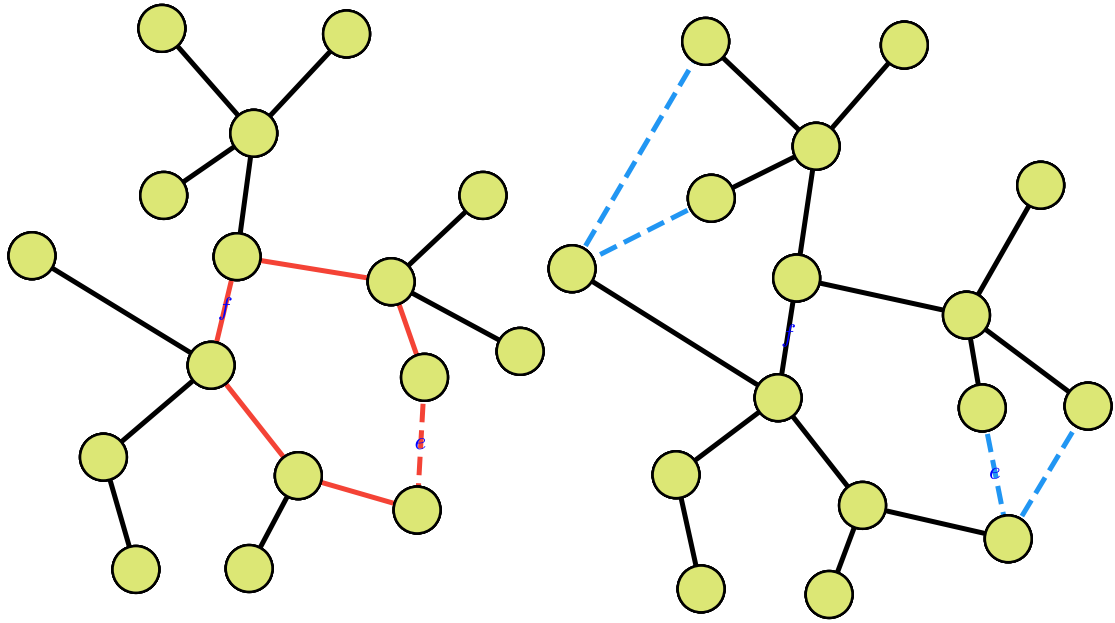


Figura A.1.1: Ejemplo: El ciclo fundamental C_e , y el corte fundamental D_f .

son subgrafos inducidos conexos) en G , el **corte fundamental** de f con respecto de T .

Notar que $f \in C_e$ si y solo si $e \in D_f$, para todo $e \notin T$ y $f \in T$. En efecto, por un lado si $e \notin T$ y $f \in T$, entonces $f \in C_e$ entonces sacar a f de T hace que se parta en dos componentes, que tienen que estar conectada por la cuerda e ya que todo camino entre ambas componentes pasaba por f , luego por C_e y cuando quitas una arista de un ciclo los caminos pueden seguir pasando por los vértices de f a través de e , i.e. $e \in D_f$. Por otro lado, si $e \in D_f$ entonces el camino $f \cdots e \cdots f$ tiene que ser un ciclo en G porque las aristas de $f \cdots e$ están en una componente y las aristas $e \cdots f$ en otra, así $f \in C_e$. Esto indica una conexión más profunda de dualidad; el siguiente teorema explora un poco este descubrimiento.

Teorema A.1.14. Sea G un grafo conexo con n vértices y m aristas, y sea $T \subset G$ un árbol generador.

(I) Los cortes fundamentales y los ciclos fundamentales de G respecto de T forman bases de $\mathcal{B}(G)$ y $\mathcal{C}(G)$, respectivamente.

(II) Consecuentemente,

$$\dim \mathcal{B}(G) = n - 1 \quad \text{y} \quad \dim \mathcal{C}(G) = m - n + 1.$$

Demostración. (I) Notemos que toda arista $f \in T$ yace en D_f , pero ningún otro corte fundamental lo hace (estas son aristas de T), mientras que una arista $e \notin T$ yace en C_e pero no en otro ciclo fundamental (este ciclo está construido con una sola arista fuera de T). Es decir, dados un subconjunto arbitrario de cortes fundamentales $\{D_{f_1}, \dots, D_{f_r}\}$, entonces

$$\sum_{i=1}^r D_{f_i} \neq \emptyset.$$

Análogamente, lo mismo sucede para un subconjunto de ciclos fundamentales $\{C_{e_1}, \dots, C_{e_s}\}$. Con lo cual los cortes fundamentales y los ciclos fundamentales son, respectivamente, conjuntos linealmente independientes en $\mathcal{B} = \mathcal{B}(G)$ y $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G)$.

Veamos ahora que los ciclos fundamentales generan a un ciclo C arbitrario. Por nuestra observación inicial, $D := C + \sum_{e \in C \setminus T} C_e$, es decir a C le estamos quitando todas las aristas fuera de T , es un elemento de \mathcal{C} , que no contiene ninguna arista fuera de T , i.e. está contenido en T . Pero la Proposición ?? los elementos de \mathcal{C} son unión disjunta de ciclos, pero como T es aciclico, la única opción es que sea el conjunto \emptyset . En consecuencia $D = \emptyset$ y en particular $C = \sum_{e \in C \setminus T} C_e$.

Similarmente, todo corte D es la suma de cortes fundamentales. En efecto, el elemento $D + \sum_{f \in D \cap T} D_f$ de \mathcal{B} no contiene aristas en T . Así es, pues si $e \in (E(G) \setminus E(T)) \cap (D + \sum_{f \in D \cap T} D_f)$, entonces por la observación inicial $C_e \cap (D + \sum_{f \in D \cap T} D_f) = \{e\}$ ya que la única arista extra g que podría aparecer debería estar en T pues C_e de lo contrario $g \in C_g \cap C_e$, por otro lado g está en D o en algún D_f ; por un lado si está en D luego está en un único D_f por la observación inicial, es decir no está en $D + \sum_{f \in D \cap T} D_f$, por otro lado si no o está en D , no puede estar en ningún D_f con $f \in D \cap T$ pues D_f contiene a un único corte fundamental. En resumen, $D + \sum_{f \in D \cap T} D_f$ es vacío. Es decir, $D = \sum_{f \in D \cap T} D_f$.

- (II) Por un lado hay $n - 1$ cortes fundamentales, pues hay uno por cada arista del árbol generador T de G , el cual tiene n vértices (usamos que los grafos conexos de n vértices tienen $n - 1$ aristas si y solo si son árboles). Por otro lado, como vimos que $\mathcal{C}(G) = \mathcal{B}(G)^\perp$ y que para todo subespacio $V \subset \mathcal{E}(G)$ se tiene $\dim V + \dim V^\perp = \dim \mathcal{E}(G) = m$, se sigue que $\dim \mathcal{C}(G) = m - n + 1$. \square

Definición A.1.15. La **matriz de incidencia** $B = (b_{ij})_{n \times m} \in \mathbb{F}_2^{n \times m}$ de un grafo $G = (V, E)$ con $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ está dada por

$$b_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \in e_j \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Luego las matrices B y B^t definen las transformaciones lineales

$$B : \mathcal{E}(G) \rightarrow \mathcal{V}(G) \quad \text{y} \quad B^t \mathcal{V}(G) \rightarrow \mathcal{E}(G)$$

definidas respecto de las bases standard.

Observación A.1.16. La transformación B manda conjuntos de aristas $F \subset E$ en al conjunto de vértices incidentes en un número impar de aristas de F . Mientras que B^t manda un conjunto de vértices $U \subset V$ en el conjunto de aristas con exactamente un solo extremo en U .

Como consecuencia obtenemos:

Corolario A.1.17. (I) El núcleo de B es $\mathcal{C}(G)$.

(II) La imagen de B^t es $\mathcal{B}(G)$.

Demostración. (I) $C \in \text{Ker } B$ si y solo si todos los vértices de G tienen un número par de aristas incidentes en C , es decir (G, C) tiene todos sus vértices de grado par, lo cual es una definición equivalente de estar en $\mathcal{C}(G)$.

(II) Sea $U \subset V$, entoncces $B^t(U) = F$ el conjunto de aristas con exactamente un extremo en U , es decir, $F = E(U, V \setminus U)$ es un corte. □

Definición A.1.18. La **matriz de adyasencia** $A = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{F}_2^{n \times n}$ de G está dada por

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } v_i v_j \in E \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Observación A.1.19. Esta matriz es simétrica. Además, se puede ver como una transformación lineal $A : \mathcal{V}(G) \rightarrow \mathcal{V}(G)$, que manda subconjuntos de vértices $U \subset V$ al conjunto de vértices con un número impar de vecinos en U .

Denotemos por D a la matriz *real* diagonal $(d_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con $d_{ii} = d(v_i)$. Nuestra última proposición establece una conexión de A y B vistos como matrices reales:

Proposición A.1.20.

$$B \cdot B^t = A + D.$$

Demostración. La cuenta se tiene que hacer entre matrices reales, la cual una cuenta muy elemental. □

Notar que la misma ecuación sigue valiendo módulo 2.

A.2. Otras nociones sobre grafos

Definición A.2.1. Un **hipergrafo** es un par (V, E) de conjuntos disjuntos, donde los elementos de E son subconjuntos no vacíos (de cualquier cardinalidad) de V . Con lo cual, los grafos son un caso particular de los hipergafos.

Definición A.2.2. Un **grafo dirigido** o **digrafo** es un par (V, E) de conjuntos disjuntos de vértices y aristas, junto con dos funciones $\text{init} : E \rightarrow V$ y $\text{ter} : E \rightarrow V$ que mandan una arista e en un **vértice inicial** $\text{init}(e)$ y en un **vértice terminal** $\text{ter}(e)$. La arista e se dice **dirigida desde** $\text{init}(e)$ **hasta** $\text{ter}(e)$.

Notar que un grafo dirigido puede tener varias aristas entre dos vértices x, y . Estas aristas se llaman **aristas múltiples**; si tienen la misma dirección, digamos de x a y , se dicen **paralelas**. Si $\text{init}(e) = \text{ter}(e)$, decimos que e es un **bucle**.

Un grafo dirigido D es una **orientación** de un grafo (sin dirigir) G si $V(D) = V(G)$ y $E(D) = E(G)$, y además $\{\text{init}(e), \text{ter}(e)\} = \{x, y\}$ para toda aristas $e = xy$. Intuitivamente, este **grafo orientado** surge de un grafo sin dirigir simplemente luego de darle una orientación a cada arista de G , desde uno de sus extremos hasta el otro. En particular, los grafos orientados son grafos dirigidos sin bucles ni aristas múltiples.

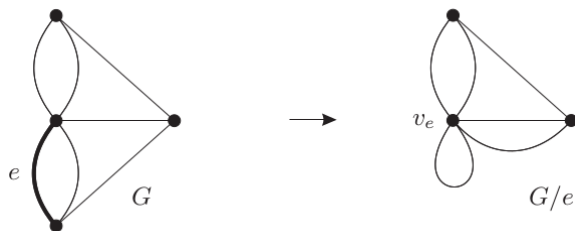


Figura A.2.2: Contracción de la arista e en un multigrafo G .

Definición A.2.3. Un **multigrafo** es un par (V, E) de conjuntos disjuntos de vértices y aristas con una función $E \rightarrow V \cup [V]^2$ que le asigna a cada arista uno o dos vértices a sus extremos.

Por lo tanto, los multigrafos pueden tener bucles y aristas múltiples: podemos pensar a los multigrafos como grafos dirigidos, donde las direcciones de sus aristas fueron eliminadas. Para expresar que x e y son los extremos de una arista e , escribimos $e = xy$, sin embargo esta escritura no siempre es única!

Un grafo es entonces un multigrafo sin bucles ni aristas múltiples. De manera sorprendente, a veces probar un teorema para grafos es más difícil que probar para multigrafos. Más aún, existen áreas de la teoría de grafos donde los multigrafos surgen de manera más natural que los grafos, y donde restringirse a estos últimos resulta artificial y más complicado (por ejemplo dualidad de planos). Para multigrafos usaremos la misma terminología que vimos para grafos, pues estas definiciones se trasladan de manera obvia. Por ejemplo, ver la Figura A.2.

De todas maneras, cabe resaltar algunas diferencias. Un multigrafo puede tener ciclos de longitud 1 o 2: los bucles, y los pares de aristas de aristas múltiples o las **aristas doble**. Un bucle en un vértice vuelve a su vértice su propio vecino, con lo cual en la figura anterior tenemos que $d_{G/e}(v_e) = 6$, o sea que también contamos a un vecinos múltiples veces, una por cada aristas que compartan ambos vértices! Los extremos de los bucles y de las aristas paralelas en un multigrafo G , se consideran separadoras de esta aristas del resto de G . El vértice v de un bucle e , es entonces un vértice de corte, a menos que $(\{v\}, \{e\})$ sea una componente de G , con lo cual $(\{v\}, \{e\})$ es un bloque. En efecto, un vértice de corte v es aquel que separa dos vértices x, y , i.e. todos los x, y -camino pasan por v pero en un multigrafo podemos considerar $x = v = y$. Entonces un multigrafo con un bucle nunca es 2-conexo, y todo multigrafo 3-conexo es de hecho un grafo.

La noción de arista contracción es mucho más simple en multigrafos que en grafos: si contraemos una arista $e = xy$ en un multigrafo $G = (V, E)$ a un vértice v_e , entonces ya no necesitamos borrar cualquier arista distinta de e : las aristas paralelas a e se convierten en bucles de v_e , mientras que las aristas xv e yv se vuelven aristas paralelas entre v_e y v (ver la figura anterior). Formalmente, $E(G/e) = E \setminus \{e\}$, y solamente debemos modificar al **mapa de incidencia** $e' \mapsto \{\text{init}(e'), \text{ter}(e')\}$ de G para ajustarse a los vértices de G/e . Contraer un bucle es, por lo tanto, lo mismo que eliminarlo.

La noción de menor se adapta de manera acorde. La menor de contracción G/P definida a partir de una partición P de $V(G)$ en conjuntos conexos tiene precisamente las aristas de G que unen dos particiones distintas. Si hay varias aristas entre dos de estos conjuntos, entonces se convierten en aristas paralelas de G/P . Sin embargo, normalmente no le daremos a G/P bucles provenientes de aristas de G cuyos extremos yacen en la mismo conjunto conexo de la partición.

Si v es un vértice de grado 2 en un multigrafo G , luego **suprimir** v significa quitarlo y agregar una arista entre sus dos vecinos. (Si dos aristas incidentes son idénticas, i.e. forman un bucle en v , no agregamos ninguna arista y solo obtenemos $G \setminus v$. Si ambas aristas van al mismo vértice $w \neq v$, la arista agregada será entonces un bucle en w . Ver la Figura ??.) Como los grados de todos los vértices distintos de v permanecen inmutados cuando v es suprimido, suprimir varios vértices de G siempre nos dará un multigrafo bien definido, que es independiente del orden escogido para suprimir los vértices.

En cuanto a terminología, algunos autores se refieren a los multigrafos como grafos; en este contexto nuestros grafos serían llamados **grafos simples**.

Apéndice B

Orden parcial completo-dirigido y teorema del punto fijo de Kleene

Este capítulo del apéndice fue creado con la esperanza de poder resolver el Ejercicio 1.11.12, pero este no se pudo resolver así, pues considerar un morfismo de grafos $f : T \rightarrow T$ no tiene por qué ser Scott continua con el r -orden de árbol de $T \ni r$. Y de hecho, el ejercicio se pudo resolver muy fácilmente haciendo inducción y considerando brillantemente el morfismo $f : L(T) \rightarrow L(T)$.

Definición B.0.1. Un **orden parcial completo-dirigido**, o **opcd** es un orden parcial donde todo subconjunto dirigido D (es decir, es no vacío y para todo $x, y \in D$ existe $z \in D$ tal que $x, y \leq z$) tiene supremo.

A un orden parcial (en particular a un opcd) se le puede dar la **topología Scott** en la cual los abiertos son los subconjuntos S cerrados superiormente (recordemos que esto era cuando S coincidía con la unión de los $[x]$ con $x \in S$) e **inaccesibles por supremos de subconjuntos dirigidos**, es decir, si todos los subconjuntos dirigidos D con supremo $\sup(D) \in S$ intersecan a S . Con esta topología podemos definir las funciones continuas entre dos ordenes parciales A, B :

Definición B.0.2. Una función $f : A \rightarrow B$ se dice **Scott continua** si es continua con la topología de Scott en A y B .

Lema B.0.3. Sea $f : A \rightarrow B$ una función entre dos conjuntos ordenados A, B . Luego f es Scott continua si y solo si preserva supremos de subconjuntos dirigidos.

Demostración. (\Rightarrow) Notemos que f es monótona creciente. En efecto, sean $x \leq x' \in A$, supongamos que $f(x) \not\leq f(x')$. Consideremos el conjunto $U = B \setminus [f(x')]$, el cual es un Scott abierto (fácil de verificar), más aún $f(x) \in U$. Como f es Scott continua, tenemos que $f^{-1}(U)$ es Scott abierto de A , y notemos que $x \in f^{-1}(U)$. Pero $x' \geq x$, luego debe ser que $x' \in f^{-1}(U)$, i.e. $f(x') \in U$ absurdo! O sea que f es monótona creciente. Sea $d = \sup D$ con D un subconjunto dirigido de A . Por un lado, $a \leq d$ para todo $a \in D$ implica que $f(d) \geq b$ para todo $b \in f(D)$. Por otro lado, si $c \in B$ es tal que $c \geq f(a)$ para todo $a \in D$, debe ser que $c \geq f(d)$. En efecto, si esto no fuera cierto, tendríamos que $f(d) \in U := B \setminus [c]$ Scott abierto y por continuidad de f se sigue que d pertenece al Scott abierto $f^{-1}(U) \subset A$. Con lo cual, como d es el supremo del conjunto dirigido D , tenemos que existe $a' \in D$ tal que $a' \in f^{-1}(U)$, i.e. $f(a') \in U$ con $a' \in D$ absurdo! Esto dice que $f(d) = \sup f(D)$.

(\Leftarrow) Notar que f es monótona creciente, pues si $x \leq x'$ entonces $f(x') = f(\sup\{x, x'\}) = \sup\{f(x), f(x')\}$, con lo cual $f(x') \geq f(x)$. Esto implica muy facilmente que f es Scott continua. \square

Notar que en la demostración anterior vimos que las funciones Scott continuas son monótona crecientes.

Definición B.0.4. Sea m un elemento mínimo de un conjunto ordenado. Una **cadena ascendente de Kleene** de f , es la cadena

$$m \leq f(m) \leq f(f(m)) \leq f(f(f(m))) \leq \dots$$

Teorema B.0.5 (Teorema del punto fijo de Kleene). *Sea T un opcd con un mínimo m , y sea $f : T \rightarrow T$ una función Scott continua (y en particular monótona). Entonces f tiene un **mínimo punto fijo**, es decir, el conjunto de puntos fijos de f es no vacío y tiene un elemento mínimo. Más aún, este elemento mínimo es el supremo de una cadena ascendente de Kleene de f .*

Demostración. Consideremos la cadena ascendente de Kleene inducida por m . Este es un conjunto dirigido, pues es una cadena. Luego como T es un opcd tiene un supremo, digamos s . Tenemos que probar que s es un punto fijo de f y que efectivamente es el mínimo de todos los puntos fijos. Por un lado, como f es Scott continua, el lema anterior nos dice que $f(s) = \sup_{i \geq 1} f^i(m)$, pero $\sup_{i \geq 1} f^i(m) = \sup_{i \geq 0} f^i(m)$, es decir s es un punto fijo de f . Por otro lado, si s' es un punto fijo de f , tenemos que $s' \geq f^i(m)$ para todo $i \geq 0$, con lo cual $s' \geq s$ porque s es el supremo de la cadena. En efecto, vale para $i = 0$, luego por inducción supongamos que $s' \geq f^i(m)$ entonces como f es monótona creciente $f(s')$, tenemos que $s' = f(s') \geq f(f^i(m)) = f^{i+1}(m)$. \square

DEMOSTRACIÓN ERRONEA

Corolario B.0.6. *Todo automorfismo de un árbol fija un vértice o una arista.*

Demostración. Sea T un árbol y $r \in T$ una raíz. Consideremos el orden parcial inducido por la raíz en T . Notar que r es el mínimo de T y que todo subconjunto dirigido de T tiene supremo porque T es un orden parcial en un conjunto finito. O sea que T es un opcd. Análogamente, podemos considerar el orden de raíz de T respecto de $f(r)$. Ahora, un morfismo de grafos $f : T \rightarrow T$, es una función entre dos opcds considerando el r -orden del dominio y el $f(r)$ -orden en el codominio. Afirmamos que f es Scott continua. En efecto, por el lema anterior, esto equivale a probar que preserva el supremo de subconjuntos dirigidos. Sea $D \subset T$ dirigido y $s = \sup D$ (como T es finito $s \in D$); tenemos que D es el camino xTd (pensando en el r -orden: $x \leq d$) para el mínimo en D , pues todos los elementos de D son comparables. Con lo cual, como f es morfismo de grafos, preserva la adyacencia de aristas, luego manda caminos en caminos, pero entonces $f(D) = f(xTd) = f(x)Tf(d)$ (pensando en el $f(r)$ -orden: $f(x) \leq f(d)$), i.e. $f(d)$ es el supremo (máximo) de $f(D)$ en el $f(r)$ -orden.

Por el Teorema del punto fijo de Kleen, existe en particular un punto fijo de T . \square

Bibliografía

[DSS10] Reinhard Diestel, Alexander Schrijver, and Paul Seymour. *Graph theory*, volume 7. 2010.