Entrega 6 - GRAFOS

Enzo Giannotta

9 de junio de 2023

Entrega 5 - Viernes 16/05/2023

Ejercicio 0.1. 1. Para todo $n \geqslant 2$, encuentre un grafo bipartito en $2n$ vértices tal que estos se pueden ordenar de modo que el algoritmo glotón use n colores en lugar de 2.

2. Un grafo G con $\chi(G) = k$ es llamado **k-crítico** si $\chi(G \backslash \{v\}) < k$ para todo vértice $v \in G$. Determine los grafos 3-críticos.

Solución. 1. Construiremos una familia de grafos bipartitos $\mathbf{B}_n, n \geqslant 2$ de $2n$ vértices con los vértices ordenados de cierta manera que el algoritmo glotón use n colores. Llamamos A_n, B_n a una partición de los vértices de manera que cada partición tiene sus vértices independientes, con $|A_n| = n = |B_n|$. Cuando $n = 2$, consideramos $A_2 = a_1, a_2, B_2 = \{b_1, b_2\}$ y agregamos una arista para cada par a, b con $a \in A_2, b \in B_2$. Por último ordenamos, $v_1 = a_1, v_2 = b_1, v_3 = a_2, v_4 = b_2$. Luego el algorítmo glotón pinta a los vértices v_i con dos colores: $1, 2, 1, 2$. Notar que este orden hace que el algorítmo glotón pinte con 2 colores tanto A_2 como B_2.

Supongamos ahora que hemos construido $\mathbf{B}_n$ y ordenado sus vértices como $v_1, \ldots, v_{2n}$ y más aún, que el algorítmo glotón pintó con n colores distintos A_n y lo mismo para B_n. Construimos $\mathbf{B}_{n+1}$ agregando a $\mathbf{B}_n$ dos vértices a_{n+1} y b_{n+1}, más específicamente: $A_{n+1} := A_n \cup \{a_{n+1}\}$ y $B_{n+1} := b_n \cup \{b_{n+1}\}$. Por último, agregamos aristas $a_{n+1}b$ para todo $b \in B_n$ y ab_{n+1} para todo $a \in A_n$. Ahora, ordenamos $v_1, \ldots, v_{2n}$ como el orden de los vértices de $\mathbf{B}_n$ y luego tomamos $v_{2n+1} := a_{n+1}, v_{2n+2} := b_{n+1}$. Notar que este orden pinta cada conjunto de la partición A_{n+1}, B_{n+1} con $n + 1$ colores, en efecto, por hipótesis inductiva el algoritmo glotón pinta $v_1, \ldots, v_{2n}$ de tal manera que A_n y B_n usan n colores, luego $v_{2n+1} = a_{n+1}$ lo pinta de color $n + 1$ porque es adyacente a todos los vértices de B_n y análogamente para $v_{2n+2} = b_{n+1}$ (notar que b_{n+1} no es adyacente a a_{n+1}).

2. Veamos que los grafos 3-críticos son los ciclos impares. Claramente los ciclos impares son 3-coloreables y si sacamos cualquier vértice, tiene número cromático a lo más 2, por ser camino.

Recíprocamente, supongamos que G es un grafo 3-crítico. G tiene un ciclo impar porque si no sería bipartito, i.e. 2-coloreable. Más aún, todo vértice tiene que ser un vértice de este ciclo, de lo contrario quitarlo nos daría un grafo a lo más 2-coloreable, pero ese coloreo serviría para colorear un ciclo impar, imposible. En otras palabras, G es un grafo generado por un ciclo impar C, veamos a su vez que $G[C]=C$. En efecto, si hubiera una cuerda xy de C en G, entonces la cuerda forma dos subciclos $C_1, C_2 \subsetneq G$ tales que $V(C_1) \cup V(C_2) = V(C)$ (ver la siguiente ilustración). Como C tiene orden impar, alguno de los subciclos C_1 o C_2 también tiene que tener orden impar, digamos C_1; con lo cual, $G \backslash \{w\}$ para cualquier $w \in V(G) \backslash V(C_1)$, no puede tener un 1,2-coloreo porque contiene un subciclo impar: C_1, absurdo.

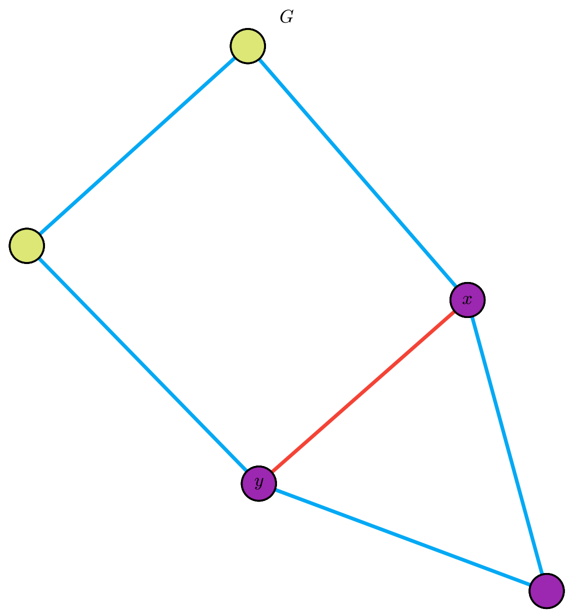

Figura 1: Ilustración de una cuerda xy en un grafo G generado por un ciclo impar.

$\square$