Apuntes - GRAFOS

Enzo Giannotta

17 de abril de 2023

Índice general

Capítulo 1

Parte I: Introducción a grafos

Bibliografia: [DSS10].

Evaluaciones:

Nota: sumativa significa examen.

1. Sumativa 1 : Lunes 24 abril. 30 porciento.
2. Sumativa 2: Lunes 22 mayo: 25 porciento.
3. Sumativa 3: Jueves 6 julio: 25 porciento.
4. Talleres (usualmente los viernes): 20 porciento (hay que trabajar y entregar lo que se hizo en el taller, te pueden hacer resolver en clase al azar el ejercicio al siguiente taller).

1.1. Clase 1: 16/03/23

Definición 1.1.1. Un **Grafo** es un par ordenado $G = (V, E)$, donde V es un conjunto de **vértices** y E es un conjunto de **Aristas**. Es decir, las aristas son pares (v_1, v_2) con $v_1, v_2 \in V$. En un prinicipio si el grafo **no es dirigido**, no importa el orden de los vértices que aparece en un par (v_1, v_2).

La manera de visualizar un grafo es dibujar cada vértice y unir dos pares de vértices $v_1, v_2 \in V$ por un segmento que representa la arista (v_1, v_2).

Ejemplo 1.1.2. Sea $V = \{1,2,3,4,5\}$ y $E = \{\{1,3\},\{3,4\},\{5,4\},\{4,1\},\{1,2\}\}$

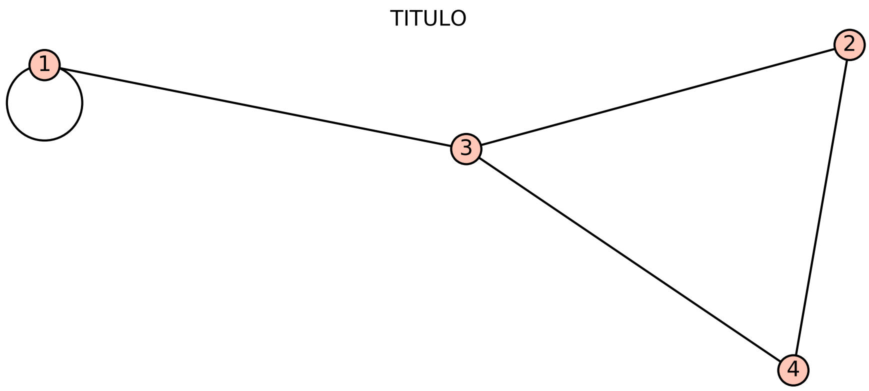

Figura 1.1.1: Dibujo del grafo V.

Definición 1.1.3. Para un grafo $G = (W, R)$, denotamos por $V(G)$ a W (los vértices) y por $E(G) = R$ (las aristas).

El número de vértices de G se denota como $|G|$ o $|V(G)|$, y se llama **orden** de G. El número de aristas lo denotamos como $||G||$ o simplemente $|E(G)|$. Un grafo con orden 1 o 0 se llama **trivial**.

Definición 1.1.4. Si $v \in V(G)$ y $e \in E(G)$, y además $v \in e$, decimos que v es **incidente** en e y viceversa, i.e. e es incidente en v. Los dos vértices que inciden en una arista son sus **extremos**.

Dos vértices x, y son **adyacentes** o **vecinos** si $(x, y) \in E$ (Otra notación: $xy \in E$ donde xy es la arista).

Observación 1.1.5. Si mi grafo tiene n vértices, entonces tiene a lo sumo $\binom{n}{2}$ aristas. Luego, la cantidad de grafos que se pueden construir es $2^{\binom{n}{2}}$.

Definición 1.1.6. Si en un grafo todo par de vértices es adyacente, decimos que el grafo es **completo**. Notamos: K_n para todo $n \geqslant 1$, al grafo completo con n vértices.

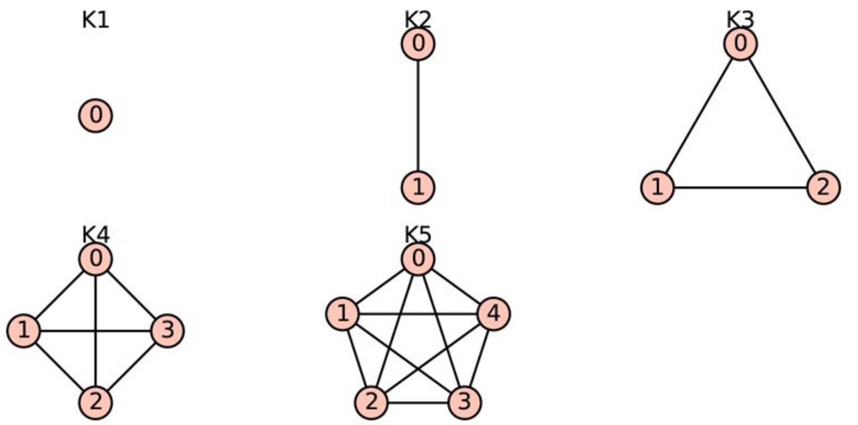

Figura 1.1.2: Ejemplo de grafos completos de orden 1,2,3 y 5.

Definición 1.1.7. Si un par de vértices no es adyacente, decimos que son **independientes** o **estables**.

Si $V' \subset V(G)$ es tal que cada par de vértices en V' es independiente, entonces decimos que V' es **independiente**.

Definición 1.1.8. Sean $G1 = (V1, E1)$ y $G2 = (V2, E2)$ grafos, decimos que $\varphi : V1 \to V2$ es un **isomorfismo** si para todo par de vértices $x, y \in V1$ se tiene que $xy \in E1 \Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E2$.

Usualmente no hacemos distinciones entre dos grafos isomorfos. De hecho en ese caso escribimos $G1 = G2$.

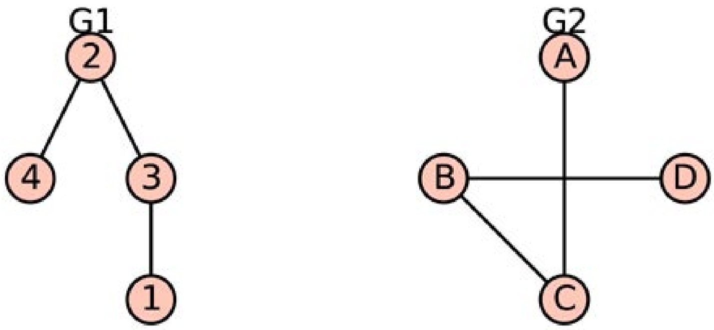

Figura 1.1.3: Ejemplo de isomorfismo de grafos.

En este ejemplo un isomorfismo válido entre $G1$ y $G2$ es

$$\begin{aligned} \varphi : 1 &\mapsto A \\ 2 &\mapsto B \\ 3 &\mapsto C \\ 4 &\mapsto D \end{aligned}$$

Definición 1.1.9. Definimos:

- $G \cup G' := (V \cup V', E \cup E')$
- $G \cap G' := (V \cap V', E \cap E')$

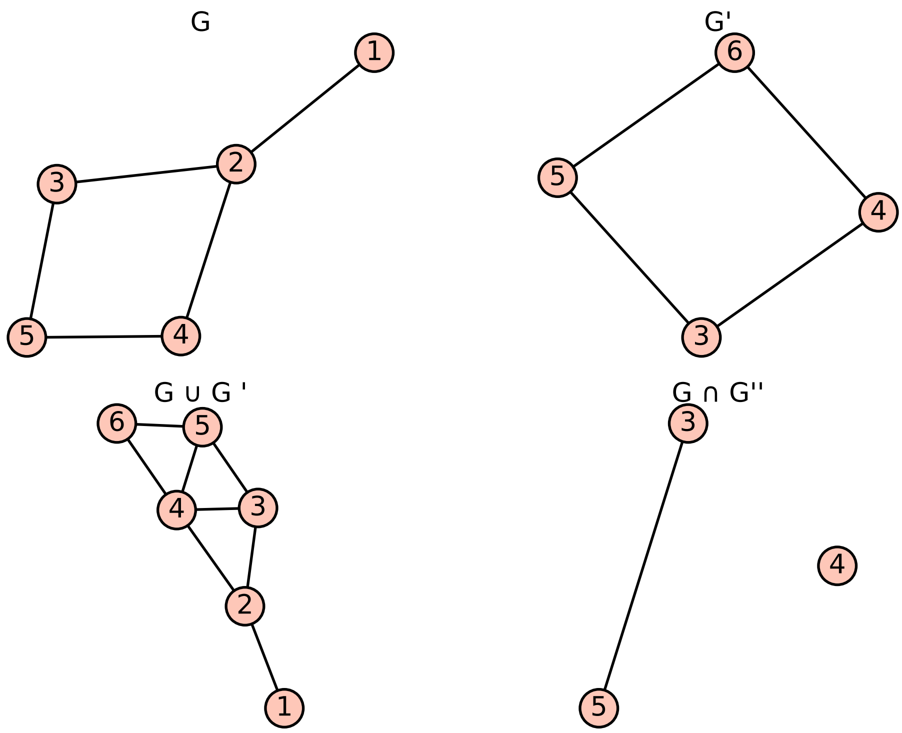

Figura 1.1.4: Ejemplo de unión e intersección de grafos.

Definición 1.1.10. Si $G \cap G' = \emptyset$, decimos que son **disjuntos**.

Si $V' \subset V$ y $E' \subset E$, decimos que G' es **subgrafo** de G, y que G es **supergrafo** de G'. Notamos $G' \subset G$. Si G' es subgrafo de G pero $G \neq G$, decimos que G' es **subgrafo propio** de G' y análogamente decimois que G **supergrafo propio** de G'; notamos $G' \subsetneq G$.

Definición 1.1.11. Sea $G' \subset G$, tal que G' contiene todas las aristas $xy \in E$ tal que $x, y \in V'$. Decimos que G' es un **subgrafo inducido** de G.

En este caso diremos que V' **induce** G' en G, y escribimos $G' = G[V']$ para un subconjunto $V' \subset V$.

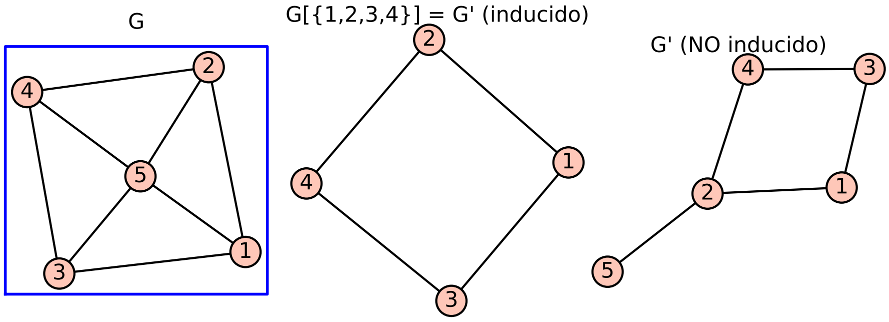

Figura 1.1.5: Ejemplo de grafo inducido y no inducido.

1.2. Clase 2: 18/03/23

Definición 1.2.1. Si $U \subset V(G)$, escribimos $G \backslash U$ para denotar $G[V \backslash U]$. Es decir, $G \backslash U$ se obtiene de borrar los vértices de U y sus aristas incidentes.

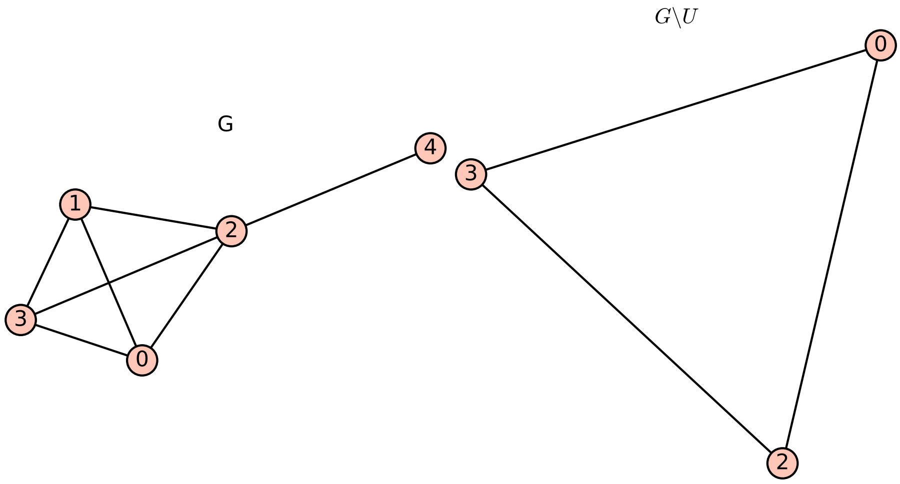

Figura 1.2.6: Ejemplo de $G \backslash U$.

Definición 1.2.2. El **complemento** $\overline{G}$ de un grafo G, es el grafo con vértices $V(G)$ y que tiene una arista xy si y solo si $xy \notin E(G)$.

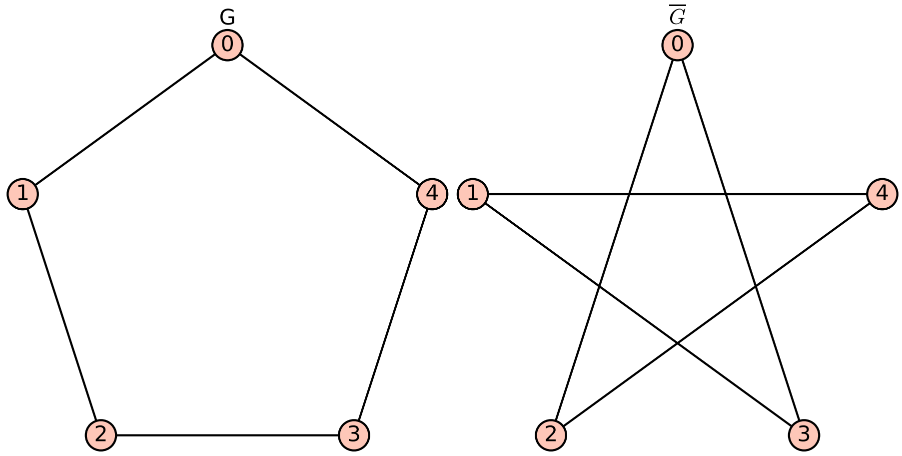

Figura 1.2.7: Ejemplo de complemento.

Notar que en el ejemplo de arriba, G y $\overline{G}$ son isomorfos. Esto no pasa necesariamente, por ejemplo el complemento de un grafo completo es el grafo sin aristas.

1.2.1. El grado de un vértice

Definición 1.2.3. Sea G un grafo no vacío, y sea $v \in V(G)$. El conjunto de vecinos de v lo denotamos como $N(v)$ o si el contexto no es claro $N_G(v)$. Llamamos a este conjunto el **vecindario** de v.

Más en general, si $U \subset V(G)$, no vacío. El **vecindario** de U es el subconjunto de vértices de $V(G) \backslash U$ que contiene vecinos de algún elemento de U. Notamos $N(U)$ o $N_G(U)$.

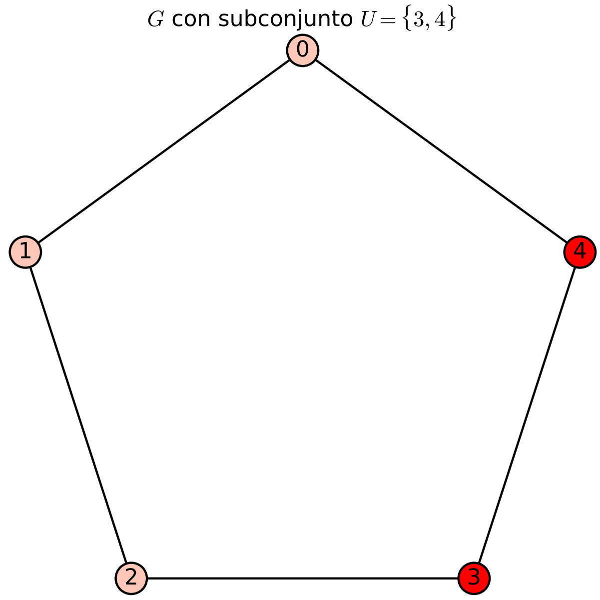

Figura 1.2.8: Ejemplo de vecindario de $U = \{3,4\}$. Tenemos que $N(U) = \{0,2\}$.

Definición 1.2.4. El **grado** de un vértice $v \in V(G)$ es el número de aristas que inciden en v y lo denotamos como $d(v)$ o $d_G(v)$. Notar que

$$d(v) = |N(v)|,$$

porque no permitimos multigrafos.

Si v tiene grado 0, decimos que es **aislado**.

Definición 1.2.5. Definimos la cantidad de G:

$$\delta(G) := \min_{v \in V(G)} \{d(v)\}.$$

Es el **grado mínimo** de G.

Análogamente, tenemos la cantidad G:

$$\Delta(G) := \max_{v \in V(G)} \{d(v)\}.$$

Es el **grado máximo** de G.

En el caso que todos los vértices tienen el mismo grado, i.e. $\delta(G) = \Delta(G)$, decimos que G tiene grado k y que G es k-**regular** o simplemente **regular**.

Definición 1.2.6. Definimos la cantidad del grafo G:

$$d(G) := \frac{1}{|V(G)|} \sum_{v \in V(G)} d(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{v \in V(G)} d(v).$$

Es el **grado promedio** de G.

Observación 1.2.7.

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)| = 2||G||.$$

Con lo cual,

$$\boxed{d(G) = 2\frac{E(G)}{V(G)} = 2\frac{||G||}{|G|}.}$$

Proposición 1.2.8. *El número de vértices de grado impar en un grafo siempre par.*

Demostración. Por la observación anterior, $\sum_{v \in V(G)} = 2|G| \equiv 0 \mod 2$ con lo cual,

$$\#\{v \in V(G) \mid d(v) \equiv 1 \mod 2\} = \sum_{v \mid d(v) \equiv 1 \mod 2} d(v) \equiv 0 \mod 2.$$

$\square$

Proposición 1.2.9. *Para todo grafo G con al menos una arista, existe un subgrafo H tal que*

$$\delta(H) > \frac{|E(H)|}{|V(H)|} \geqslant \frac{|E(G)|}{|V(G)|}.$$

Demostración. En efecto, la idea es la siguiente: construimos una secuencia de grafos $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots$ de subgrafos inducidos, tales que si G_i tiene un vértice de grado $d(v_i) \leqslant \frac{|E(G_i)|}{|V(G_i)|}$, entonces tomamos $G_{i+1} := G_i \backslash v_i$; si no, la secuencia termina en $H := G_i$. Por la elección de v_i se sigue que $\frac{|E(G_{i+1})|}{|V(G_{i+1})|} \geqslant \frac{|E(G_i)|}{|V(G_i)|}$, pues esto sucede si y solo si

$$\begin{aligned} \frac{|E(G_i)| - d(v_i)}{|V(G_i)| - 1} &\geqslant \frac{|E(G_i)|}{|V(G_i)|} \\ \Leftrightarrow (|E(G_i)| - d(v_i))\,|V(G_i)| &\geqslant |E(G_i)|\,(|V(G_i)| - 1) \\ \Leftrightarrow -d(v_i)\,|V(G_i)| &\geqslant -|E(G_i)| \\ \Leftrightarrow \frac{|E(G_i)|}{|V(G_i)|} &\geqslant d(v_i). \end{aligned}$$

En particular, $\frac{|E(H)|}{|V(H)|} \geqslant \frac{|E(G)|}{|V(G)|}$.

Afirmamos que H tiene al menos una arista, de lo contrario $\frac{|E(H)|}{|V(H)|} = 0 < \frac{|E(G)|}{|V(G)|}$, por tener G al menos una arista. En particular, $H \neq \emptyset$. Como H es el mínimo de esta construcción, se tiene que $\delta(H) > \frac{|E(H)|}{|V(H)|}$. $\square$

1.2.2. Caminos y Ciclos

Definición 1.2.10. Un **camino** es un grafo no vacío $P = (V,E)$ de la forma

$$V = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}.$$

Con

$$E = \{x_0x_1, x_1x_2, \ldots, x_{k-1}x_k\}.$$

Donde todos los x_i son distintos.

Decimos que $||G||$, i.e. el número de aristas, es su **longitud**.

Usualmente denotamos al camino P como la secuencia de vértices

$$P = x_0x_1 \ldots x_k.$$

En este caso diremos que P es un **camino entre** x_0 y x_k.

Notar que $|G| = k+1$, y que $||G|| = k$.

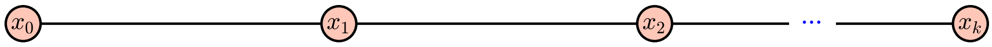

Figura 1.2.9: Dibujo de un camino de $k+1$ vértices.

Definición 1.2.11. Sea C un grafo que se construye a partir de un camino $P = x_0x_1\cdots x_k$ con $k \geqslant 1$, en donde agregamos la arista x_kx_0. Este grafo se llama **ciclo**. Notamos a esta construcción $C := P + x_kx_0$ o $x_0x_1\ldots x_kx_0$.

La **longitud** de un ciclo es su número de aristas, es decir $||C||$.

Notar que $|C| = k$.

Definición 1.2.12. Sea G un grafo. Definimos la **cintura** de G como la mínima longitud $g(G)$ de un ciclo en G.

Definimos la **circunferencia** como la máxima longitud de un ciclo en G.

Si G no tiene ciclos, definimos $g(G) := \infty$ y circunferencia 0.

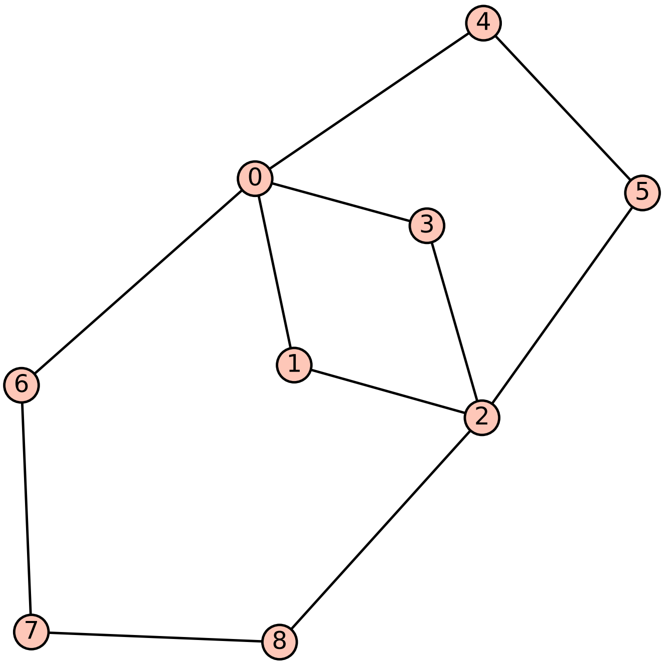

Figura 1.2.10: Ejemplo de ciclos en un grafo de cinutra igual a 4.

Definición 1.2.13. Una arista que une a dos vértices de un ciclo C, pero que no pertenece a $E(C)$, se la llama **cuerda**.

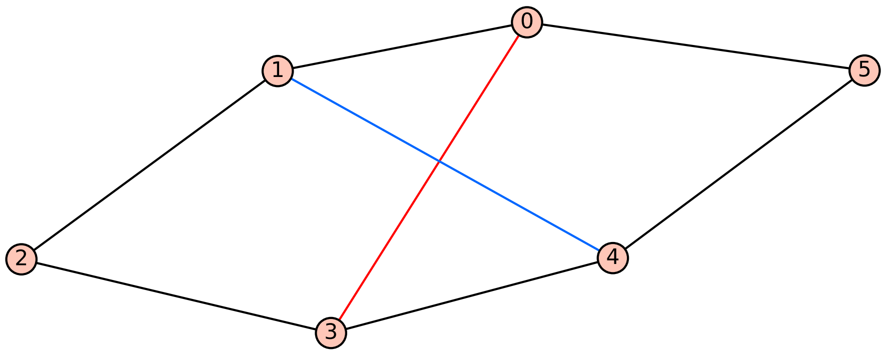

Figura 1.2.11: Ejemplo de dos cuerdas de un ciclo C.

Proposición 1.2.14. *Todo grafo G contiene un camino de largo $\geqslant \delta(G)$. Más aún, si $\delta(G) \geqslant 2$, entonces también contiene un ciclo de largo $\geqslant \delta(G)+1$.*

Demostración. Sea $P = x_0x_1 \dots x_k$ un camino de largo k máximo en G. El caso $k=1$ es inmediato, luego supongamos que $k \geqslant 1$.

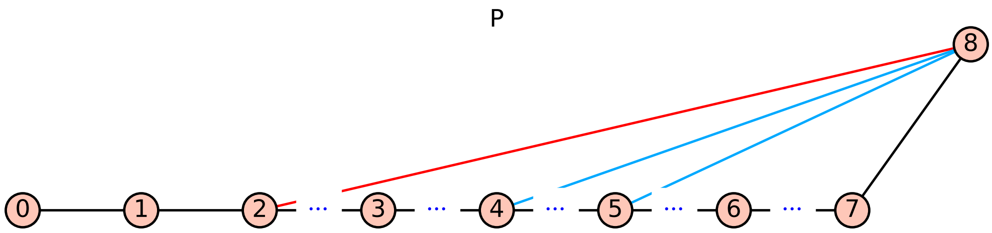

Figura 1.2.12: Camino P de longitud maximal k. Imaginemos que $x_0 = 0$ y que $x_k = 8$ (no pude cambiar las etiquetas en sage math cuando grafique el grafo).

Notar que por maximalidad de P, todos los vecinos de x_k están en $V(P)$, de lo contrario habria un camino más largo. Con lo cual

$$|V(P)| = k \geqslant d(x_k) + 1 \geqslant \delta(G) + 1.$$

Con lo cual, $||P|| \geqslant \delta(G)$.

Ahora, sea $i < k$ el menor índice tal que $x_ix_k \in E(G)$. Como $\delta(G) \geqslant 2$, se sigue que $i < k-1$, i.e. x_i y x_k no son adyacentes, luego tomamos el ciclo $C = x_ix_{i+1} \dots x_kx_i$. Notar que entonces la longitud de $||C|| \geqslant \delta(x_k) + 1 \geqslant \delta(G) + 1$. $\square$

1.3. Clase 3: 20/03/23

Definición 1.3.1. La **distancia** entre dos vértices x, y de un grafo G, es la longitud de un camino con longitud mínima entre x, y, la notamos

$$d(x,y).$$

Si no hay un camino entre x e y, escribimos

$$d(x,y) = \infty.$$

El **diámetro** de G es el máximo de las distancias entre todos los pares de vértices, lo notamos

$$\operatorname{diam}(G).$$

Notar que $d(x,y) = 0$ si y solo si $x = y$.

Definición 1.3.2. El **radio** de un grafo G, denotado $\operatorname{rad}(G)$, es la cantidad

$$\operatorname{rad}(G) = \min_{x \in V(G)} \max_{y \in V(G)} d(x,y).$$

Decimos que un vértice $v \in V(G)$ es **central**, si

$$\max_{y \in v(G)} d(v,y) = \operatorname{rad}(G).$$

Es decir, v minimiza la función $x \mapsto \max_{y \in V(G)} d(x,y)$.

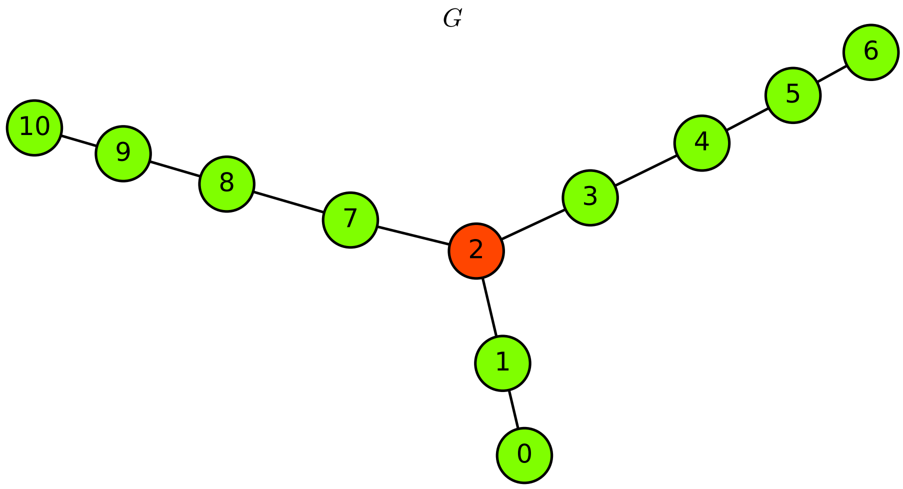

Figura 1.3.13: Ejemplo de vértice central es 3 y tiene radio 4. El grafo G tiene diámetro 8.

Ejercicio 1.3.3 (Entrega de taller). Probar que

$$\operatorname{rad}(G) \leqslant \operatorname{diam}(G) \leqslant 2\operatorname{rad}(G).$$

Solución. Si el grafo G no es conexo, luego el radio y el diámetro son infinito, luego vale la desigualdad. En efecto, por un lado si $x \in V(G)$ está fijo, como G no es conexo existe $y \in V(G)$ tal que $d(x,y) = \infty$, con lo cual $\max_{y \in V(G)} d(x,y) = \infty$ para x fijo, luego si tomamos mínimo sobre los x se tiene que $\operatorname{rad}(G) = \infty$. Por otro lado, $\operatorname{diam}(G) = \infty$ porque es el máximo sobre todas las distancias entre dos vértices, y como mencionamos recién, al no ser conexo el grafo tiene que haber una distancia infinita entre algún par de vértices.

Ahora supongamos que G es conexo, es decir para todo par de vértices x, y existe un camino P_{xy} que los conecta, sin pérdida de generalidad supongamos que es el más corto, i.e. $d(x,y)$ es la longitud de P_{xy}. Se deduce que $d(x,y) \leqslant \operatorname{diam}(G)$ por definición de diámetro. Tomando máximo sobre y y luego mínimo sobre x se sigue por definición que

$$\operatorname{rad}(G) \leqslant \operatorname{diam}(G).$$

Esto prueba la primera desigualdad. Ahora veamos la segunda.

Sea o un vértice que minimice la función $x \mapsto \max_{y \in V(G)} d(x,y)$, es decir, o es central. Ahora tomemos dos vértices arbitrarios x, y. Como o minimiza la función anterior, tenemos que $d(x,o) \leqslant \operatorname{rad}(G) = \max_{z \in V(G)} d(o,z)$, es decir existe un camino de longitud $\leqslant \operatorname{rad}(G)$ que une x con o. Análogamente, existe un camino de longitud $\leqslant \operatorname{rad}(G)$ que une o con y. Concatenando ambos caminos obtenemos un camino entre x e y de longitud $\leqslant 2\operatorname{rad}(G)$. Tomando máximo sobre x, y obtenemos la otra desigualdad:

$$\operatorname{diam}(G) \leqslant 2\operatorname{rad}(G).$$

□

Si queremos relacionar el radio o diámetro con el grafo mínimo, promedio o máximo debemos tener otros parámetros como intermediario. Por ejemplo, los caminos tienen grado mínimo 1 pero pueden tener radio y diámetro arbitrariamente grandes. O podemos tener radio y diámetro arbitrariamente grande y grado mínimo arbitrario. Antes de dar un ejemplo, necesitamos la siguiente definición:

Definición 1.3.4. Sea G un grafo, definimos G^k como la **potencia** de G. Es el grafo que contiene los mismos vértices y las aristas son las originales pero agregando a cada vértice x una arista incidente con cada vértice y a distancia $d(x,y) \geqslant k$.

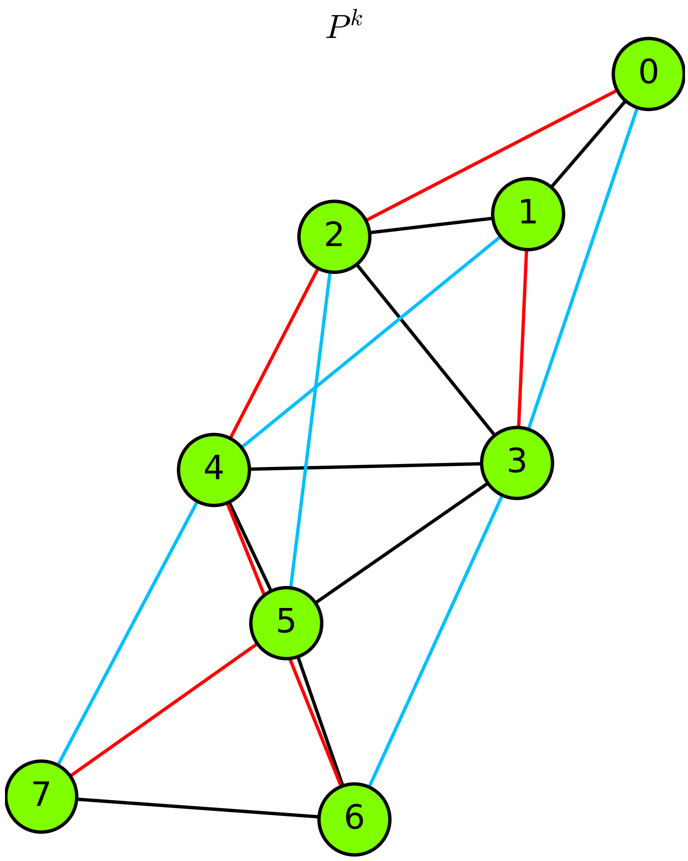

Figura 1.3.14: El camino $P : 0,1,2,\ldots,7$ dibujado en negro, le agregamos aristas para dibujar P^3. Las aristas rojas conectan nodos a distancia 2 y las azules 3.

Por ejemplo, todo camino de longitud $2n$ tiene $2n+1$ vértices, radio n, diámetro $2n$. Luego P^k tiene misma cantidad de vértices (pero no aristas), mismo radio y diámetro, pero grado k para todo $1 \leqslant k \leqslant 2n$.

Vamos a relacionar el radio y grado máximo a través de el número de vértices. Un grafo puede tener muchos vértices, por ejemplo si tiene radio alto, o si tiene grado máximo alto,

Proposición 1.3.5. *Sea $d \geqslant 3$. Un grafo G con radio a lo más k y grado máximo a lo más d. Entonces tiene menos que $\frac{d}{d-2}(d-1)^k$ vértices.*

Demostración. Sea z un vértice central de G y D_i el conjunto de los vértices a distancia i de z.

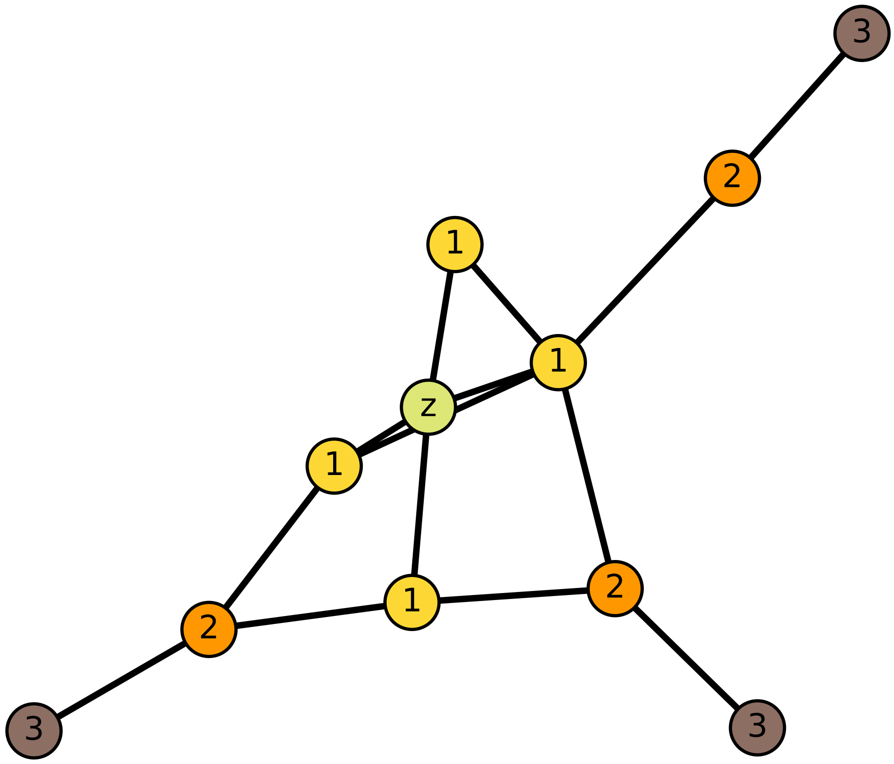

Figura 1.3.15: D_0 son los verdes, D_1 los amarillos, y así...

Tenemos que $|D_0| = 1, |D_1| \leqslant \Delta \leqslant d$. Notar que cada vértice de D_1 tiene como vecino en D_2 a lo sumo $d-1$ vértices, pues ya es vecino de z. En general, tenemos que

$$|D_{i+1}| \leqslant |D_i|\,(d-1), \quad i \geqslant 1.$$

Con lo cual

$$|D_{i+1}| \leqslant |D_1|\,(d-1)^i = d(d-1)^i, \quad i \geqslant 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned}|V(G)| = \sum_{i=0}^{k} |D_i| &\leqslant 1 + d\sum_{i=0}^{k-1}(d-1)^i \\ &= 1 + d(d-1)^k - 1/d - 2 \\ &< \frac{d}{d-2}(d-1)^k.\end{aligned}$$

□

Observación 1.3.6. 1. Cuando el radio es $k = 1$, por ejemplo en un grafo estrella, la cantidad de vértices es asintóticamente igual a $\frac{d}{d-2}(d-1)^k$ cuando $d \to \infty$.

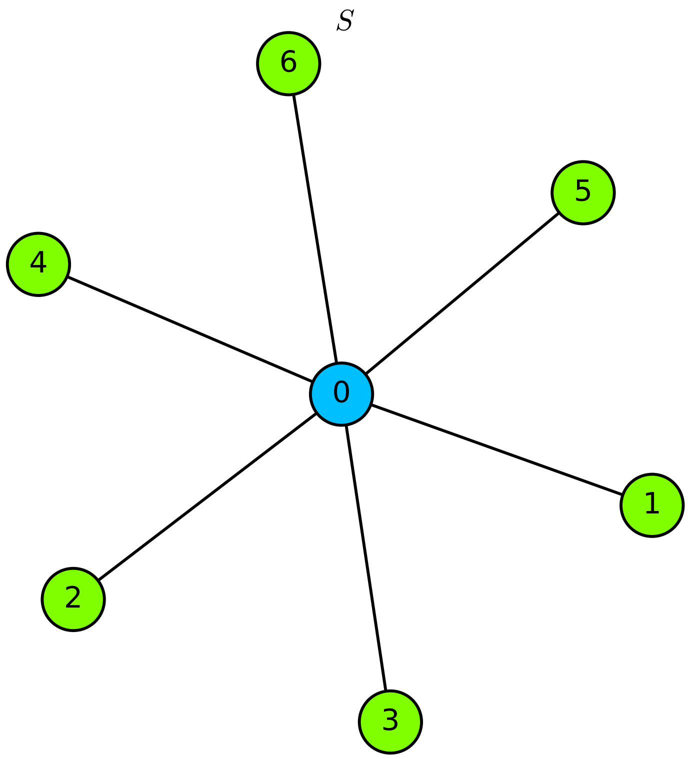

Figura 1.3.16: Ilustración del grafo estrella.

2. La cota no es para nada óptima para grafos de potencia P^k de caminos. Por ejemplo, si P tiene $2n+1$ vértices, $k=n$ y $d=k\geqslant 3$. Luego en el mejor de los casos con $d=3$, tenemos que
$$\left|P^k\right| = 2n+1 \ll 3\cdot 2^n.$$
O sea que la diferencia es exponencial.

Similarmente, podemos acotar el orden de G por abajo, si es que podemos controlar inferiormente δ y g. Definamos la cantidad para $d\in\mathbb{R}$ y $g\in\mathbb{N}$:
$$n_0(d,g) := \begin{cases} 1+d\sum_{i=0}^{r-1}(d-1)^i & \text{si } g=2r+1 \text{ es impar,}\\ 2\sum_{i=0}^{r-1}(d-1)^i & \text{si } g=2r \text{ es par.}\end{cases}$$

Teorema 1.3.7 (Versión débil). [1] *Sea G un grafo con $\delta(G)\geqslant d\geqslant 2$ y $g(G)\geqslant g\in\mathbb{N}$.*

Demostración. Sea v un vértice de un ciclo C de largo mínimo, i.e. $\geqslant g$. Consideremos como D_i al conjunto de vértices a distancia i de v en G. Como antes, $|D_0|=1$, para cada vértice de D_{i+1} tiene un vecino en D_i si $i>0$; como cada vértice de D_i tiene un vecino en D_{i-1}, se sigue que $|D_{i+1}|\geqslant(\delta(G)-1)|D_i|\geqslant(d-1)|D_i|$ si $i<r$, ya que de lo contrario existiría un ciclo de longitud más chica que r. Reiterando recursivamente esta igualdad, se sigue que $|D_{i+1}|\geqslant(d-1)^i|D_1|$ para todo $i<r$

Luego como $G=\sqcup_i D_i\supset\sqcup_{0\leqslant i\leqslant r}D_i$, se sigue que

Caso $g=2r+1$ $|G|\geqslant\sum_{0\leqslant i\leqslant r}|D_i| = 1+\sum i = 0^{r-1}|D_{i+1}|\geqslant 1+\sum_{i=0}^{r-1}(d-1)^i|D_1|\geqslant 1+\sum_{i=0}^{r-1}(d-1)^i d$.

[1] La versión fuerte de este teorema, por Alon, Hoory and Linial, 2002, dice que si $d(G)\geqslant d\neq 2$ y $g(G)\geqslant g\in\mathbb{N}$, entonces $|G|\geqslant n_0(d,g)$.

Caso $g = 2r$ Analogo.

$\square$

Corolario 1.3.8. *Si $\delta(G) \geqslant 3$, entonces $g(G) < 2\log_2|G|$.*

Demostración. Tomamos $g = g(G)$. Si es par, entonces

$$n_0(3,g) = 2\frac{2^{g/2}-1}{2-1} = 2^{g/2} + (2^{g/2}-2) > 2^{g/2}.$$

Si g es impar, entonces

$$n_0(3,g) = 1 + 3\frac{2^{(g-1)/2}-1}{2-1} = \frac{3}{\sqrt{2}}2^{g/2} - 2 > 2^{g/2}.$$

Luego por el teorema anterior el resultado se sigue luego de tomar logarítmo en base 2. $\square$

Proposición 1.3.9. *Todo grafo G que contiene al menos un ciclo, satisface*

$$g(G) \leqslant 2\,\mathrm{diam}(G) + 1.$$

Demostración. Supongamos que no. Es decir, si C es el ciclo de G con menor longitud, se tiene que $||C|| = g(G) \geqslant 2\,\mathrm{diam}(+)2$. Es decir, existen dos vértices de C, digamos x, y tales que su distancia en C es mayor o igual a $\mathrm{diam}(G)+1$. En G, estos vértices están a distancia menor que $\mathrm{diam}(G)+1$, sea P el camino mas corto en G que une a x, y (i.e. tiene longitud $< \mathrm{diam}(G)+1$), luego P no es subgrafo de G. Con lo cual, existe un subcamino de P que es un C-camino; luego este camino unión el $x-y$ camino más corto de C es un ciclo de longitud más chica que la de C, absurdo. $\square$

1.3.1. Conexidad

Definición 1.3.10. Un grafo es **conexo** si es no vacío y para todo par de vértices, existe un camino que los une a ambos.

Proposición 1.3.11. *Los vértices de un grafo conexo G se pueden enumerar, digamos $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tal que $G_i = G[v_1, v_2, \ldots, v_i]$ es conexo para todo $i = 1, \ldots, n$.*

Demostración. Probaremos la proposición por inducción en n. Sea v arbitrario, y asumamos por inducción que $v_1, \ldots, v_i$ han sido escogidos para $i < |V(G)|$ y que G_i es conexo

Escojo un vértice v no enumerado aún. Como G es conexo existe un camino P entre v_1 y v.

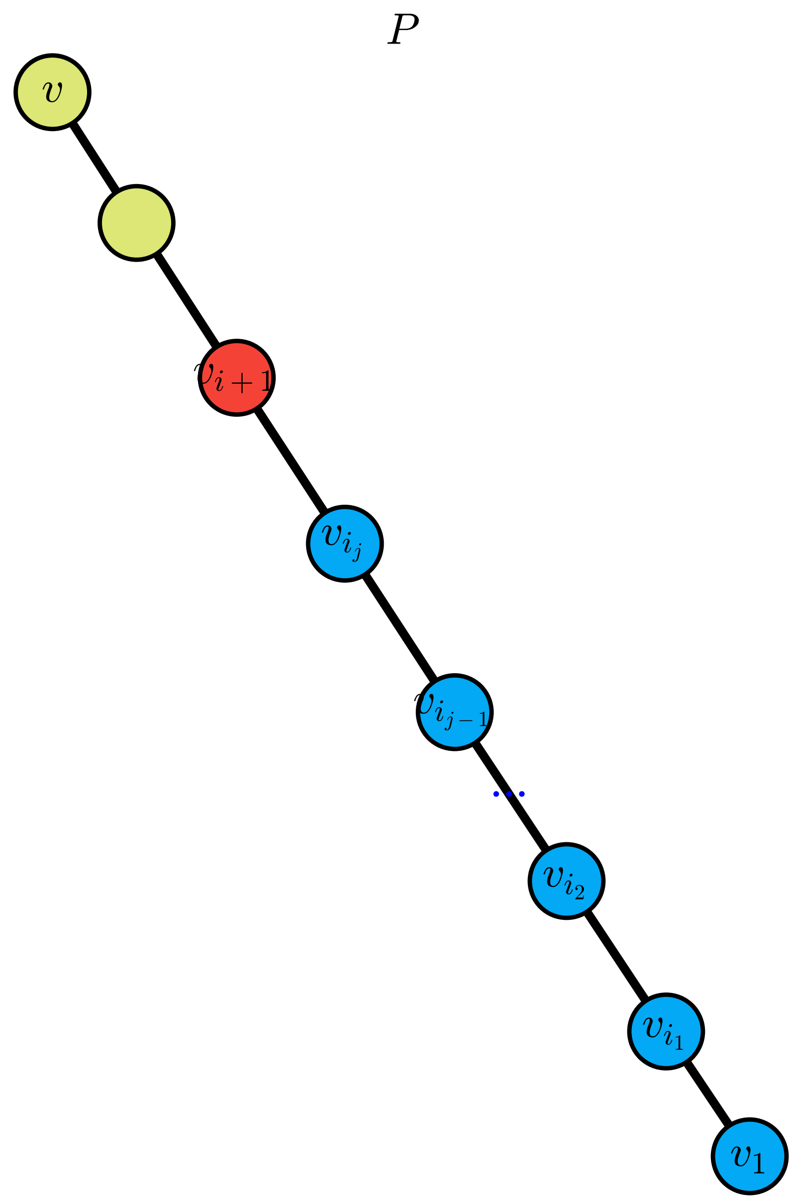

Figura 1.3.17: Camino P que une a v y v_1. En color azul representa los vértice de G_i en P.

Tomamos como v_{i+1} al último vértice en P, contado desde v, que no está en G_i. Como v_{i+1} tiene vecino en G_i y G_i es conexo se tiene que G_{i+1} es conexo.

□

Ejemplo 1.3.12. El siguiente dibujo es un mal ejemplo:

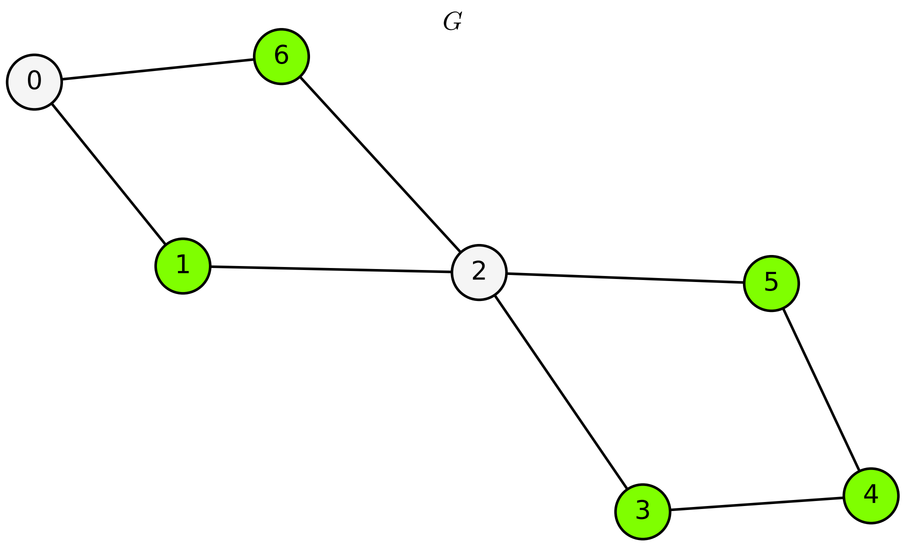

Figura 1.3.18: Mal ejemplo, pues 0 y 2 no inducen un grafo conexo $G[0,2]$.

1.4. Clase 4: 23/03/23

Definición 1.4.1 (Maximalidad)**.** Consideremos una propiedad P, para para algún grafo, conjunto de vértices, etc. Decimos que un conjunto de vértices U es maximal para P, si U cumple P, y $U \cup \{v\}$ con $v \notin U$ no cumple P.

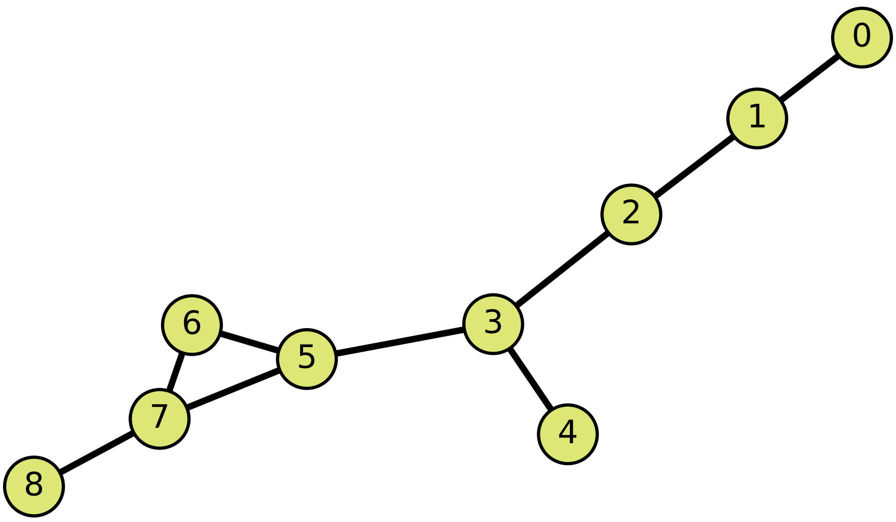

Figura 1.4.19: Ejemplo de camino maximal: $0,1,2,3,5,6,7,8$. Sin embargo, $5,7,8$ no lo es.

Definición 1.4.2. Sea $G = (V,E)$ un grafo. Un subgrafo conexo maximal de G es llamado una **componente** o **componente conexa** de G.

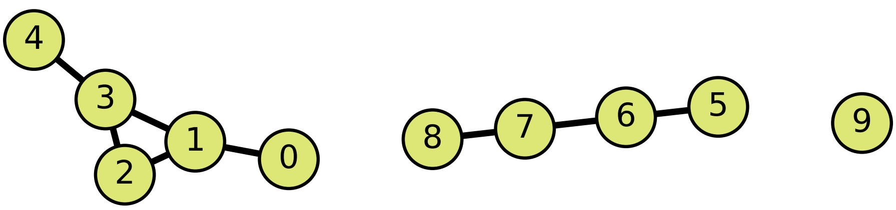

Figura 1.4.20: Ejemplo de componentes: tiene 3.

1.4.1. Árboles y bosques

Definición 1.4.3. Un grafo acíclico, es decir, sin ciclos, es llamado un **bosque**.
A un bosque conexo lo llamamos **árbol**, es decir un grafo conexo y acíclico.

Notar que las componentes conexas de un bosque son árboles.

Observación 1.4.4. Los subgrafos conexos de un árbol son árboles.

Definición 1.4.5. Los vértices de grado 1 en un árbol se llaman **hojas**.

Ejercicio 1.4.6. Todo árbol tiene al menos 1 hoja. Más aún, si el árbol tiene más de un vértice entonces tiene al menos 2 hojas. En particular los árboles tienen grado mínimo $\delta = 1$.

Solución. Sea P un camino maximal en el árbol, y miro uno de los extremos (podría haber solo uno si el camino tiene un solo vértice). Ese extremo si tuviera grado $\geqslant 2$, el otro vecino debería caer en el camino por maximalidad, luego existe un ciclo, absurdo!. Más aún, si el árbol tiene más de un vértice entonces el camino maximal que tomamos tiene dos vértices, i.e. dos hojas. □

Esto implica lo mismo para caminos, pues los caminos son árboles.

Teorema 1.4.7. *Sea T un grafo. Las siguientes definiciones son equivalentes:*

(I) *T es árbol.*

(II) *Cada par de vértices en T están unidos por un único camino.*

(III) *T es conexo, pero $T \backslash e$ es disconexo para todo $e \in E(T)$.*

(IV) *T es conexo, pero $T \backslash v$ es disconexo para todo $v \in V(T)$ que no sea hoja.*

(V) *T es acíclico, pero $T \cup xy$ tiene un ciclo para cualquier par de vértices x, y no adyacentes.*

Demostración.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Si no, existe al menos un camino por ser conexo, luego si hay dos caminos distintos entonces podemos construir un ciclo.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sea e una arista entre xy, entonces xy es un camino entre esos vértices, por hipótesis es el único, luego al quitarlo debe quedar disconexo, de lo contrario es que había otro camino.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Como v no es una hoja, es vecino de al menos dos vértices distintos, dicamos a, b. Si todo camino entre a y b pasa por v, entonces quitar este vértice haría que T fuera disconexo. Supongamos que existe un camino que une a, b pero que no contiene a v. Luego si quitamos la arista av o vb el grafo sigue siendo conexo, pues tenemos un ciclo avb, absurdo.

(iv) $\Rightarrow$ (v) T es acíclico, pues de lo contrario podríamos podríamos quitar un vértice y que siga quedando conexo. En efeco, sea C un ciclo en T, digamos con vértices $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_0$ y $n \geqslant 2$. Si quitamos cualquier vértice v de C, este queda conexo, pero veamos que T también. De lo contrario, es que v separa a T en dos componentes conexas, es decir, todos los caminos entre C y $T \backslash C$ pasan por v, con lo cual tomando otro vértice de C que no sea v y quitándolo, nos quedaría que T menos ese punto ex conexo, absurdo.

Sean x, y no adyacentes. Consideremos P un camino entre x, y. Como no son adyacentes este camino necesariamente tiene al menos un vértice en intermedio, digamos z. Por hipótesis, si quitamos z el grafo nos queda disconexo, y esto lo podemos hacer para cualquier $z \neq x, y$ en P. Con lo cual, $P \cup xy$ es un ciclo en $T \cup xy$.

(v) $\Rightarrow$ (i) Por hipótesis, T es acíclico. Sean $x, y \in V(G)$. Por hipótesis tenemos que $T \cup xy$ tiene un cíclo C_{xy}, luego C_{xy} debe contener la arista xy pues T es acíclico. Entonces $C_{xy} \backslash xy$ conecta a xy. Como x, y eran arbitrarios, tenemos que T es conexo.

$\square$

Definición 1.4.8. Sea G un grafo. Un **árbol generador** de G es un subgrafo de G que es árbol y que contiene a todos los vértices de G.

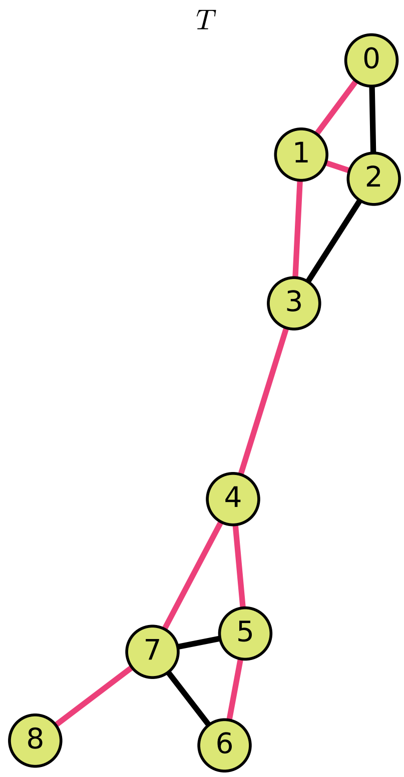

Figura 1.4.21: Ejemplo: árbol generador, con aristas en rojo.

Observación 1.4.9. Del dibujo anterior podemos ver que el árbol generador no necesariamente es único, y de hecho, puede haber otro que no sea isomorfo. Por ejemplo cambiemos los vértices del árbol en rojo, de manera que ya no tenga vértices de grado 3:

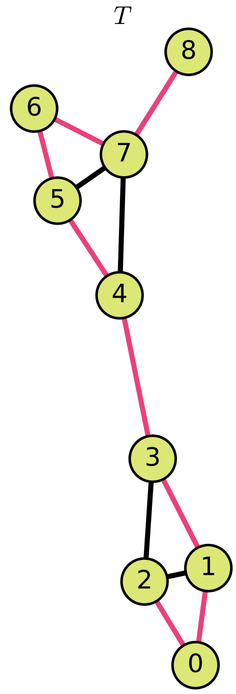

Figura 1.4.22: Otro árbol generador.

Proposición 1.4.10. *Todo grafo conexo tiene un árbol generador.*

Demostración. Tomemos un subgrafo minimalmente conexo H, que contenga a todo $V(G)$. Por (iii) del teorema anterior tenemos que H es un árbol. $\square$

Observación 1.4.11. Esta demostración nos da un álgoritmo para construir el árbol generador de un grafo: quitamos aristas hasta que nos quede minimalmente conexo.

Proposición 1.4.12. *Los vértices de un árbol T pueden ser enumerados, digamos $v_1, v_2, \dots, v_n$ de manera que para todo $i \geqslant 1$, v_i es hoja en $T[v_1, \dots, v_i]$ (que es árbol también).*

Demostración. Por la Proposición 1.3.11 existe una enumeración $v_1, \dots, v_n$ tal que $T[v_1, \dots, v_i]$ es conexo para todo $i \geqslant 1$. Inspeccionando la demostración, se puede ver que esta construcción sirve. En efecto, sabemos que v_{i+1} tiene un vecino en $G[v_1, \dots, v_i]$, llamemosló x, si tuviera otro llamado y, entonces $G[v_1, \dots, v_i]$ contiene un camino P_{xy} entre ellos, que junto con $xv_{i+1}y$ nos forma un cíclo, absurdo.

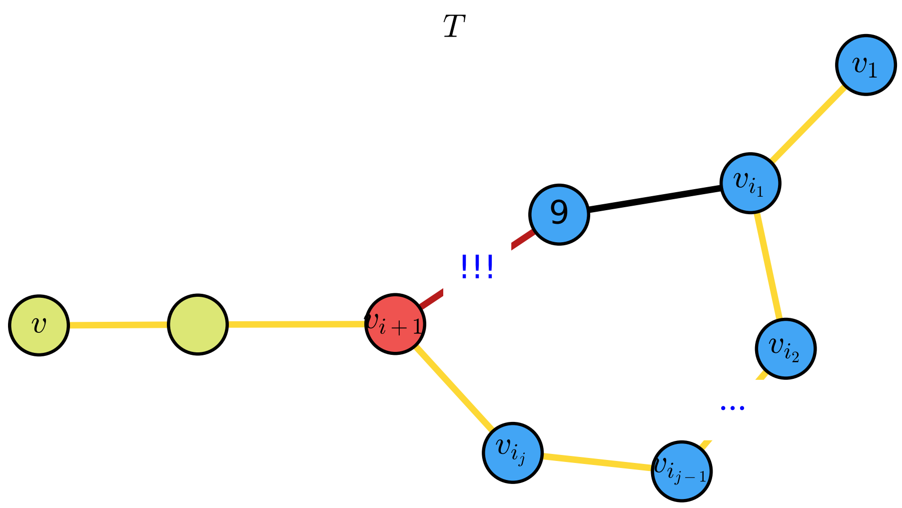

Figura 1.4.23: Ver dibujo.

□

1.5. Clase 5: 27/03/23

Corolario 1.5.1. *Un grafo de n vértices conexo es un árbol si y solo si tiene $n-1$ aristas.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que T es árbol; en particular es conexo. Por la proposición anterior, existe una enumeración $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tal que para todo $i \geqslant 1$, el grafo $T[v_1, \ldots, v_i]$ tiene $i-1$ aristas por inducción.

$\Leftarrow$) Como T es conexo tiene árbol generador T', y por la implicación anterior tiene $n-1$ aristas, entonces $T = T'$, i.e. T es árbol.

□

Corolario 1.5.2. *Todo grafo conexo de n vértices tiene al menos $n-1$ aristas.*

Demostración. Tiene un árbol generador, que debe tener $n-1$ aristas. □

1.5.1. Grafos bipartitos

Definición 1.5.3. Sea $r \geqslant 2$ entero. Decimos que un grafo $G = (V, E)$ es **r-partito** si podemos particionar a V en r partes tal que cada arista tiene sus extremos en partes distintas. Es decir, cada parte es un conjunto independiente.

2-partito es **bipartito**, 3-partito es **tripartito**, etc.

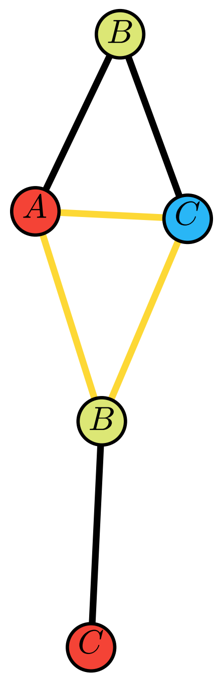

Figura 1.5.24: Ejemplo de grafo 3-partito, 4-partito y 5-partito, pero no 2-partito porque siempre existirian dos vértices del triangulo amarillo en la misma partición, pero eso es imposible porque son adyacentes. Se ilustran dos triparticiones distintas: A,B,C y por otro lado rojo, azul, verde.

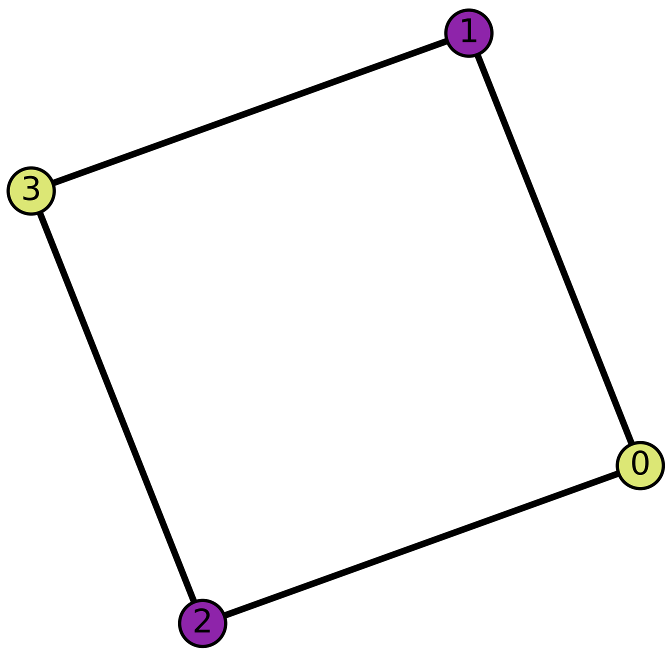

Figura 1.5.25: Ejemplo de grafo 2-partito.

Definición 1.5.4. Un grafo r-partito G, donde cada par de vértices de partes distintas son adyacentes, decimos que G es **r-partito completo**.

Un grafo r-partito completo con partes de tamaño $n_1, n_2, \ldots, n_r$ se denota $K_{n_1,n_2,\ldots,n_r}$.

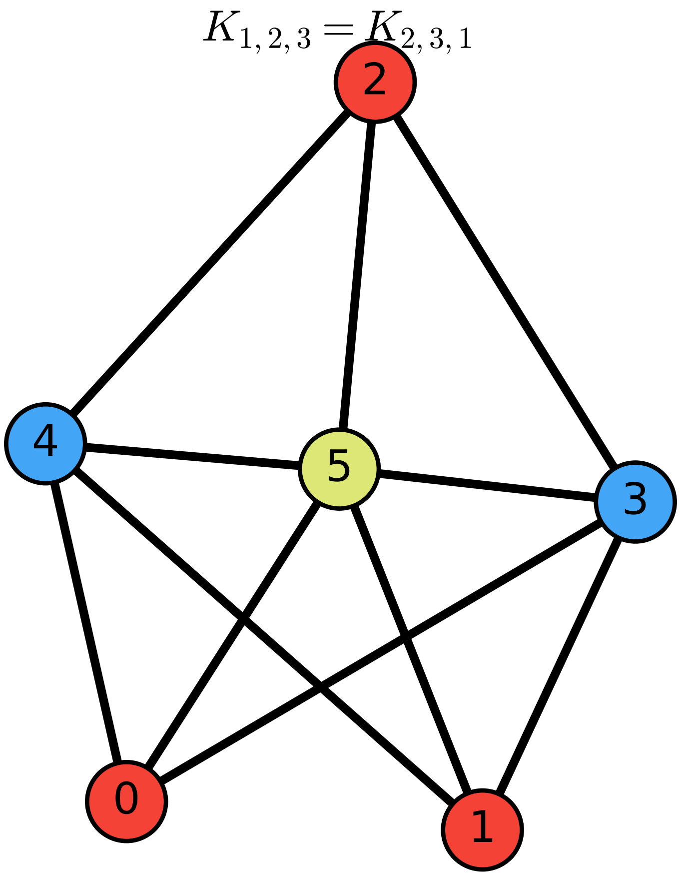

Figura 1.5.26: Ejemplo de grafo 3-partito completo.

Observación 1.5.5. Un grafo $K_{1,n}$ es una *estrella*.

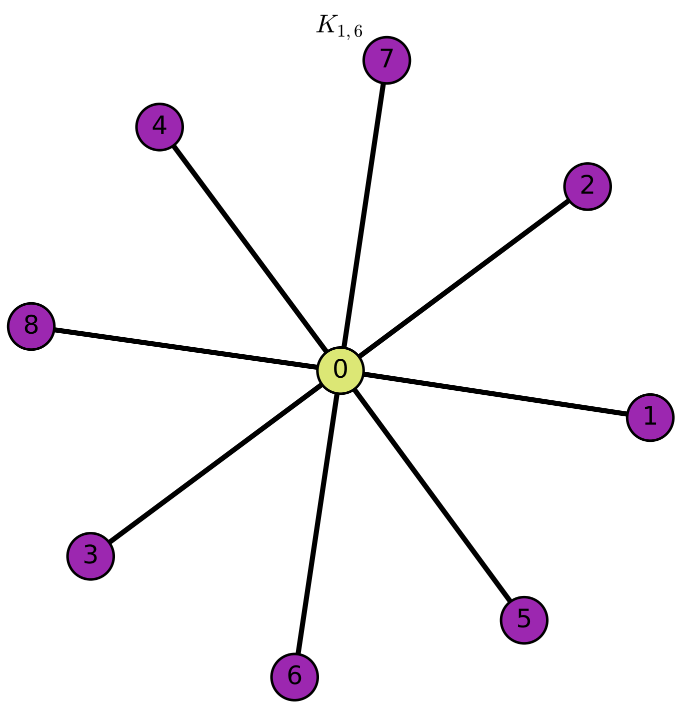

Figura 1.5.27: $K_{1,5}$

Observación 1.5.6. Si G es bipartito, entonces no tiene ciclos impares.

Demostración. Sea $C = C_{2k+1}$ con $k \geqslant 1$ un subciclo de longitud $2k+1$ de G. Si G fuera bipartito, entonces C también. En efecto, numerando $C : x_0, x_1, \dots, x_{2k}, x_0$, ser bipartito equivale a que existe una función $\rho : x_i \mapsto 0,1 \in \{0,1\}$ tal que $\rho(x) \neq \rho(y)$ para todo par de vértices adyacentes $x, y \in C$. Sin pérdida de generalidad $\rho(x_0) = 0$. Pero como x_i y x_{i+1} son siempre adyacentes, debe ser que $\rho(x_0) = 0, \rho(x_1) = 1, \dots, \rho(x_i) = i \mod 2$ (lo podemos probar recursivamente). Con lo cual, $\rho(x_{2k}) = 0 = \rho(x_0)$, lo cual es absurdo porque x_{2k} y x_0 son adyacentes. $\square$

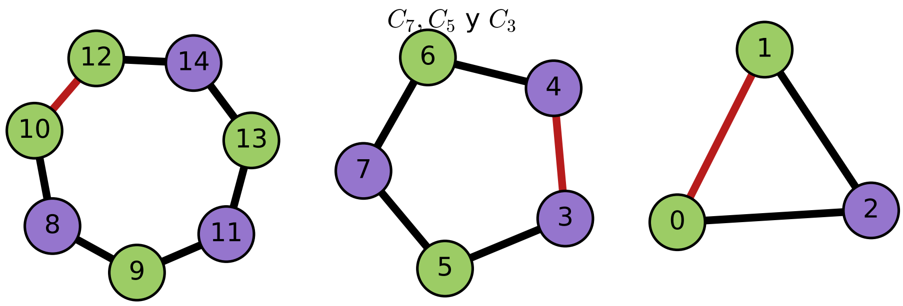

Figura 1.5.28: Como se ilustra en el dibujo, no podemos 2-particionar a C_7, C_5 ni C_3. Pues siempre que pintamos con dos colores quedan dos vértices adyacentes.

Teorema 1.5.7. *Un grafo es bipartito si y solo si no tiene ciclos impares.*

Demostración. La observación anterior prueba la necesidad. Veamos la suficiencia. Sea G un grafo sin ciclos impares. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que es conexo. Sea T un árbol generador, r un vértice de G que llamaremos raíz (de T). Para $v \in V(G)$ denotamos por rTv al único camino entre r y v en T (por la caracterización de árboles). Por último, si $w, v \in V(G)$, entonces decimos que $w \leqslant v$, si $w \in rTv$.

Definimos la partición de G: los vértices v tales que rTv tiene largo par, y por otro lado los vértices v tales que rTv tiene largo impar. Veamos que en efecto esto es una partición, i.e., no hay vértices adyacentes en la misma partición. Sea $e = xy$ una arista de G.

CASO 1: Si $e \in E(T)$, tendremos $x < y$ o $y < x$, pero nunca igualdad. Más aún, $||rTx|| = ||rTy|| \pm 1$, i.e. tienen paridades distintas.

CASO 2: Si $e \notin E(T)$, entonces rTx, rTy y e forman un ciclo (por la caracterización de árbol). Por la hipótesis, el ciclo es par. Esto implica que $||rTx||$ y $||rTy||$ tienen distinta paridad:

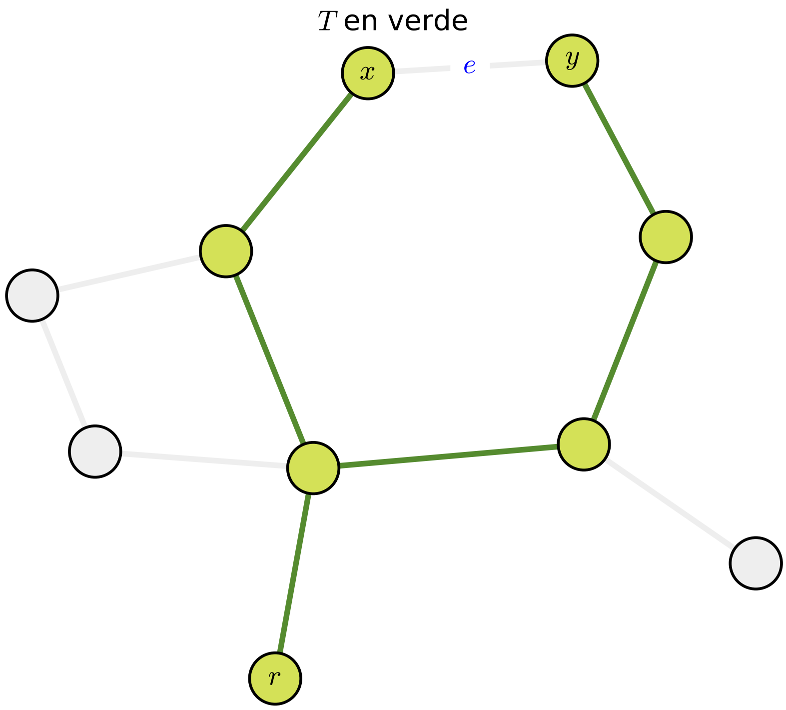

Figura 1.5.29: Ilustración de este hecho.

□

Corolario 1.5.8. *Los árboles y los bosques son bipartitos.*

1.5.2. Paseos Eulerianos

Viajamos a Prusia, siglo XVIII, a la ciudad de Königsberg.

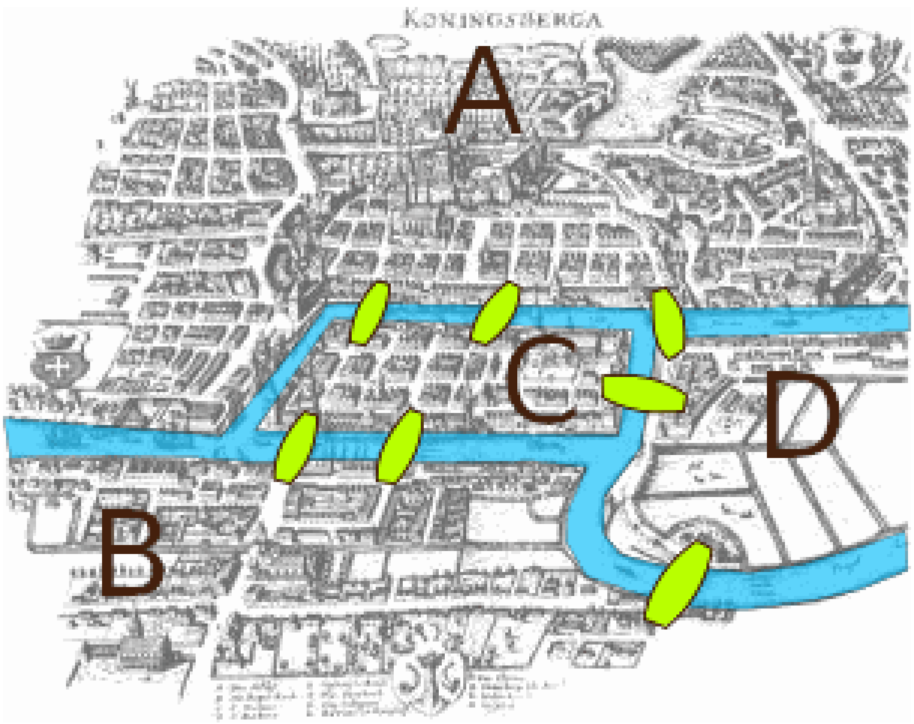

Figura 1.5.30: Los siete puentes de Königsberg.

La gente de la ciudad se preguntaba si se podía partir de un punto $x \in A$ o B de la ciudad, cruzar cada puente exactamente una sola vez y volver a x. Euler se propuso a responder la pregunta.

Podemos modelar el problema como un *multi*grafo (i.e. dos vértices pueden estar unidos por más de una arista):

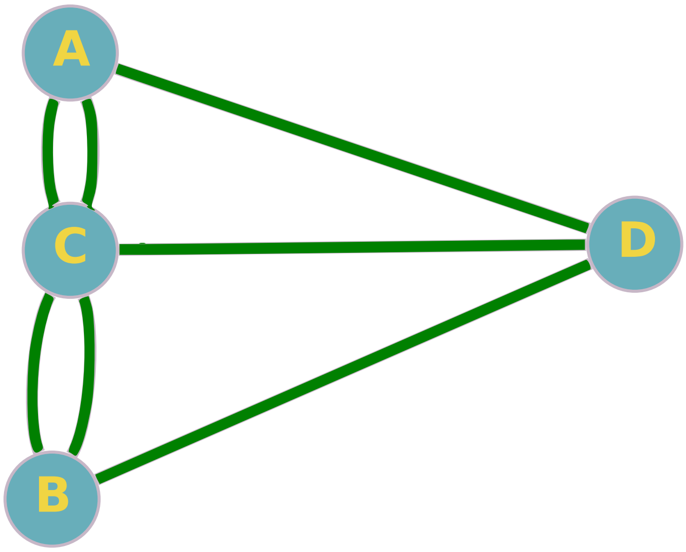

Figura 1.5.31: Multigrafo de los puentes de Königsberg.

Definición 1.5.9. Un **paseo** en un multigrafo, es una secuencia de vértices $x_0, x_1, \ldots$, tal que $x_i x_{i+1}$ es arista para todo $i \geqslant 0$, y ninguna de estas aristas se repite.

Un **paseo cerrado** comienza y termina en el mismo vértice.

Un paseo es **Euleriano** si es cerrado y recorre todas las aristas del multigrafo.

Un **grafo Euleriano**, es un multigrafo que contiene un paseo Euleriano.

Teorema 1.5.10. *Un multigrafo conexo es Euleriano si y solo si todos sus vértices tienen grado par.*

Veremos la demostración la clase siguiente.

1.6. Clase 6: 30/03/23

Teorema 1.6.1. *Un multigrafo conexo es Euleriano si y solo si todos sus vértices tienen grado par.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Asumimos que G tiene un paseo Euleriano P. Cada vez que el paseo "entra" en una vértice, lo hace por medio de una arista, y debe salir por otra. Cada vez que v a parece en P se utilizan otras dos aristas incidentes en v. Como se ocupan todas esas aristas, $d(v)$ es par.

$\Leftarrow$) Supongamos que todos los grados son pares. Haremos inducción en $||G||$. El caso base es $||G|| = 2$ que claramente tiene un paseo Euleriano:

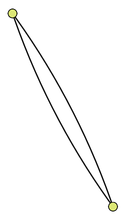

Figura 1.6.32: $||G|| = 2$.

Supongamos que $||G|| > 2$. Cuando todos los grados son pares, puedo encontrar un paseo cerrado no trivial. Tomemos como P el de largo máximo, y sea F su conjunto de aristas. Si F es todo, la demostración está terminada. Luego supongamos que no. Sea $G\backslash F = G'$, tiene una arista e que incide en un vértice de P, pues G es conexo. Sea C la componente de G' que contiene a e. Aplicando la hipótesis inductiva, podemos encontrar un paseo Euleriano en C, llamémoslo P'. Como P y P' unidos son un paseo cerrado más grande que P, llegamos a un absurdo.

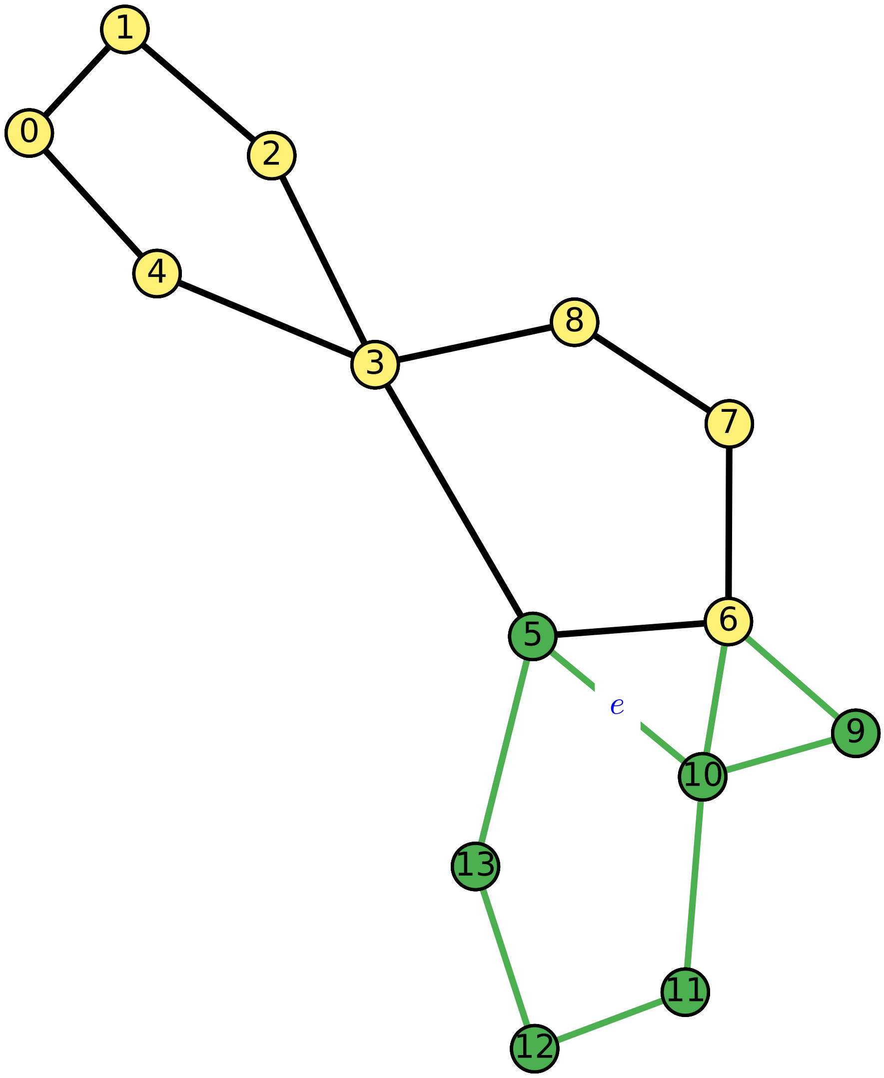

Figura 1.6.33: Esta es una ilustración de lo que podría suceder: P : $0,1,2,3,5,6,7,8,4,0$ es el camino negro y C es el grafo conexo.

□

1.6.1. Conexidad

Definición 1.6.2. Decimos que un conjunto X de vértices o aristas **separa** a $u,v \in V$ si $u,v \notin X$ y todo camino entre u y v tiene un elemento de X.

Si X separa un par de vértices, decimos que es **separador** (de u,v). Si un vértice solo, i.e. X es un singleton, es separador, decimos que es un **vértice de corte**. Un pequeño abuso de notación será simplemente referirnos a ese vértice en lugar del conjunto que lo contiene.

Análogamente, una arista sola $X = \{e\}$ que separa sus vértices se dice **puente**. Un pequeño abuso de notación será simplemente referirnos a ese vértice en lugar del conjunto que lo contiene.

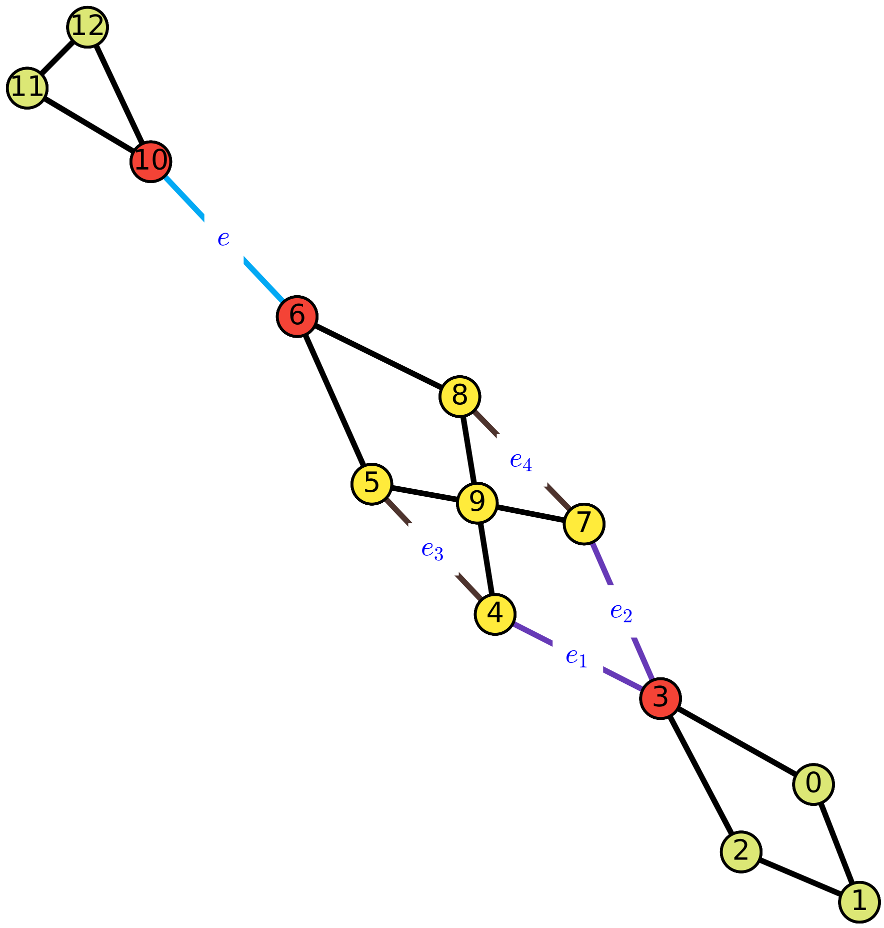

Figura 1.6.34: Ejemplo: $X = \{4,5,7,8,9\}$ separa a $u = 3, v = 6$. También $Y = \{e_1, e_2\}$ e $Y' = \{e_3, e_4\}$ son separadores de u, v. La arista $e = (6,10)$ es un puente.

Definición 1.6.3. Para $k \geqslant 0$ decimos que $G = (V,E)$ es **k-conexo** si $|V| > k$ y $G \backslash X$ es conexo para todo $X \subset V$ con $|X| < k$. Es decir, ningún conjunto de menos de k-vértices separa.

Ejemplo 1.6.4.
- 0-*conexo:* Todo grafo no vacío.
- 1-*conexo:* grafos conexos no triviales (tiene que tener al menos una arista).

Definición 1.6.5. La **conexidad**, $\mathscr{K}(G)$ de G, es el máximo $k \geqslant 0$ tal que G es k-conexo.

Ejemplo 1.6.6.
- $\mathscr{K}(G) = 0$*:* Todo grafo disconexo no vacío o K_1.
- $\mathscr{K}(K_n) = n-1, \forall n \geqslant 1$.

Definición 1.6.7. Sea G no vacío y sea $\ell \geqslant 1$. Decimos que G es **ℓ-arista conexo**, si $G \backslash F$ es conexo para todo $F \subset E$ con $||F|| < \ell$.

Ejemplo 1.6.8. 1-*arista conexo:* los grafos conexos no vacíos.

Definición 1.6.9. La **arista conexidad**, $\lambda(G)$ de G, es el máximo ℓ tal que G es ℓ-arista conexo.

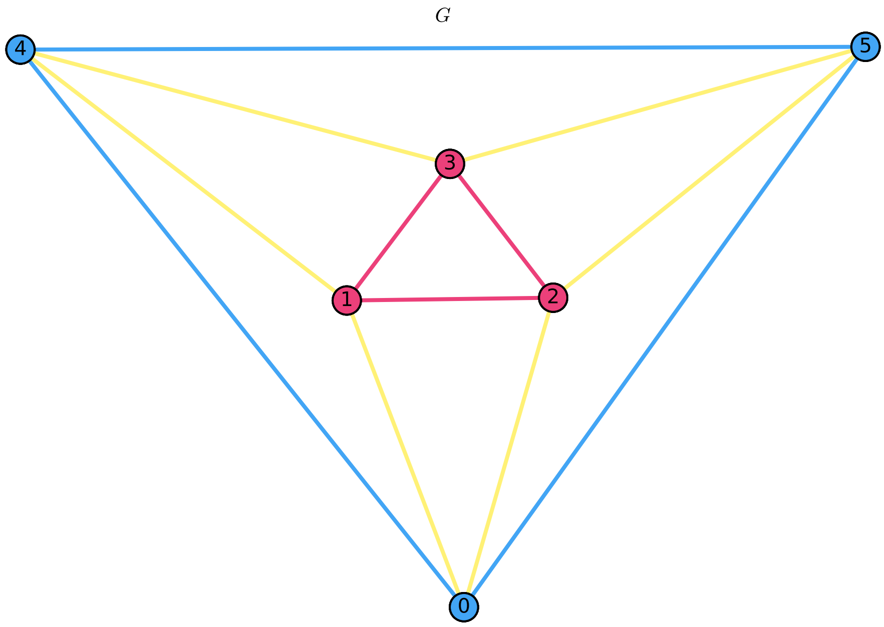

Figura 1.6.35: Ejemplo de grafo que tiene $\mathscr{K} = 4, \lambda = 4$.

Ejemplo 1.6.10. $\lambda(K_n) = n-1, \forall n \geqslant 1.$. Con lo cual, por el Ejemplo 1.6.6 tenemos que

$$\lambda(K_n) = \mathscr{K}(K_n).$$

Ejercicio 1.6.11. Calcular $\mathscr{K}$ y λ del siguiente grafo G:

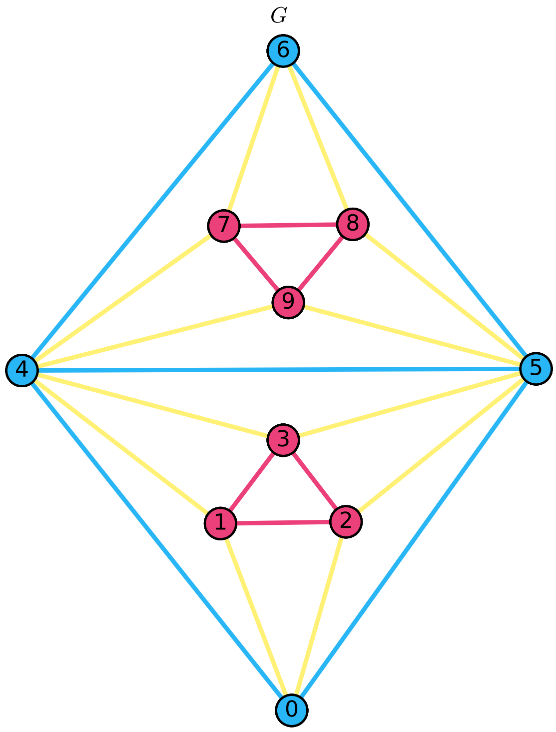

Figura 1.6.36: Grafo G.

Solución. Si quitamos los vértices $4,5$ entonces nos queda G disconexo, luego $\mathscr{K}(G) < 3$. Si quito cualquier vértice, entonces el grafo sigue siendo conexo, luego es 2-conexo, i.e. $\mathscr{K}(G) \geqslant 2$. Luego $\mathscr{K}(G) = 2$.

En el anterior ejemplo teníamos $\lambda = 4$ en cada triángulo azul, y como sacar 3 aristas incidentes a $4, 5$ no evita que G siga siendo conexo, tenemos que G es 4-arista conexo, i.e. $\lambda(G) \geqslant 4$. Por otro lado, si quitamos las 4 aristas incidentes en el vértice 1, queda el aislado del resto del grafo, i.e. $\lambda(G) < 5$. Luego $\lambda(G) = 4$. □

1.7. Clase 7: 03/04/23

Proposición 1.7.1. *Si G es no trivial, entonces $\mathcal{K}(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$*

Demostración. La segunda desigualdad se tiene porque todas las aristas incidentes en un vértice fijo separan a G.

Veamos ahora la primera desigualdad. Sea F un conjunto de aristas que separa a G, con $|F| = \lambda(G)$, tal que $G \backslash F$ es disconexo. *Observación:* F es un conjunto de aristas minimal con la propiedad de ser separador.

CASO 1: Existe $v \in V(G)$ que no incide en F. Sea C la componente conexa que contiene a v en $G \backslash F$. No puede haber una arista f de F con extremos en C, pues de lo contrario $F \backslash \{f\}$ sería un conjunto más chico tal que es separador, lo cual contradice la minimalidad de F.

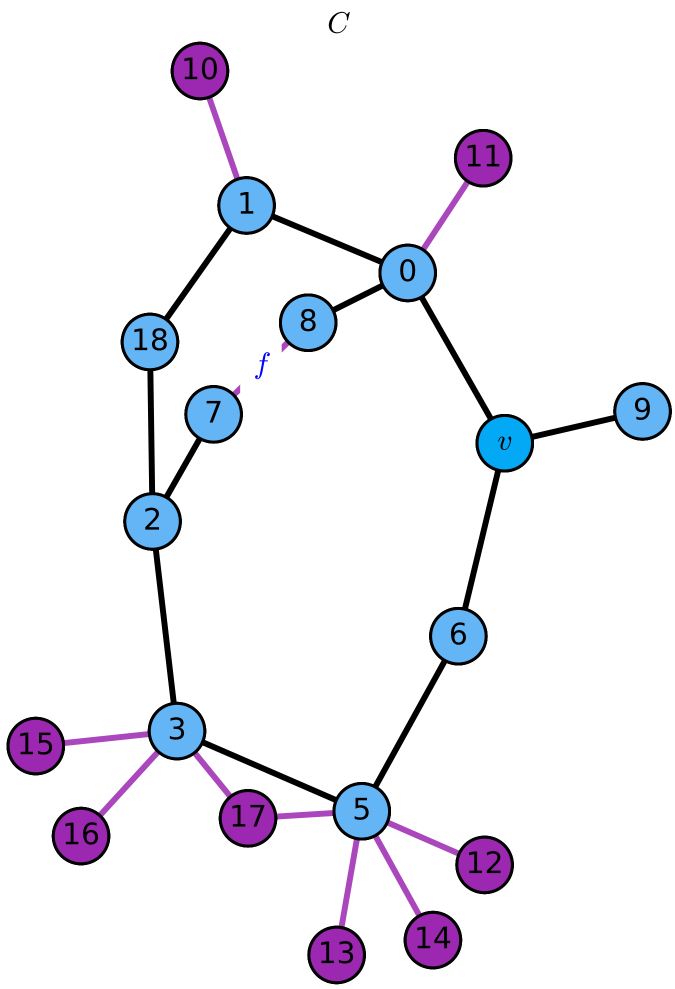

Figura 1.7.37: Ilustración de C, donde las aristas violeta corresponden a aristas de F.

Luego, si quitamos los vértices de las aristas de F incidentes en C, las cuales solo comparten un vértice de C, nos queda que v estaría separado del resto del grafo. Esta cantidad de vértices es a lo sumo $|F| = \lambda(G)$. Con lo cual $\mathscr{K}(G) \leqslant |F| = \lambda(G)$.

CASO 2: Todo $v \in V(G)$ incide en F. Fijemos $v \in V(G)$ y C la componente conexa de $G\backslash F$ que lo contiene. Consideremos $N_G(v)$, los vecinos de v. Cada $w \in N_G(v)$ incide en una arista de F.

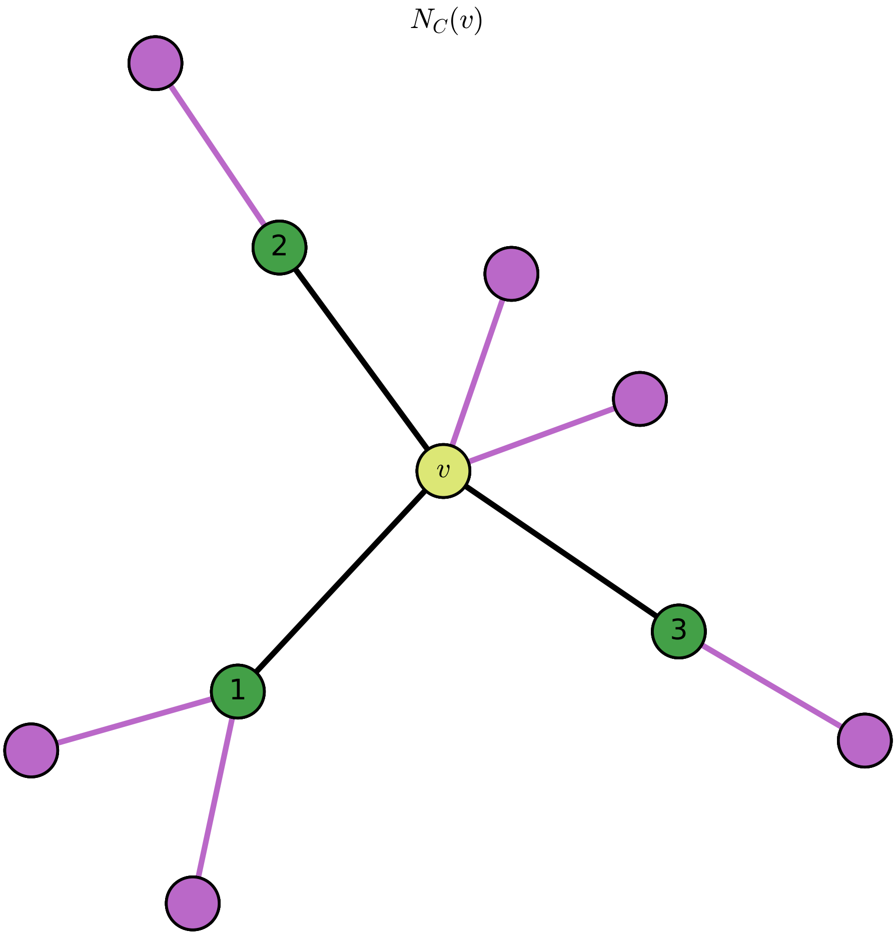

Figura 1.7.38: Ilustración de lo que sucede: los vecinos de v inciden en una arista de F.

Entonces $d_G(v) \leqslant |F| = \lambda(G)$. Por lo tanto, salvo que $V(G) = \{v\} \cup N_G(v)$, tenemos que $N_G(v)$ separa a v del resto del grafo, y salvo ese caso tendríamos que $\mathscr{K}(G) \leqslant |N_G(v)| \leqslant \lambda(G)$. Pero v era arbitrario, entonces en el peor de todos los casos, tenemos que $V(G) = \{v\} \cup N_G(v)$ para todo $v \in G$, i.e. G es un grafo completo. Pero en este caso vale la igualdad por el Ejemplo 1.6.10.

$\square$

1.7.1. Grafos 2-conexos

Definición 1.7.2. Sea H un grafo. Decimos que un camino P es un H**-camino** si es no trivial (tiene al menos una arista) e interseca a H exactamente en sus extremos (P no tiene ni vértices ni aristas en H, salvo por sus extremos).

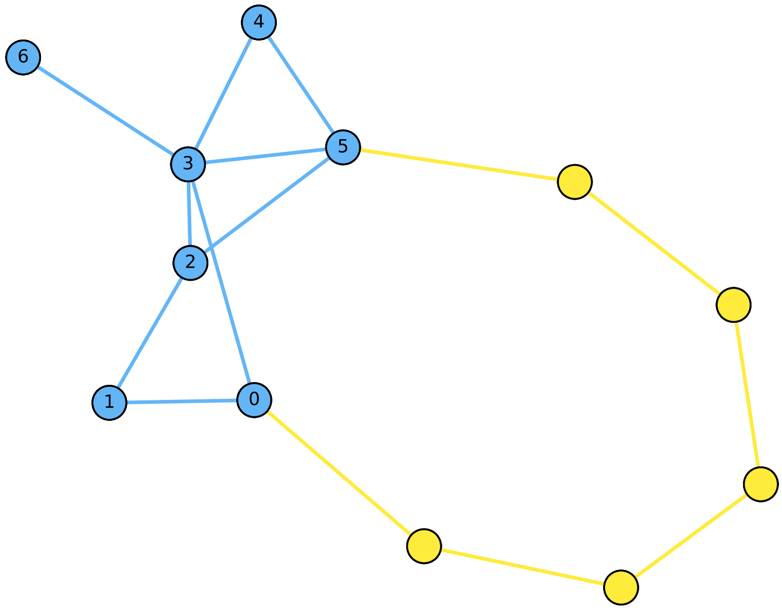

Figura 1.7.39: Ejemplo de H-camino P de un grafo H. Notar que en el dibujo consideramos a los vértices $0,5$ como extremos de P.

Los ciclos son los grafos 2-conexos más elementales. Veamos que todos los demás se pueden construir a partir de ellos.

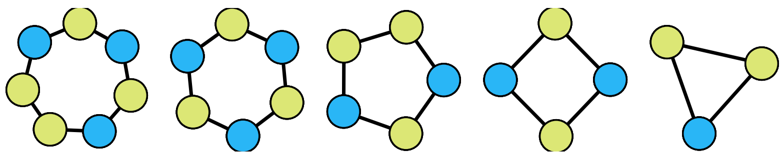

Figura 1.7.40: Ejemplos de ciclos: C_7, C_6, C_5, C_4 y C_3.

Proposición 1.7.3. *Un grafo es* 2*-conexo si y solo si se puede construir a partir de un ciclo añadiendo sucesivamente* H*-caminos a grafos* H *ya construidos.*

Comentario 1.7.4. Es decir, si H_0 es un ciclo, le agregamos un H_0-camino, y a la unión la llamamos H_1, el cual es 2-conexo, si quisieramos podemos agregar un H_1-camino y seguiría siendo 2-conexo, etc.

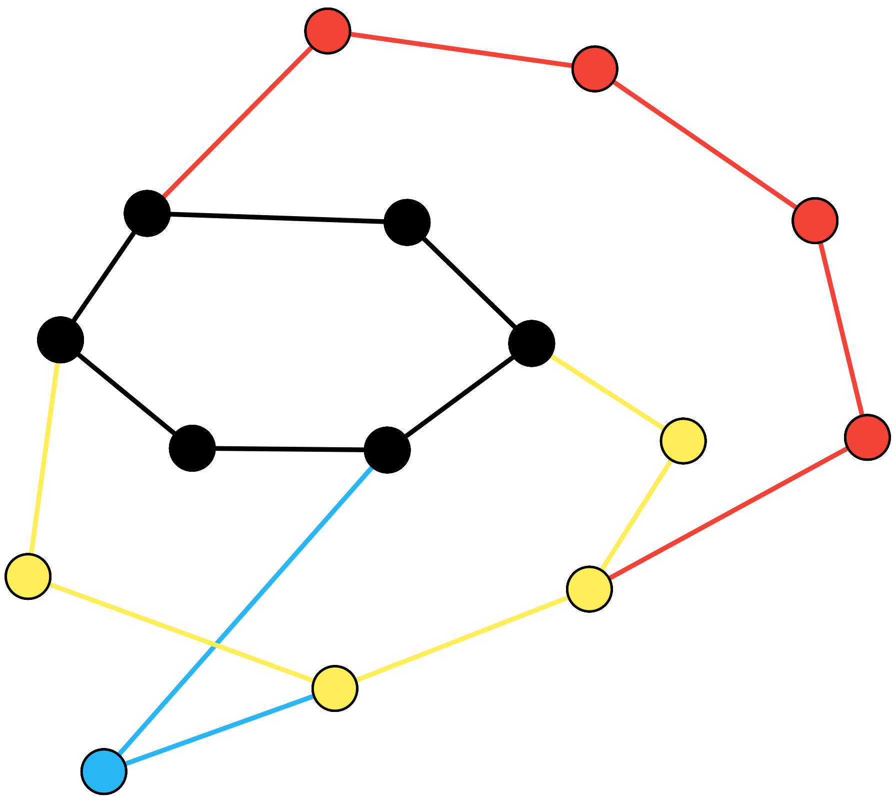

Figura 1.7.41: Ilustración de un ciclo H_0 en negro, al que le agregamo H-caminos en el siguiente orden: H_0-camino, H_1-camino y por último H_2-camino.

Demostración.

($\Leftarrow$) Claramente un grafo construido de esta manera no se puede separar por un solo vértice. Y por su puesto que tiene más de 2 vértices.

($\Rightarrow$) Tomemos un grafo G, 2-conexo (en particular es también conexo). Como es 2-conexo, debe tener algún ciclo C, pues de lo contrario sería un árbol con al menos 3-vértices, y quitando un vértice que no es hoja nos quedaría separado. Nos fijamos si tiene un C-camino, si esto es así lo agregamos, y luego seguimos agregando hasta que no podamos más. Consideremos el subgrafo maximal H de G construido de esta manera a partir de C. Entonces toda arista $xy \in E(G) \backslash E(H)$ tal que $x, y \in V(H)$, es un H-camino, con lo cual no puede existir por maximalidad de H. Es decir, H es un subgrafo inducido de G. Entonces todas las aristas de G que no están en H tienen un extremo fuera de H. Si H es G habríamos terminado, luego por el absurdo supongamos que no. Por conexión existe un vértice $v \in G \backslash H$, y conectándolo por un camino con H podemos asumir que v es incidente en H, es decir existe $w \in H$ tal que vw es una arista incidente en H. Como G es 2-conexo, si quitamos a w el grafo sigue siendo conexo, luego debe ser que existe otro camino P de v a H, con lo cual $P \cup vw$ es un H-camino. Absurdo por maximalidad de H.

$\square$

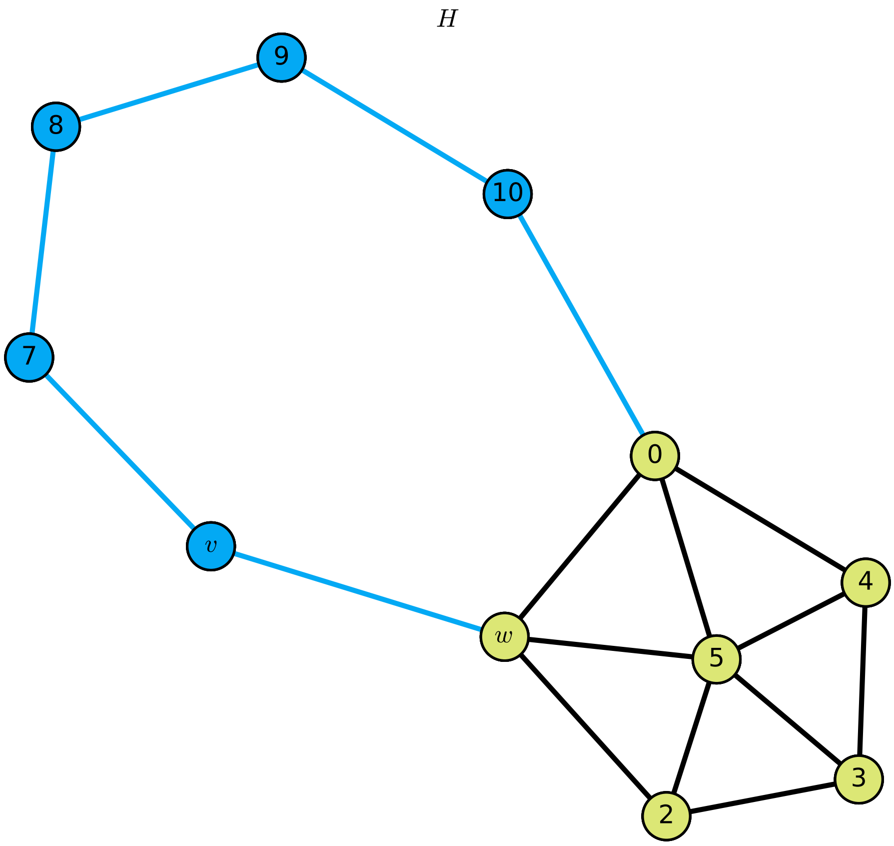

Figura 1.7.42: Ilustración: H contiene a w, con una arista incidente de extremo v, que se extiende a un H-camino P.

1.8. Clase 8: 06/04/23

Todo grafo *sin vértices aislados* se puede particionar en subgrafos 1-conexos. Y podemos intentar lo mismo para subgrafos 2-conexos. Pero pueden ocurrir problemas, por ejemplo:

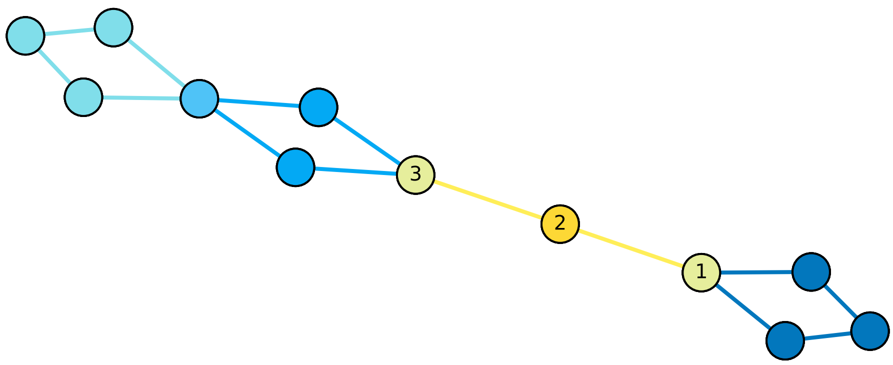

Figura 1.8.43: Ejemplo de problemas para particionar en subgrafos 2-conexos maximales. Las componentes 2-conexas del dibujo son sus ciclos que comparten vértices con otras estructuras como por ejemplo las dos aristas 12 y 23; o comparten aristas entre dos ciclos.

Como ilustra la figura de arriba, los subgrafos 2-conexos maximales no siempre abarcan todo el grafo ni son siempre disjuntos. Veamos como se arregla: podemos simplificar la noción para poder abarcar todo el grafo.

Definición 1.8.1. Un **bloque** es un subgrafo conexo maximal sin vértices de corte.

En la figura anterior, los bloques del grafo con los ciclos y las aristas 12 y 23.

Observación 1.8.2. Es fácil ver que los bloques van a ser o subgrafos 2-*conexos* o una *arista* o un *vértice*.

Proposición 1.8.3. *Los ciclos de un grafo son los ciclos de sus bloques.*

Demostración. Todo ciclo es 2-conexo, luego es conexo sin vértices de corte, y debe estar contenido en un subgrafo maximal con esta propiedad, i.e. un bloque. □

Proposición 1.8.4. *Sean $e, f \in E(G)$. Entonces pertenecen a un mismo bloque si y solo si pertenecen a un mismo ciclo.*

Demostración. Si pertenecen al mismo ciclo, entonces por la proposición anterior están en el mismo bloque.

Recíprocamente, como e, f son dos aristas en un mismo bloque, puedo asumir que el bloque es un subgrafo 2-conexo (no es arista sola o vértice solo). La idea es la siguiente: este subgrafo 2-conexo se construye a partir de un ciclo uniendo H-caminos, luego no es difícil ver que las dos aristas están contenidas en un mismo ciclo. □

Definición 1.8.5. El **grafo bloque** de un grafo G tiene un vértice por cada bloque y por cada vértice de corte de G; hay una arista entre dos vértices si una representa un bloque y si el otro representa un vértice de corte que está dentro del bloque.

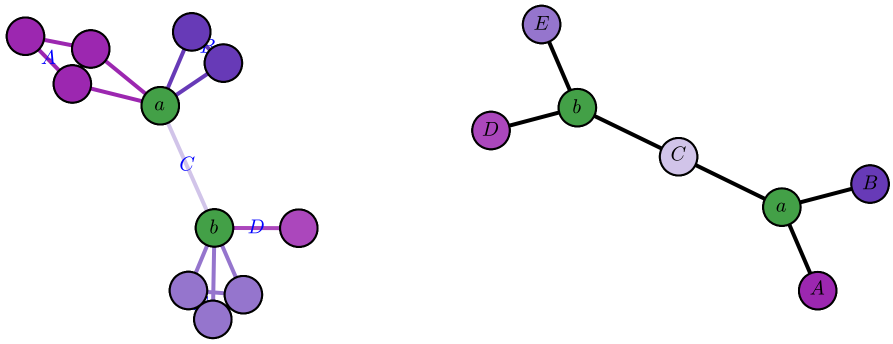

Figura 1.8.44: Ejemplo: G (izquierda) tiene 5 bloques (denotados por letras mayúscula: A, B, C, D, E) y 2 puntos de corte (denotados por letras minúscula: a, b). Luego el grafo bloque (derecha) de G tiene 7 vértices.

Notar que en nuestro ejemplo, el grafo bloque es un árbol. Esto no es casualidad:

Proposición 1.8.6. *El grafo bloque de un grafo conexo es un árbol.*

Demostración. TAREA PARA MI □

1.8.1. Contracciones y menores

Definición 1.8.7. Contraer una arista $e = xy$ equivale a borrar x e y, y añadir un nuevo vértice v_{xy} adyacente a todos los vértices que eran vecinos a x o y.

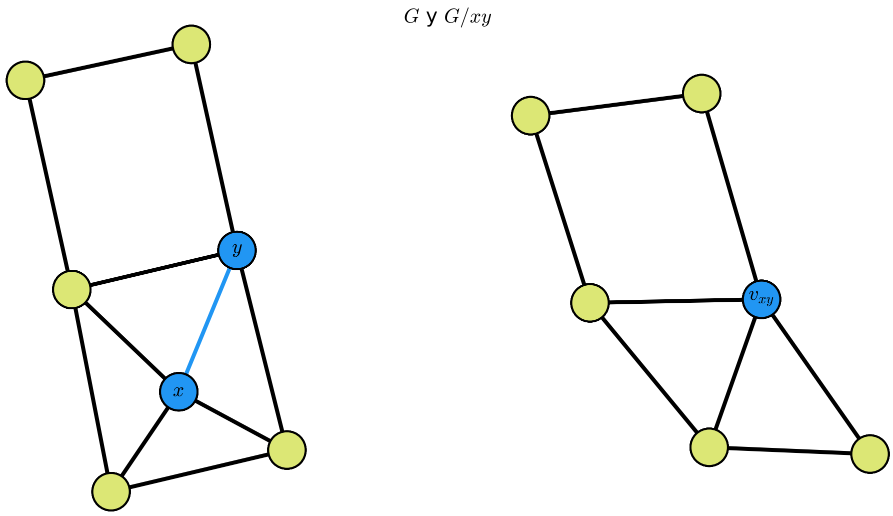

Figura 1.8.45: Ejemplo. Contraemos los vértices x, y y formamos v_{xy}.

Notación 1.8.8. Dado un grafo G y $e = xy \in E(G)$, notamos como G/e al grafo que se obtiene de G al contraer la arista e.

Definición 1.8.9. Decimos que H es un **menor** de G si se puede obtener H a partir de G al utilizar las siguientes operaciones:

1. Borrar vértices.

2. Borrar vértices y aristas.

3. Contraer aristas. O equivalentemente, contraer subgrafos conexos.

Ejemplo 1.8.10. Los subgrafos y contracciones de G son *menores* de G. No necesariamente vale la vuelta:

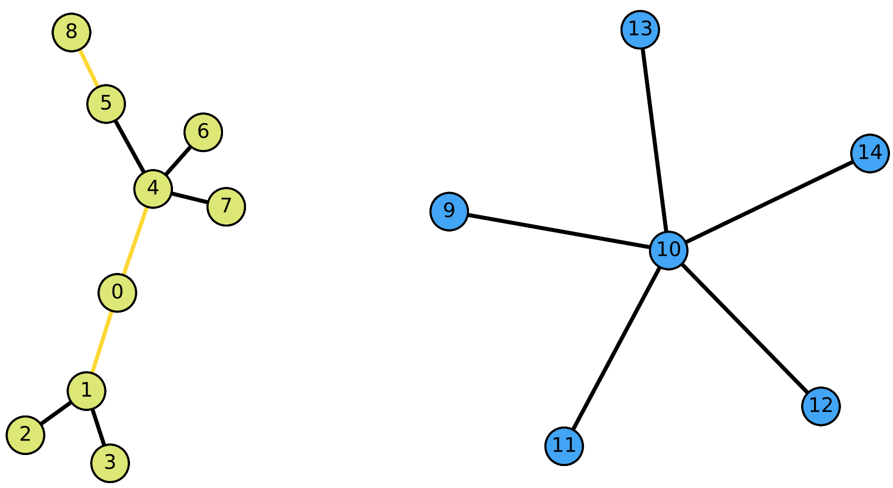

Figura 1.8.46: Ejemplo de menor H de G, que no es subgrafo porque tiene grado máximo $\Delta(H) = 5$. Pues H se obtiene luego de contraer las aristas de G

1.9. Clase 9: 17/04/23

Lema 1.9.1. *Todo grafo 3-conexo, distinto de K_4, tiene una arista e tal que G/e es 3-conexo.*

Demostración. Supongamos que no hay una arista con esta propiedad. Es decir, para toda $xy \in E(G)$, el grafo G/xy tiene un conjunto separador S de a lo más 2 vértices. Como G es 3-conexo, v_{xy} (el vértice que sale de contraer la arista xy) tiene que estar en S y $|S| = 2$, ya que $|S| = 0$ es imposible porque el grafo es conexo y por otro lado si $|S| = 1$, estamos diciendo que G se puede separar con un solo vértice si $v_{xy} \notin S$ o si $v_{xy} \in S$ entonces podemos desconectar a G con los vértices x, y, imposible. Luego, escribimos $S = \{z, v_{xy}\}$ con $z \notin \{x, y\}$ separador de G/xy. Con lo cual, $T = \{z, x, y\}$ separa a G. Como ningún subconjunto propio de T separa, cada vértice de T tiene un vecino en cada componente de $G \backslash T$.

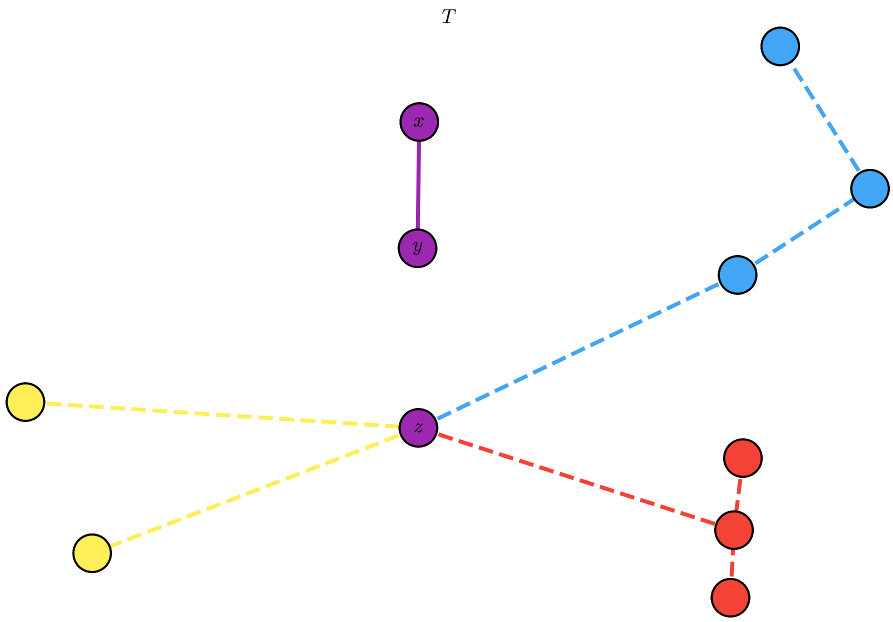

Figura 1.9.47: Ilustración del conjunto T, donde se muestra que el vértice z tiene vecinos en cada componente de $G \backslash T$.

Como xy era arbitrario, podemos elegir la arista xy, el vértice z y la componente C tal que $|C|$ es mínimo. Tomo $v \in C$ y es vecino de z. Entoncces G/vz tampoco es 3-conexo, o sea que existe w tal que v, z, w (distintos) separan G. Como antes cada una de v, z, w tiene un vecino en cada conmponente de $G \backslash \{v, z, w\}$. Como x e y son adyacentes, existe D componente de $G \backslash \{v, z, w\}$ tal que $D \cap \{x, y\} = \varnothing$ (porque $G \neq K_4$!).

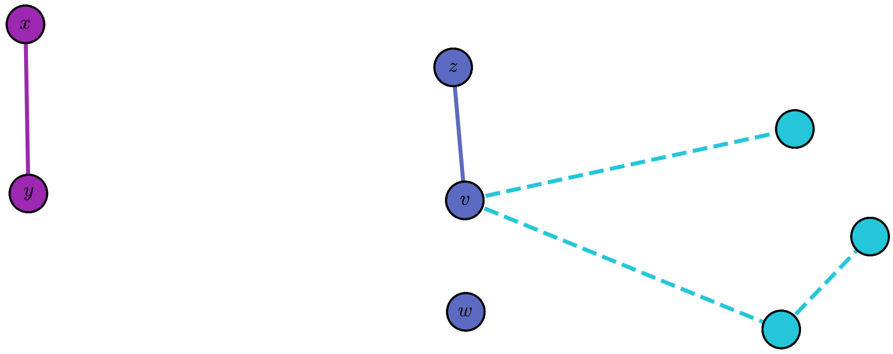

Figura 1.9.48: D está contenido en el subgrafo azul.

Dado que $v \in C$, los vecinos de v en D están en C. Tenemos que $D \cap C \neq \emptyset$, más aún, $D \subsetneq C$. Contradiciendo la minimalidad del orden de C. □

Teorema 1.9.2 (Teorema de Tutte, 1961)**.** *Un grafo G es 3-conexo si y solo si existe una secuencia de grafos $G_0, G_1, \ldots, G_n$ que cumple lo siguiente:*

(I) $G_0 = K_4$ y $G_n = G$.

(II) G_{i+1} tiene una arista xy tal que $d(x), d(y) \geqslant 3$ y $G_i = G_{i+1}/xy$ para todo $i < n$. Más aún, cada G_i es 3-conexo.

Demostración. Por el lema anterior, podemos quitar una arista recursivamente hasta llegar a K_4. La vuelta esta en el DIESTEL. □

1.9.1. Teorema de Wenger

Definición 1.9.3. Si $A, B, X \subset V(G)$ son tales que todo A,B-camino tiene un vértice de X, decimos que X separa a A y B en G.

Teorema 1.9.4 (Wenger, 1927)**.** *Sea $G = (V, E)$ un grafo y sean $A, B \subset V$. El mínimo número de vértices que separa a A y B es igual al máximo número de A,B-caminos disjuntos.*

Bibliografía

[DSS10] Reinhard Diestel, Alexander Schrijver, and Paul Seymour. *Graph theory*, volume 7. 2010.