Entrega 5 - GRAFOS

Enzo Giannotta

12 de junio de 2023

Entrega 5 - Viernes 16/05/2023

Ejercicio 0.1. 1. Para todo $n \geqslant 2$, encuentre un grafo bipartito en $2n$ vértices tal que estos se pueden ordenar de modo que el algoritmo glotón use n colores en lugar de 2.

2. Un grafo G con $\chi(G) = k$ es llamado **k-crítico** si $\chi(G\backslash\{v\}) < k$ para todo vértice $v \in G$. Determine los grafos 3-críticos.

Solución. 1. Construiremos una familia de grafos bipartitos $\mathbf{B}_n, n \geqslant 2$ de $2n$ vértices con los vértices ordenados de cierta manera que el algoritmo glotón use n colores. Llamamos A_n, B_n a una partición de los vértices de manera que cada partición tiene sus vértices independientes, con $|A_n| = n = |B_n|$. Cuando $n = 2$, consideramos $A_2 = \{a_1, a_2\}, B_2 = \{b_1, b_2\}$ y agregamos una arista ab para cada $a \in A_2, b \in B_2$. Por último ordenamos, $v_1 = a_1, v_2 = b_1, v_3 = a_2, v_4 = b_2$. Luego el algorítmo glotón pinta a los vértices v_i con dos colores: $1,2,1,2$. Notar que este orden hace que el algorítmo glotón pinte con 2 colores tanto A_2 como B_2.

Supongamos ahora que hemos construido $\mathbf{B}_n$ y ordenado sus vértices como $v_1, \ldots, v_{2n}$ y más aún, que el algorítmo glotón pintó con n colores distintos A_n y lo mismo para B_n. Construimos $\mathbf{B}_{n+1}$ agregando a $\mathbf{B}_n$ dos vértices a_{n+1} y b_{n+1}, más específicamente: $A_{n+1} := A_n \cup \{a_{n+1}\}$ y $B_{n+1} := b_n \cup \{b_{n+1}\}$. Por último, agregamos aristas $a_{n+1}b$ para todo $b \in B_n$ y ab_{n+1} para todo $a \in A_n$. Ahora, ordenamos $v_1, \ldots, v_{2n}$ como el orden de los vértices de $\mathbf{B}_n$ y luego tomamos $v_{2n+1} := a_{n+1}, v_{2n+2} := b_{n+1}$. Notar que este orden pinta cada conjunto de la partición A_{n+1}, B_{n+1} con $n+1$ colores, en efecto, por hipótesis inductiva el algoritmo glotón pinta $v_1, \ldots, v_{2n}$ de tal manera que A_n y B_n usan n colores, luego $v_{2n+1} = a_{n+1}$ lo pinta de color $n+1$ porque es adyacente a todos los vértices de B_n y análogamente para $v_{2n+2} = b_{n+1}$ (notar que b_{n+1} no es adyacente a a_{n+1}).

Es claro que $\mathbf{B}_n$ es siempre bipartito.

2. Veamos que los grafos 3-críticos son los ciclos impares. Claramente los ciclos impares son 3-coloreables y si sacamos cualquier vértice, tiene número cromático a lo más 2, por ser camino.

Recíprocamente, supongamos que G es un grafo 3-crítico. G tiene un ciclo impar porque si no sería bipartito, i.e. 2-coloreable. Más aún, todo vértice tiene que ser un vértice de este ciclo, de lo contrario quitarlo nos daría un grafo a lo más 2-coloreable, pero ese coloreo serviría para colorear un ciclo impar, imposible. En otras palabras, G es un grafo generado por un ciclo impar C, finalmente veamos que $G[C] = C$ (y por lo tanto $G = C$). En efecto, si hubiera una cuerda xy de C en G, entonces la cuerda forma dos subciclos $C_1, C_2 \subsetneq G$ tales que $V(C_1) \cup V(C_2) = V(C)$ (ver la siguiente ilustración). Como C tiene orden impar, alguno de los subciclos C_1 o C_2 también tiene que tener orden impar, digamos C_1; con lo cual, $G' = G \setminus \{w\}$ para cualquier $w \in V(G) \setminus V(C_1)$ no puede tener $\chi(G') \leqslant 2$ porque contiene un subciclo impar: C_1, contradiciendo que G es 3-crítico.

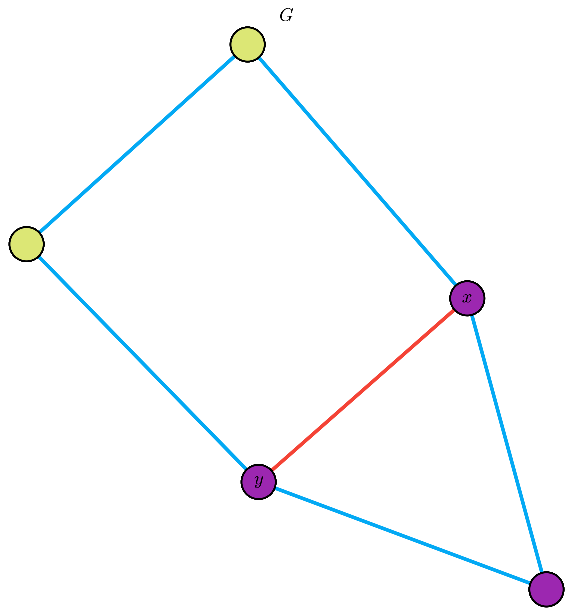

Figura 1: Ilustración de una cuerda xy en un grafo G generado por un ciclo impar. Los vértices violeta representan el subciclo impar C_1.

□

Ejercicio 0.2. Calcule el número cromático de un grafo en términos del número cromático de sus bloques.

Respuesta: $\boxed{\chi(G) = \max\limits_{\substack{B \subset G \\ B \text{ bloque}}} \chi(B).}$

Solución. Afirmación: el número cromático de un grafo G es $\text{máx}_B\, \chi(B) =: m$, donde recorremos todos los bloques $B \subset G$.

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que G es conexo. Por un lado, como un $\chi(G)$-coloreo sirve para todo B, tenemos que $\text{máx}_B\, \chi(B) \leqslant \chi(G)$. Probaremos ahora la desigualdad recíproca.

Proseguiremos por inducción en la cantidad de vértices b del árbol bloque de G. Si $b = 1$ no hay nada que probar. En general, supongamos que $b > 1$ y consideremos un bloque B que corresponda a una hoja del árbol (notar que el grafo bloque nunca tiene hojas que sean vértices de corte de G). Consideremos $G' = G/B$, su grafo bloque tiene menos vértices pues como $b > 1$, B no puede ser un solo vértice. Los grafos bloques de G' son los grafos bloques de G exceptuando B, luego por hipótesis inductiva $\chi(G') = \text{máx}_{B' \neq B}\, \chi(B')$.

Ahora, podemos combinar el coloreo de B con el de G': sea $v \in B$ el único vértice de corte de G contenido en B (B es una hoja del grafo bloque), y denotemos con el mismo nombre al vértice de G' obtenido por contraer B. Coloreamos B con $\chi(B)$ colores y lo juntamos con un $\chi(G')$-coloreo de G', simplemente permutamos los colores de B, de ser necesario, para que v tenga el mismo color en B y en G'. Este coloreo de G usa $\text{máx}\{\chi(B), \chi(G')\} = m$ colores. Así, $\chi(G) \leqslant m$, como queríamos demostrar. $\square$