

Apuntes - GRAFOS

Enzo Giannotta

19 de abril de 2023

Índice general

1. Parte I: Introducción a grafos	2
1.1. Clase 1: 16/03/23	2
1.2. Clase 2: 18/03/23	5
1.2.1. El grado de un vértice	6
1.2.2. Caminos y Ciclos	8
1.3. Clase 3: 20/03/23	10
1.3.1. Conexidad	16
1.4. Clase 4: 23/03/23	18
1.4.1. Árboles y bosques	19
1.5. Clase 5: 27/03/23	22
1.5.1. Grafos bipartitos	22
1.5.2. Paseos Eulerianos	26
1.6. Clase 6: 30/03/23	27
1.6.1. Conexidad	29
1.7. Clase 7: 03/04/23	32
1.7.1. Grafos 2-conexos	34
1.8. Clase 8: 06/04/23	36
1.8.1. Contracciones y menores	38
1.9. Clase 9: 17/04/23	39
1.9.1.	40

Capítulo 1

Parte I: Introducción a grafos

Bibliografía: [DSS10].

Evaluaciones:

Nota: sumativa significa examen.

1. Sumativa 1 : Lunes 24 abril. 30 porciento.
2. Sumativa 2: Lunes 22 mayo: 25 porciento.
3. Sumativa 3: Jueves 6 julio: 25 porciento.
4. Talleres (usualmente los viernes): 20 porciento (hay que trabajar y entregar lo que se hizo en el taller, te pueden hacer resolver en clase al azar el ejercicio al siguiente taller).

1.1. Clase 1: 16/03/23

Definición 1.1.1. Un **Grafo** es un par ordenado $G = (V, E)$, donde V es un conjunto de **vértices** y E es un conjunto de **Aristas**. Es decir, las aristas son pares (v_1, v_2) con $v_1, v_2 \in V$. En un principio si el grafo **no es dirigido**, no importa el orden de los vértices que aparece en un par (v_1, v_2) .

La manera de visualizar un grafo es dibujar cada vértice y unir dos pares de vértices $v_1, v_2 \in V$ por un segmento que representa la arista (v_1, v_2) .

Ejemplo 1.1.2. Sea $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $E = \{\{1, 3\}, \{3, 4\}, \{5, 4\}, \{4, 1\}, \{1, 2\}\}$

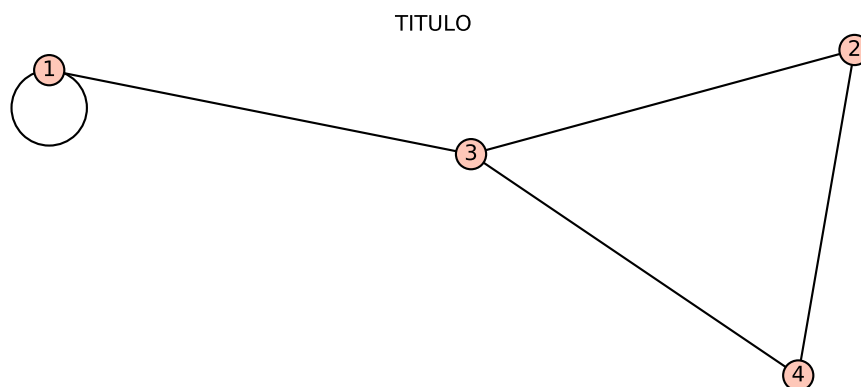


Figura 1.1.1: Dibujo del grafo V .

Definición 1.1.3. Para un grafo $G = (W, R)$, denotamos por $V(G)$ a W (los vértices) y por $E(G) = R$ (las aristas).

El número de vértices de G se denota como $|G|$ o $|V(G)|$, y se llama **orden** de G . El número de aristas lo denotamos como $||G||$ o simplemente $|E(G)|$. Un grafo con orden 1 o 0 se llama **trivial**.

Definición 1.1.4. Si $v \in V(G)$ y $e \in E(G)$, y además $v \in e$, decimos que v es **incidente** en e y viceversa, i.e. e es incidente en v . Los dos vértices que inciden en una arista son sus **extremos**.

Dos vértices x, y son **adyacentes** o **vecinos** si $(x, y) \in E$ (Otra notación: $xy \in E$ donde xy es la arista).

Observación 1.1.5. Si mi grafo tiene n vértices, entonces tiene a lo sumo $\binom{n}{2}$ aristas. Luego, la cantidad de grafos que se pueden construir es $2^{\binom{n}{2}}$.

Definición 1.1.6. Si en un grafo todo par de vértices es adyacente, decimos que el grafo es **completo**. Notamos: K_n para todo $n \geq 1$, al grafo completo con n vértices.

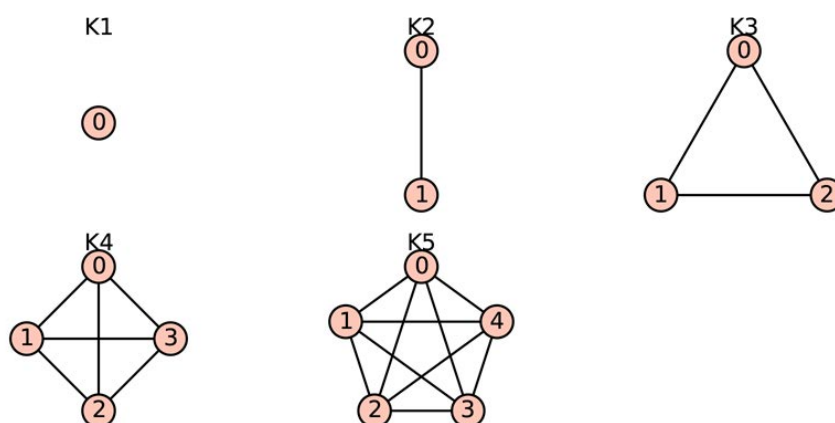


Figura 1.1.2: Ejemplo de grafos completos de orden 1, 2, 3 y 5.

Definición 1.1.7. Si un par de vértices no es adyacente, decimos que son **independientes** o **estables**.

Si $V' \subset V(G)$ es tal que cada par de vértices en V' es independiente, entonces decimos que V' es **independiente**.

Definición 1.1.8. Sean $G1 = (V1, E1)$ y $G2 = (V2, E2)$ grafos, decimos que $\varphi : V1 \rightarrow V2$ es un **isomorfismo** si para todo par de vértices $x, y \in V1$ se tiene que $xy \in E1 \Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E2$.

Usualmente no hacemos distinciones entre dos grafos isomorfos. De hecho en ese caso escribimos $G1 = G2$.

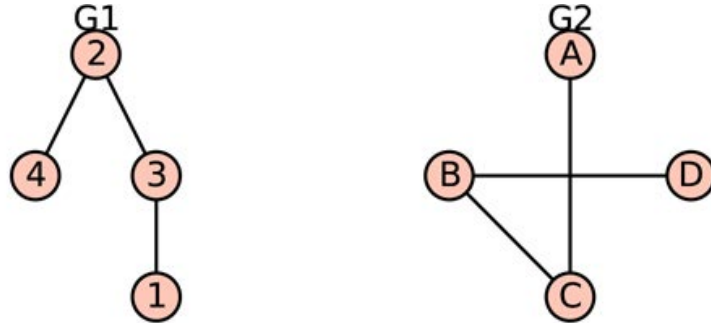


Figura 1.1.3: Ejemplo de isomorfismo de grafos.

En este ejemplo un isomorfismo válido entre $G1$ y $G2$ es

$$\begin{aligned}\varphi : 1 &\mapsto A \\ 2 &\mapsto B \\ 3 &\mapsto C \\ 4 &\mapsto D\end{aligned}$$

Definición 1.1.9. Definimos:

- $G \cup G' := (V \cup V', E \cup E')$
- $G \cap G' := (V \cap V', E \cap E')$

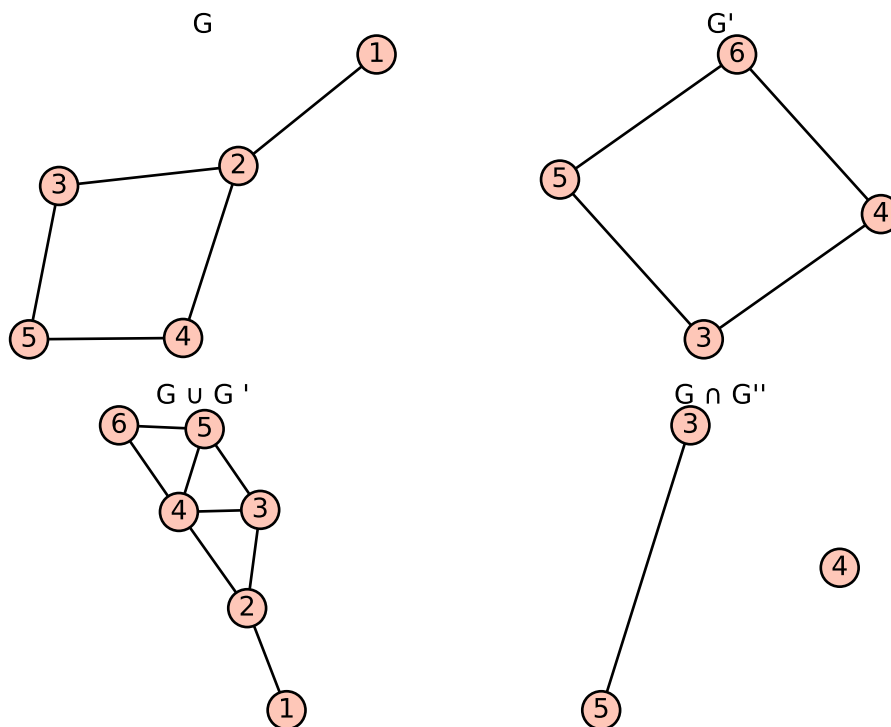


Figura 1.1.4: Ejemplo de unión e intersección de grafos.

Definición 1.1.10. Si $G \cap G' = \emptyset$, decimos que son **disjuntos**.

Si $V' \subset V$ y $E' \subset E$, decimos que G' es **subgrafo** de G , y que G es **supergrafo** de G' . Notamos $G' \subset G$. Si G' es subgrafo de G pero $G \neq G'$, decimos que G' es **subgrafo propio** de G y análogamente decimos que G **supergrafo propio** de G' ; notamos $G' \subsetneq G$.

Definición 1.1.11. Sea $G' \subset G$, tal que G' contiene todas las aristas $xy \in E$ tal que $x, y \in V'$. Decimos que G' es un **subgrafo inducido** de G .

En este caso diremos que V' **induce** G' en G , y escribimos $G' = G[V']$ para un subconjunto $V' \subset V$.

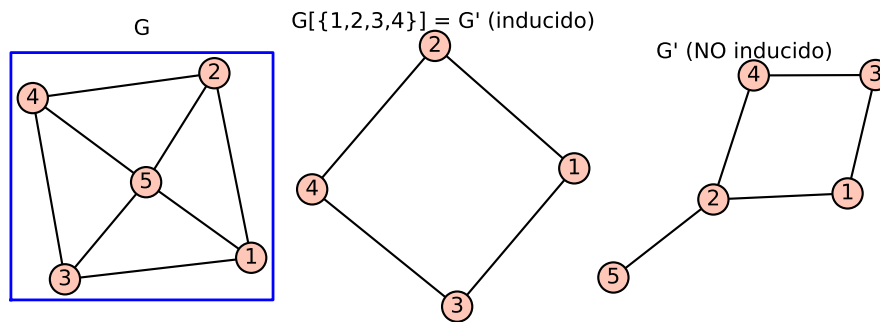


Figura 1.1.5: Ejemplo de grafo inducido y no inducido.

1.2. Clase 2: 18/03/23

Definición 1.2.1. Si $U \subset V(G)$, escribimos $G \setminus U$ para denotar $G[V \setminus U]$. Es decir, $G \setminus U$ se obtiene de borrar los vértices de U y sus aristas incidentes.

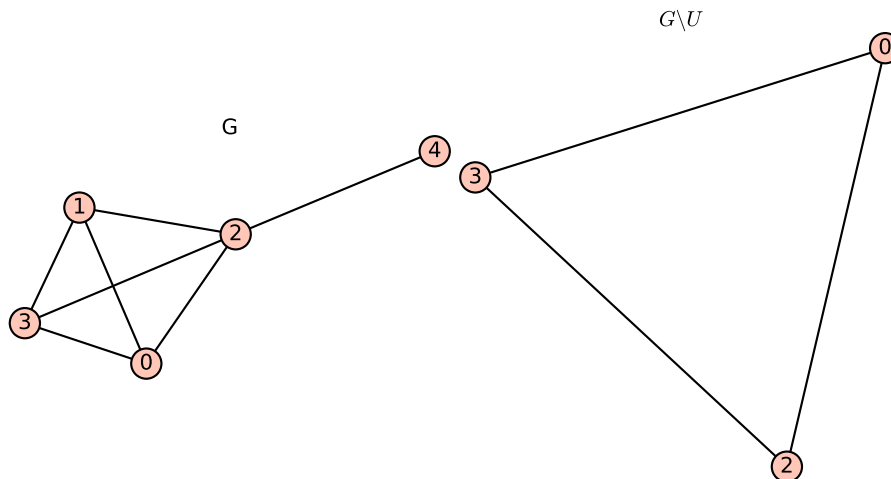


Figura 1.2.6: Ejemplo de $G \setminus U$.

Definición 1.2.2. El **complemento** \overline{G} de un grafo G , es el grafo con vértices $V(G)$ y que tiene una arista xy si y solo si $xy \notin E(G)$.

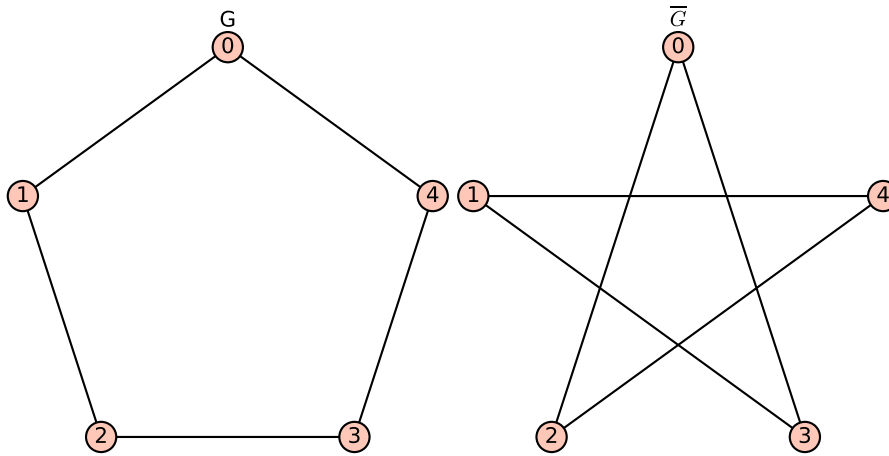


Figura 1.2.7: Ejemplo de complemento.

Notar que en el ejemplo de arriba, G y \overline{G} son isomorfos. Esto no pasa necesariamente, por ejemplo el complemento de un grafo completo es el grafo sin aristas.

1.2.1. El grado de un vértice

Definición 1.2.3. Sea G un grafo no vacío, y sea $v \in V(G)$. El conjunto de vecinos de v lo denotamos como $N(v)$ o si el contexto no es claro $N_G(v)$. Llamamos a este conjunto el **vecindario** de v .

Más en general, si $U \subset V(G)$, no vacío. El **vecindario** de U es el subconjunto de vértices de $V(G) \setminus U$ que contiene vecinos de algún elemento de U . Notamos $N(U)$ o $N_G(U)$.

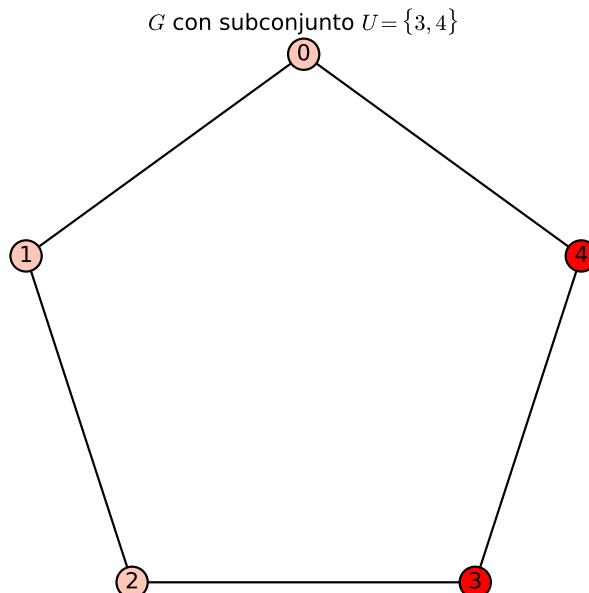


Figura 1.2.8: Ejemplo de vecindario de $U = \{3, 4\}$. Tenemos que $N(U) = \{0, 2\}$.

Definición 1.2.4. El **grado** de un vértice $v \in V(G)$ es el número de aristas que inciden en v y lo denotamos como $d(v)$ o $d_G(v)$. Notar que

$$d(v) = |N(v)|,$$

porque no permitimos multigrafos.

Si v tiene grado 0, decimos que es **aislado**.

Definición 1.2.5. Definimos la cantidad de G :

$$\delta(G) := \min_{v \in V(G)} \{d(v)\}.$$

Es el **grado mínimo** de G .

Análogamente, tenemos la cantidad G :

$$\Delta(G) := \max_{v \in V(G)} \{d(v)\}.$$

Es el **grado máximo** de G .

En el caso que todos los vértices tienen el mismo grado, i.e. $\delta(G) = \Delta(G)$, decimos que G tiene grado k y que G es **k -regular** o simplemente **regular**.

Definición 1.2.6. Definimos la cantidad del grafo G :

$$d(G) := \frac{1}{|V(G)|} \sum_{v \in V(G)} d(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{v \in V(G)} d(v).$$

Es el **grado promedio** de G .

Observación 1.2.7.

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)| = 2||G||.$$

Con lo cual,

$$d(G) = 2 \frac{E(G)}{V(G)} = 2 \frac{||G||}{|G|}.$$

Proposición 1.2.8. *El número de vértices de grado impar en un grafo siempre par.*

Demostración. Por la observación anterior, $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|G| \equiv 0 \pmod{2}$ con lo cual,

$$\#\{v \in V(G) \mid d(v) \equiv 1 \pmod{2}\} = \sum_{v \mid d(v) \equiv 1 \pmod{2}} d(v) \equiv 0 \pmod{2}.$$

□

Proposición 1.2.9. *Para todo grafo G con al menos una arista, existe un subgrafo H tal que*

$$\delta(H) > \frac{|E(H)|}{|V(H)|} \geq \frac{|E(G)|}{|V(G)|}.$$

Demostración. En efecto, la idea es la siguiente: construimos una secuencia de grafos $G = G_0 \supset G_1 \supset \dots$ de subgrafos inducidos, tales que si G_i tiene un vértice de grado $d(v_i) \leq \frac{|E(G_i)|}{|V(G_i)|}$, entonces tomamos $G_{i+1} := G_i \setminus v_i$; si no, la secuencia termina en $H := G_i$. Por la elección de v_i se sigue que $\frac{|E(G_{i+1})|}{|V(G_{i+1})|} \geq \frac{|E(G_i)|}{|V(G_i)|}$, pues esto sucede si y solo si

$$\begin{aligned} \frac{|E(G_i)| - d(v_i)}{|V(G_i)| - 1} &\geq \frac{|E(G_i)|}{|V(G_i)|} \\ \Leftrightarrow (|E(G_i)| - d(v_i)) |V(G_i)| &\geq |E(G_i)| (|V(G_i)| - 1) \\ \Leftrightarrow -d(v_i) |V(G_i)| &\geq -|E(G_i)| \\ \Leftrightarrow \frac{|E(G_i)|}{|V(G_i)|} &\geq d(v_i). \end{aligned}$$

En particular, $\frac{|E(H)|}{|V(H)|} \geq \frac{|E(G)|}{|V(G)|}$.

Afirmamos que H tiene al menos una arista, de lo contrario $\frac{|E(H)|}{|V(H)|} = 0 < \frac{|E(G)|}{|V(G)|}$, por tener G al menos una arista. En particular, $H \neq \emptyset$. Como H es el mínimo de esta construcción, se tiene que $\delta(H) > \frac{|E(H)|}{|V(H)|}$. □

1.2.2. Caminos y Ciclos

Definición 1.2.10. Un **camino** es un grafo no vacío $P = (V, E)$ de la forma

$$V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}.$$

Con

$$E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\}.$$

Donde todos los x_i son distintos.

Decimos que $|G|$, i.e. el número de aristas, es su **longitud**.

Usualmente denotamos al camino P como la secuencia de vértices

$$P = x_0x_1 \dots x_k.$$

En este caso diremos que P es un **camino entre** x_0 y x_k .

Notar que $|G| = k + 1$, y que $|G| = k$.

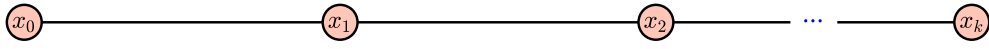


Figura 1.2.9: Dibujo de un camino de $k + 1$ vértices.

Definición 1.2.11. Sea C un grafo que se construye a partir de un camino $P = x_0x_1 \cdots x_k$ con $k \geq 1$, en donde agregamos la arista x_kx_0 . Este grafo se llama **ciclo**. Notamos a esta construcción $C := P + x_kx_0$ o $x_0x_1 \cdots x_kx_0$.

La **longitud** de un ciclo es su número de aristas, es decir $|C|$.

Notar que $|C| = k$.

Definición 1.2.12. Sea G un grafo. Definimos la **cintura** de G como la mínima longitud $g(G)$ de un ciclo en G .

Definimos la **circunferencia** como la máxima longitud de un ciclo en G .

Si G no tiene ciclos, definimos $g(G) := \infty$ y circunferencia 0.

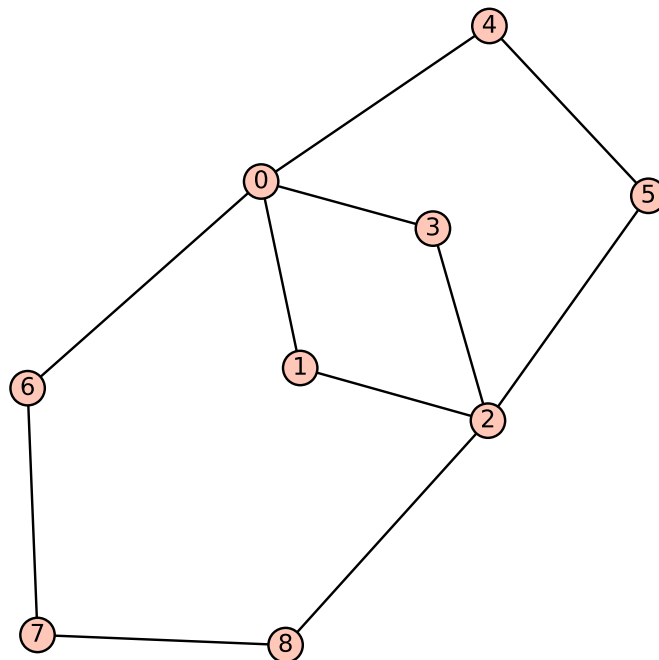


Figura 1.2.10: Ejemplo de ciclos en un grafo de cinutra igual a 4.

Definición 1.2.13. Una arista que une a dos vértices de un ciclo C , pero que no pertenece a $E(C)$, se la llama **cuerda**.

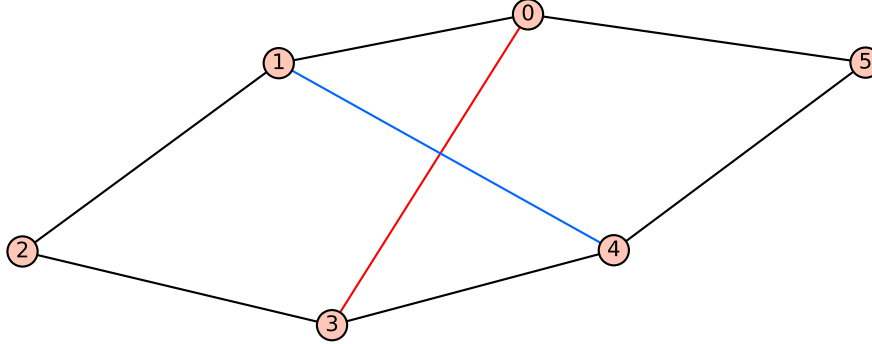


Figura 1.2.11: Ejemplo de dos cuerdas de un ciclo C .

Proposición 1.2.14. *Todo grafo G contiene un camino de largo $\geq \delta(G)$. Más aún, si $\delta(G) \geq 2$, entonces también contiene un ciclo de largo $\geq \delta(G) + 1$.*

Demostración. Sea $P = x_0x_1 \dots x_k$ un camino de largo k máximo en G . El caso $k = 1$ es inmediato, luego supongamos que $k \geq 1$.

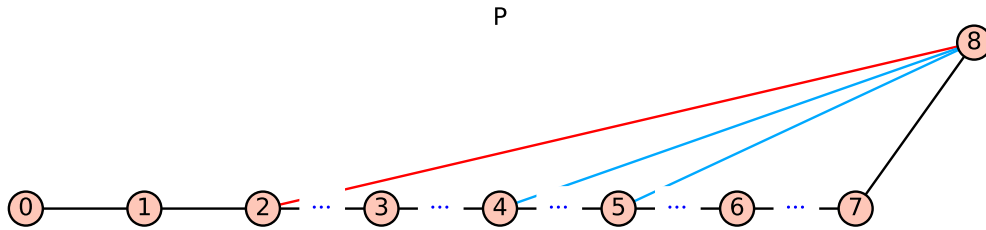


Figura 1.2.12: Camino P de longitud maximal k . Imaginemos que $x_0 = 0$ y que $x_k = 8$ (no pude cambiar las etiquetas en sage math cuando grafique el grafo).

Notar que por maximalidad de P , todos los vecinos de x_k están en $V(P)$, de lo contrario habria un camino más largo. Con lo cual

$$|V(P)| = k \geq d(x_k) + 1 \geq \delta(G) + 1.$$

Con lo cual, $|P| \geq \delta(G)$.

Ahora, sea $i < k$ el menor índice tal que $x_i x_k \in E(G)$. Como $\delta(G) \geq 2$, se sigue que $i < k - 1$, i.e. x_i y x_k no son adyacentes, luego tomamos el ciclo $C = x_i x_{i+1} \dots x_k x_i$. Notar que entonces la longitud de $|C| \geq \delta(x_k) + 1 \geq \delta(G) + 1$. \square

1.3. Clase 3: 20/03/23

Definición 1.3.1. La **distancia** entre dos vértices x, y de un grafo G , es la longitud de un camino con longitud mínima entre x, y , la notamos

$$d(x, y).$$

Si no hay un camino entre x e y , escribimos

$$d(x, y) = \infty.$$

El **diámetro** de G es el máximo de las distancias entre todos los pares de vértices, lo notamos

$$\text{diam}(G).$$

Notar que $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.

Definición 1.3.2. El **radio** de un grafo G , denotado $\text{rad}(G)$, es la cantidad

$$\text{rad}(G) = \min_{x \in V(G)} \max_{y \in V(G)} d(x, y).$$

Decimos que un vértice $v \in V(G)$ es **central**, si

$$\max_{y \in V(G)} d(v, y) = \text{rad}(G).$$

Es decir, v minimiza la función $x \mapsto \max_{y \in V(G)} d(x, y)$.

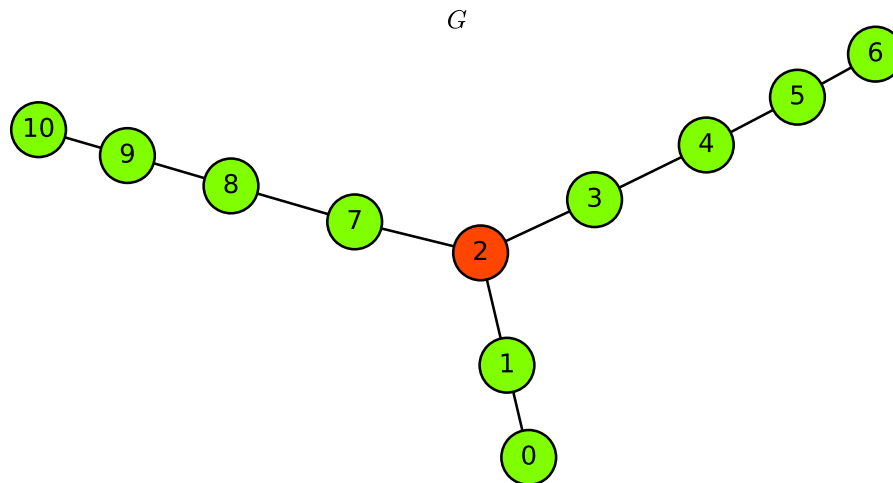


Figura 1.3.13: Ejemplo de vértice central es 3 y tiene radio 4. El grafo G tiene diámetro 8.

Ejercicio 1.3.3 (Entrega de taller). Probar que

$$\text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq 2\text{rad}(G).$$

Solución. Si el grafo G no es conexo, luego el radio y el diámetro son infinito, luego vale la desigualdad. En efecto, por un lado si $x \in V(G)$ está fijo, como G no es conexo existe $y \in V(G)$ tal que $d(x, y) = \infty$, con lo cual $\max_{y \in V(G)} d(x, y) = \infty$ para x fijo, luego si tomamos mínimo sobre los x se tiene que $\text{rad}(G) = \infty$. Por otro lado, $\text{diam}(G) = \infty$ porque es el máximo sobre todas las distancias entre dos vértices, y como mencionamos recién, al no ser conexo el grafo tiene que haber una distancia infinita entre algún par de vértices.

Ahora supongamos que G es conexo, es decir para todo par de vértices x, y existe un camino P_{xy} que los conecta, sin pérdida de generalidad supongamos que es el más corto, i.e. $d(x, y)$ es la longitud de P_{xy} . Se deduce que $d(x, y) \leq \text{diam}(G)$ por definición de diámetro. Tomando máximo sobre y y luego mínimo sobre x se sigue por definición que

$$\text{rad}(G) \leq \text{diam}(G).$$

Esto prueba la primera desigualdad. Ahora veamos la segunda.

Sea o un vértice que minimice la función $x \mapsto \max_{y \in V(G)} d(x, y)$, es decir, o es central. Ahora tomemos dos vértices arbitrarios x, y . Como o minimiza la función anterior, tenemos que $d(x, o) \leq \text{rad}(G) = \max_{z \in V(G)} d(o, z)$, es decir existe un camino de longitud $\leq \text{rad}(G)$ que une x con o . Análogamente, existe un camino de longitud $\leq \text{rad}(G)$ que une o con y . Concatenando ambos caminos obtenemos un camino entre x e y de longitud $\leq 2\text{rad}(G)$. Tomando máximo sobre x, y obtenemos la otra desigualdad:

$$\text{diam}(G) \leq 2\text{rad}(G).$$

□

Si queremos relacionar el radio o diámetro con el grafo mínimo, promedio o máximo debemos tener otros parámetros como intermediario. Por ejemplo, los caminos tienen grado mínimo 1 pero pueden tener radio y diámetro arbitrariamente grandes. O podemos tener radio y diámetro arbitrariamente grande y grado mínimo arbitrario. Antes de dar un ejemplo, necesitamos la siguiente definición:

Definición 1.3.4. Sea G un grafo, definimos G^k como la **potencia** de G . Es el grafo que contiene los mismos vértices y las aristas son las originales pero agregando a cada vértice x una arista incidente con cada vértice y a distancia $d(x, y) \geq k$.

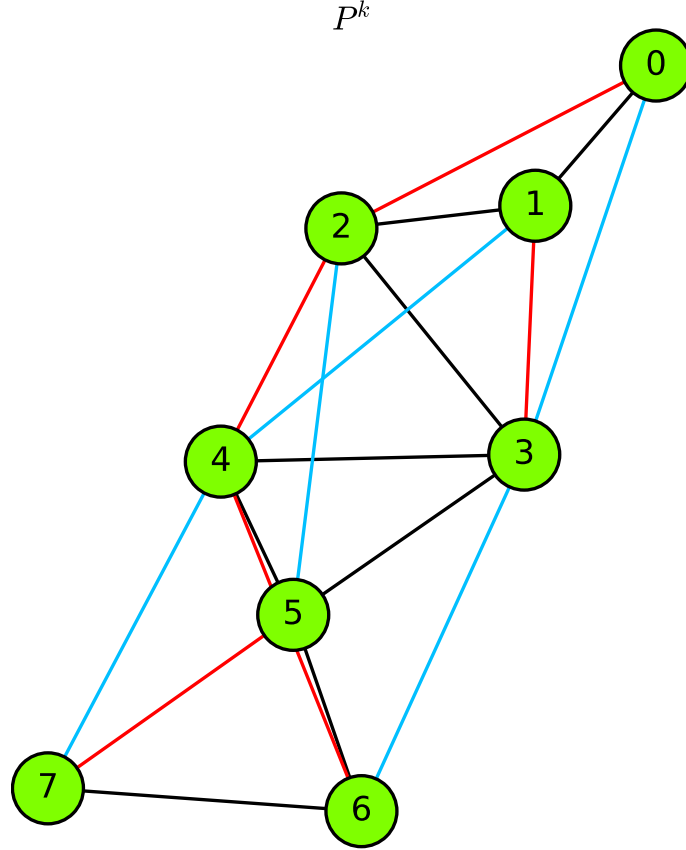


Figura 1.3.14: El camino $P : 0, 1, 2, \dots, 7$ dibujado en negro, le agregamos aristas para dibujar P^3 . Las aristas rojas conectan nodos a distancia 2 y las azules 3.

Por ejemplo, todo camino de longitud $2n$ tiene $2n + 1$ vértices, radio n , diámetro $2n$. Luego P^k tiene misma cantidad de vértices (pero no aristas), mismo radio y diámetro, pero grado k para todo $1 \leq k \leq 2n$.

Vamos a relacionar el radio y grado máximo a través de el número de vértices. Un grafo puede tener muchos vértices, por ejemplo si tiene radio alto, o si tiene grado máximo alto,

Proposición 1.3.5. Sea $d \geq 3$. Un grafo G con radio a lo más k y grado máximo a lo más d . Entonces tiene menos que $\frac{d}{d-2}(d-1)^k$ vértices.

Demostración. Sea z un vértice central de G y D_i el conjunto de los vértices a distancia i de z .

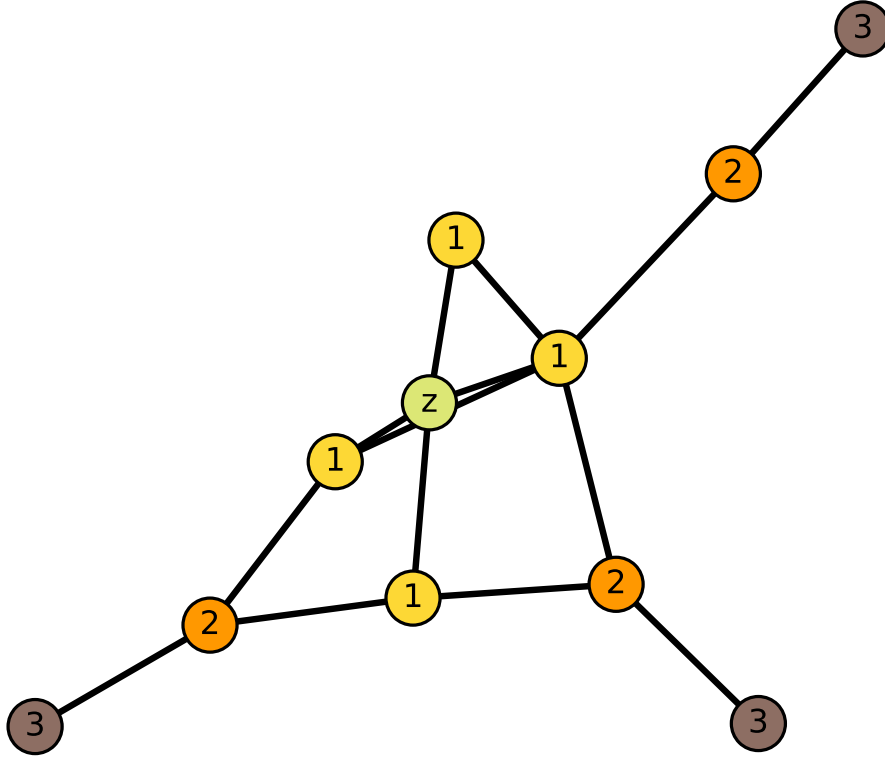


Figura 1.3.15: D_0 son los verdes, D_1 los amarillos, y así...

Tenemos que $|D_0| = 1, |D_1| \leq \Delta \leq d$. Notar que cada vértice de D_1 tiene como vecino en D_2 a lo sumo $d - 1$ vértices, pues ya es vecino de z . En general, tenemos que

$$|D_{i+1}| \leq |D_i|(d - 1), \quad i \geq 1.$$

Con lo cual

$$|D_{i+1}| \leq |D_1|(d - 1)^i = d(d - 1)^i, \quad i \geq 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned} |V(G)| &= \sum_{i=0}^k |D_i| \leq 1 + d \sum_{i=0}^{k-1} (d - 1)^i \\ &= 1 + d(d - 1)^k - 1/d - 2 \\ &< \frac{d}{d - 2} (d - 1)^k. \end{aligned}$$

□

Observación 1.3.6. 1. Cuando el radio es $k = 1$, por ejemplo en un grafo estrella, la cantidad de vértices es asintóticamente igual a $\frac{d}{d-2}(d-1)^k$ cuando $d \rightarrow \infty$.

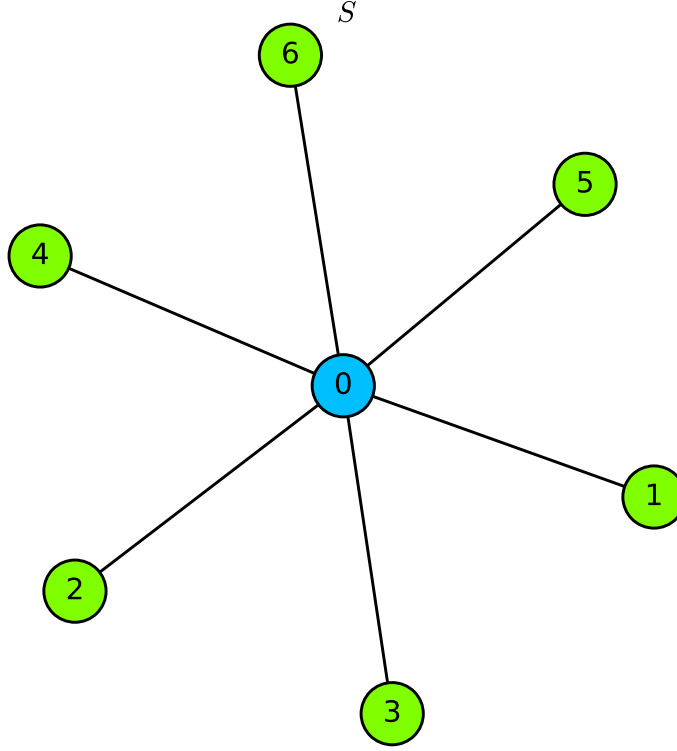


Figura 1.3.16: Ilustración del grafo estrella.

2. La cota no es para nada óptima para grafos de potencia P^k de caminos. Por ejemplo, si P tiene $2n + 1$ vértices, $k = n$ y $d = k \geq 3$. Luego en el mejor de los casos con $d = 3$, tenemos que

$$|P^k| = 2n + 1 \ll 3 \cdot 2^n.$$

O sea que la diferencia es exponencial.

Similarmente, podemos acotar el orden de G por abajo, si es que podemos controlar inferiormente δ y g . Definamos la cantidad para $d \in \mathbb{R}$ y $g \in \mathbb{N}$:

$$n_0(d, g) := \begin{cases} 1 + d \sum_{i=0}^{r-1} (d-1)^i & \text{si } g = 2r + 1 \text{ es impar,} \\ 2 \sum_{i=0}^{r-1} (d-1)^i & \text{si } g = 2r \text{ es par.} \end{cases}$$

Teorema 1.3.7 (Versión débil). ¹ Sea G un grafo con $\delta(G) \geq d \geq 2$ y $g(G) \geq g \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea v un vértice de un ciclo C de largo mínimo, i.e. $\geq g$. Consideremos como D_i al conjunto de vértices a distancia i de v en G . Como antes, $|D_0| = 1$, para cada vértice de D_{i+1} tiene un vecino en D_i si $i > 0$; como cada vértice de D_i tiene un vecino en D_{i-1} , se sigue que $|D_{i+1}| \geq (\delta(G) - 1) |D_i| \geq (d - 1) |D_i|$ si $i < r$, ya que de lo contrario existiría un ciclo de longitud más chica que r . Reiterando recursivamente esta igualdad, se sigue que $|D_{i+1}| \geq (d - 1)^i |D_1|$ para todo $i < r$.

Luego como $G = \sqcup_i D_i \supset \sqcup_{0 \leq i \leq r} D_i$, se sigue que

$$\text{Caso } g = 2r + 1 \quad |G| \geq \sum_{0 \leq i \leq r} |D_i| = 1 + \sum_{i=1}^r |D_i| = 1 + \sum_{i=1}^r (d-1)^{i-1} |D_1| \geq 1 + \sum_{i=0}^{r-1} (d-1)^i |D_1| \geq 1 + \sum_{i=0}^{r-1} (d-1)^i d.$$

¹La versión fuerte de este teorema, por Alon, Hoory and Linial, 2002, dice que si $d(G) \geq d \neq 2$ y $g(G) \geq g \in \mathbb{N}$, entonces $|G| \geq n_0(d, g)$.

Caso $g = 2r$ Análogo.

□

Corolario 1.3.8. Si $\delta(G) \geq 3$, entonces $g(G) < 2\log_2 |G|$.

Demostración. Tomamos $g = g(G)$. Si es par, entonces

$$n_0(3, g) = 2 \frac{2^{g/2} - 1}{2 - 1} = 2^{g/2} + (2^{g/2} - 2) > 2^{g/2}.$$

Si g es impar, entonces

$$n_0(3, g) = 1 + 3 \frac{2^{(g-1)/2} - 1}{2 - 1} = \frac{3}{\sqrt{2}} 2^{g/2} - 2 > 2^{g/2}.$$

Luego por el teorema anterior el resultado se sigue luego de tomar logaritmo en base 2. □

Proposición 1.3.9. Todo grafo G que contiene al menos un ciclo, satisface

$$g(G) \leq 2 \text{diam}(G) + 1.$$

Demostración. Supongamos que no. Es decir, si C es el ciclo de G con menor longitud, se tiene que $|C| = g(G) \geq 2 \text{diam}(G) + 2$. Es decir, existen dos vértices de C , digamos x, y tales que su distancia en C es mayor o igual a $\text{diam}(G) + 1$. En G , estos vértices están a distancia menor que $\text{diam}(G) + 1$, sea P el camino más corto en G que une a x, y (i.e. tiene longitud $< \text{diam}(G) + 1$), luego P no es subgrafo de C . Con lo cual, existe un subcamino de P que es un C -camino; luego este camino unión el $x - y$ camino más corto de C es un ciclo de longitud más chica que la de C , absurdo. □

1.3.1. Conexidad

Definición 1.3.10. Un grafo es **conexo** si es no vacío y para todo par de vértices, existe un camino que los une a ambos.

Proposición 1.3.11. Los vértices de un grafo conexo G se pueden enumerar, digamos v_1, v_2, \dots, v_n tal que $G_i = G[v_1, v_2, \dots, v_i]$ es conexo para todo $i = 1, \dots, n$.

Demostración. Probaremos la proposición por inducción en n . Sea v arbitrario, y asumamos por inducción que v_1, \dots, v_i han sido escogidos para $i < |V(G)|$ y que G_i es conexo

Escojo un vértice v no enumerado aún. Como G es conexo existe un camino P entre v_1 y v .

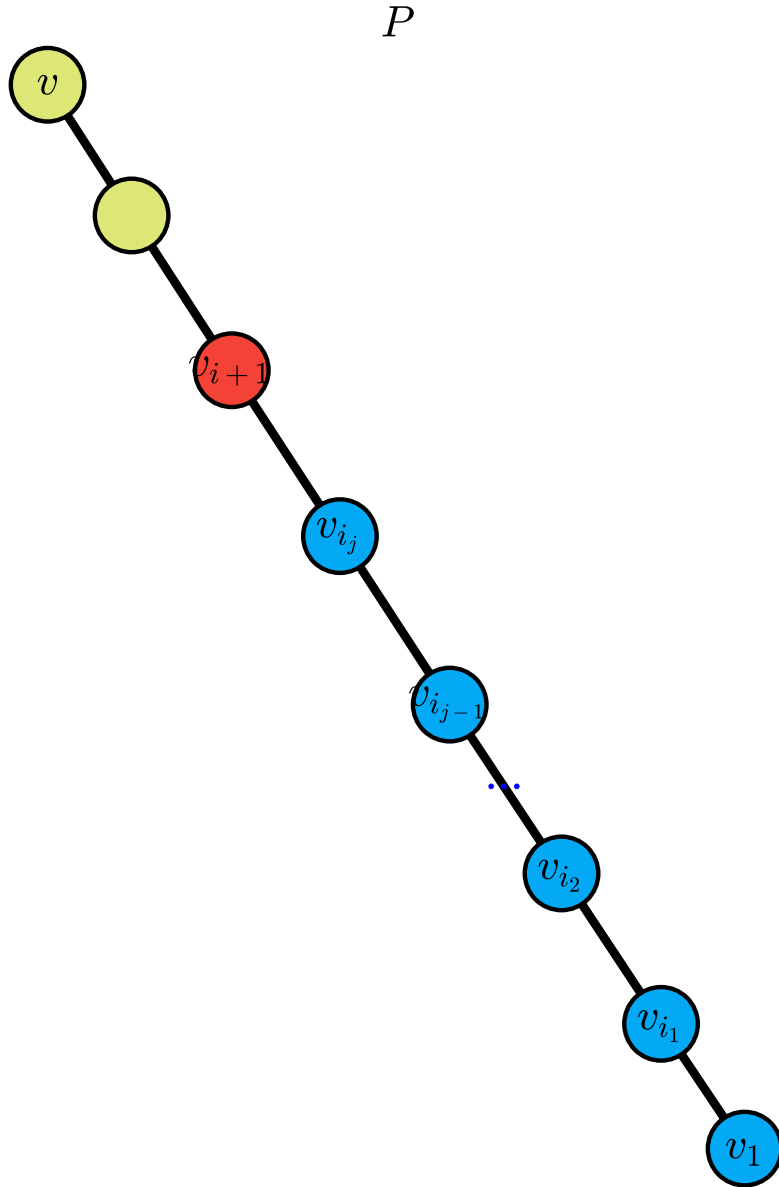


Figura 1.3.17: Camino P que une a v y v_1 . En color azul representa los vértice de G_i en P .

Tomamos como v_{i+1} al último vértice en P , contado desde v , que no está en G_i . Como v_{i+1} tiene vecino en G_i y G_i es conexo se tiene que G_{i+1} es conexo.

□

Ejemplo 1.3.12. El siguiente dibujo es un mal ejemplo:

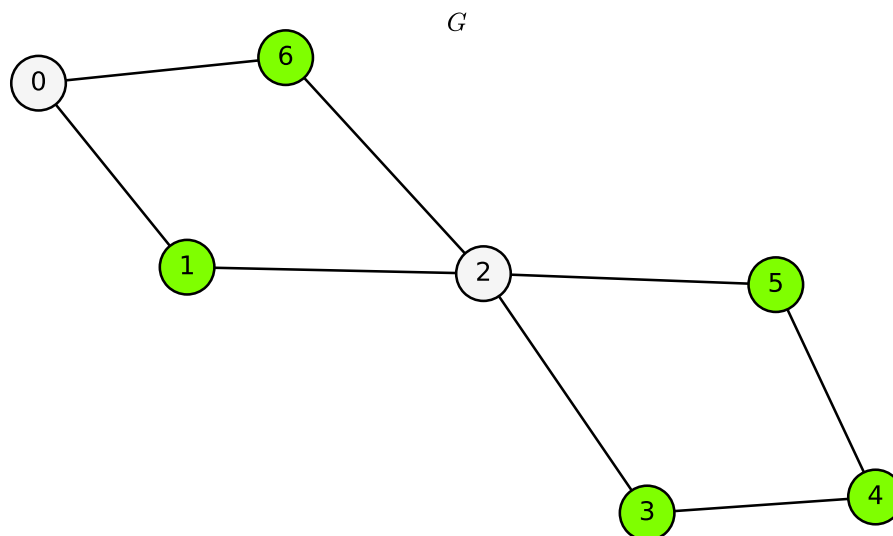


Figura 1.3.18: Mal ejemplo, pues 0 y 2 no inducen un grafo conexo $G[0,2]$.

1.4. Clase 4: 23/03/23

Definición 1.4.1 (Maximalidad). Consideremos una propiedad P , para para algún grafo, conjunto de vértices, etc. Decimos que un conjunto de vértices U es maximal para P , si U cumple P , y $U \cup \{v\}$ con $v \notin U$ no cumple P .

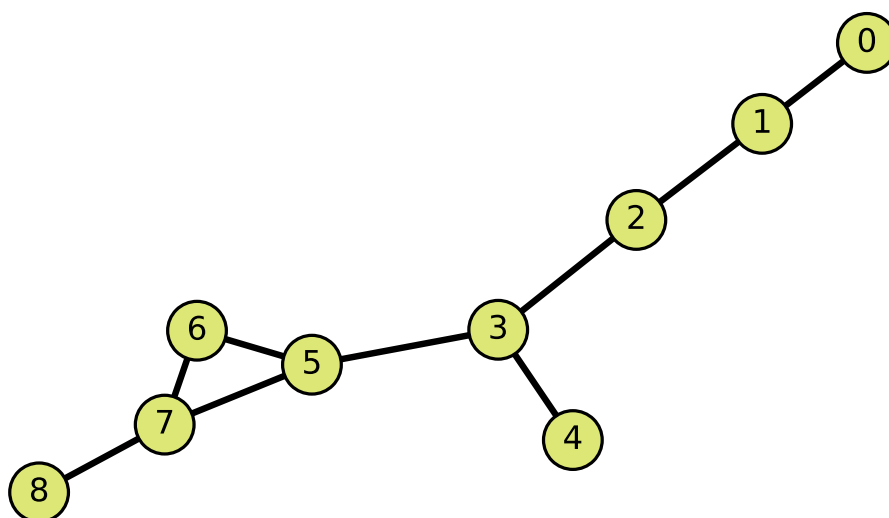


Figura 1.4.19: Ejemplo de camino maximal: 0,1,2,3,5,6,7,8. Sin embargo, 5,7,8 no lo es.

Definición 1.4.2. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Un subgrafo conexo maximal de G es llamado una **componente** o **componente conexa** de G .

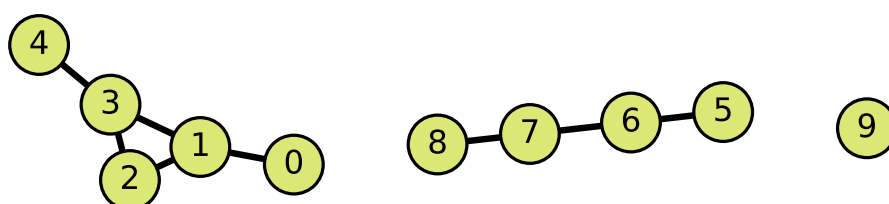


Figura 1.4.20: Ejemplo de componentes: tiene 3.

Notación 1.4.3. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Vamos a notar a la cantidad de aristas por vértice como la cantidad:

$$\epsilon(G) = \frac{|E|}{|V|}.$$

Teorema 1.4.4. Sea $k \in \mathbb{N}$. Todo grafo G con $d(G) \geq 4k$ tiene un subgrafo H que es $(k-1)$ -conexo tal que $\epsilon(H) > \epsilon(G) - k$.

Demostración. Notemos por $\gamma = \epsilon(G)$; como $\gamma = \frac{1}{2}d(G)$, tenemos que $\gamma \geq 2k$. Consideremos los subgrafos $G' \subset G$ tales que

$$|G'| \geq 2k \quad \text{y} \quad ||G'|| > \gamma(|G'| - k);$$

esta familia es no vacía, pues G cumple esta condición; notemos por H al subgrafo de menor orden que cumple esta condición. En efecto, G cumple ambas condiciones, pues por un lado $||G|| > \gamma(|G| - k) = ||G|| - \gamma k$, y por otro lado

$$\Delta(G) \geq d(G) \geq 4k,$$

con lo cual existe un vértice de G de grado máximo, con al menos $4k$ vecinos, es decir $|G| \geq 4k + 1 \geq 2k$.

Notar que ningún grafo G' que cumpla la condición tiene orden exactamente $2k$, ya que esto implicaría que $||G'|| > \gamma k \geq 2k^2 > \binom{|G'|}{2} = k(2k-1)$, lo cual contradice la cantidad máxima de aristas que puede tener un grafo de $|G'|$ vértices. Por minimalidad de H , se tiene que $\delta(H) > \gamma$: de lo contrario podríamos eliminar un vértice de grado a lo más γ y obtener un grafo $G' \subsetneq H$ que satisface la condición. En particular, como existe un vértice de grado $> \gamma$, se sigue que $|H| \geq \gamma$. Dividiendo la desigualdad $||H|| > \gamma|H| - \gamma k$ de la condición por $|H|$, tenemos que $\epsilon(H) > \gamma - k$, como queríamos.

Falta ver que H es efectivamente $(k+1)$ -conexo. De lo contrario, H tendría una separación propia $\{U_1, U_2\}$ de orden a lo más k ; escribamos $H[U_i] =: H_i$. Como todo vértice $v \in U_1 \setminus U_2$ tiene $d(v) \geq \delta(H) > \gamma$ vecinos de H en H_1 , tenemos que $|H_1| \geq \gamma \geq 2k$. Similarmente, $|H_2| \geq 2k$. Por la minimalidad de H , ninguno de los H_1, H_2 puede satisfacer la condición, con lo cual

$$||H_i|| \leq \gamma(|H_i| - k), \quad i = 1, 2.$$

Sin embargo, tenemos que

$$\begin{aligned} ||H|| &\leq ||H_1|| + ||H_2|| \\ &\leq \gamma(|H_1| + |H_2| - 2k) = \gamma(|H| + |H_1 \cap H_2| - 2k) \\ &\leq \gamma(|H| - k) \quad (\text{pues } |H_1 \cap H_2| \leq k), \end{aligned}$$

contradiciendo la condición. □

1.4.1. Árboles y bosques

Definición 1.4.5. Un grafo acíclico, es decir, sin ciclos, es llamado un **bosque**.

A un bosque conexo lo llamamos **árbol**, es decir un grafo conexo y acíclico.

Los vértices de grado 1 son sus **hojas**, los otros vértices son sus **vértices interiores**.

Notar que las componentes conexas de un bosque son árboles.

Observación 1.4.6. Los subgrafos conexos de un árbol son árboles.

Figura 1.4.21: Un **árbol** con **hojas** y **vértices interiores**.

Ejercicio 1.4.7. Todo árbol tiene al menos 1 hoja. Más aún, si el árbol tiene más de un vértice entonces tiene al menos 2 hojas. En particular los árboles tienen grado mínimo $\delta = 1$.

Solución. Sea P un camino maximal en el árbol, y miro uno de los extremos (podría haber solo uno si el camino tiene un solo vértice). Ese extremo si tuviera grado ≥ 2 , el otro vecino debería caer en el camino por maximalidad, luego existe un ciclo, absurdo!. Más aún, si el árbol tiene más de un vértice entonces el camino maximal que tomamos tiene dos vértices, i.e. dos hojas. \square

Esto implica lo mismo para caminos, pues los caminos son árboles.

Teorema 1.4.8. Sea T un grafo. Las siguientes definiciones son equivalentes:

- (I) T es árbol.
- (II) Cada par de vértices en T están unidos por un único camino.
- (III) T es conexo, pero $T \setminus e$ es desconexo para todo $e \in E(T)$. Es decir, es minimalmente conexo.
- (IV) T es conexo, pero $T \setminus v$ es desconexo para todo $v \in V(T)$ que no sea hoja.
- (V) T es acíclico, pero $T \cup xy$ tiene un ciclo para cualquier par de vértices x, y no adyacentes. Es decir, es maximalmente acíclico.

Demostración.

- (i) \Rightarrow (ii) Si no, existe al menos un camino por ser conexo, luego si hay dos caminos distintos entonces podemos construir un ciclo.
- (ii) \Rightarrow (iii) Sea e una arista entre xy , entonces xy es un camino entre esos vértices, por hipótesis es el único, luego al quitarlo debe quedar desconexo, de lo contrario es que había otro camino.
- (iii) \Rightarrow (iv) Como v no es una hoja, es vecino de al menos dos vértices distintos, digamos a, b . Si todo camino entre a y b pasa por v , entonces quitar este vértice haría que T fuera desconexo. Supongamos que existe un camino que une a, b pero que no contiene a v . Luego si quitamos la arista av o vb el grafo sigue siendo conexo, pues tenemos un ciclo avb , absurdo.
- (iv) \Rightarrow (v) T es acíclico, pues de lo contrario podríamos quitar un vértice y que siga quedando conexo. En efecto, sea C un ciclo en T , digamos con vértices $x_0, x_1, \dots, x_n, x_0$ y $n \geq 2$. Si quitamos cualquier vértice v de C , este queda conexo, pero veamos que T también. De lo contrario, es que v separa a T en dos componentes conexas, es decir, todos los caminos entre C y $T \setminus C$ pasan por v , con lo cual tomando otro vértice de C que no sea v y quitándolo, nos quedaría que T menos ese punto es conexo, absurdo.
- Sean x, y no adyacentes. Consideremos P un camino entre x, y . Como no son adyacentes este camino necesariamente tiene al menos un vértice en intermedio, digamos z . Por hipótesis, si quitamos z el grafo nos queda desconexo, y esto lo podemos hacer para cualquier $z \neq x, y$ en P . Con lo cual, $P \cup xy$ es un ciclo en $T \cup xy$.
- (v) \Rightarrow (i) Por hipótesis, T es acíclico. Sean $x, y \in V(G)$. Por hipótesis tenemos que $T \cup xy$ tiene un ciclo C_{xy} , luego C_{xy} debe contener la arista xy pues T es acíclico. Entonces $C_{xy} \setminus xy$ conecta a xy . Como x, y eran arbitrarios, tenemos que T es conexo.

□

Definición 1.4.9. Sea G un grafo. Un **árbol generador** de G es un subgrafo de G que es árbol y que contiene a todos los vértices de G .

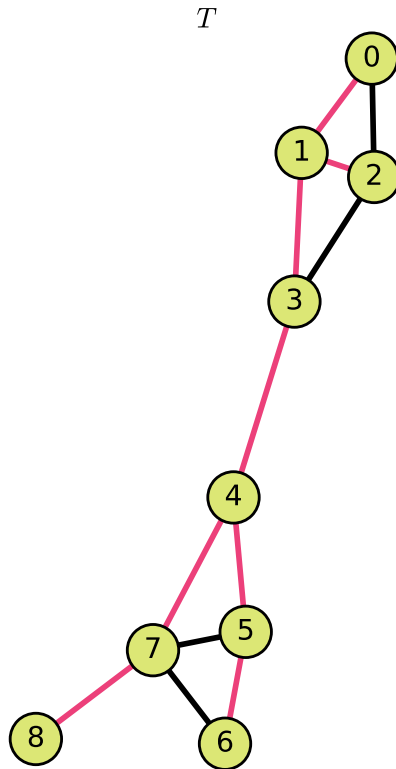


Figura 1.4.22: Ejemplo: árbol generador, con aristas en rojo.

Observación 1.4.10. Del dibujo anterior podemos ver que el árbol generador no necesariamente es único, y de hecho, puede haber otro que no sea isomorfo. Por ejemplo cambiamos los vértices del árbol en rojo, de manera que ya no tenga vértices de grado 3:

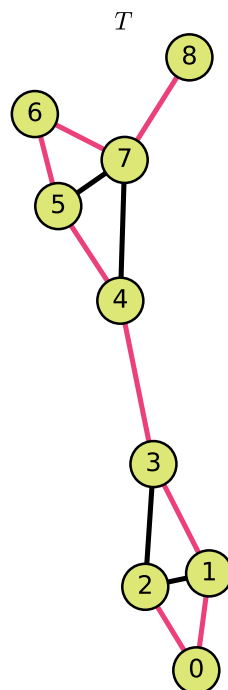


Figura 1.4.23: Otro árbol generador.

Proposición 1.4.11. *Todo grafo conexo tiene un árbol generador.*

\Leftrightarrow) Como T es conexo tiene árbol generador T' , y por la implicación anterior tiene $n - 1$ aristas, entonces $T = T'$, i.e. T es árbol. □

Corolario 1.5.2. *Todo grafo conexo de n vértices tiene al menos $n - 1$ aristas.*

Demostración. Tiene un árbol generador, que debe tener $n - 1$ aristas. □

Corolario 1.5.3. *Si T es un árbol y G es un grafo con $\delta(G) \geq |T| - 1$, entonces $T \subset G$, es decir G tiene un subgrafo isomorfo a T .*

Demostración. Sea v_1, \dots, v_n con $n = |T|$, una numeración de los vértices de T tal que $v_i, i \geq 2$ es una hoja de $T[v_1, \dots, v_{i-1}]$. Haremos inducción en estos vértices. El caso base es trivial. Veamos el paso inductivo: supongamos que G tiene a $T[v_1, \dots, v_{i-1}]$ como subgrafo con $i \leq n$, entonces como $\delta(G) \geq n - 1$, tenemos que $v_j, 1 \leq j \leq i - 1$ (el único vecino de v_i) tiene al menos $\delta(G) \geq n - 1$ vecinos en G , es decir, tiene un vecino que no está en $T[v_1, \dots, v_{i-1}]$, luego agregamos a ese vértice como v_i junto con la arista que le corresponde a v_j . □

De vez en cuando, es útil fijar un vértice r de un árbol T , que llamaremos **raíz**. Un árbol con una raíz fija, se denomina **árbol enraigado** (o en inglés, **rooted tree**). Recordemos que para todo $y \in V(T)$, existe un único camino entre r e y que denotaremos rTy ; esto induce un orden parcial $x \leq y$ si y solo si $x \in rTy$. Este orden en $V(T)$ se lo llama el **orden del árbol** asociado a T y r . Definimos los conjuntos:

$$[y] := \{x \mid x \leq y\} \quad \text{y} \quad [x] := \{y \mid y \geq x\}$$

la **clausura inferior** de y , y la **clausura superior** de x , respectivamente. En general, definimos $[X] := \bigcup_{x \in X} [x]$ y análogamente $[X]$, para un conjunto $X \subset V(T)$. Un conjunto X que coincide con $[X]$, se dice **cerrado inferiormente**, análogamente en el otro caso tenemos que es **cerrado superiormente**.

Notar que r es el *mínimo* en este orden, y todas las hojas de T son *maximales*. Los extremos de una arista son siempre comparables entre sí, y los elementos de una clausura superior o inferior forman una *cadena* (i.e. son comparables entre sí). Decimos que los vértice a distancia k de r tienen **altura** k y el conjunto de estos vértices forma el k -ésimo **nivel** de T .

Un árbol enraigado T contenido en un grafo G se dice **normal** en G , si los extremos de todo T -camino en G son comparables en el orden de T . Si T genera G , esto equivale a pedir que dos vértices de T sean comparables siempre que sean adyacentes en G ; ver la siguiente figura:

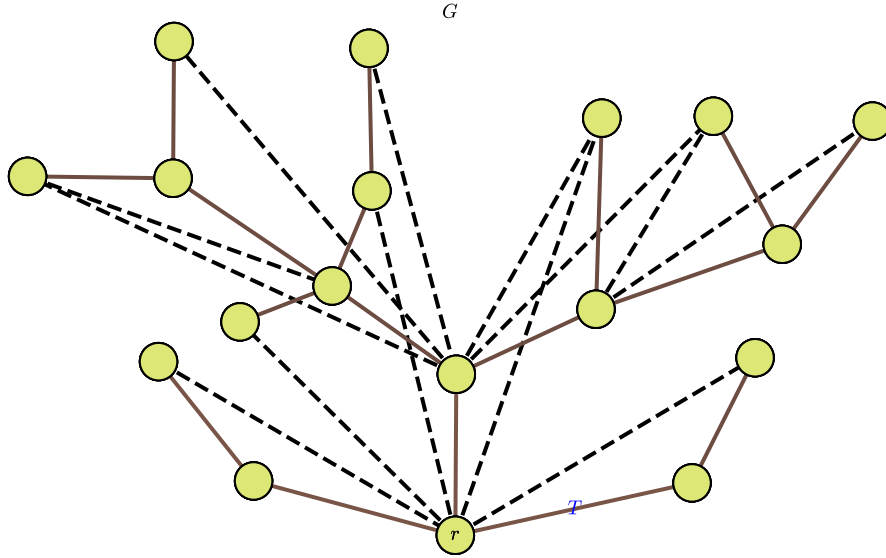


Figura 1.5.25: Un árbol generador normal con raíz r de un grafo G .

Un árbol normal puede ser una herramienta realmente útil para examinar la estructura de su grafo subyacente, ya que este grafo refleja las propiedades de separación de T :

Lema 1.5.4. Sea T un árbol normal en G . Tenemos que:

- (I) Dados $x, y \in V(T)$, están separados en G por el conjunto $[x] \cap [y]$. 1
- (II) Supongamos que T genera G . Si $S \subset V(T) = V(G)$ y S es inferiormente cerrado, luego las componentes conexas de $G \setminus S$ están generadas por los conjuntos $[x]$ con x minimal en $T \setminus S$.

Demostración. (I) Sea P cualquier camino entre x, y en G ; veamos que P interseca $[x] \cap [y]$. Sea t_1, \dots, t_n una sucesión de vértices en $P \cap T$, minimal con la propiedad que $t_1 = x$ y $t_n = y$ y t_i, t_{i+1} son comparables en el orden del árbol T para todo i . Dicha sucesión existe, pues el conjunto de todos los vértices en $P \cap T$, con el orden natural inducido por P , tiene esta propiedad, ya que como T es normal todo segmento $t_i P t_{i+1}$ es una arista de T o un T -camino. En nuestra secuencia minimal no podemos tener $t_{i-1} < t_i > t_{i+1}$ para ningún i , pues t_{i-1}, t_{i+1} son comparables y podríamos eliminar a t_i de nuestra secuencia, obteniendo así una secuencia más chica. Entonces nuestra secuencia tiene la forma

$$x = t_1 > \dots > t_k < \dots < t_n = y$$

(se podrían retirar los elementos en el "medio"). Así, $t_k \in [x] \cap [y] \cap V(P)$.

- (II) Consideremos una componente C de $G \setminus S$, y tomemos x un elemento minimal (T genera G) de $V(G)$. Afirmamos que x es único, en efecto, si x' fuera otro, ambos serían no comparables entre sí, pero por el ítem (i), cualquier camino entre x, x' contiene un vértice más chico que ambos, contradiciendo minimalidad en C . Por lo tanto todo vértice de C yace arriba de x : nuevamente por el ítem (i) hay un vértice debajo de ambos que por minimalidad es x . Recíprocamente, todo vértice $y \in [x]$ está en C , pues como S es cerrado inferiormente, el camino creciente xTy yace en $T \setminus S$. Consecuentemente, $V(C) = [x]$.

Ahora veamos que x es minimal no solo en $V(C)$, sino también en $T \setminus S$. Los vértices por debajo de x forman una cadena $[t]$ en T . Como t es vecino de x en T , la maximalidad de C como componente conexa de $G \setminus S$ implica que $t \in S$, y por lo tanto $[t] \subset S$ porque S es cerrado inferiormente. Esto completa la demostración de que toda componente de $G \setminus S$ está generada por un conjunto $[x]$ con x minimal en $T \setminus S$.

Recíprocamente, si x es un elemento minimal en $T \setminus S$, claramente también es minimal en la componente C de $G \setminus S$ que lo contiene. Eso significa que $V(C) = [x]$. □

Proposición 1.5.5. *Todo grafo conexo contiene un árbol generado normal, con el orden inducido por cualquier vértice como raíz.*

Demostración. Sea G un grafo conexo y $r \in G$ un vértice fijo. Sea T un árbol normal maximal con raíz r , veamos que $V(T) = V(G)$, i.e. genera G .

Supongamos por el absurdo que no, y sea C una componente conexa de $G \setminus T$. Como T es normal, la vecindad $N_G(C)$ (que está contenida en T) es una cadena en T , obviamente porque C permite construir T -caminos entre cualquier par de vértices de $N_G(C)$. Sea x su máximo elemento (recordemos que estamos en una cadena), y sea $y \in C$ adyacente a x . Sea T' el árbol obtenido de T agregando la arista yx ; el orden de árbol de T' extiende al de T . Veamos que T' también es normal en G , contradiciendo maximalidad.

Sea P un T' -camino en G . Si sus extremos están en T , luego son comparables con el orden de T , y por lo tanto por el de T' también, ya que P es un T -camino también porque $T \subset T'$ y T es normal. Si alguno de los extremos de P fuera y , tenemos que $P \subset C$ salvo por su otro extremo z , que yace en $N_G(C)$. Como x era máximo, tenemos que $z \leq x$. Luego z, y serán comparables si vemos que $x < y$, es decir que $x \in rT'y$. Lo cual es claro ya que y es una hoja de T' con vecino x . □

1.5.1. Grafos bipartitos

Definición 1.5.6. Sea $r \geq 2$ entero. Decimos que un grafo $G = (V, E)$ es **r -partito** si podemos particionar a V en r partes tal que cada arista tiene sus extremos en partes distintas. Es decir, cada parte es un conjunto independiente.

2-partito es **bipartito**, 3-partito es **tripartito**, etc.

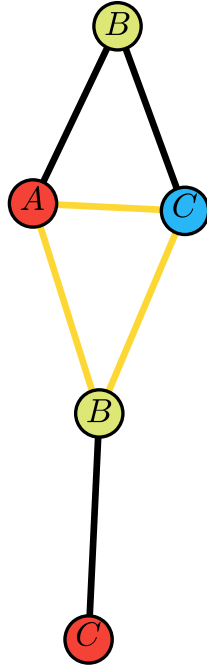


Figura 1.5.26: Ejemplo de grafo 3-partito, 4-partito y 5-partito, pero no 2-partito porque siempre existirían dos vértices del triángulo **amarillo** en la misma partición, pero eso es imposible porque son adyacentes. Se ilustran dos triparticiones distintas: A, B, C y por otro lado **rojo**, **azul**, **verde**.

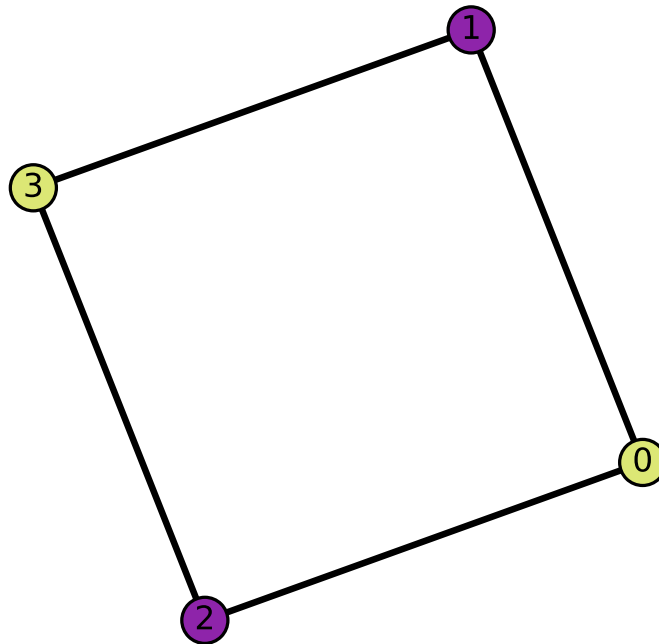


Figura 1.5.27: Ejemplo de grafo 2-partito.

Definición 1.5.7. Un grafo r -partito G , donde cada par de vértices de partes distintas son adyacentes, decimos que G es **r -partito completo**.

Un grafo r -partito completo con partes de tamaño n_1, n_2, \dots, n_r se denota K_{n_1, n_2, \dots, n_r} .

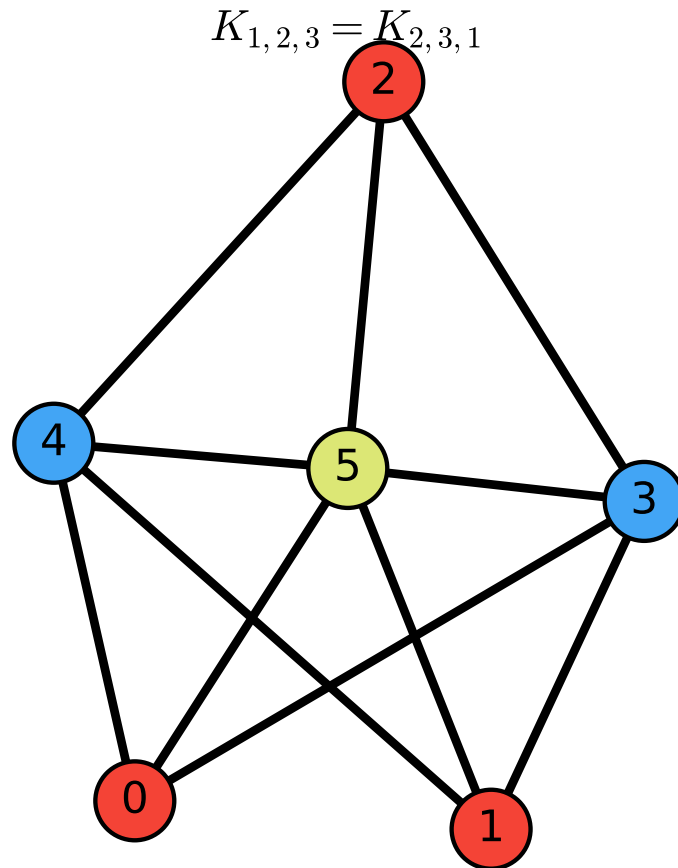


Figura 1.5.28: Ejemplo de grafo 3-partito completo.

Observación 1.5.8. Un grafo $K_{1,n}$ es una *estrella*.

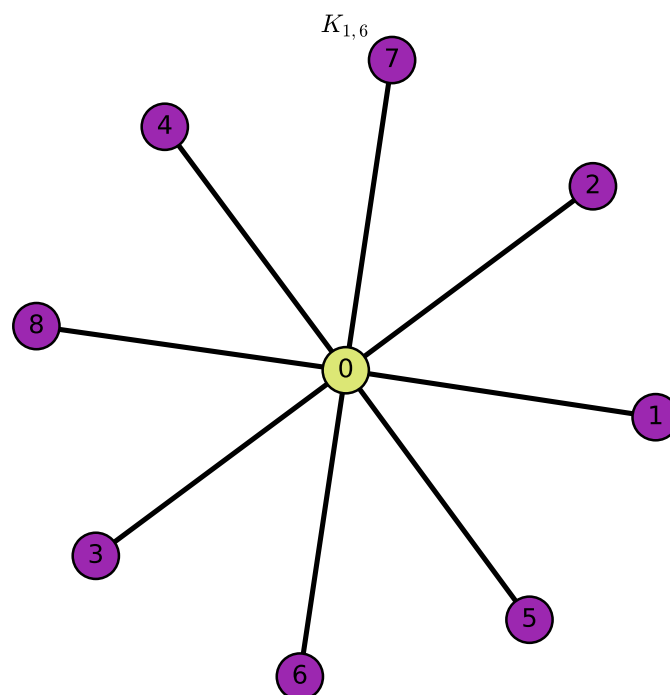


Figura 1.5.29: $K_{1,5}$

Observación 1.5.9. Si G es bipartito, entonces no tiene ciclos impares.

Demostración. Sea $C = C_{2k+1}$ con $k \geq 1$ un subciclo de longitud $2k+1$ de G . Si G fuera bipartito, entonces C también. En efecto, numerando $C : x_0, x_1, \dots, x_{2k}, x_0$, ser bipartito equivale a que existe una función $\rho : x_i \mapsto 0, 1 \in \{0, 1\}$ tal que $\rho(x) \neq \rho(y)$ para todo par de vértices adyacentes $x, y \in C$. Sin pérdida de generalidad $\rho(x_0) = 0$. Pero como x_i y x_{i+1} son siempre adyacentes, debe ser que $\rho(x_0) = 0, \rho(x_1) = 1, \dots, \rho(x_i) = i \bmod 2$ (lo podemos probar recursivamente). Con lo cual, $\rho(x_{2k}) = 0 = \rho(x_0)$, lo cual es absurdo porque x_{2k} y x_0 son adyacentes. \square

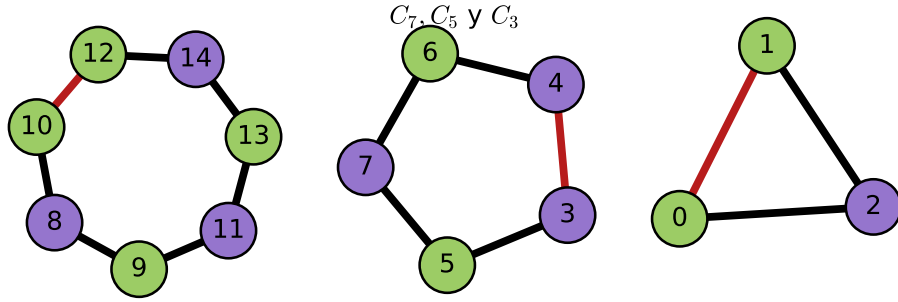


Figura 1.5.30: Como se ilustra en el dibujo, no podemos 2-particionar a C_7, C_5 ni C_3 . Pues siempre que pintamos con dos colores quedan dos vértices adyacentes.

Teorema 1.5.10. Un grafo es bipartito si y solo si no tiene ciclos impares.

Demostración. La observación anterior prueba la necesidad. Veamos la suficiencia. Sea G un grafo sin ciclos impares. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que es conexo. Sea T un árbol generador, r un vértice de G que llamaremos raíz (de T). Para $v \in V(G)$ denotamos por rTv al único camino entre r y v en T (por la caracterización de árboles). Por último, si $w, v \in V(G)$, entonces decimos que $w \leq v$, si $w \in rTv$.

Definimos la partición de G : los vértices v tales que rTv tiene largo par, y por otro lado los vértices v tales que rTv tiene largo impar. Veamos que en efecto esto es una partición, i.e., no hay vértices adyacentes en la misma partición. Sea $e = xy$ una arista de G .

CASO 1: Si $e \in E(T)$, tendremos $x < y$ o $y < x$, pero nunca igualdad. Más aún, $\|rTx\| = \|rTy\| \pm 1$, i.e. tienen paridades distintas.

CASO 2: Si $e \notin E(T)$, entonces rTx, rTy y e forman un ciclo (por la caracterización de árbol). Por la hipótesis, el ciclo es par. Esto implica que $\|rTx\|$ y $\|rTy\|$ tienen distinta paridad:

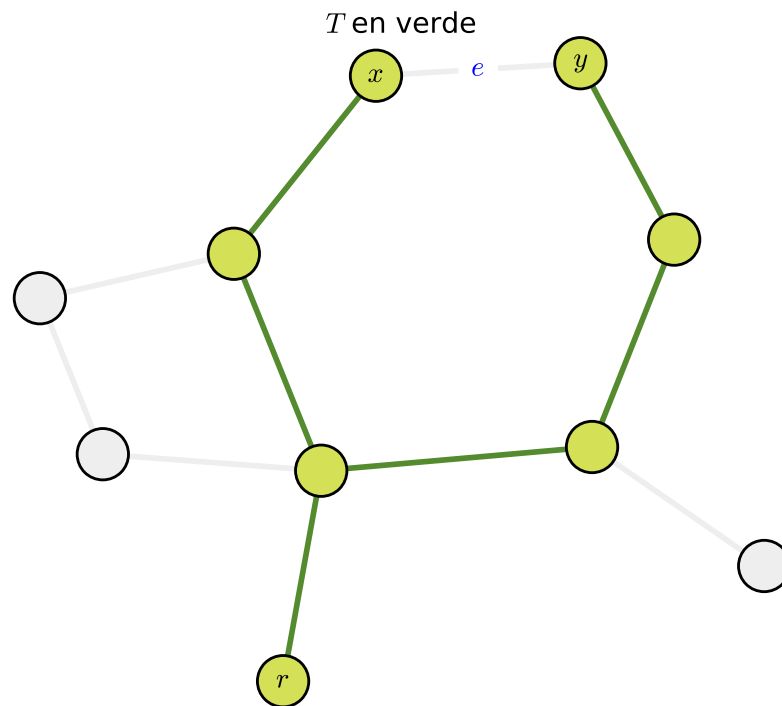


Figura 1.5.31: Ilustración de este hecho.

□

Corolario 1.5.11. *Los árboles y los bosques son bipartitos.*

1.5.2. Paseos Eulerianos

Viajamos a Prusia, siglo XVIII, a la ciudad de Königsberg.

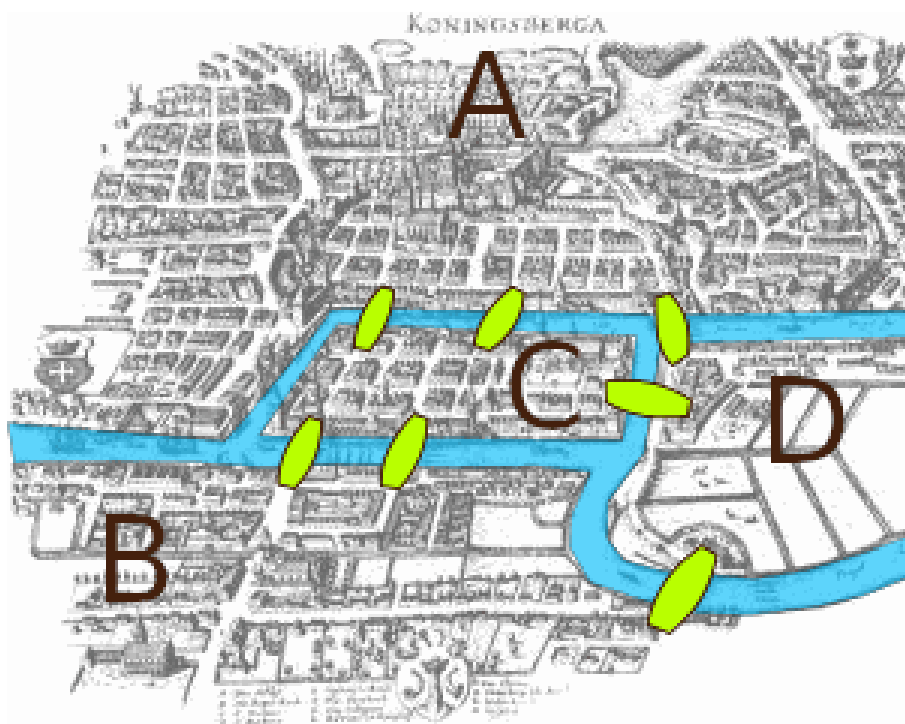


Figura 1.5.32: Los siete puentes de Königsberg.

La gente de la ciudad se preguntaba si se podía partir de un punto $x \in A$ o B de la ciudad, cruzar cada puente exactamente una sola vez y volver a x . Euler se propuso a responder la pregunta.

Podemos modelar el problema como un *multigrafo* (i.e. dos vértices pueden estar unidos por más de una arista):

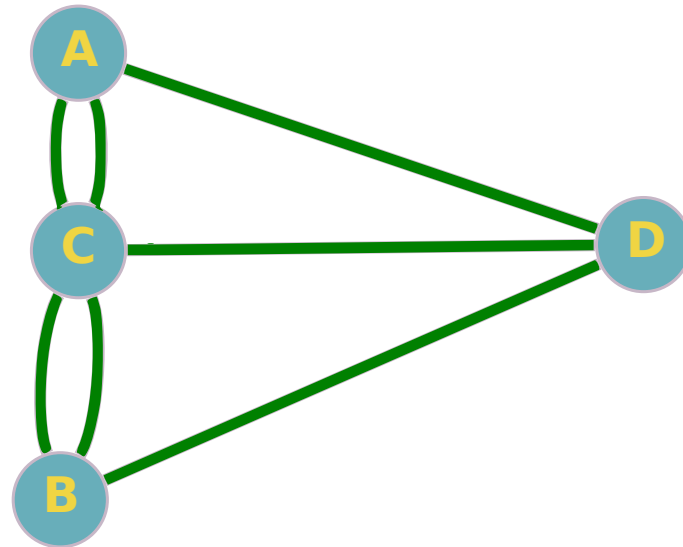


Figura 1.5.33: Multigrafo de los puentes de Königsberg.

Definición 1.5.12. Un **paseo** en un multigrafo, es una secuencia de vértices x_0, x_1, \dots , tal que $x_i x_{i+1}$ es arista para todo $i \geq 0$, y ninguna de estas aristas se repite.

Un **paseo cerrado** comienza y termina en el mismo vértice.

Un paseo es **Euleriano** si es cerrado y recorre todas las aristas del multigrafo.

Un **grafo Euleriano**, es un multigrafo que contiene un paseo Euleriano.

Teorema 1.5.13. *Un multigrafo conexo es Euleriano si y solo si todos sus vértices tienen grado par.*

Veremos la demostración la clase siguiente.

1.6. Clase 6: 30/03/23

Teorema 1.6.1. *Un multigrafo conexo es Euleriano si y solo si todos sus vértices tienen grado par.*

Demostración.

- \Rightarrow) Asumimos que G tiene un paseo Euleriano P . Cada vez que el paseo "entra" en una vértice, lo hace por medio de una arista, y debe salir por otra. Cada vez que v aparece en P se utilizan otras dos aristas incidentes en v . Como se ocupan todas esas aristas, $d(v)$ es par.
- \Leftarrow) Supongamos que todos los grados son pares. Haremos inducción en $\|G\|$. El caso base es $\|G\| = 2$ que claramente tiene un paseo Euleriano:

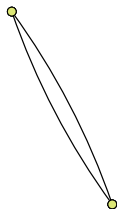


Figura 1.6.34: $\|G\| = 2$.

Supongamos que $\|G\| > 2$. Cuando todos los grados son pares, puedo encontrar un paseo cerrado no trivial. Tomemos como P el de largo máximo, y sea F su conjunto de aristas. Si F es todo, la demostración está terminada. Luego supongamos que no. Sea $G \setminus F = G'$, tiene una arista e que incide en un vértice de P , pues G es conexo. Sea C la componente de G' que contiene a e . Todo vértice de G , posee un número par de aristas incidentes en F , luego la cantidad de aristas en G' sigue siendo par. Aplicando la hipótesis inductiva, podemos encontrar un paseo Euleriano en C , llamémoslo P' . Como P y P' unidos son un paseo cerrado más grande que P , llegamos a un absurdo.

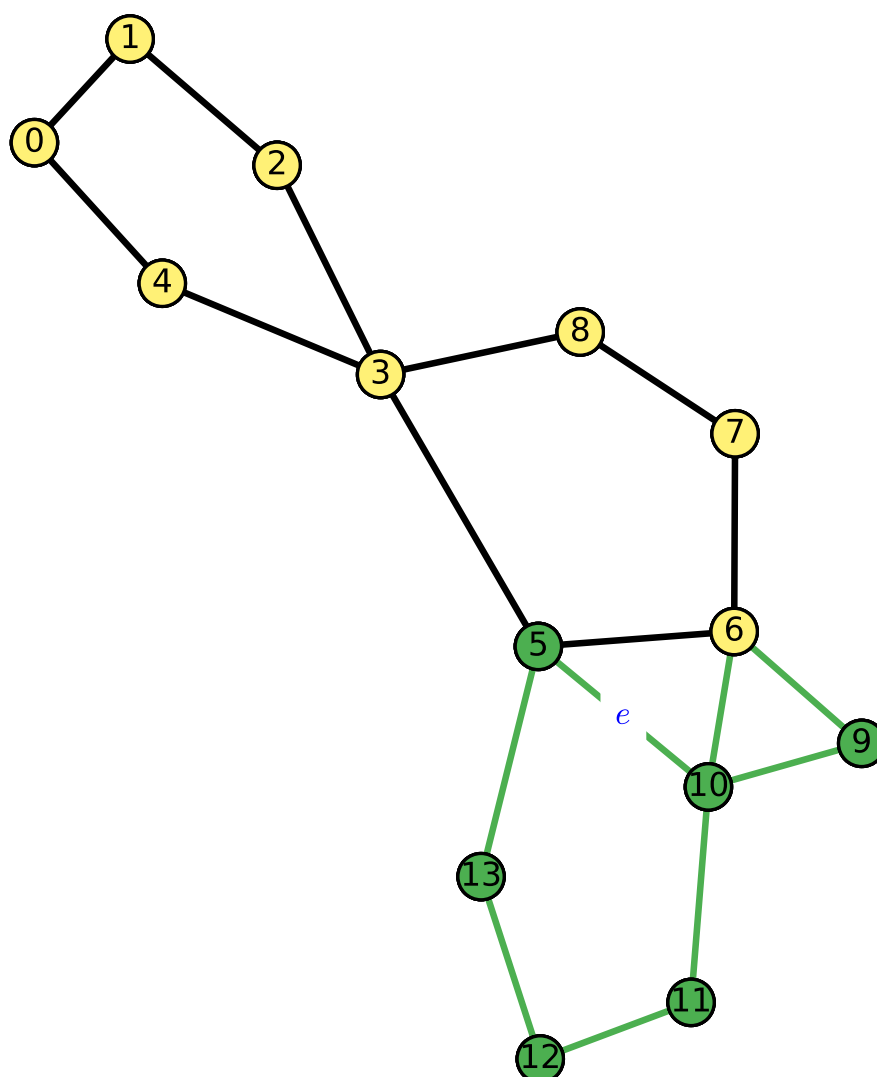


Figura 1.6.35: Esta es una ilustración de lo que podría suceder: $P : 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 4, 0$ es el camino negro y C es el grafo conexo.

□

1.6.1. Conexidad

Definición 1.6.2. Decimos que un conjunto X de vértices o aristas **separa** a $u, v \in V$ si $u, v \notin X$ y todo camino entre u y v tiene un elemento de X .

Si X separa un par de vértices, decimos que es **separador** (de u, v). Si un vértice solo, i.e. X es un singleton, es separador, decimos que es un **vértice de corte**. Un pequeño abuso de notación será simplemente referirnos a ese vértice en lugar del conjunto que lo contiene.

Análogamente, una arista sola $X = \{e\}$ que separa sus vértices se dice **punte**. Un pequeño abuso de notación será simplemente referirnos a ese vértice en lugar del conjunto que lo contiene.

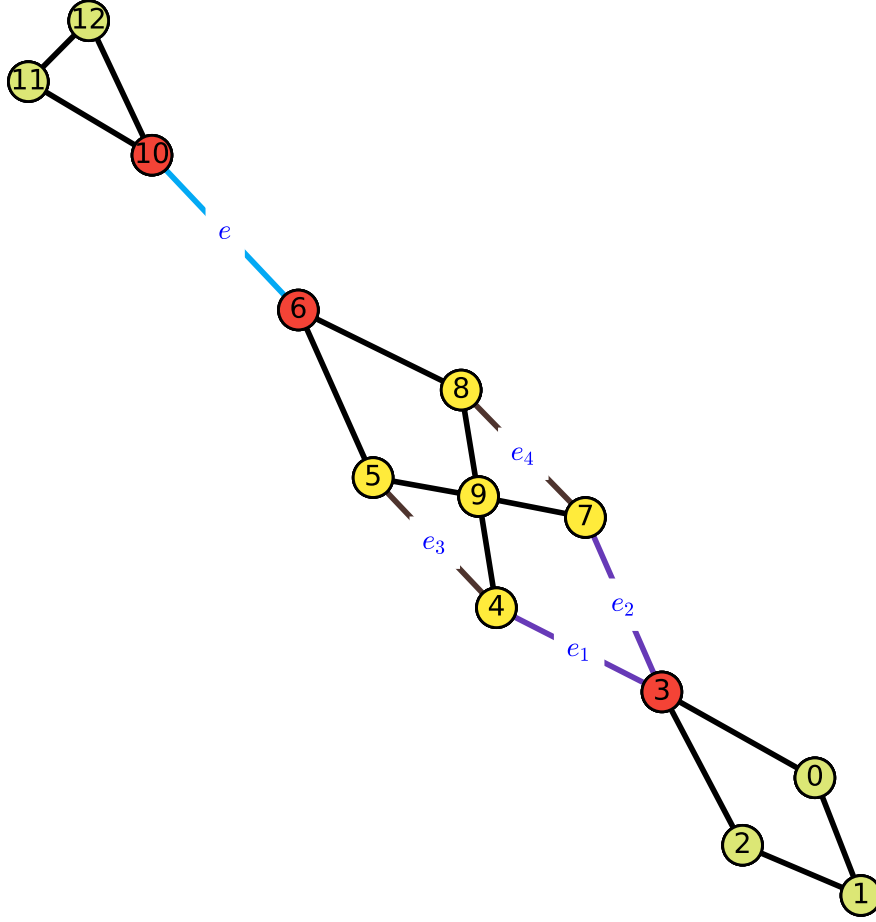


Figura 1.6.36: Ejemplo: $X = \{4, 5, 7, 8, 9\}$ separa a $u = 3, v = 6$. También $Y = \{e_1, e_2\}$ e $Y' = \{e_3, e_4\}$ son separadores de u, v . La arista $e = (6, 10)$ es un puente.

Definición 1.6.3. Para $k \geq 0$ decimos que $G = (V, E)$ es **k -conexo** si $|V| > k$ y $G \setminus X$ es conexo para todo $X \subset V$ con $|X| < k$. Es decir, ningún conjunto de menos de k -vértices separa.

Ejemplo 1.6.4. ■ 0-conexo: Todo grafo no vacío.

■ 1-conexo: grafos conexos no triviales (tiene que tener al menos una arista).

Definición 1.6.5. La **conexidad**, $\mathcal{K}(G)$ de G , es el máximo $k \geq 0$ tal que G es k -conexo.

Ejemplo 1.6.6. ■ $\mathcal{K}(G) = 0$: Todo grafo desconexo no vacío o K_1 .

■ $\mathcal{K}(K_n) = n - 1, \forall n \geq 1$.

Definición 1.6.7. Sea G no vacío y sea $\ell \geq 1$. Decimos que G es **ℓ -arista conexo**, si $G \setminus F$ es conexo para todo $F \subset E$ con $\|F\| < \ell$.

Ejemplo 1.6.8. 1-arista conexo: los grafos conexos no vacíos.

Definición 1.6.9. La **arista conexidad**, $\lambda(G)$ de G , es el máximo ℓ tal que G es ℓ -arista conexo.

Figura 1.6.37: Ejemplo de grafo que tiene $\mathcal{K} = 4, \lambda = 4$.

Ejemplo 1.6.10. $\lambda(K_n) = n - 1, \forall n \geq 1$. Con lo cual, por el Ejemplo 1.6.6 tenemos que

$$\lambda(K_n) = \mathcal{K}(K_n).$$

Ejercicio 1.6.11. Calcular \mathcal{K} y λ del siguiente grafo G :

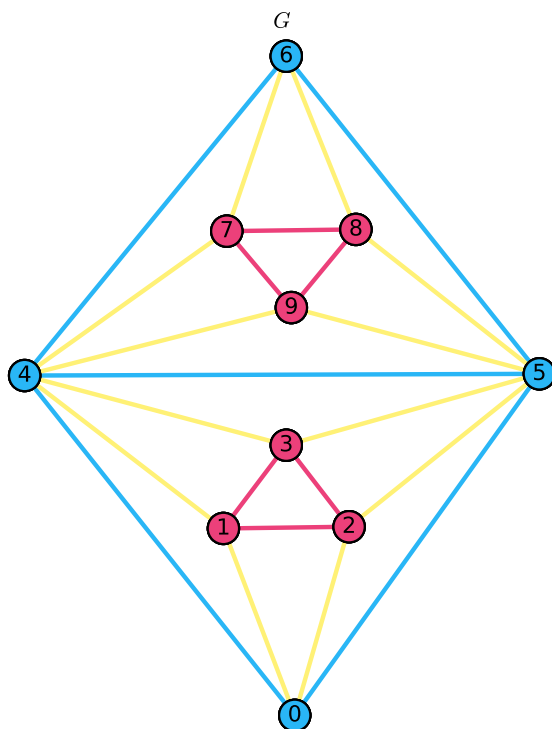


Figura 1.6.38: Grafo G .

Solución. Si quitamos los **vértices 4,5** entonces nos queda G desconexo, luego $\mathcal{K}(G) < 3$. Si quito cualquier vértice, entonces el grafo sigue siendo conexo, luego es 2-conexo, i.e. $\mathcal{K}(G) \geq 2$. Luego $\mathcal{K}(G) = 2$.

En el anterior ejemplo teníamos $\lambda = 4$ en cada **triángulo azul**, y como sacar 3 aristas incidentes a **4,5** no evita que G siga siendo conexo, tenemos que G es 4-

arista conexo, i.e. $\lambda(G) \geq 4$. Por otro lado, si quitamos las 4 aristas incidentes en el **vértice 1**, queda el aislado del resto del grafo, i.e. $\lambda(G) < 5$. Luego $\lambda(G) = 4$. \square

1.7. Clase 7: 03/04/23

Proposición 1.7.1. Si G es no trivial, entonces $\mathcal{K}(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$

Demostración. La segunda desigualdad se tiene porque todas las aristas incidentes en un vértice fijo separan a G .

Veamos ahora la primera desigualdad. Sea F un conjunto de aristas que separa a G , con $|F| = \lambda(G)$, tal que $G \setminus F$ es desconexo. *Observación:* F es un conjunto de aristas minimal con la propiedad de ser separador.

CASO 1: Existe $v \in V(G)$ que no incide en F . Sea C la componente conexa que contiene a v en $G \setminus F$. No puede haber una arista f de F con extremos en C , pues de lo contrario $F \setminus \{f\}$ sería un conjunto más chico tal que es separador, lo cual contradice la minimalidad de F .

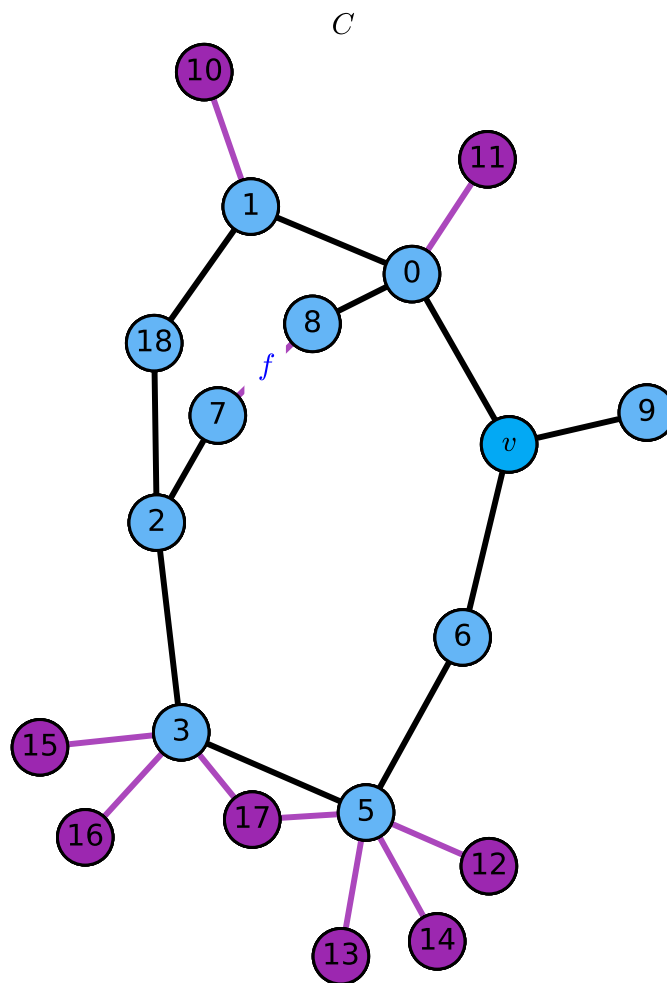


Figura 1.7.39: Ilustración de C , donde las **aristas violeta** corresponden a aristas de F .

Luego, si quitamos los vértices de las aristas de F incidentes en C , las cuales solo comparten un vértice de C , nos queda que v estaría separado del resto del grafo. Esta cantidad de vértices es a lo sumo $|F| = \lambda(G)$. Con lo cual $\mathcal{K}(G) \leq |F| = \lambda(G)$.

CASO 2: Todo $v \in V(G)$ incide en F . Fijemos $v \in V(G)$ y C la componente conexa de $G \setminus F$ que lo contiene. Consideremos $N_G(v)$, los vecinos de v . Cada $w \in N_G(v)$ incide en una arista de F .

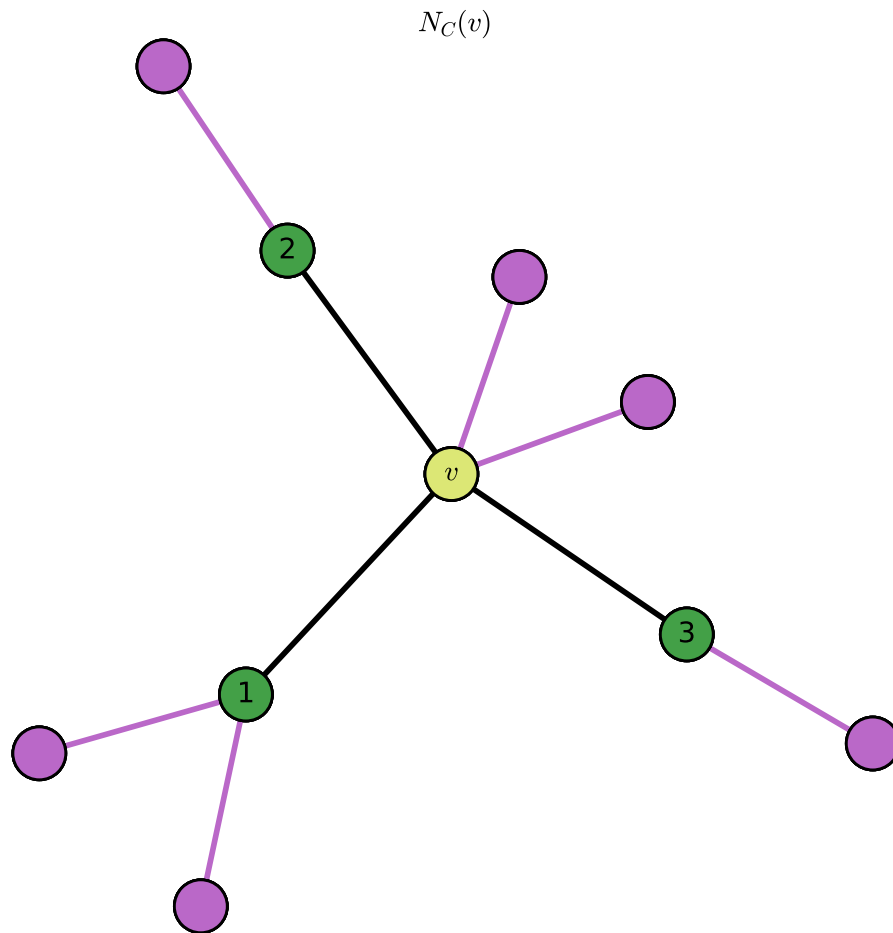


Figura 1.7.40: Ilustración de lo que sucede: los **vecinos** de v inciden en una **arista de F** .

Entonces $d_G(v) \leq |F| = \lambda(G)$. Por lo tanto, salvo que $V(G) = \{v\} \cup N_G(v)$, tenemos que $N_G(v)$ separa a v del resto del grafo, y salvo ese caso tendríamos que $\mathcal{K}(G) \leq |N_G(v)| \leq \lambda(G)$. Pero v era arbitrario, entonces en el peor de todos los casos, tenemos que $V(G) = \{v\} \cup N_G(v)$ para todo $v \in G$, i.e. G es un grafo completo. Pero en este caso vale la igualdad por el Ejemplo 1.6.10.

□

1.7.1. Grafos 2-conexos

Definición 1.7.2. Sea H un grafo. Decimos que un camino P es un H -camino si es no trivial (tiene al menos una arista) e interseca a H exactamente en sus extremos (P no tiene ni vértices ni aristas en H , salvo por sus extremos).

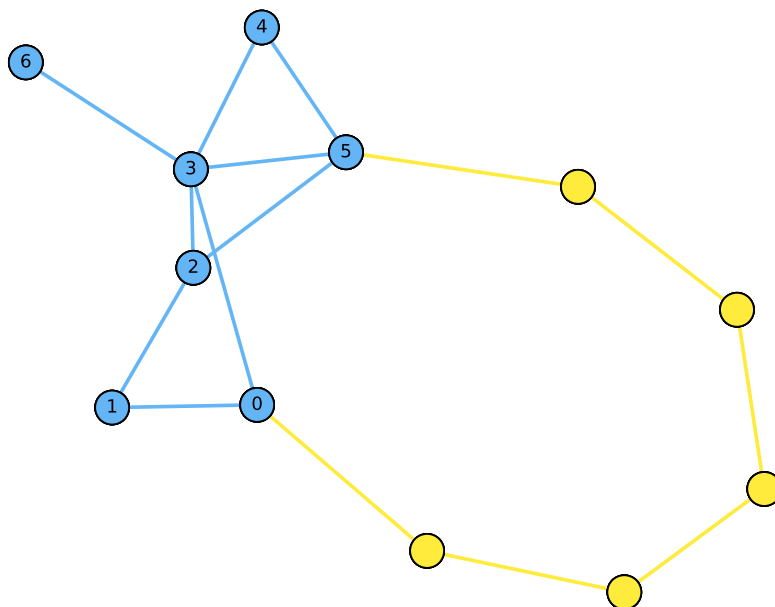


Figura 1.7.41: Ejemplo de H -camino P de un grafo H . Notar que en el dibujo consideramos a los vértices 0, 5 como extremos de P .

Los ciclos son los grafos 2-conexos más elementales. Veamos que todos los demás se pueden construir a partir de ellos.

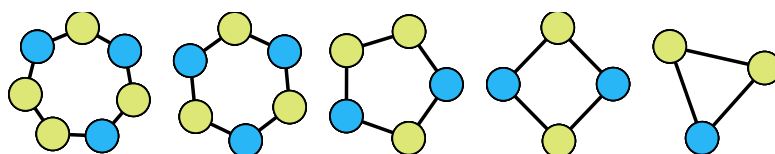


Figura 1.7.42: Ejemplos de ciclos: C_7, C_6, C_5, C_4 y C_3 .

Proposición 1.7.3. Un grafo es 2-conexo si y solo si se puede construir a partir de un ciclo añadiendo sucesivamente H -caminos a grafos H ya construidos.

Comentario 1.7.4. Es decir, si H_0 es un ciclo, le agregamos un H_0 -camino, y a la unión la llamamos H_1 , el cual es 2-conexo, si quisieramos podemos agregar un H_1 -camino y seguiría siendo 2-conexo, etc.

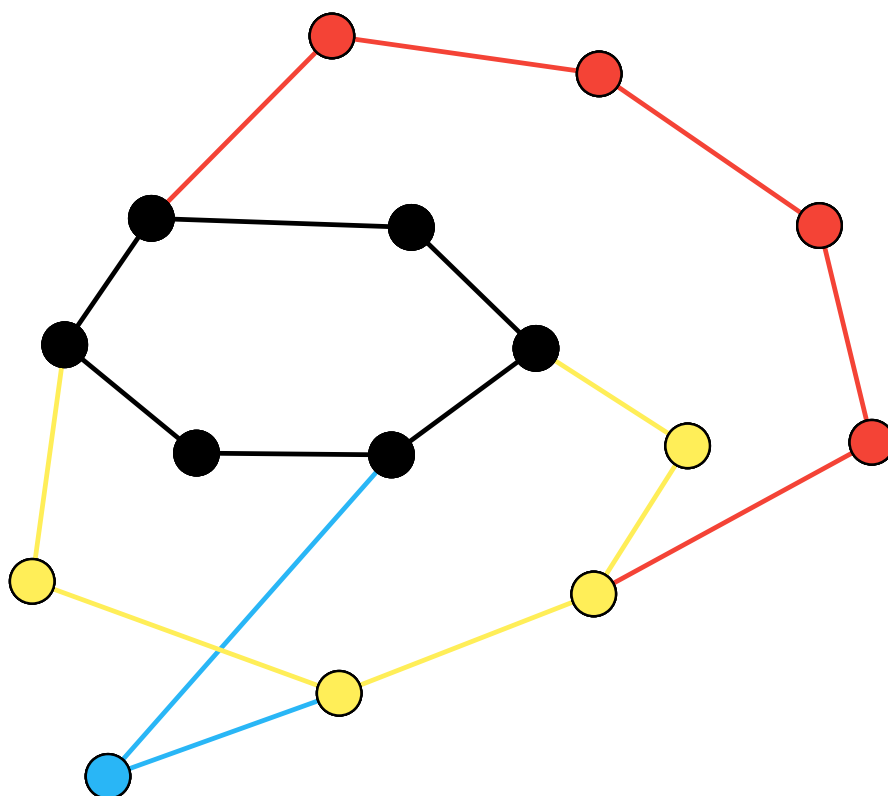


Figura 1.7.43: Ilustración de un ciclo H_0 en negro, al que le agregamos H -caminos en el siguiente orden: H_0 -camino, H_1 -camino y por último H_2 -camino.

Demostración.

- (\Leftarrow) Claramente un grafo construido de esta manera no se puede separar por un solo vértice. Y por su puesto que tiene más de 2 vértices.
- (\Rightarrow) Tomemos un grafo G , 2-conexo (en particular es también conexo). Como es 2-conexo, debe tener algún ciclo C , pues de lo contrario sería un árbol con al menos 3-vértices, y quitando un vértice que no es hoja nos quedaría separado. Nos fijamos si tiene un C -camino, si esto es así lo agregamos, y luego seguimos agregando hasta que no podamos más. Consideremos el subgrafo maximal H de G construido de esta manera a partir de C . Entonces toda arista $xy \in E(G) \setminus E(H)$ tal que $x, y \in V(H)$, es un H -camino, con lo cual no puede existir por maximalidad de H . Es decir, H es un subgrafo inducido de G . Entonces todas las aristas de G que no están en H tienen un extremo fuera de H . Si H es G habríamos terminado, luego por el absurdo supongamos que no. Por conexión existe un vértice $v \in G \setminus H$, y conectándolo por un camino con H podemos asumir que v es incidente en H , es decir existe $w \in H$ tal que vw es una arista incidente en H . Como G es 2-conexo, si quitamos a w el grafo sigue siendo conexo, luego debe ser que existe otro camino P de v a H , con lo cual $P \cup vw$ es un H -camino. Absurdo por maximalidad de H .

□

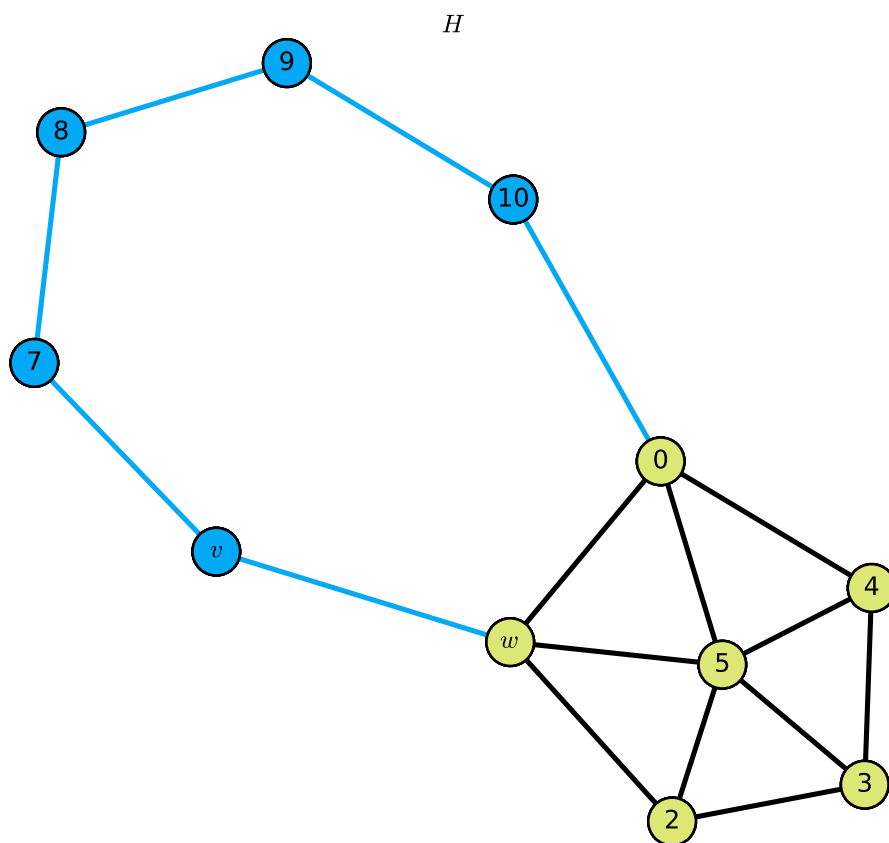


Figura 1.7.44: Ilustración: H contiene a w , con una arista incidente de extremo v , que se extiende a un H -camino P .

1.8. Clase 8: 06/04/23

Todo grafo *sin vértices aislados* se puede particionar en subgrafos 1-conexos. Y podemos intentar lo mismo para subgrafos 2-conexos. Pero pueden ocurrir problemas, por ejemplo:

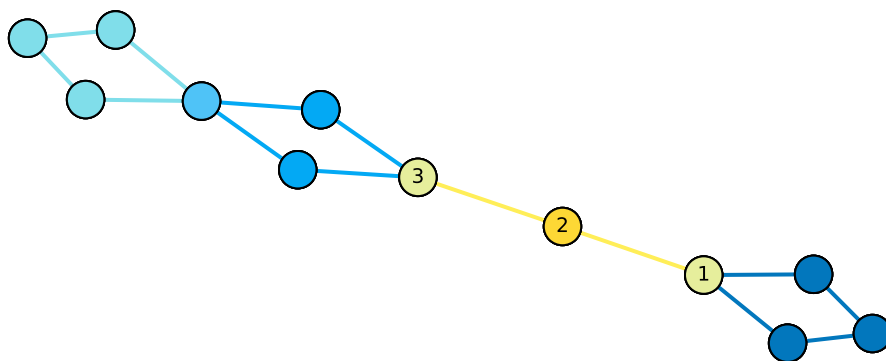


Figura 1.8.45: Ejemplo de problemas para particionar en subgrafos 2-conexos maximales. Las componentes 2-conexas del dibujo son sus **ciclos** que comparten vértices con otras estructuras como por ejemplo las dos **aristas** 12 y 23; o comparten aristas entre dos ciclos.

Como ilustra la figura de arriba, los subgrafos 2-conexos maximales no siempre

abarcan todo el grafo ni son siempre disjuntos. Veamos como se arregla: podemos simplificar la noción para poder abarcar todo el grafo.

Definición 1.8.1. Un **bloque** es un subgrafo conexo maximal sin vértices de corte.

En la figura anterior, los bloques del grafo con los **ciclos** y las **aristas** 12 y 23.

Observación 1.8.2. Es fácil ver que los bloques van a ser o subgrafos 2-conexos o una *arista* o un *vértice*.

Proposición 1.8.3. Los ciclos de un grafo son los ciclos de sus bloques.

Demostración. Todo ciclo es 2-conexo, luego es conexo sin vértices de corte, y debe estar contenido en un subgrafo maximal con esta propiedad, i.e. un bloque. \square

Proposición 1.8.4. Sean $e, f \in E(G)$. Entonces pertenecen a un mismo bloque si y solo si pertenecen a un mismo ciclo.

Demostración. Si pertenecen al mismo ciclo, entonces por la proposición anterior están en el mismo bloque.

Recíprocamente, como e, f son dos aristas en un mismo bloque, puedo asumir que el bloque es un subgrafo 2-conexo (no es arista sola o vértice solo). La idea es la siguiente: este subgrafo 2-conexo se construye a partir de un ciclo uniendo H -caminos, luego no es difícil ver que las dos aristas están contenidas en un mismo ciclo. \square

Definición 1.8.5. El **grafo bloque** de un grafo G tiene un vértice por cada bloque y por cada vértice de corte de G ; hay una arista entre dos vértices si una representa un bloque y si el otro representa un vértice de corte que está dentro del bloque.

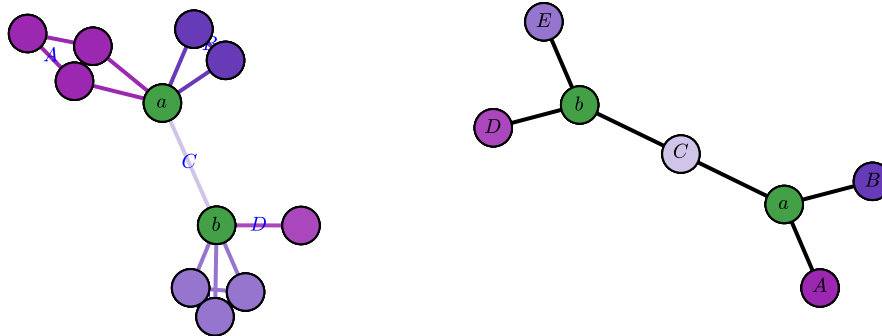


Figura 1.8.46: Ejemplo: G (izquierda) tiene 5 **bloques** (denotados por letras mayúscula: A, B, C, D, E) y 2 **puntos de corte** (denotados por letras minúscula: a, b). Luego el grafo bloque (derecha) de G tiene 7 vértices.

Notar que en nuestro ejemplo, el grafo bloque es un árbol. Esto no es casualidad:

Proposición 1.8.6. El grafo bloque de un grafo conexo es un árbol.

Demostración. **TAREA PARA MI**

\square

1.8.1. Contracciones y menores

Definición 1.8.7. Contraer una arista $e = xy$ equivale a borrar x e y , y añadir un nuevo vértice v_{xy} adyacente a todos los vértices que eran vecinos a x o y .

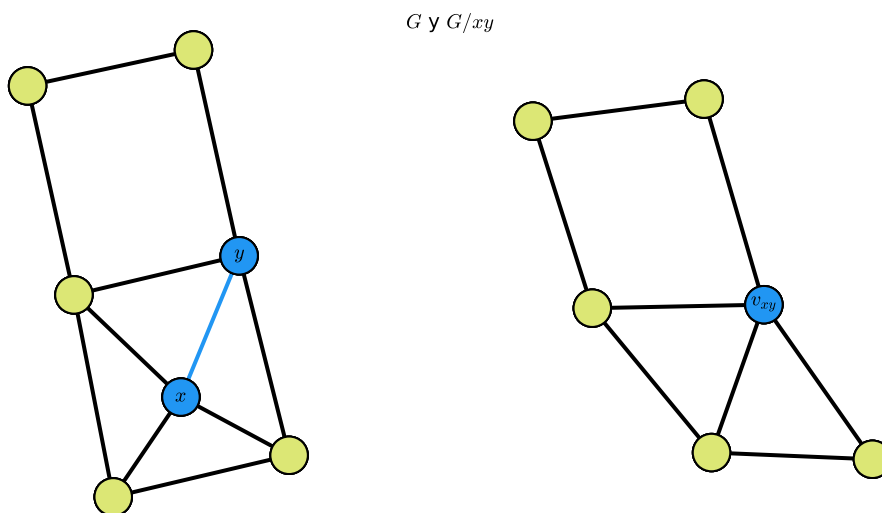


Figura 1.8.47: Ejemplo. Contraemos los vértices x, y y formamos v_{xy} .

Notación 1.8.8. Dado un grafo G y $e = xy \in E(G)$, notamos como G/e al grafo que se obtiene de G al contraer la arista e .

Definición 1.8.9. Decimos que H es un **menor** de G si se puede obtener H a partir de G al utilizar las siguientes operaciones:

1. Borrar vértices.
2. Borrar vértices y aristas.
3. Contraer aristas. O equivalentemente, contraer subgrafos conexos.

Ejemplo 1.8.10. Los subgrafos y contracciones de G son *menores* de G . No necesariamente vale la vuelta:

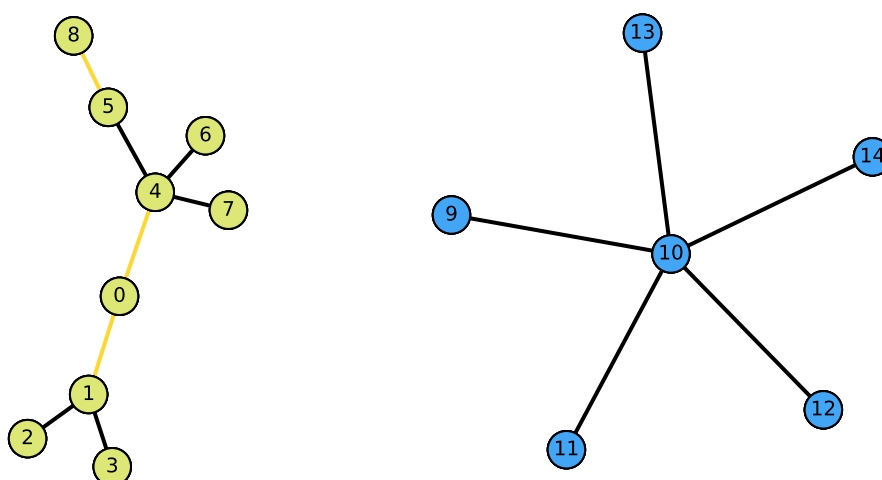


Figura 1.8.48: Ejemplo de menor H de G , que no es subgrafo porque tiene grado máximo $\Delta(H) = 5$. Pues H se obtiene luego de contraer las aristas de G

1.8.2. subdivisiones

Sea X un grafo fijo.

Definición 1.8.11. Llamamos **subdivisión** de X a cualquier grafo G que se obtiene de 'subdividir' algunas aristas de X y dibujando encima nuevos vértices. Más precisamente, reemplazamos las aristas de X con nuevos caminos entre sus extremos, de manera que estos caminos no se intersecan entre si y tampoco intersecan a $V(X)$ salvo en los extremos. Diremos que G es un TX .

Llamaremos a los vértices originales de X , **vértices de ramificación de los de TX** ; a los nuevos vértices los llamaremos **vértices subdivisores**.

Si un grafo Y contiene a TX como subgrafo, diremos que X es una **menor topológica** de Y .

Notar que los vértices subdivisores tienen grado 2 y los vértices de ramificación no cambian de grado.

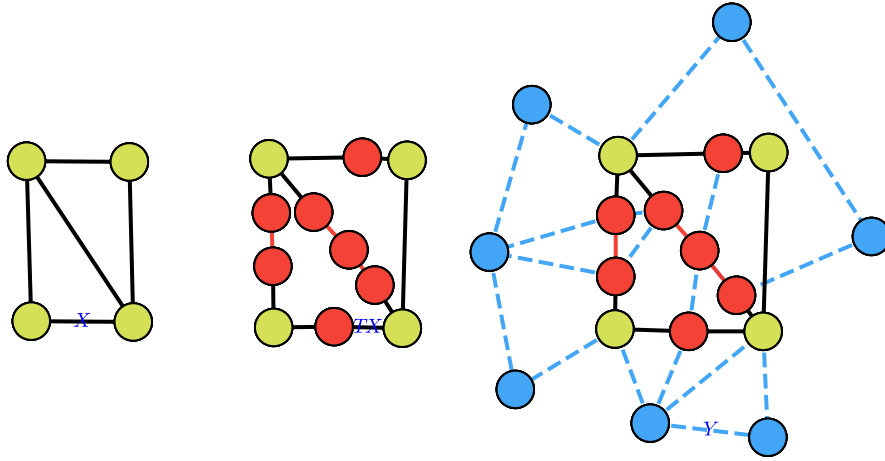


Figura 1.8.49: De izquierda a derecha, tenemos la construcción prograssia de X , luego le agregamos **vértices subdivisores** formando TX , y finalmente ilustramos un ejemplo de grafo Y con X como menor topológico.

Definición 1.8.12. Similarmente, reemplazando los vértices $x \in X$ con grafos conexos disjuntos G_x , y las aristas $xy \in X$ con conjuntos no vacíos de $G_x - G_y$ aristas, obtenemos un grafo que llamaremos IX . Recíprocamente, decimos que X se obtiene a partir de G **contrayendo** subgrafos G_x (y fusionando las $G_x - G_y$ aristas), y lo llamamos una **menor contraída** de G .

Si un grafo Y contiene un IX como subgrafo, decimos entonces que X es una **menor** de Y , llamamos a IX un **modelo** de X en Y , y denotamos $X \leq Y$

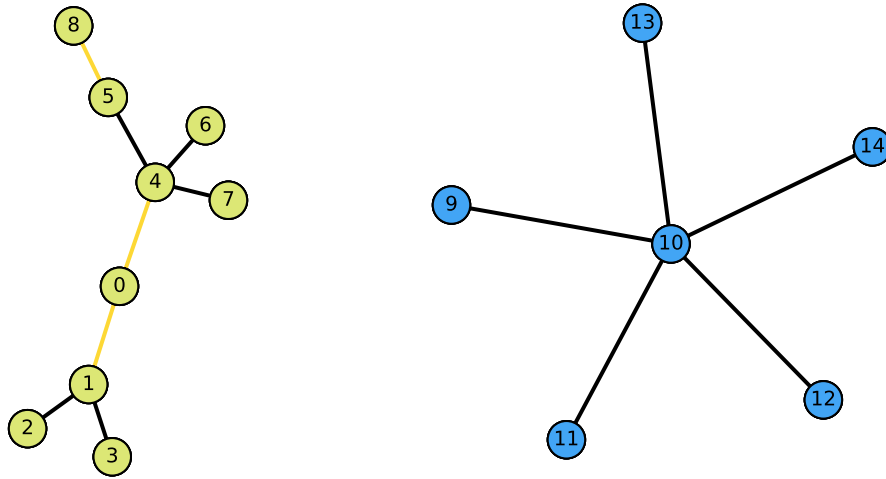


Figura 1.8.50: De izquierda a derecha, tenemos el grafo X , que se obtiene de contraer **subgrafos** de G ; finalmente, el grafo Y tiene a X como menor y a G como modelo de X en Y

Por lo tanto, X es un menor de Y si y solo si existe una función $\varphi : S \subset V(Y) \rightarrow V(X)$ tal que para todo vértice $x \in X$ si preimagen $\varphi^{-1}(x)$ es conexa en Y y para toda arista $xx' \in E(X)$ existe una arista en Y entre conjuntos de ramificación $\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(x')$. Si el dominio de φ es todo $V(Y) = S$, y si $xx' \in E(X)$ siempre que $x \neq x'$ e Y tiene una arista entre $\varphi^{-1}(x)$ y $\varphi^{-1}(x')$ (es decir Y es una IX), decimos que φ es una **contracción** de Y en X .

Proposición 1.8.13. *La relación de menores \leq y la relación de menores topológicos son ordenes parciales en la clase de grafos finitos. Es decir, son reflexivos, antisimétricos, y transitivos.*

Si G es una IX , luego $P = \{G_x \mid x \in X\}$ es una partición de $V(G)$, y notamos $G/P := X$. Si $U = G_x$ es el único conjunto de ramificación que no es un singleton, escribimos $G/U := X$, y notamos v_U al vértice $x \in X$ al que se contrae U , y pensamos al resto de X como un subgrafo inducido de G . El caso más simple es cuando U contiene exactamente dos vértices que forman una arista $e = U$, aquí escribiremos $G/e = X$, el grafo que se obtiene de **contraer la arista** e .

Proposición 1.8.14. *Sean X e Y grafos finitos. Entonces X es una menor de Y si y solo si existen grafos G_0, \dots, G_n tales que $G_0 = Y$ y $G_n = X$, y además G_{i+1} se obtiene a partir de G_i borrando aristas, contrayendo aristas, o borrando vértices.*

Demostración. Estas tres últimas operaciones claramente producen una menor X , pues la relación de menor es transitiva. Recíprocamente, se puede hacer inducción en $|Y| + ||Y||$. □

Finalmente, tenemos la siguiente relación entre menores y menores topológicos:

Proposición 1.8.15. *no entiendo por que vale el segundo item.*

- (I) *Todo TX es también un IX (ver la siguiente figura); por lo tanto, toda menor topológica de un grafo es su menor (ordinaria).*
- (II) *Si $\Delta(X) \leq 3$, entonces todo IX contiene un TX ; con lo cual, toda menor con grado máximo a lo sumo 3 de un grafo es también su menor topológico.*

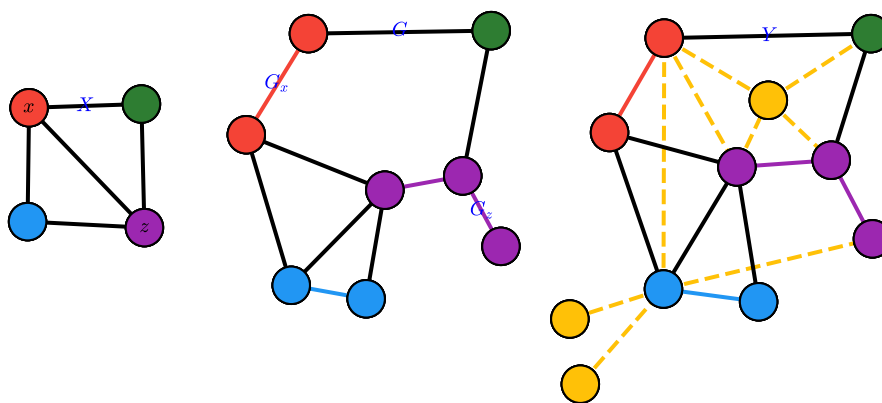


Figura 1.8.51: Ejemplo: Una subdivisión de K^4 visto como IK^4 .

Ahora que conocemos todas las relaciones standard entre grafos, podemos definir lo que significa embeber a un grafo en otro.

Definición 1.8.16. Básicamente, una **inmersión** (o **embedding** en inglés) de H en G es un mapa inyectivo $\varphi : V(H) \rightarrow V(G)$ tal que preserva la estructura en la que estamos interesados. Con lo cual, φ embebe a H en G como un subgrafo si preserva la adyacencia entre vértices, y como subgrafo inducido si preserva tanto la adyacencia como la no adyacencia. Si φ está definido también en $E(H)$ como en $V(H)$ y manda xy en caminos independientes de G entre $\varphi(x)$ y $\varphi(y)$, decimos que φ embebe a H en G como un menor topológico. Similarmente, decimos que es una inmersión de H en G como un menor, si mapea a $V(H)$ en conjuntos disjuntos de vértices en G conexos, de manera que G tiene una arista entre los conjuntos $\varphi(x)$ y $\varphi(y)$ siempre que xy es una arista de H . Más variantes existen, pero depende del contexto en el que estemos; por ejemplo, se pueden definir de manera obvia las inmersiones de 'subgrafos generadores', y 'menores inducidas', etc.

1.9. Clase 9: 17/04/23

Lema 1.9.1. *Todo grafo 3-conexo, distinto de K_4 , tiene una arista e tal que G/e es 3-conexo.*

Demostración. Supongamos que no hay una arista con esta propiedad. Es decir, para toda $xy \in E(G)$, el grafo G/xy tiene un conjunto separador S de a lo más 2 vértices. Como G es 3-conexo, v_{xy} (el vértice que sale de contraer la arista xy) tiene que estar en S y $|S| = 2$, ya que $|S| = 0$ es imposible porque el grafo es conexo y por otro lado si $|S| = 1$, estamos diciendo que G se puede separar con un solo vértice si $v_{xy} \notin S$ o si $v_{xy} \in S$ entonces podemos desconectar a G con los vértices x, y , imposible. Luego, escribimos $S = \{z, v_{xy}\}$ con $z \notin \{x, y\}$ separador de G/xy . Con lo cual, $T = \{z, x, y\}$ separa a G . Como ningún subconjunto propio de T separa, cada vértice de T tiene un vecino en cada componente de $G \setminus T$.

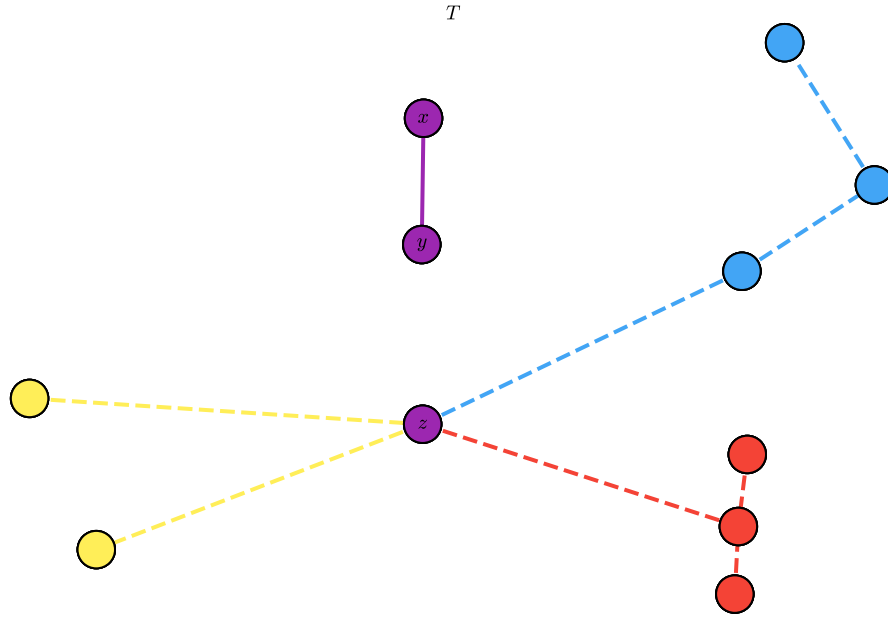


Figura 1.9.52: Ilustración del conjunto T , donde se muestra que el vértice z tiene vecinos en cada componente de $G \setminus T$.

Como xy era arbitrario, podemos elegir la arista xy , el vértice z y la componente C tal que $|C|$ es mínimo. Tomo $v \in C$ y es vecino de z . Entoncces G/vz tampoco es 3-conexo, o sea que existe w tal que v, z, w (distintos) separan G . Como antes cada una de v, z, w tiene un vecino en cada conponente de $G \setminus \{v, z, w\}$. Como x e y son adyacentes, existe D componente de $G \setminus \{v, z, w\}$ tal que $D \cap \{x, y\} = \emptyset$ (porque $G \neq K_4$!).

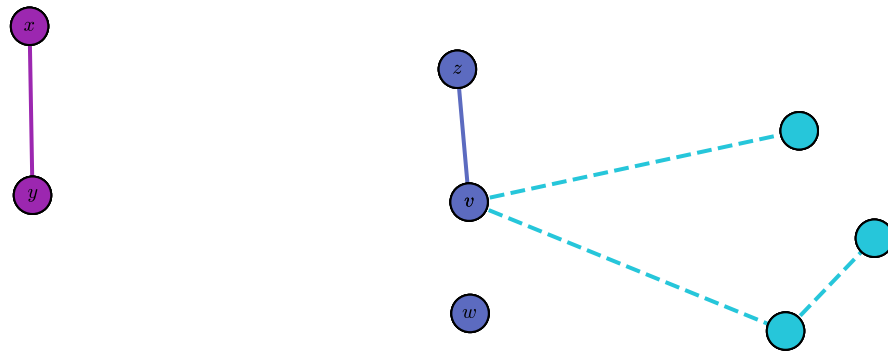


Figura 1.9.53: D está contenido en el subgrafo azul.

Dado que $v \in C$, los vecinos de v en D están en C . Tenemos que $D \cap C \neq \emptyset$, más aún, $D \subsetneq C$. Contradiciendo la minimalidad del orden de C . \square

Teorema 1.9.2 (Teorema de Tutte, 1961). *Un grafo G es 3-conexo si y solo si existe una secuencia de grafos G_0, G_1, \dots, G_n que cumple lo siguiente:*

- (I) $G_0 = K_4$ y $G_n = G$.
- (II) G_{i+1} tiene una arista xy tal que $d(x), d(y) \geq 3$ y $G_i = G_{i+1}/xy$ para todo $i < n$.
Más aún, cada G_i es 3-conexo.

Demostración. Por el lema anterior, podemos quitar una arista recursivamente hasta llegar a K_4 . La vuelta esta en el DIESTEL. \square

1.9.1. Teorema de Wenger

Definición 1.9.3. Si $A, B, X \subset V(G)$ son tales que todo A, B -camino tiene un vértice de X , decimos que X separa a A y B en G .

Teorema 1.9.4 (Wenger, 1927). *Sea $G = (V, E)$ un grafo y sean $A, B \subset V$. El mínimo número de vértices que separa a A y B es igual al máximo número de A, B -caminos disjuntos.*

Apéndice A

Primera parte de la materia (primer capítulo del Diestel)

A.1. Un poco de álgebra lineal

Sea $G = (V, E)$ un grafo con n vértices y m aristas, digamos $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $E = \{e_1, \dots, e_m\}$.

Definición A.1.1. El **espacio de vértices** $\mathcal{V}(G)$ de G , es el \mathbb{F}_2 -espacio vectorial de todas las funciones $V \rightarrow \mathbb{F}_2$.

Todo elemento de $\mathcal{V}(G)$ corresponde naturalmente con un subconjunto de V , más precisamente con la preimagen de 1, y más aún todo subconjunto de V se representa de manera única de esta manera por su función indicadora. Con lo cual, podemos identificar a $\mathcal{V}(G)$ con el conjunto de subconjuntos de V , i.e. 2^V ; así tenemos un espacio vectorial de los subconjuntos de V : $U + U' = U \Delta U'$ es la diferencia simétrica! y $U = -U$. El cero en este espacio vectorial corresponde con el subconjunto vacío $\emptyset \subset V$. Notar que $\{\{v_1\}, \dots, \{v_n\}\}$ es una base de $\mathcal{V}(G)$, llamada la **base standard**; tenemos entonces que $\dim \mathcal{V}(G) = n$.

Definición A.1.2. Análogamente, podemos definir el **espacio de aristas** $\mathcal{E}(G)$ de G , más precisamente, el \mathbb{F}_2 -espacio vectorial de funciones $E \rightarrow \mathbb{F}_2$.

Nuevamente, los elementos de $\mathcal{E}(G)$ se corresponden con subconjuntos de E : tomamos la preimagen de 1. En este caso, la suma de vectores es la diferencia simétrica de conjuntos de aristas, y el conjunto vacío $\emptyset \subset E$ corresponde con el cero, además $F = -F$ para todo $F \subset E$. La **base standard** es $\{\{e_1\}, \dots, \{e_m\}\}$, luego $\dim \mathcal{E}(G) = m$.

Dados $F, F' \in \mathcal{E}(G)$, vistos como funciones, podemos definir:

$$\langle F, F' \rangle := \sum_{e \in E} F(e)F'(e) \in \mathbb{F}_2.$$

Esta cantidad es cero si y solo si F y F' tienen una cantidad par de aristas en común, i.e. $|F \cap F'| \equiv 0 \pmod{2}$; en particular ciertamente puede suceder que $\langle F, F' \rangle = 0$ con $F \neq \emptyset$. De todas formas, es simétrico y \mathbb{F}_2 -bilineal. De manera la manera usual, para cualquier subespacio $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}(G)$, podemos definir el subespacio ortogonal:

$$\mathcal{F}^\perp := \{D \in \mathcal{E}(G) \mid \langle F, D \rangle = 0, \forall F \in \mathcal{F}\}.$$

Que es un subespacio. Se tiene que

$$\dim \mathcal{F} + \dim \mathcal{F}^{\perp} = m.$$

Pues se sigue de la demostración standard, ya que este producto es *no degenerado*, es decir el morfismo de espacios vectoriales $F \mapsto \langle \cdot, F \rangle$ es inyectivo, luego la ecuación se sigue de álgebra lineal (estudiando el espacio dual).

Definición A.1.3. El **espacio de ciclos** $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G)$ es el subespacio de $\mathcal{E}(G)$ generado por todos los ciclos de G (por sus aristas). La dimensión de este espacio se lo llama a veces **número ciclomático** de G .

Proposición A.1.4. Las siguientes afirmaciones son equivalentes para conjuntos de aristas $D \subset E$:

1. $D \in \mathcal{C}(G)$;
2. D es una unión (posiblemente vacía) disjunta de ciclos en G ;
3. Todos los grados de los vértices de (V, D) son pares.

Demostración. Como los ciclos tienen grados pares y tomar diferencia simétrica preserva esta propiedad, luego 1. implica 3. por inducción en la cantidad de ciclos que generan D con la suma. Que 3. implica 2. se sigue por inducción en $|D|$: si $D \neq \emptyset$ entonces (V, D) contiene un ciclo por la Proposición ??, borrando las aristas de C podemos proceder inductivamente pues los vértices siguen teniendo grado par. Finalmente la implicación 2. \Rightarrow 1. es inmediata de la definición de $\mathcal{C}(G)$. \square

Bibliografía

[DSS10] Reinhard Diestel, Alexander Schrijver, and Paul Seymour. *Graph theory*, volume 7. 2010.