

# Apuntes - GRAFOS

Enzo Giannotta

1 de junio de 2023

# Índice general

# Capítulo 1

## Parte I: Introducción a grafos

Bibliografía: [?].

### Evaluaciones:

**Nota:** sumativa significa examen.

1. Sumativa 1 : Lunes 24 abril. 30 porciento.
2. Sumativa 2: Lunes 22 mayo: 25 porciento.
3. Sumativa 3: Jueves 6 julio: 25 porciento.
4. Talleres (usualmente los viernes): 20 porciento (hay que trabajar y entregar lo que se hizo en el taller, te pueden hacer resolver en clase al azar el ejercicio al siguiente taller).

### 1.1. Clase 1: 16/03/23

**Definición 1.1.1.** Un **Grafo** es un par ordenado  $G = (V, E)$ , donde  $V$  es un conjunto de **vértices** y  $E$  es un conjunto de **Aristas**. Es decir, las aristas son pares  $(v_1, v_2)$  con  $v_1, v_2 \in V$ . En un principio si el grafo **no es dirigido**, no importa el orden de los vértices que aparece en un par  $(v_1, v_2)$ .

La manera de visualizar un grafo es dibujar cada vértice y unir dos pares de vértices  $v_1, v_2 \in V$  por un segmento que representa la arista  $(v_1, v_2)$ .

**Ejemplo 1.1.2.** Sea  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  y  $E = \{\{1, 3\}, \{3, 4\}, \{5, 4\}, \{4, 1\}, \{1, 2\}\}$

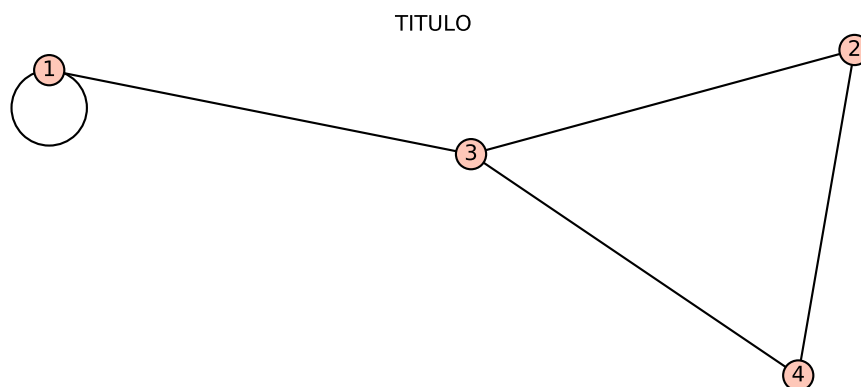


Figura 1.1.1: Dibujo del grafo  $V$ .

**Definición 1.1.3.** Para un grafo  $G = (W, R)$ , denotamos por  $V(G)$  a  $W$  (los vértices) y por  $E(G) = R$  (las aristas).

El número de vértices de  $G$  se denota como  $|G|$  o  $|V(G)|$ , y se llama **orden** de  $G$ . El número de aristas lo denotamos como  $||G||$  o simplemente  $|E(G)|$ . Un grafo con orden 1 o 0 se llama **trivial**.

**Definición 1.1.4.** Si  $v \in V(G)$  y  $e \in E(G)$ , y además  $v \in e$ , decimos que  $v$  es **incidente** en  $e$  y viceversa, i.e.  $e$  es incidente en  $v$ . Los dos vértices que inciden en una arista son sus **extremos**.

Dos vértices  $x, y$  son **adyacentes** o **vecinos** si  $(x, y) \in E$  (Otra notación:  $xy \in E$  donde  $xy$  es la arista).

**Observación 1.1.5.** Si mi grafo tiene  $n$  vértices, entonces tiene a lo sumo  $\binom{n}{2}$  aristas. Luego, la cantidad de grafos que se pueden construir es  $2^{\binom{n}{2}}$ .

**Definición 1.1.6.** Si en un grafo todo par de vértices es adyacente, decimos que el grafo es **completo**. Notamos:  $K_n$  para todo  $n \geq 1$ , al grafo completo con  $n$  vértices.

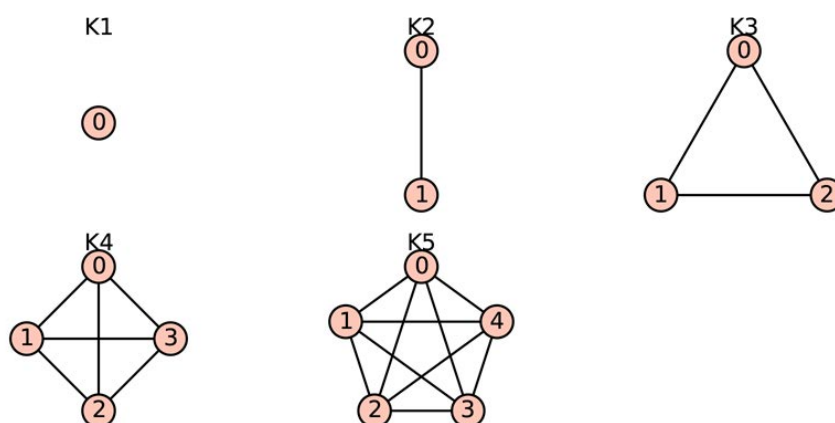


Figura 1.1.2: Ejemplo de grafos completos de orden 1, 2, 3 y 5.

**Definición 1.1.7.** Si un par de vértices no es adyacente, decimos que son **independientes** o **estables**.

Si  $V' \subset V(G)$  es tal que cada par de vértices en  $V'$  es independiente, entonces decimos que  $V'$  es **independiente**.

**Definición 1.1.8.** Sean  $G1 = (V1, E1)$  y  $G2 = (V2, E2)$  grafos, decimos que  $\varphi : V1 \rightarrow V2$  es un **isomorfismo** si para todo par de vértices  $x, y \in V1$  se tiene que  $xy \in E1 \Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E2$ .

Usualmente no hacemos distinciones entre dos grafos isomorfos. De hecho en ese caso escribimos  $G1 = G2$ .

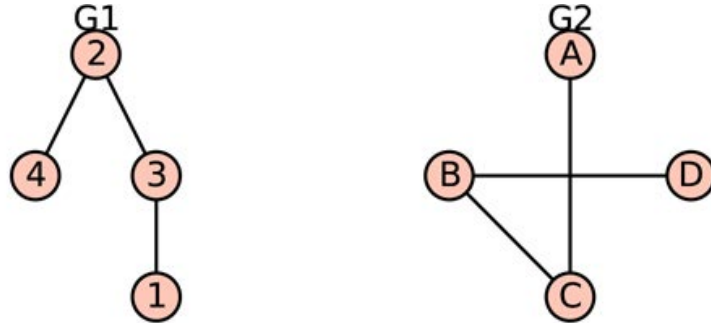


Figura 1.1.3: Ejemplo de isomorfismo de grafos.

En este ejemplo un isomorfismo válido entre  $G1$  y  $G2$  es

$$\begin{aligned}\varphi : 1 &\mapsto A \\ 2 &\mapsto B \\ 3 &\mapsto C \\ 4 &\mapsto D\end{aligned}$$

**Definición 1.1.9.** Definimos:

- $G \cup G' := (V \cup V', E \cup E')$
- $G \cap G' := (V \cap V', E \cap E')$

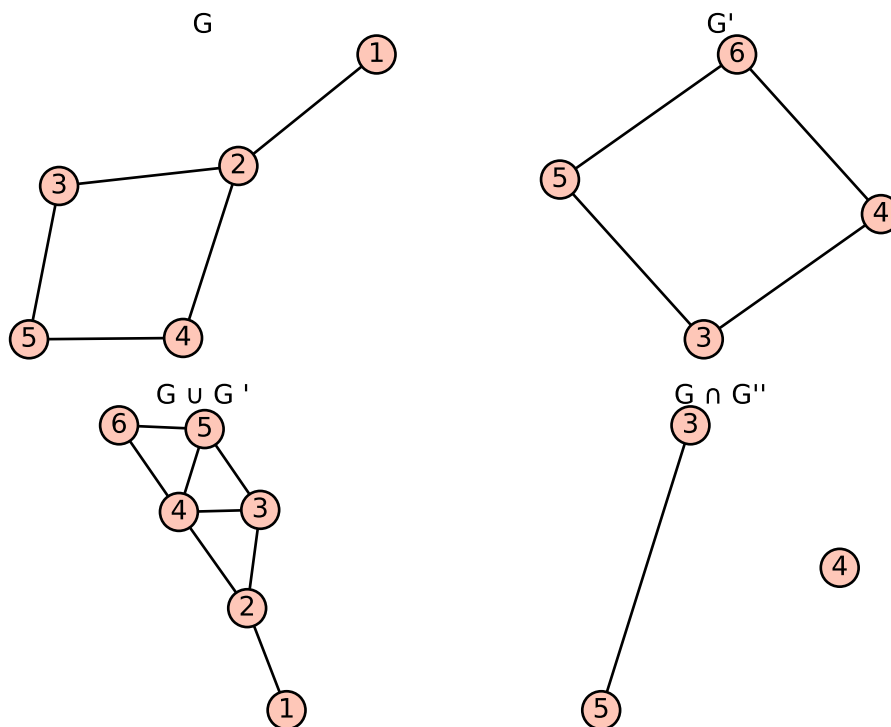


Figura 1.1.4: Ejemplo de unión e intersección de grafos.

**Definición 1.1.10.** Si  $G \cap G' = \emptyset$ , decimos que son **disjuntos**.

Si  $V' \subset V$  y  $E' \subset E$ , decimos que  $G'$  es **subgrafo** de  $G$ , y que  $G$  es **supergrafo** de  $G'$ . Notamos  $G' \subset G$ . Si  $G'$  es subgrafo de  $G$  pero  $G \neq G'$ , decimos que  $G'$  es **subgrafo propio** de  $G$  y análogamente decimos que  $G$  **supergrafo propio** de  $G'$ ; notamos  $G' \subsetneq G$ .

**Definición 1.1.11.** Sea  $G' \subset G$ , tal que  $G'$  contiene todas las aristas  $xy \in E$  tal que  $x, y \in V'$ . Decimos que  $G'$  es un **subgrafo inducido** de  $G$ .

En este caso diremos que  $V'$  **induce**  $G'$  en  $G$ , y escribimos  $G' = G[V']$  para un subconjunto  $V' \subset V$ .

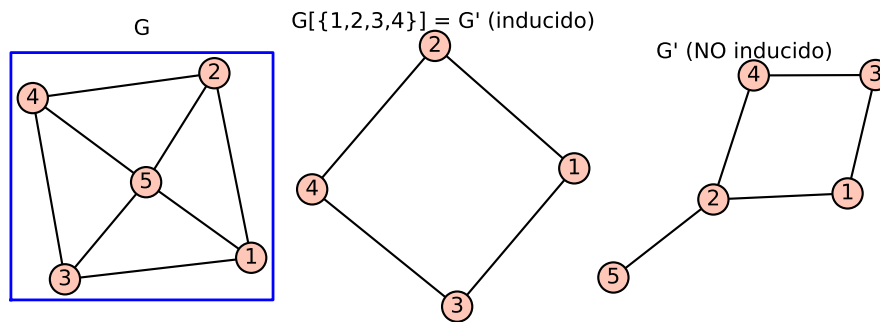


Figura 1.1.5: Ejemplo de grafo inducido y no inducido.

## 1.2. Clase 2: 18/03/23

**Definición 1.2.1.** Si  $U \subset V(G)$ , escribimos  $G \setminus U$  para denotar  $G[V \setminus U]$ . Es decir,  $G \setminus U$  se obtiene de borrar los vértices de  $U$  y sus aristas incidentes.

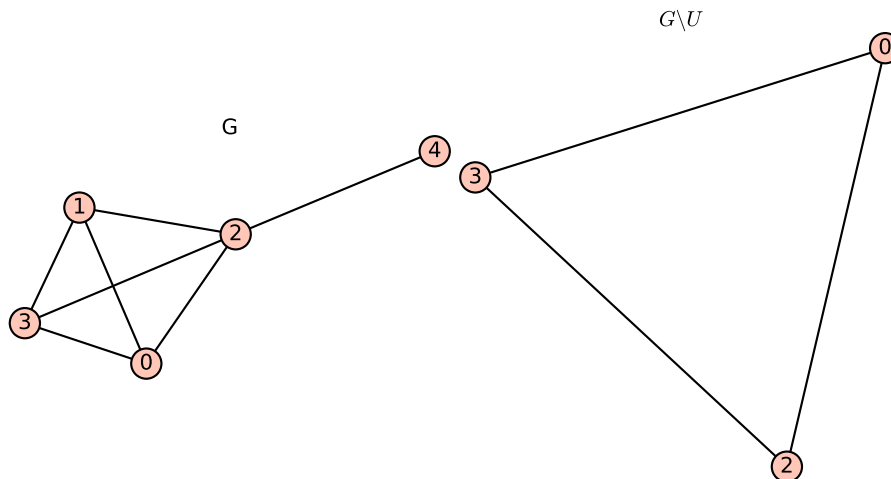


Figura 1.2.6: Ejemplo de  $G \setminus U$ .

**Definición 1.2.2.** El **complemento**  $\overline{G}$  de un grafo  $G$ , es el grafo con vértices  $V(G)$  y que tiene una arista  $xy$  si y solo si  $xy \notin E(G)$ .

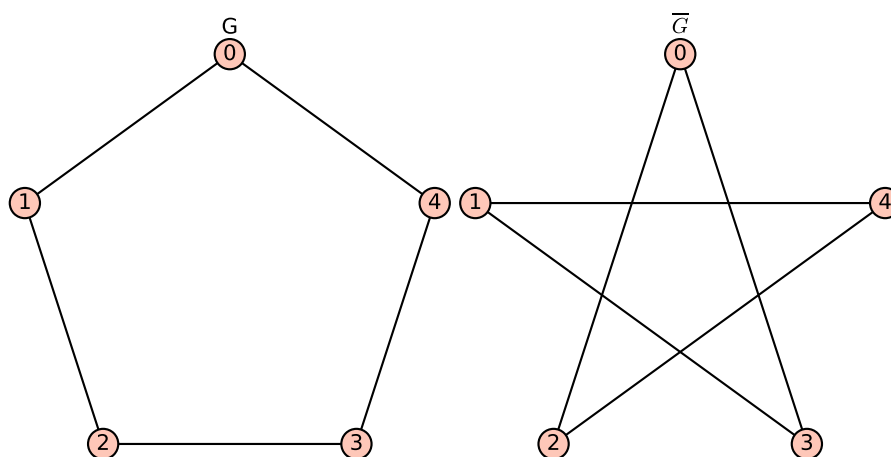


Figura 1.2.7: Ejemplo de complemento.

Notar que en el ejemplo de arriba,  $G$  y  $\overline{G}$  son isomorfos. Esto no pasa necesariamente, por ejemplo el complemento de un grafo completo es el grafo sin aristas.

### 1.2.1. El grado de un vértice

**Definición 1.2.3.** Sea  $G$  un grafo no vacío, y sea  $v \in V(G)$ . El conjunto de vecinos de  $v$  lo denotamos como  $N(v)$  o si el contexto no es claro  $N_G(v)$ . Llamamos a este conjunto el **vecindario** de  $v$ .

Más en general, si  $U \subset V(G)$ , no vacío. El **vecindario** de  $U$  es el subconjunto de vértices de  $V(G) \setminus U$  que contiene vecinos de algún elemento de  $U$ . Notamos  $N(U)$  o  $N_G(U)$ .

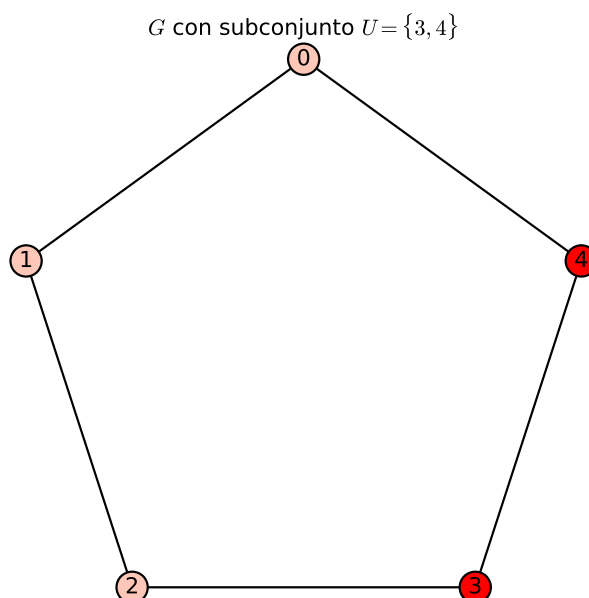


Figura 1.2.8: Ejemplo de vecindario de  $U = \{3, 4\}$ . Tenemos que  $N(U) = \{0, 2\}$ .

**Definición 1.2.4.** El **grado** de un vértice  $v \in V(G)$  es el número de aristas que inciden en  $v$  y lo denotamos como  $d(v)$  o  $d_G(v)$ . Notar que

$$d(v) = |N(v)|,$$

porque no permitimos multigrafos.

Si  $v$  tiene grado 0, decimos que es **aislado**.

**Definición 1.2.5.** Definimos la cantidad de  $G$ :

$$\delta(G) := \min_{v \in V(G)} \{d(v)\}.$$

Es el **grado mínimo** de  $G$ .

Análogamente, tenemos la cantidad  $G$ :

$$\Delta(G) := \max_{v \in V(G)} \{d(v)\}.$$

Es el **grado máximo** de  $G$ .

En el caso que todos los vértices tienen el mismo grado, i.e.  $\delta(G) = \Delta(G)$ , decimos que  $G$  tiene grado  $k$  y que  $G$  es  **$k$ -regular** o simplemente **regular**.

**Definición 1.2.6.** Definimos la cantidad del grafo  $G$ :

$$d(G) := \frac{1}{|V(G)|} \sum_{v \in V(G)} d(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{v \in V(G)} d(v).$$

Es el **grado promedio** de  $G$ .

**Observación 1.2.7.**

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)| = 2||G||.$$

Con lo cual,

$$d(G) = 2 \frac{|E(G)|}{|V(G)|} = 2 \frac{||G||}{|G|}.$$

**Proposición 1.2.8.** El número de vértices de grado impar en un grafo siempre par.

*Demostración.* Por la observación anterior,  $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|G| \equiv 0 \pmod{2}$  con lo cual,

$$\#\{v \in V(G) \mid d(v) \equiv 1 \pmod{2}\} = \sum_{v \mid d(v) \equiv 1 \pmod{2}} d(v) \equiv 0 \pmod{2}.$$



□

**Proposición 1.2.9.** *Para todo grafo  $G$  con al menos una arista, existe un subgrafo  $H$  tal que*

$$\delta(H) > \frac{|E(H)|}{|V(H)|} \geq \frac{|E(G)|}{|V(G)|}.$$

*Demostración.* En efecto, la idea es la siguiente: construimos una secuencia de grafos  $G = G_0 \supset G_1 \supset \dots$  de subgrafos inducidos, tales que si  $G_i$  tiene un vértice de grado  $d(v_i) \leq \frac{|E(G_i)|}{|V(G_i)|}$ , entonces tomamos  $G_{i+1} := G_i \setminus v_i$ ; si no, la secuencia termina en  $H := G_i$ . Por la elección de  $v_i$  se sigue que  $\frac{|E(G_{i+1})|}{|V(G_{i+1})|} \geq \frac{|E(G_i)|}{|V(G_i)|}$ , pues esto sucede si y solo si

$$\begin{aligned} \frac{|E(G_i)| - d(v_i)}{|V(G_i)| - 1} &\geq \frac{|E(G_i)|}{|V(G_i)|} \\ \Leftrightarrow (|E(G_i)| - d(v_i)) |V(G_i)| &\geq |E(G_i)| (|V(G_i)| - 1) \\ \Leftrightarrow -d(v_i) |V(G_i)| &\geq -|E(G_i)| \\ \Leftrightarrow \frac{|E(G_i)|}{|V(G_i)|} &\geq d(v_i). \end{aligned}$$

En particular,  $\frac{|E(H)|}{|V(H)|} \geq \frac{|E(G)|}{|V(G)|}$ .

Afirmamos que  $H$  tiene al menos una arista, de lo contrario  $\frac{|E(H)|}{|V(H)|} = 0 < \frac{|E(G)|}{|V(G)|}$ , por tener  $G$  al menos una arista. En particular,  $H \neq \emptyset$ . Como  $H$  es el mínimo de esta construcción, se tiene que  $\delta(H) > \frac{|E(H)|}{|V(H)|}$ . □

## 1.2.2. Caminos y Ciclos

**Definición 1.2.10.** Un **camino** es un grafo no vacío  $P = (V, E)$  de la forma

$$V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}, \quad k \geq 0.$$

Con

$$E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\}.$$

Donde todos los  $x_i$  son distintos.

Decimos que  $|G|$ , i.e. el número de aristas, es su **longitud**.

Usualmente denotamos al camino  $P$  como la secuencia de vértices

$$P = x_0x_1 \dots x_k.$$

En este caso diremos que  $P$  es un **camino entre**  $x_0$  y  $x_k$ .

Notar que  $|G| = k + 1$ , y que  $|G| = k$ .

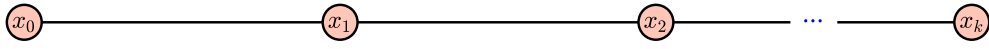


Figura 1.2.9: Dibujo de un camino de  $k + 1$  vértices.

**Definición 1.2.11.** Sea  $C$  un grafo que se construye a partir de un camino  $P = x_0x_1 \cdots x_k$  con  $k \geq 1$ , en donde agregamos la arista  $x_kx_0$ . Este grafo se llama **ciclo**. Notamos a esta construcción  $C := P + x_kx_0$  o  $x_0x_1 \cdots x_kx_0$ .

La **longitud** de un ciclo es su número de aristas, es decir  $|C|$ .

Notar que  $|C| = k$ .

**Definición 1.2.12.** Sea  $G$  un grafo. Definimos la **cintura** de  $G$  como la mínima longitud  $g(G)$  de un ciclo en  $G$ .

Definimos la **circunferencia** como la máxima longitud de un ciclo en  $G$ .

Si  $G$  no tiene ciclos, definimos  $g(G) := \infty$  y circunferencia 0.

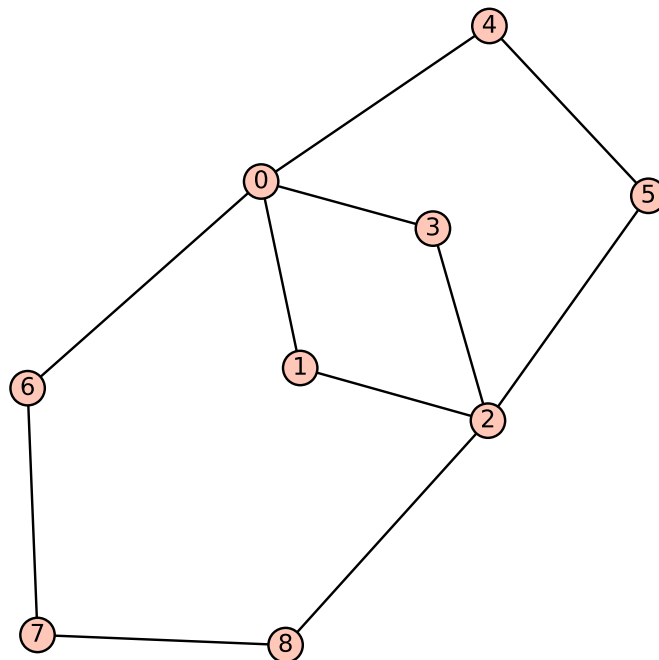


Figura 1.2.10: Ejemplo de ciclos en un grafo de cinutra igual a 4.

**Definición 1.2.13.** Una arista que une a dos vértices de un ciclo  $C$ , pero que no pertenece a  $E(C)$ , se la llama **cuerda**.

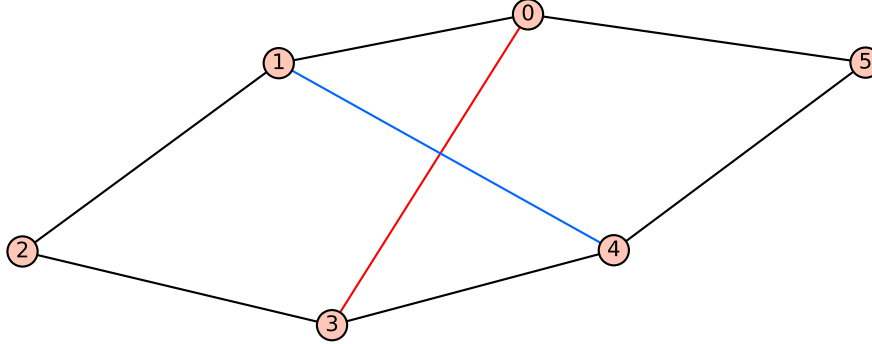


Figura 1.2.11: Ejemplo de dos cuerdas de un ciclo  $C$ .

**Proposición 1.2.14.** Todo grafo  $G$  contiene un camino de largo  $\geq \delta(G)$ . Más aún, si  $\delta(G) \geq 2$ , entonces también contiene un ciclo de largo  $\geq \delta(G) + 1$ .

*Demostración.* Sea  $P = x_0x_1 \dots x_k$  un camino de largo  $k$  máximo en  $G$ . El caso  $k = 1$  es inmediato, luego supongamos que  $k \geq 1$ .

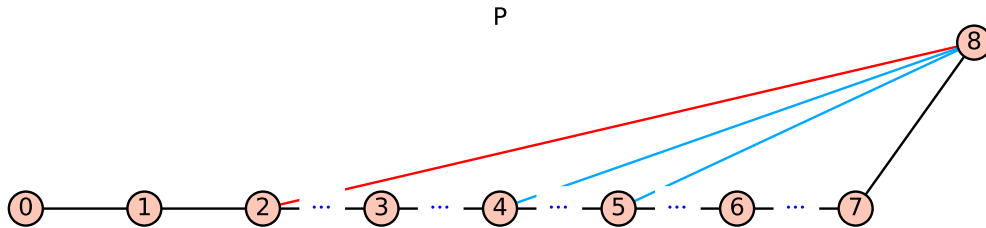


Figura 1.2.12: Camino  $P$  de longitud maximal  $k$ . Imaginemos que  $x_0 = 0$  y que  $x_k = 8$  (no pude cambiar las etiquetas en sage math cuando grafique el grafo).

Notar que por maximalidad de  $P$ , todos los vecinos de  $x_k$  están en  $V(P)$ , de lo contrario habria un camino más largo. Con lo cual

$$|V(P)| = k \geq d(x_k) + 1 \geq \delta(G) + 1.$$

Con lo cual,  $|P| \geq \delta(G)$ .

Ahora, sea  $i < k$  el menor índice tal que  $x_i x_k \in E(G)$ . Como  $\delta(G) \geq 2$ , se sigue que  $i < k - 1$ , i.e.  $x_i$  y  $x_k$  no son adyacentes, luego tomamos el ciclo  $C = x_i x_{i+1} \dots x_k x_i$ . Notar que entonces la longitud de  $|C| \geq \delta(x_k) + 1 \geq \delta(G) + 1$ .  $\square$

### 1.3. Clase 3: 20/03/23

**Definición 1.3.1.** La **distancia** entre dos vértices  $x, y$  de un grafo  $G$ , es la longitud de un camino con longitud mínima entre  $x, y$ , la notamos

$$d(x, y).$$

Si no hay un camino entre  $x$  e  $y$ , escribimos

$$d(x, y) = \infty.$$

El **diámetro** de  $G$  es el máximo de las distancias entre todos los pares de vértices, lo notamos

$$\text{diam}(G).$$

Notar que  $d(x, y) = 0$  si y solo si  $x = y$ .

**Definición 1.3.2.** El **radio** de un grafo  $G$ , denotado  $\text{rad}(G)$ , es la cantidad

$$\text{rad}(G) = \min_{x \in V(G)} \max_{y \in V(G)} d(x, y).$$

Decimos que un vértice  $v \in V(G)$  es **central**, si

$$\max_{y \in V(G)} d(v, y) = \text{rad}(G).$$

Es decir,  $v$  minimiza la función  $x \mapsto \max_{y \in V(G)} d(x, y)$ .

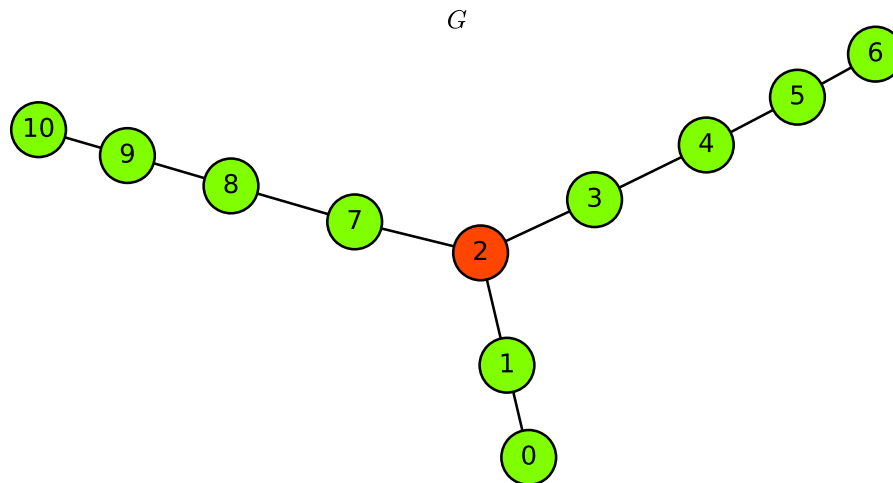


Figura 1.3.13: Ejemplo de vértice central es 3 y tiene radio 4. El grafo  $G$  tiene diámetro 8.

**Ejercicio 1.3.3 (Entrega de taller).** Probar que

$$\text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq 2\text{rad}(G).$$

*Solución.* Si el grafo  $G$  no es conexo, luego el radio y el diámetro son infinito, luego vale la desigualdad. En efecto, por un lado si  $x \in V(G)$  está fijo, como  $G$  no es conexo existe  $y \in V(G)$  tal que  $d(x, y) = \infty$ , con lo cual  $\max_{y \in V(G)} d(x, y) = \infty$  para  $x$  fijo, luego si tomamos mínimo sobre los  $x$  se tiene que  $\text{rad}(G) = \infty$ . Por otro lado,  $\text{diam}(G) = \infty$  porque es el máximo sobre todas las distancias entre dos vértices, y como mencionamos recién, al no ser conexo el grafo tiene que haber una distancia infinita entre algún par de vértices.

Ahora supongamos que  $G$  es conexo, es decir para todo par de vértices  $x, y$  existe un camino  $P_{xy}$  que los conecta, sin pérdida de generalidad supongamos que es el más corto, i.e.  $d(x, y)$  es la longitud de  $P_{xy}$ . Se deduce que  $d(x, y) \leq \text{diam}(G)$  por definición de diámetro. Tomando máximo sobre  $y$  y luego mínimo sobre  $x$  se sigue por definición que

$$\text{rad}(G) \leq \text{diam}(G).$$

Esto prueba la primera desigualdad. Ahora veamos la segunda.

Sea  $o$  un vértice que minimice la función  $x \mapsto \max_{y \in V(G)} d(x, y)$ , es decir,  $o$  es central. Ahora tomemos dos vértices arbitrarios  $x, y$ . Como  $o$  minimiza la función anterior, tenemos que  $d(x, o) \leq \text{rad}(G) = \max_{z \in V(G)} d(o, z)$ , es decir existe un camino de longitud  $\leq \text{rad}(G)$  que une  $x$  con  $o$ . Análogamente, existe un camino de longitud  $\leq \text{rad}(G)$  que une  $o$  con  $y$ . Concatenando ambos caminos obtenemos un camino entre  $x$  e  $y$  de longitud  $\leq 2\text{rad}(G)$ . Tomando máximo sobre  $x, y$  obtenemos la otra desigualdad:

$$\text{diam}(G) \leq 2\text{rad}(G).$$

□

Si queremos relacionar el radio o diámetro con el grafo mínimo, promedio o máximo debemos tener otros parámetros como intermediario. Por ejemplo, los caminos tienen grado mínimo 1 pero pueden tener radio y diámetro arbitrariamente grandes. O podemos tener radio y diámetro arbitrariamente grande y grado mínimo arbitrario. Antes de dar un ejemplo, necesitamos la siguiente definición:

**Definición 1.3.4.** Sea  $G$  un grafo, definimos  $G^k$  como la **potencia** de  $G$ . Es el grafo que contiene los mismos vértices y las aristas son las originales pero agregando a cada vértice  $x$  una arista incidente con cada vértice  $y$  a distancia  $d(x, y) \leq k$ .

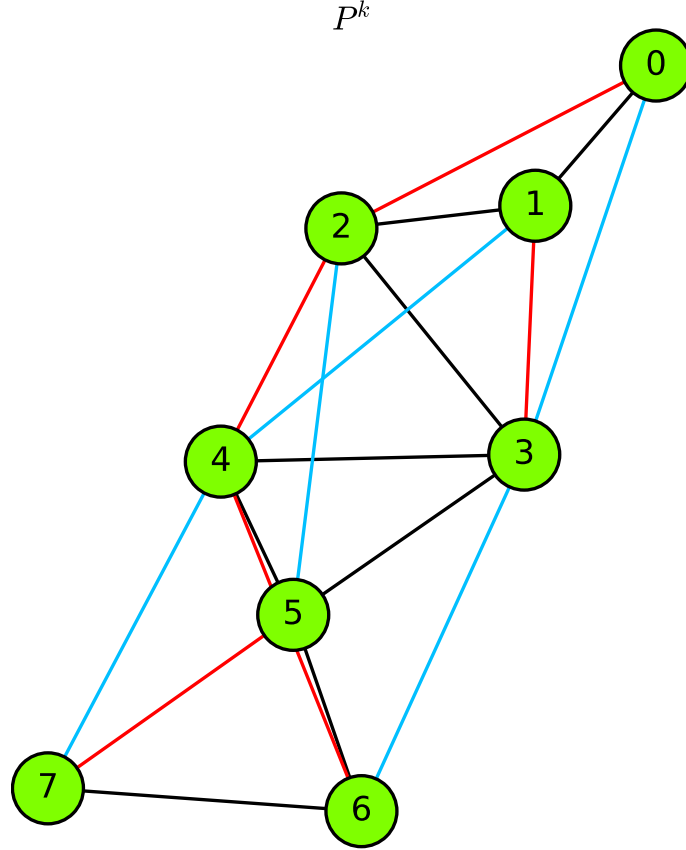


Figura 1.3.14: El camino  $P : 0, 1, 2, \dots, 7$  dibujado en negro, le agregamos aristas para dibujar  $P^3$ . Las aristas rojas conectan nodos a distancia 2 y las azules 3.

Por ejemplo, todo camino de longitud  $2n$  tiene  $2n + 1$  vértices, radio  $n$ , diámetro  $2n$ . Luego  $P^k$  tiene misma cantidad de vértices (pero no aristas), mismo radio y diámetro, pero grado  $k$  para todo  $1 \leq k \leq 2n$ .

Vamos a relacionar el radio y grado máximo a través de el número de vértices. Un grafo puede tener muchos vértices, por ejemplo si tiene radio alto, o si tiene grado máximo alto,

**Proposición 1.3.5.** Sea  $d \geq 3$ . Un grafo  $G$  con radio a lo más  $k$  y grado máximo a lo más  $d$ . Entonces tiene menos que  $\frac{d}{d-2}(d-1)^k$  vértices.

*Demostración.* Sea  $z$  un vértice central de  $G$  y  $D_i$  el conjunto de los vértices a distancia  $i$  de  $z$ .

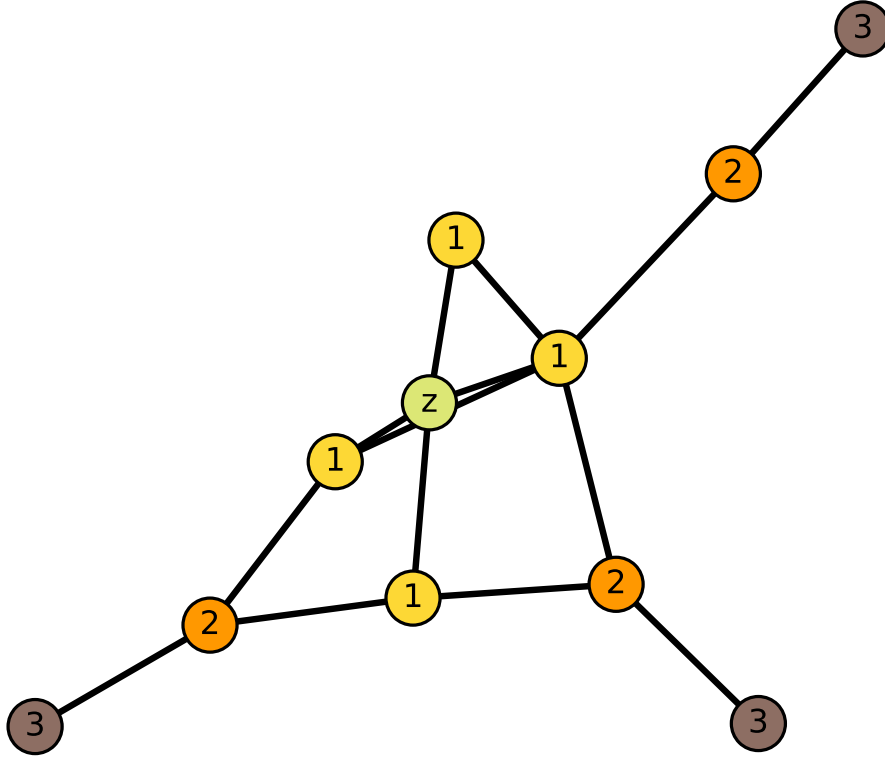


Figura 1.3.15:  $D_0$  son los verdes,  $D_1$  los amarillos, y así...

Tenemos que  $|D_0| = 1, |D_1| \leq \Delta \leq d$ . Notar que cada vértice de  $D_1$  tiene como vecino en  $D_2$  a lo sumo  $d - 1$  vértices, pues ya es vecino de  $z$ . En general, tenemos que

$$|D_{i+1}| \leq |D_i|(d - 1), \quad i \geq 1.$$

Con lo cual

$$|D_{i+1}| \leq |D_1|(d - 1)^i = d(d - 1)^i, \quad i \geq 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned} |V(G)| &= \sum_{i=0}^k |D_i| \leq 1 + d \sum_{i=0}^{k-1} (d - 1)^i \\ &= 1 + d(d - 1)^k - 1/d - 2 \\ &< \frac{d}{d - 2} (d - 1)^k. \end{aligned}$$

□

**Observación 1.3.6.** 1. Cuando el radio es  $k = 1$ , por ejemplo en un grafo estrella, la cantidad de vértices es asintóticamente igual a  $\frac{d}{d-2}(d-1)^k$  cuando  $d \rightarrow \infty$ .

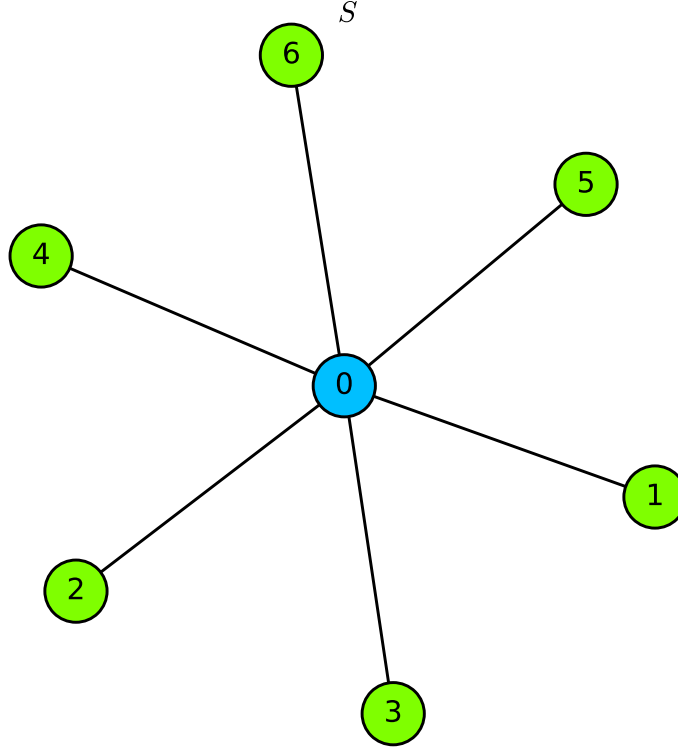


Figura 1.3.16: Ilustración del grafo estrella.

2. La cota no es para nada óptima para grafos de potencia  $P^k$  de caminos. Por ejemplo, si  $P$  tiene  $2n + 1$  vértices,  $k = n$  y  $d = k \geq 3$ . Luego en el mejor de los casos con  $d = 3$ , tenemos que

$$|P^k| = 2n + 1 \ll 3 \cdot 2^n.$$

O sea que la diferencia es exponencial.

Similarmente, podemos acotar el orden de  $G$  por abajo, si es que podemos controlar inferiormente  $\delta$  y  $g$ . Definamos la cantidad para  $d \in \mathbb{R}$  y  $g \in \mathbb{N}$ :

$$n_0(d, g) := \begin{cases} 1 + d \sum_{i=0}^{r-1} (d-1)^i & \text{si } g = 2r + 1 \text{ es impar,} \\ 2 \sum_{i=0}^{r-1} (d-1)^i & \text{si } g = 2r \text{ es par.} \end{cases}$$

**Teorema 1.3.7** (Versión débil). <sup>1</sup> Sea  $G$  un grafo con  $\delta(G) \geq d \geq 2$  y  $g(G) \geq g \in \mathbb{N}$ . Entonces

$$|G| \geq n_0(d, g).$$

En particular,  $|G| \geq n_0(d(G)/2, g)$ .

*Demostración.* Notar que la función es creciente en ambas variables para todo  $d \geq 2$  y  $g \in \mathbb{N}$ . Con lo cual, basta probar la afirmación para  $d = \delta(G)$  y  $g = g(G)$ .

Sea  $v$  un vértice de un ciclo  $C$  de largo mínimo, i.e.  $\geq g$ . Consideremos como  $D_i$  al conjunto de vértices a distancia  $i$  de  $v$  en  $G$ . Como antes,  $|D_0| = 1$ , para cada vértice de  $D_{i+1}$  tiene un vecino en  $D_i$  si  $i > 0$ ; como cada vértice de  $D_i$  tiene un vecino

<sup>1</sup>La versión fuerte de este teorema, por Alon, Hoory and Linial, 2002, dice que si  $d(G) \geq d \geq 2$  y  $g(G) \geq g \in \mathbb{N}$ , entonces  $|G| \geq n_0(d, g)$ .



en  $D_{i-1}$ , se sigue que  $|D_{i+1}| \geq (d-1)|D_i|$  si  $i < r$ , ya que de lo contrario existiría un ciclo de longitud más chica que  $r$ . Reiterando recursivamente esta igualdad, se sigue que  $|D_{i+1}| \geq (d-1)^i |D_1|$  para todo  $i < r$

Luego como

$$G = \sqcup_i D_i \supset \sqcup_{0 \leq i \leq r} D_i,$$

se sigue que

Caso  $g = 2r + 1$

$$|G| \geq \sum_{0 \leq i \leq r} |D_i| = 1 + \sum_{i=0}^{r-1} |D_{i+1}| \geq 1 + \sum_{i=0}^{r-1} (d-1)^i |D_1| \geq 1 + \sum_{i=0}^{r-1} (d-1)^i d.$$

Caso  $g = 2r$  Análogo.

La última afirmación vale, pues sea  $d = d(G)/2 = \epsilon(G)$ , luego por la Proposición ??, existe un subgrafo  $H$  de  $G$  tal que  $\delta(H) > d$ , y por lo tanto aplicando este teorema a  $H$  se tiene que  $|G| \geq |H| \geq n_0(\delta(H), g(H))$ , pero como  $\delta(H) > d$  y  $g(H) \geq g(G) = g$ , y  $n_0$  es creciente en ambas variables, se sigue que  $|G| \geq n_0(d, g)$ .  $\square$

**Corolario 1.3.8.** Si  $\delta(G) \geq 3$ , entonces  $g(G) < 2 \log_2 |G|$ .

*Demostración.* Tomamos  $g = g(G)$ . Si es par, entonces

$$n_0(3, g) = 2 \frac{2^{g/2} - 1}{2 - 1} = 2^{g/2} + (2^{g/2} - 2) > 2^{g/2}.$$

Si  $g$  es impar, entonces

$$n_0(3, g) = 1 + 3 \frac{2^{(g-1)/2} - 1}{2 - 1} = \frac{3}{\sqrt{2}} 2^{g/2} - 2 > 2^{g/2}.$$

Luego por el teorema anterior el resultado se sigue luego de tomar logaritmo en base 2.  $\square$

**Proposición 1.3.9.** Todo grafo  $G$  que contiene al menos un ciclo, satisface

$$g(G) \leq 2 \text{diam}(G) + 1.$$

*Demostración.* Supongamos que no. Es decir, si  $C$  es el ciclo de  $G$  con menor longitud, se tiene que  $|C| = g(G) \geq 2 \text{diam}(G) + 2$ . Es decir, existen dos vértices de  $C$ , digamos  $x, y$  tales que su distancia en  $C$  es mayor o igual a  $\text{diam}(G) + 1$ . En  $G$ , estos vértices están a distancia menor que  $\text{diam}(G) + 1$ , sea  $P$  el camino mas corto en  $G$  que une a  $x, y$  (i.e. tiene longitud  $< \text{diam}(G) + 1$ ), luego  $P$  no es subgrafo de  $G$ . Con lo cual, existe un subcamino de  $P$  que es un  $C$ -camino; luego este camino unión el  $x - y$  camino más corto de  $C$  es un ciclo de longitud más chica que la de  $C$ , absurdo.  $\square$

### 1.3.1. Conexidad

**Definición 1.3.10.** Un grafo es **conexo** si es no vacío y para todo par de vértices, existe un camino que los une a ambos.

**Proposición 1.3.11.** Los vértices de un grafo conexo  $G$  se pueden enumerar, digamos  $v_1, v_2, \dots, v_n$  tal que  $G_i = G[v_1, v_2, \dots, v_i]$  es conexo para todo  $i = 1, \dots, n$ .

*Demostración.* Probaremos la proposición por inducción en  $n$ . Sea  $v$  arbitrario, y asumamos por inducción que  $v_1, \dots, v_i$  han sido escogidos para  $i < |V(G)|$  y que  $G_i$  es conexo

Escojo un vértice  $v$  no enumerado aún. Como  $G$  es conexo existe un camino  $P$  entre  $v_1$  y  $v$ .

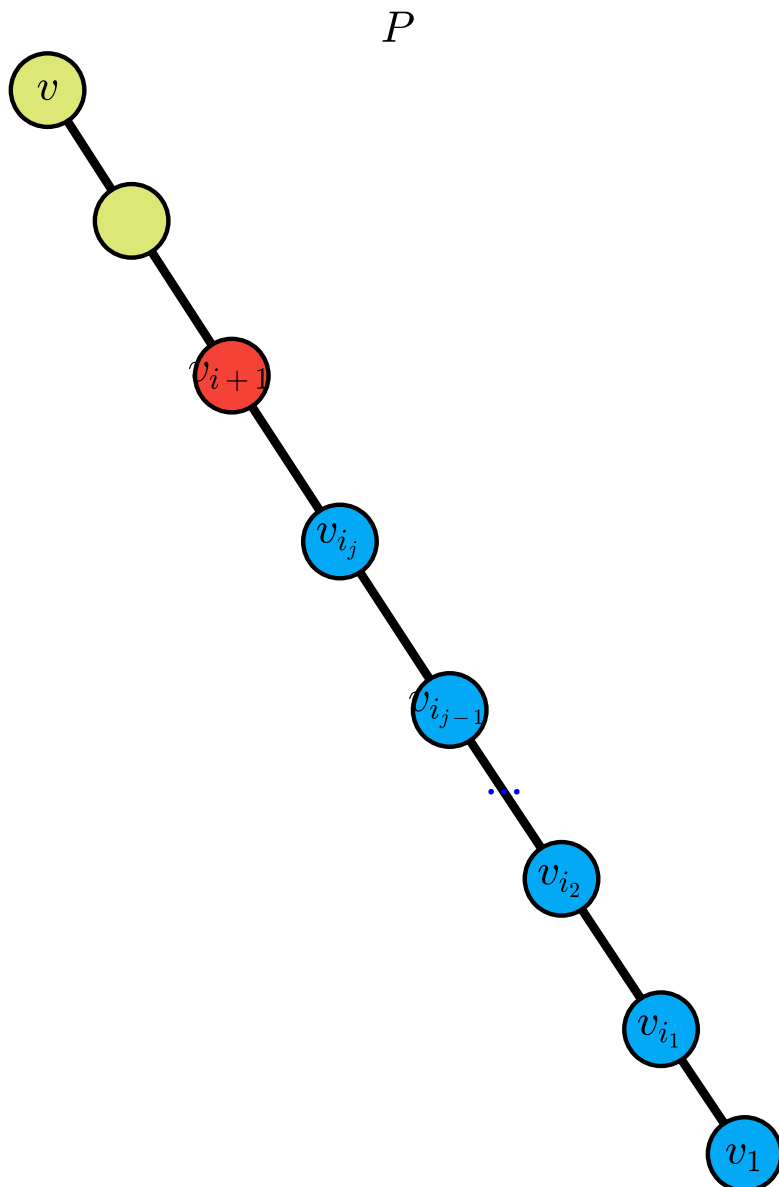


Figura 1.3.17: Camino  $P$  que une a  $v$  y  $v_1$ . En color azul representa los vértice de  $G_i$  en  $P$ .

Tomamos como  $v_{i+1}$  al último vértice en  $P$ , contado desde  $v$ , que no está en  $G_i$ . Como  $v_{i+1}$  tiene vecino en  $G_i$  y  $G_i$  es conexo se tiene que  $G_{i+1}$  es conexo.  $\square$

**Ejemplo 1.3.12.** El siguiente dibujo es un mal ejemplo:

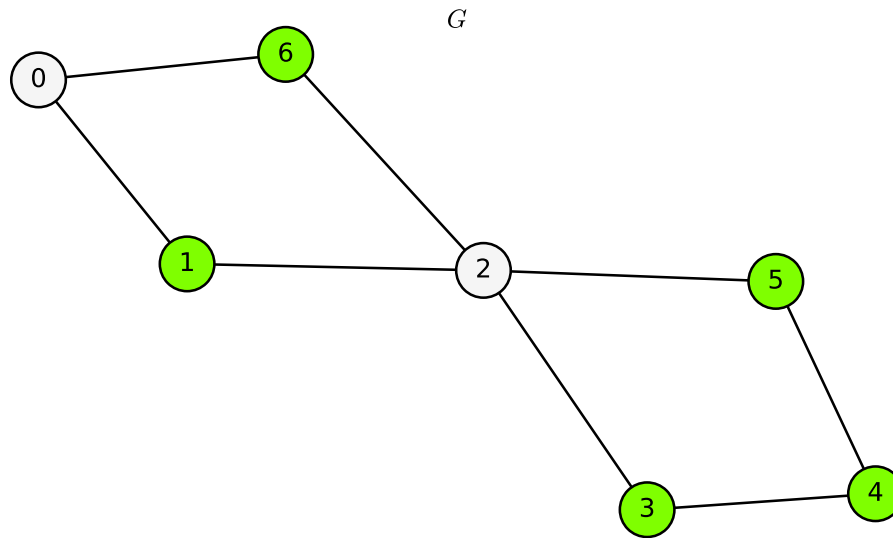


Figura 1.3.18: Mal ejemplo, pues 0 y 2 no inducen un grafo conexo  $G[0,2]$ .

## 1.4. Clase 4: 23/03/23

**Definición 1.4.1** (Maximalidad). Consideremos una propiedad  $P$ , para para algún grafo, conjunto de vértices, etc. Decimos que un conjunto de vértices  $U$  es maximal para  $P$ , si  $U$  cumple  $P$ , y  $U \cup \{v\}$  con  $v \notin U$  no cumple  $P$ .

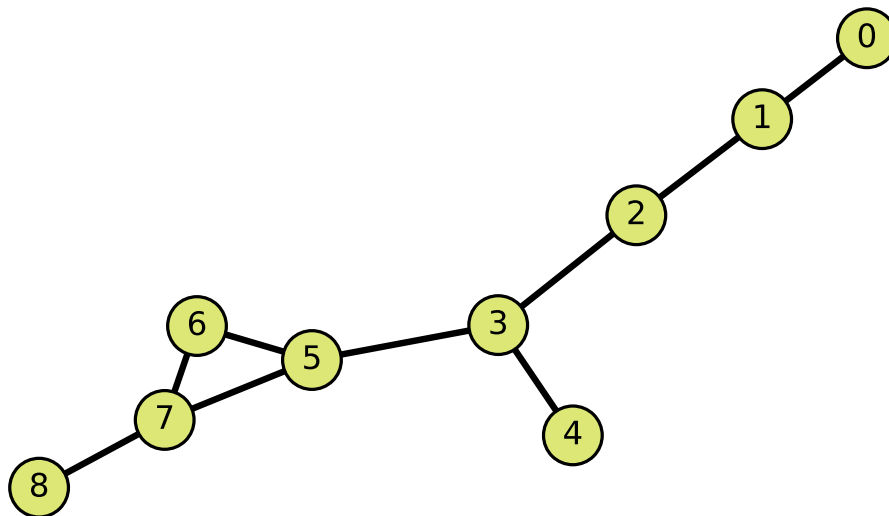


Figura 1.4.19: Ejemplo de camino maximal: 0,1,2,3,5,6,7,8. Sin embargo, 5,7,8 no lo es.

**Definición 1.4.2.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo. Un subgrafo conexo maximal de  $G$  es llamado una **componente** o **componente conexa** de  $G$ .

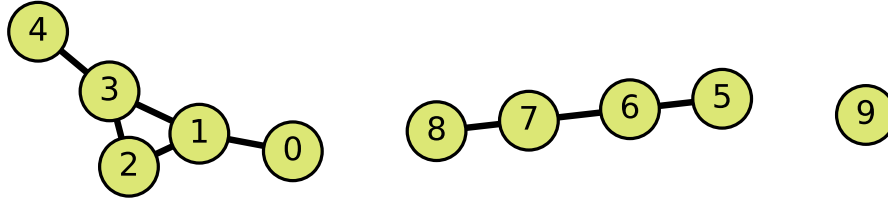


Figura 1.4.20: Ejemplo de componentes: tiene 3.

**Notación 1.4.3.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo. Vamos a notar a la cantidad de aristas por vértice como la cantidad:

$$\epsilon(G) = \frac{|E|}{|V|}.$$

**Teorema 1.4.4.** Sea  $k \in \mathbb{N}$ . Todo grafo  $G$  con  $d(G) \geq 4k$  tiene un subgrafo  $H$  que es  $(k-1)$ -conexo tal que  $\epsilon(H) > \epsilon(G) - k$ .

*Demostración.* Notemos por  $\gamma = \epsilon(G)$ ; como  $\gamma = \frac{1}{2}d(G)$ , tenemos que  $\gamma \geq 2k$ . Consideremos los subgrafos  $G' \subset G$  tales que

$$|G'| \geq 2k \quad \text{y} \quad ||G'|| > \gamma(|G'| - k);$$

esta familia es no vacía, pues  $G$  cumple esta condición; notemos por  $H$  al subgrafo de menor orden que cumple esta condición. En efecto,  $G$  cumple ambas condiciones, pues por un lado  $||G|| > \gamma(|G| - k) = ||G|| - \gamma k$ , y por otro lado

$$\Delta(G) \geq d(G) \geq 4k,$$

con lo cual existe un vértice de  $G$  de grado máximo, con al menos  $4k$  vecinos, es decir  $|G| \geq 4k + 1 \geq 2k$ .

Notar que ningún grafo  $G'$  que cumpla la condición tiene orden exactamente  $2k$ , ya que esto implicaría que  $||G'|| > \gamma k \geq 2k^2 > \binom{|G'|}{2} = k(2k-1)$ , lo cual contradice la cantidad máxima de aristas que puede tener un grafo de  $|G'|$  vértices. Por minimalidad de  $H$ , se tiene que  $\delta(H) > \gamma$ : de lo contrario podríamos eliminar un vértice de grado a lo más  $\gamma$  y obtener un grafo  $G' \subsetneq H$  que satisface la condición. En particular, como existe un vértice de grado  $> \gamma$ , se sigue que  $|H| \geq \gamma$ . Dividiendo la desigualdad  $||H|| > \gamma|H| - \gamma k$  de la condición por  $|H|$ , tenemos que  $\epsilon(H) > \gamma - k$ , como queríamos.

Falta ver que  $H$  es efectivamente  $(k+1)$ -conexo. De lo contrario,  $H$  tendría una separación propia  $\{U_1, U_2\}$  de orden a lo más  $k$ ; escribamos  $H[U_i] =: H_i$ . Como todo vértice  $v \in U_1 \setminus U_2$  tiene  $d(v) \geq \delta(H) > \gamma$  vecinos de  $H$  en  $H_1$ , tenemos que  $|H_1| \geq \gamma \geq 2k$ . Similarmente,  $|H_2| \geq 2k$ . Por la minimalidad de  $H$ , ninguno de los  $H_1, H_2$  puede satisfacer la condición, con lo cual

$$||H_i|| \leq \gamma(|H_i| - k), \quad i = 1, 2.$$

Sin embargo, tenemos que

$$\begin{aligned} ||H|| &\leq ||H_1|| + ||H_2|| \\ &\leq \gamma(|H_1| + |H_2| - 2k) = \gamma(|H| + |H_1 \cap H_2| - 2k) \\ &\leq \gamma(|H| - k) \quad (\text{pues } |H_1 \cap H_2| \leq k), \end{aligned}$$

contradiendo la condición. □

### 1.4.1. Árboles y bosques

**Definición 1.4.5.** Un grafo acíclico, es decir, sin ciclos, es llamado un **bosque**.

A un bosque conexo lo llamamos **árbol**, es decir un grafo conexo y acíclico.

Los vértices de grado 1 son sus **hojas**, los otros vértices son sus **vértices interiores**.

Notar que las componentes conexas de un bosque son árboles.

**Observación 1.4.6.** Los subgrafos conexos de un árbol son árboles.

Figura 1.4.21: Un árbol con hojas y vértices interiores.

**Ejercicio 1.4.7.** Todo árbol tiene al menos 1 hoja. Más aún, si el árbol tiene más de un vértice entonces tiene al menos 2 hojas. En particular los árboles tienen grado mínimo  $\delta = 1$ .

*Solución.* Sea  $P$  un camino maximal en el árbol, y miro uno de los extremos (podría haber solo uno si el camino tiene un solo vértice). Ese extremo si tuviera grado  $\geq 2$ , el otro vecino debería caer en el camino por maximalidad, luego existe un ciclo, absurdo!. Más aún, si el árbol tiene más de un vértice entonces el camino maximal que tomamos tiene dos vértices, i.e. dos hojas.  $\square$

Esto implica lo mismo para caminos, pues los caminos son árboles.

**Teorema 1.4.8.** Sea  $T$  un grafo. Las siguientes definiciones son equivalentes:

- (I)  $T$  es árbol.
- (II) Cada par de vértices en  $T$  están unidos por un único camino.
- (III)  $T$  es conexo, pero  $T \setminus e$  es desconexo para todo  $e \in E(T)$ . Es decir, es minimalmente conexo.
- (IV)  $T$  es conexo, pero  $T \setminus v$  es desconexo para todo  $v \in V(T)$  que no sea hoja.
- (V)  $T$  es acíclico, pero  $T \cup xy$  tiene un ciclo para cualquier par de vértices  $x, y$  no adyacentes. Es decir, es maximalmente acíclico.

*Demostración.*

- (i)  $\Rightarrow$  (ii) Si no, existe al menos un camino por ser conexo, luego si hay dos caminos distintos entonces podemos construir un ciclo.
- (ii)  $\Rightarrow$  (iii) Sea  $e$  una arista entre  $xy$ , entonces  $xy$  es un camino entre esos vértices, por hipótesis es el único, luego al quitarlo debe quedar desconexo, de lo contrario es que había otro camino.
- (iii)  $\Rightarrow$  (iv) Como  $v$  no es una hoja, es vecino de al menos dos vértices distintos, digamos  $a, b$ . Si todo camino entre  $a$  y  $b$  pasa por  $v$ , entonces quitar este vértice haría que  $T$  fuera desconexo. Supongamos que existe un camino que une  $a, b$  pero que no contiene a  $v$ . Luego si quitamos la arista  $av$  o  $vb$  el grafo sigue siendo conexo, pues tenemos un ciclo  $avb$ , absurdo.
- (iv)  $\Rightarrow$  (v)  $T$  es acíclico, pues de lo contrario podríamos quitar un vértice y que siga quedando conexo. En efecto, sea  $C$  un ciclo en  $T$ , digamos con vértices  $x_0, x_1, \dots, x_n, x_0$  y  $n \geq 2$ . Si quitamos cualquier vértice  $v$  de  $C$ , este queda conexo, pero veamos que  $T$  también. De lo contrario, es que  $v$  separa a  $T$  en dos componentes conexas, es decir, todos los caminos entre  $C$  y  $T \setminus C$  pasan por  $v$ , con lo cual tomando otro vértice de  $C$  que no sea  $v$  y quitándolo, nos quedaría que  $T$  menos ese punto es conexo, absurdo.
- Sean  $x, y$  no adyacentes. Consideremos  $P$  un camino entre  $x, y$ . Como no son adyacentes este camino necesariamente tiene al menos un vértice en intermedio, digamos  $z$ . Por hipótesis, si quitamos  $z$  el grafo nos queda desconexo, y esto lo podemos hacer para cualquier  $z \neq x, y$  en  $P$ . Con lo cual,  $P \cup xy$  es un ciclo en  $T \cup xy$ .
- (v)  $\Rightarrow$  (i) Por hipótesis,  $T$  es acíclico. Sean  $x, y \in V(G)$ . Por hipótesis tenemos que  $T \cup xy$  tiene un ciclo  $C_{xy}$ , luego  $C_{xy}$  debe contener la arista  $xy$  pues  $T$  es acíclico. Entonces  $C_{xy} \setminus xy$  conecta a  $xy$ . Como  $x, y$  eran arbitrarios, tenemos que  $T$  es conexo.

□

**Definición 1.4.9.** Sea  $G$  un grafo. Un **árbol generador** de  $G$  es un subgrafo de  $G$  que es árbol y que contiene a todos los vértices de  $G$ .

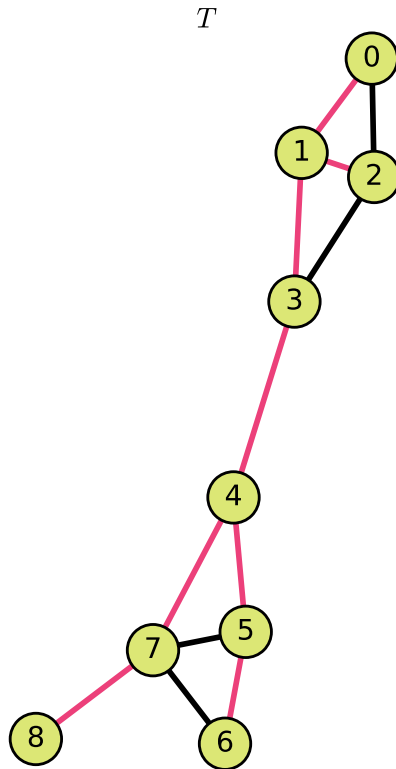


Figura 1.4.22: Ejemplo: árbol generador, con aristas en rojo.

**Observación 1.4.10.** Del dibujo anterior podemos ver que el árbol generador no necesariamente es único, y de hecho, puede haber otro que no sea isomorfo. Por ejemplo cambiemos los vértices del árbol en rojo, de manera que ya no tenga vértices de grado 3:

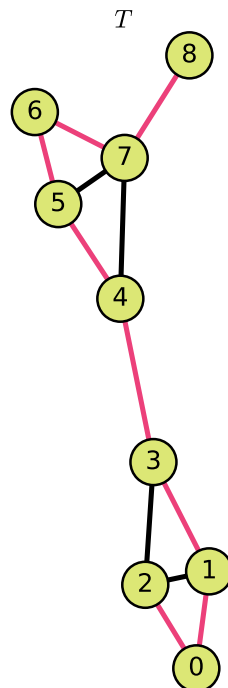


Figura 1.4.23: Otro árbol generador.

**Proposición 1.4.11.** *Todo grafo conexo tiene un árbol generador.*

*Demostración.* Tomemos un subgrafo minimalmente conexo  $H$ , que contenga a todo  $V(G)$ . Por (iii) del teorema anterior tenemos que  $H$  es un árbol. También se puede usar el ítem (v), aplicado a un subgrafo acíclico maximal.  $\square$

**Observación 1.4.12.** Esta demostración nos da un algoritmo para construir el árbol generador de un grafo: quitamos aristas hasta que nos quede minimalmente conexo.

**Definición 1.4.13.** Si  $T$  es un árbol generador de un grafo  $G$ , las aristas en  $E(G) \setminus E(T)$  son las **cuerdas** de  $T$  en  $G$ .

**Proposición 1.4.14.** Los vértices de un árbol  $T$  pueden ser enumerados, digamos  $v_1, v_2, \dots, v_n$  de manera que para todo  $i \geq 2$ ,  $v_i$  es hoja en  $T[v_1, \dots, v_i]$  (que es árbol también).

*Demostración.* Por la Proposición ?? existe una enumeración  $v_1, \dots, v_n$  tal que  $T[v_1, \dots, v_i]$  es conexo para todo  $i \geq 1$ . Inspeccionando la demostración, se puede ver que esta construcción sirve. En efecto, sabemos que  $v_{i+1}$  tiene un vecino en  $G[v_1, \dots, v_i]$ , llamémoslo  $x$ , si tuviera otro llamado  $y$ , entonces  $G[v_1, \dots, v_i]$  contiene un camino  $P_{xy}$  entre ellos, que junto con  $xv_{i+1}y$  nos forma un ciclo, absurdo.

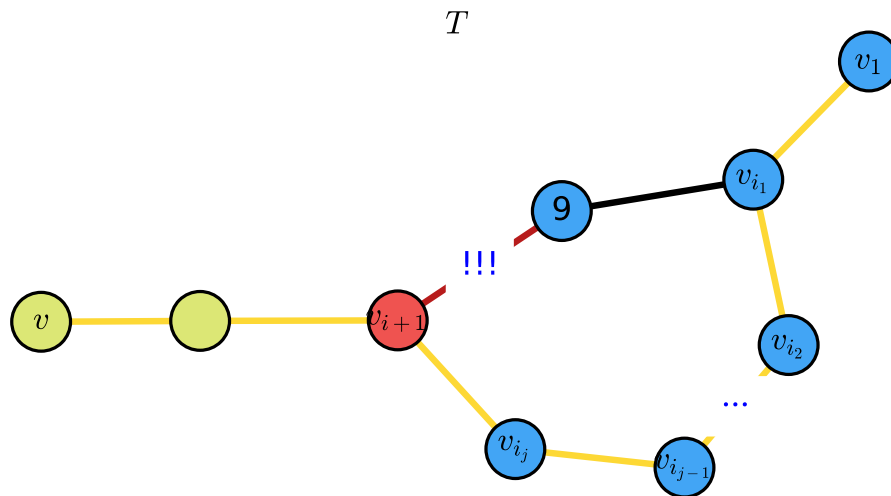


Figura 1.4.24: Ver dibujo.

$\square$

## 1.5. Clase 5: 27/03/23

**Corolario 1.5.1.** Un grafo de  $n$  vértices conexo es un árbol si y solo si tiene  $n - 1$  aristas.

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $T$  es árbol; en particular es conexo. Por la proposición anterior, existe una enumeración  $v_1, v_2, \dots, v_n$  tal que para todo  $i \geq 1$ , el grafo  $T[v_1, \dots, v_i]$  tiene  $i - 1$  aristas por inducción.



$\Leftrightarrow$ ) Como  $T$  es conexo tiene árbol generador  $T'$ , y por la implicación anterior tiene  $n - 1$  aristas, entonces  $T = T'$ , i.e.  $T$  es árbol. □

**Corolario 1.5.2.** *Todo grafo conexo de  $n$  vértices tiene al menos  $n - 1$  aristas.*

*Demostración.* Tiene un árbol generador, que debe tener  $n - 1$  aristas. □

**Corolario 1.5.3.** *Si  $T$  es un árbol y  $G$  es un grafo con  $\delta(G) \geq |T| - 1$ , entonces  $T \subset G$ , es decir  $G$  tiene un subgrafo isomorfo a  $T$ .*

*Demostración.* Sea  $v_1, \dots, v_n$  con  $n = |T|$ , una numeración de los vértices de  $T$  tal que  $v_i, i \geq 2$  es una hoja de  $T[v_1, \dots, v_{i-1}]$ . Haremos inducción en estos vértices. El caso base es trivial. Veamos el paso inductivo: supongamos que  $G$  tiene a  $T[v_1, \dots, v_{i-1}]$  como subgrafo con  $i \leq n$ , entonces como  $\delta(G) \geq n - 1$ , tenemos que  $v_j, 1 \leq j \leq i - 1$  (el único vecino de  $v_i$ ) tiene al menos  $\delta(G) \geq n - 1$  vecinos en  $G$ , es decir, tiene un vecino que no está en  $T[v_1, \dots, v_{i-1}]$ , luego agregamos a ese vértice como  $v_i$  junto con la arista que le corresponde a  $v_j$ . □

De vez en cuando, es útil fijar un vértice  $r$  de un árbol  $T$ , que llamaremos **raíz**. Un árbol con una raíz fija, se denomina **árbol enraigado** (o en inglés, **rooted tree**). Recordemos que para todo  $y \in V(T)$ , existe un único camino entre  $r$  e  $y$  que denotaremos  $rTy$ ; esto induce un orden parcial  $x \leq y$  si y solo si  $x \in rTy$ . Este orden en  $V(T)$  se lo llama el **orden del árbol** asociado a  $T$  y  $r$ . Definimos los conjuntos:

$$[y] := \{x \mid x \leq y\} \quad \text{y} \quad [x] := \{y \mid y \geq x\}$$

la **clausura inferior** de  $y$ , y la **clausura superior** de  $x$ , respectivamente. En general, definimos  $[X] := \bigcup_{x \in X} [x]$  y análogamente  $[X]$ , para un conjunto  $X \subset V(T)$ . Un conjunto  $X$  que coincide con  $[X]$ , se dice **cerrado inferiormente**, análogamente en el otro caso tenemos que es **cerrado superiormente**.

Notar que  $r$  es el *mínimo* en este orden, y todas las hojas de  $T$  son *maximales*. Los extremos de una arista son siempre comparables entre sí, y los elementos de una clausura inferior forman una *cadena* (i.e. son comparables entre sí), sin embargo los elementos de una clausura superior no tienen por qué formar una cadena. Decimos que los vértice a distancia  $k$  de  $r$  tienen **altura**  $k$  y el conjunto de estos vértices forma el  $k$ -ésimo **nivel** de  $T$ .

Un árbol enraigado  $T$  contenido en un grafo  $G$  se dice **normal** en  $G$ , si los extremos de todo  $T$ -camino en  $G$  son comparables en el orden de  $T$ . Si  $T$  genera  $G$ , esto equivale a pedir que dos vértices de  $T$  sean comparables siempre que sean adyacentes en  $G$ ; ver la siguiente figura:

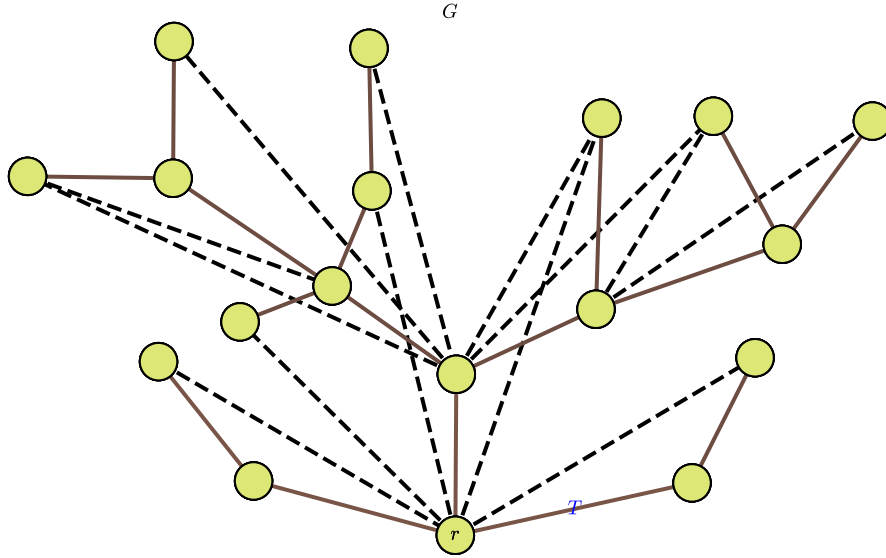


Figura 1.5.25: Un árbol generador normal con raíz  $r$  de un grafo  $G$ .

Un árbol normal puede ser una herramienta realmente útil para examinar la estructura de su grafo subyacente, ya que este grafo refleja las propiedades de separación de  $T$ :

**Lema 1.5.4.** Sea  $T$  un árbol normal en  $G$ . Tenemos que:

- (I) Dados  $x, y \in V(T)$ , están separados en  $G$  por el conjunto  $[x] \cap [y]$ .
- (II) Supongamos que  $T$  genera  $G$ . Si  $S \subset V(T) = V(G)$  y  $S$  es inferiormente cerrado, luego las componentes conexas de  $G \setminus S$  están generadas por los conjuntos  $[x]$  con  $x$  minimal en  $T \setminus S$ .

*Demostración.* (I) Sea  $P$  cualquier camino entre  $x, y$  en  $G$ ; veamos que  $P$  interseca  $[x] \cap [y]$ . Sea  $t_1, \dots, t_n$  una sucesión de vértices en  $P \cap T$ , minimal con la propiedad que  $t_1 = x$  y  $t_n = y$  y  $t_i, t_{i+1}$  son comparables en el orden del árbol  $T$  para todo  $i$ . Dicha sucesión existe, pues el conjunto de todos los vértices en  $P \cap T$ , con el orden natural inducido por  $P$ , tiene esta propiedad, ya que como  $T$  es normal todo segmento  $t_i P t_{i+1}$  es una arista de  $T$  o un  $T$ -camino. En nuestra secuencia minimal no podemos tener  $t_{i-1} < t_i > t_{i+1}$  para ningún  $i$ , pues  $t_{i-1}, t_{i+1}$  son comparables y podríamos eliminar a  $t_i$  de nuestra secuencia, obteniendo así una secuencia más chica. Entonces nuestra secuencia tiene la forma

$$x = t_1 > \dots > t_k < \dots < t_n = y$$

(se podrían retirar los elementos en el "medio"). Así,  $t_k \in [x] \cap [y] \cap V(P)$ .

- (II) Consideremos una componente  $C$  de  $G \setminus S$ , y tomemos  $x$  un elemento minimal ( $T$  genera  $G$ ) de  $V(G)$ . Afirmamos que  $x$  es único, en efecto, si  $x'$  fuera otro, ambos serían no comparables entre sí, pero por el ítem (i), cualquier camino entre  $x, x'$  contiene un vértice más chico que ambos, contradiciendo minimalidad en  $C$ . Por lo tanto todo vértice de  $C$  yace arriba de  $x$ : nuevamente por el ítem (i) hay un vértice debajo de ambos que por minimalidad es  $x$ . Recíprocamente, todo vértice  $y \in [x]$  está en  $C$ , pues como  $S$  es cerrado inferiormente, el camino creciente  $xTy$  yace en  $T \setminus S$ . Consecuentemente,  $V(C) = [x]$ .

Ahora veamos que  $x$  es minimal no solo en  $V(C)$ , sino también en  $T \setminus S$ . Los vértices por debajo de  $x$  forman una cadena  $[t]$  en  $T$ . Como  $t$  es vecino de  $x$  en  $T$ , la maximalidad de  $C$  como componente conexa de  $G \setminus S$  implica que  $t \in S$ , y por lo tanto  $[t] \subset S$  porque  $S$  es cerrado inferiormente. Esto completa la demostración de que toda componente de  $G \setminus S$  está generada por un conjunto  $[x]$  con  $x$  minimal en  $T \setminus S$ .

Recíprocamente, si  $x$  es un elemento minimal en  $T \setminus S$ , claramente también es minimal en la componente  $C$  de  $G \setminus S$  que lo contiene. Eso significa que  $V(C) = [x]$ . □

**Proposición 1.5.5.** *Sea  $G$  un grafo conexo y  $r \in V(G)$  arbitrario. Entonces existe un árbol generador normal  $T_r$  de  $G$ , con el orden inducido por  $r$ .*

*Demostración.* Sea  $G$  un grafo conexo y  $r \in G$  un vértice fijo. Sea  $T$  un árbol normal maximal con raíz  $r$ , veamos que  $V(T) = V(G)$ , i.e. genera  $G$ .

Supongamos por el absurdo que no, y sea  $C$  una componente conexa de  $G \setminus T$ . Como  $T$  es normal, la vecindad  $N_G(C)$  (que está contenida en  $T$ ) es una cadena en  $T$ , obviamente porque  $C$  permite construir  $T$ -caminos entre cualquier par de vértices de  $N_G(C)$ . Sea  $x$  su máximo elemento (recordemos que estamos en una cadena), y sea  $y \in C$  adyacente a  $x$ . Sea  $T'$  el árbol obtenido de  $T$  agregando la arista  $yx$ ; el orden de árbol de  $T'$  extiende al de  $T$ . Veamos que  $T'$  también es normal en  $G$ , contradiciendo maximalidad.

Sea  $P$  un  $T'$ -camino en  $G$ . Si sus extremos están en  $T$ , luego son comparables con el orden de  $T$ , y por lo tanto por el de  $T'$  también, ya que  $P$  es un  $T$ -camino también porque  $T \subset T'$  y  $T$  es normal. Si alguno de los extremos de  $P$  fuera  $y$ , tenemos que  $P \subset C$  salvo por su otro extremo  $z$ , que yace en  $N_G(C)$ . Como  $x$  era máximo, tenemos que  $z \leq x$ . Luego  $z, y$  serán comparables si vemos que  $x < y$ , es decir que  $x \in rT'y$ . Lo cual es claro ya que  $y$  es una hoja de  $T'$  con vecino  $x$ . □

### 1.5.1. Grafos bipartitos

**Definición 1.5.6.** Sea  $r \geq 2$  entero. Decimos que un grafo  $G = (V, E)$  es  **$r$ -partito** si podemos particionar a  $V$  en  $r$  partes tal que cada arista tiene sus extremos en partes distintas. Es decir, cada parte es un conjunto independiente.

2-partito es **bipartito**, 3-partito es **tripartito**, etc.

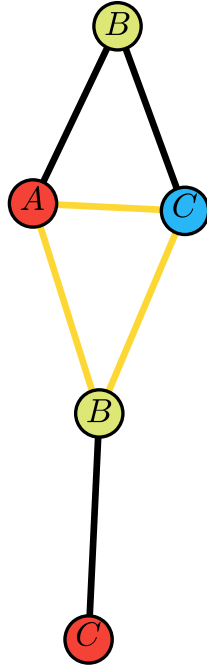


Figura 1.5.26: Ejemplo de grafo 3-partito, 4-partito y 5-partito, pero no 2-partito porque siempre existirían dos vértices del triángulo **amarillo** en la misma partición, pero eso es imposible porque son adyacentes. Se ilustran dos triparticiones distintas:  $A, B, C$  y por otro lado **rojo**, **azul**, **verde**.

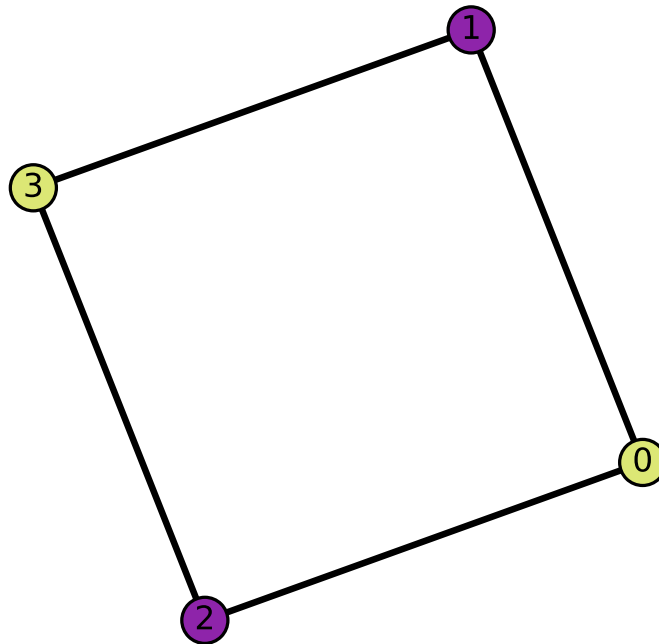


Figura 1.5.27: Ejemplo de grafo 2-partito.

**Definición 1.5.7.** Un grafo  $r$ -partito  $G$ , donde cada par de vértices de partes distintas son adyacentes, decimos que  $G$  es  **$r$ -partito completo**.

Un grafo  $r$ -partito completo con partes de tamaño  $n_1, n_2, \dots, n_r$  se denota  $K_{n_1, n_2, \dots, n_r}$ .

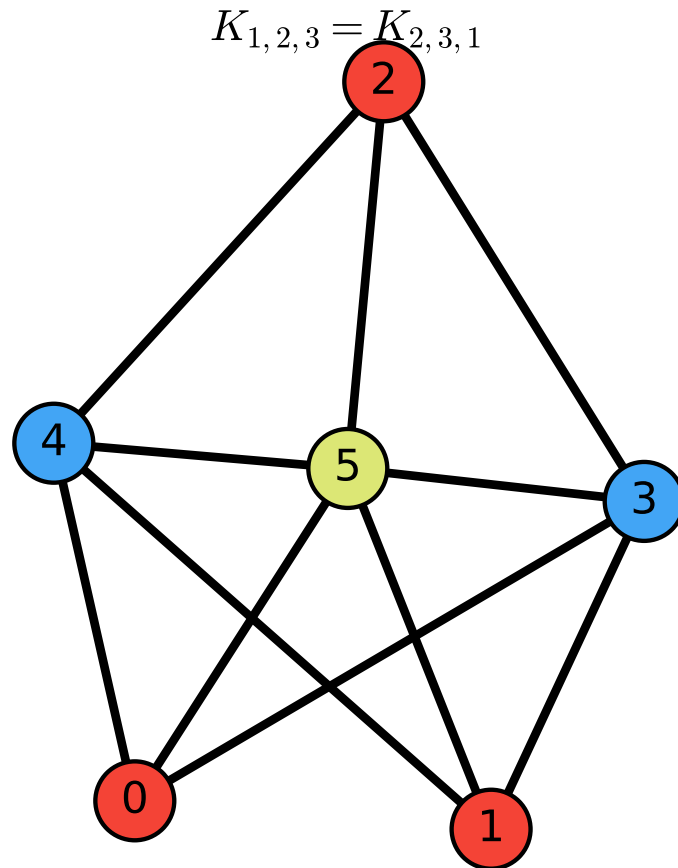


Figura 1.5.28: Ejemplo de grafo 3-partito completo.

**Observación 1.5.8.** Un grafo  $K_{1,n}$  es una *estrella*.

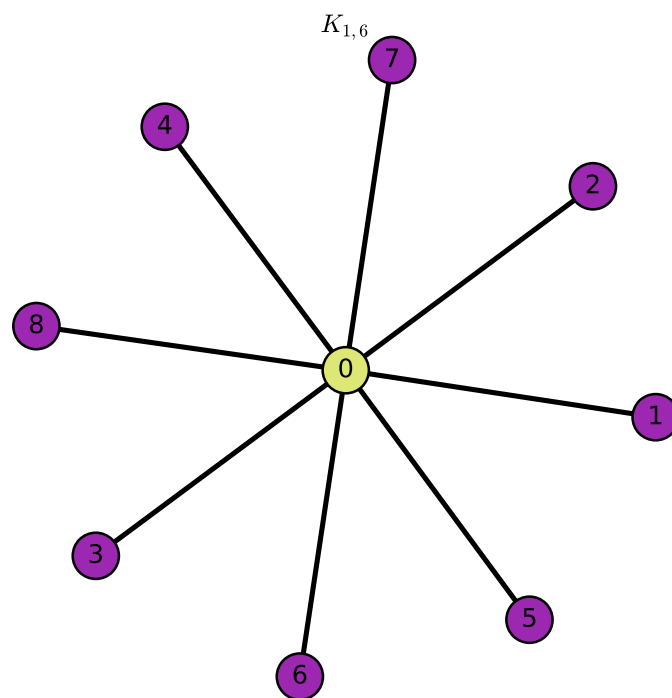


Figura 1.5.29:  $K_{1,5}$

**Observación 1.5.9.** Si  $G$  es bipartito, entonces no tiene ciclos impares.

*Demostración.* Sea  $C = C_{2k+1}$  con  $k \geq 1$  un subciclo de longitud  $2k+1$  de  $G$ . Si  $G$  fuera bipartito, entonces  $C$  también. En efecto, numerando  $C : x_0, x_1, \dots, x_{2k}, x_0$ , ser bipartito equivale a que existe una función  $\rho : x_i \mapsto 0, 1 \in \{0, 1\}$  tal que  $\rho(x) \neq \rho(y)$  para todo par de vértices adyacentes  $x, y \in C$ . Sin pérdida de generalidad  $\rho(x_0) = 0$ . Pero como  $x_i$  y  $x_{i+1}$  son siempre adyacentes, debe ser que  $\rho(x_0) = 0, \rho(x_1) = 1, \dots, \rho(x_i) = i \bmod 2$  (lo podemos probar recursivamente). Con lo cual,  $\rho(x_{2k}) = 0 = \rho(x_0)$ , lo cual es absurdo porque  $x_{2k}$  y  $x_0$  son adyacentes.  $\square$

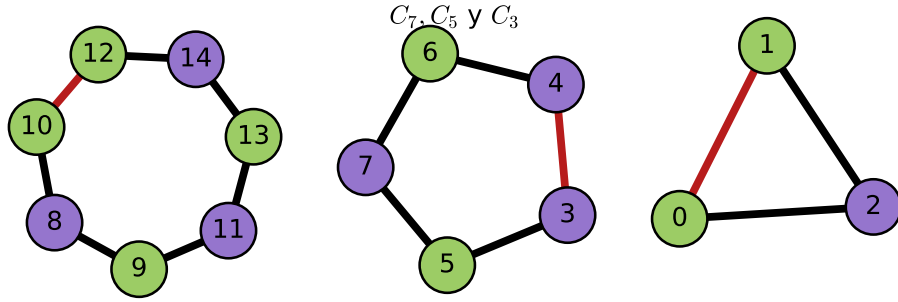


Figura 1.5.30: Como se ilustra en el dibujo, no podemos 2-particionar a  $C_7, C_5$  ni  $C_3$ . Pues siempre que pintamos con dos colores quedan dos vértices adyacentes.

**Teorema 1.5.10.** Un grafo es bipartito si y solo si no tiene ciclos impares.

*Demostración.* La observación anterior prueba la necesidad. Veamos la suficiencia. Sea  $G$  un grafo sin ciclos impares. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que es conexo. Sea  $T$  un árbol generador,  $r$  un vértice de  $G$  que llamaremos raíz (de  $T$ ). Para  $v \in V(G)$  denotamos por  $rTv$  al único camino entre  $r$  y  $v$  en  $T$  (por la caracterización de árboles). Por último, si  $w, v \in V(G)$ , entonces decimos que  $w \leq v$ , si  $w \in rTv$ .

Definimos la partición de  $G$ : los vértices  $v$  tales que  $rTv$  tiene largo par, y por otro lado los vértices  $v$  tales que  $rTv$  tiene largo impar. Veamos que en efecto esto es una partición, i.e., no hay vértices adyacentes en la misma partición. Sea  $e = xy$  una arista de  $G$ .

CASO 1: Si  $e \in E(T)$ , tendremos  $x < y$  o  $y < x$ , pero nunca igualdad. Más aún,  $\|rTx\| = \|rTy\| \pm 1$ , i.e. tienen paridades distintas.

CASO 2: Si  $e \notin E(T)$ , entonces  $rTx, rTy$  y  $e$  forman un ciclo (por la caracterización de árbol). Por la hipótesis, el ciclo es par. Esto implica que  $\|rTx\|$  y  $\|rTy\|$  tienen distinta paridad:

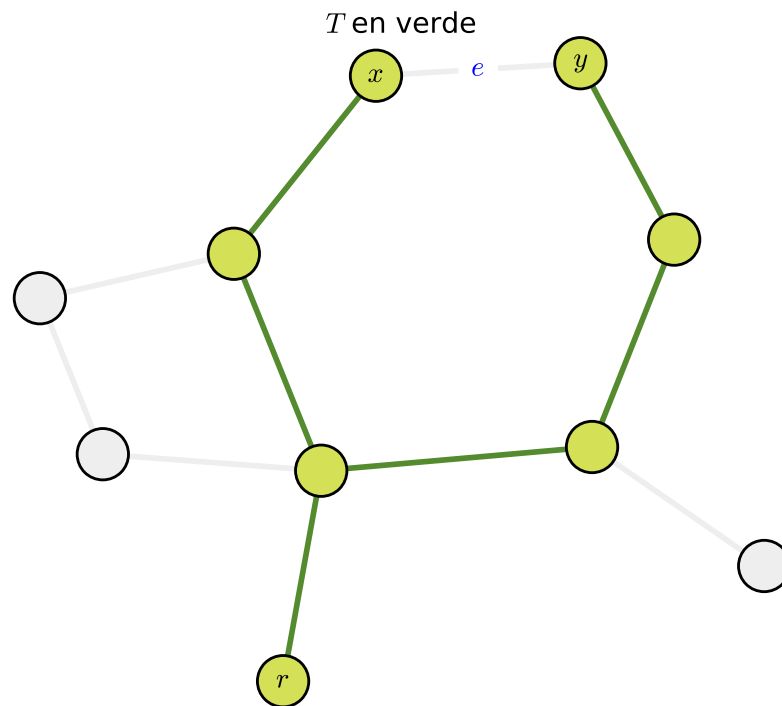


Figura 1.5.31: Ilustración de este hecho.

□

**Corolario 1.5.11.** *Los árboles y los bosques son bipartitos.*

## 1.5.2. Paseos Eulerianos

Viajamos a Prusia, siglo XVIII, a la ciudad de Königsberg.

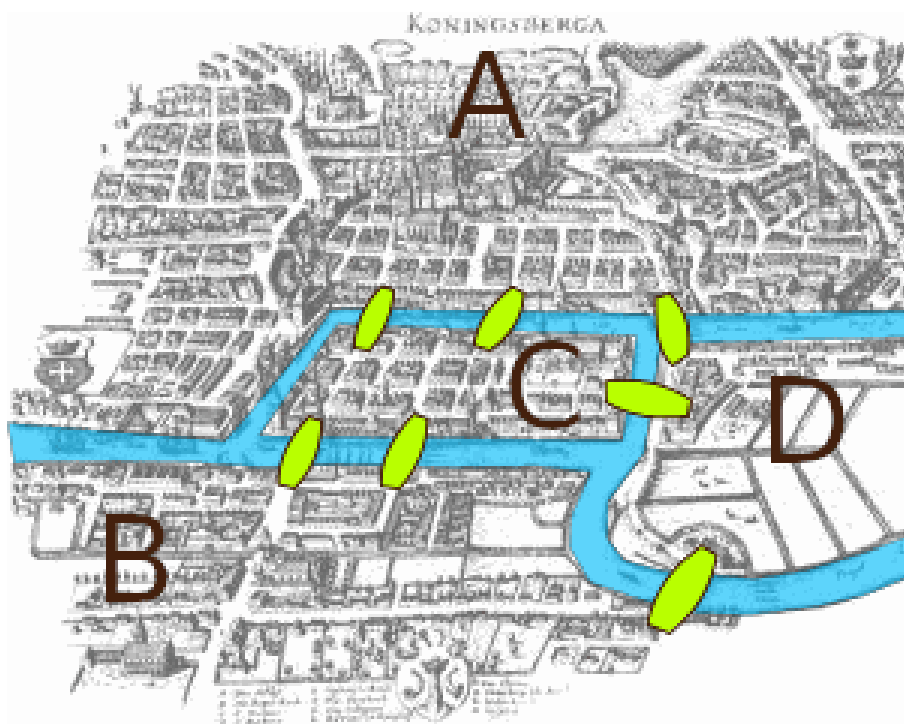


Figura 1.5.32: Los siete puentes de Königsberg.

La gente de la ciudad se preguntaba si se podía partir de un punto  $x \in A$  o  $B$  de la ciudad, cruzar cada puente exactamente una sola vez y volver a  $x$ . Euler se propuso a responder la pregunta.

Podemos modelar el problema como un *multigrafo* (i.e. dos vértices pueden estar unidos por más de una arista):

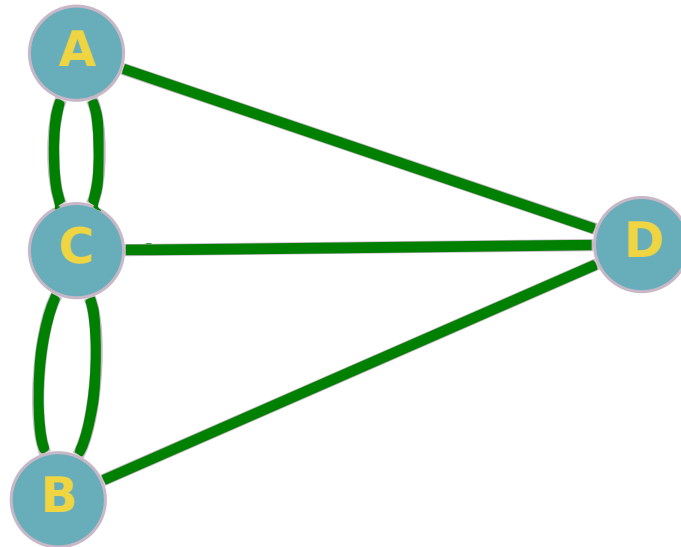


Figura 1.5.33: Multigrafo de los puentes de Königsberg.

**Definición 1.5.12.** Un **paseo** en un multigrafo, es una secuencia de vértices  $x_0, x_1, \dots$ , tal que  $x_i x_{i+1}$  es arista para todo  $i \geq 0$ , y ninguna de estas aristas se repite.

Un **paseo cerrado** comienza y termina en el mismo vértice.

Un paseo es **Euleriano** si es cerrado y recorre todas las aristas del multigrafo.

Un **grafo Euleriano**, es un multigrafo que contiene un paseo Euleriano.

**Teorema 1.5.13.** *Un multigrafo conexo es Euleriano si y solo si todos sus vértices tienen grado par.*

Veremos la demostración la clase siguiente.

## 1.6. Clase 6: 30/03/23



**Teorema 1.6.1.** *Un multigrafo conexo es Euleriano si y solo si todos sus vértices tienen grado par.*

*Demostración.*

- $\Rightarrow$ ) Asumimos que  $G$  tiene un paseo Euleriano  $P$ . Cada vez que el paseo "entra" en una vértice, lo hace por medio de una arista, y debe salir por otra. Cada vez que  $v$  aparece en  $P$  se utilizan otras dos aristas incidentes en  $v$ . Como se ocupan todas esas aristas,  $d(v)$  es par.
- $\Leftarrow$ ) Supongamos que todos los grados son pares. Haremos inducción en  $\|G\|$ . El caso base es  $\|G\| = 2$  que claramente tiene un paseo Euleriano:

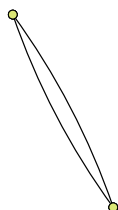


Figura 1.6.34:  $\|G\| = 2$ .

Supongamos que  $\|G\| > 2$ . Cuando todos los grados son pares, puedo encontrar un paseo cerrado no trivial. Tomemos como  $P$  el de largo máximo, y sea  $F$  su conjunto de aristas. Si  $F$  es todo, la demostración está terminada. Luego supongamos que no. Sea  $G \setminus F = G'$ , tiene una arista  $e$  que incide en un vértice de  $P$ , pues  $G$  es conexo. Sea  $C$  la componente de  $G'$  que contiene a  $e$ . Todo vértice de  $G$ , posee un número par de aristas incidentes en  $F$ , luego la cantidad de aristas en  $G'$  sigue siendo par. Aplicando la hipótesis inductiva, podemos encontrar un paseo Euleriano en  $C$ , llamémoslo  $P'$ . Como  $P$  y  $P'$  unidos son un paseo cerrado más grande que  $P$ , llegamos a un absurdo.

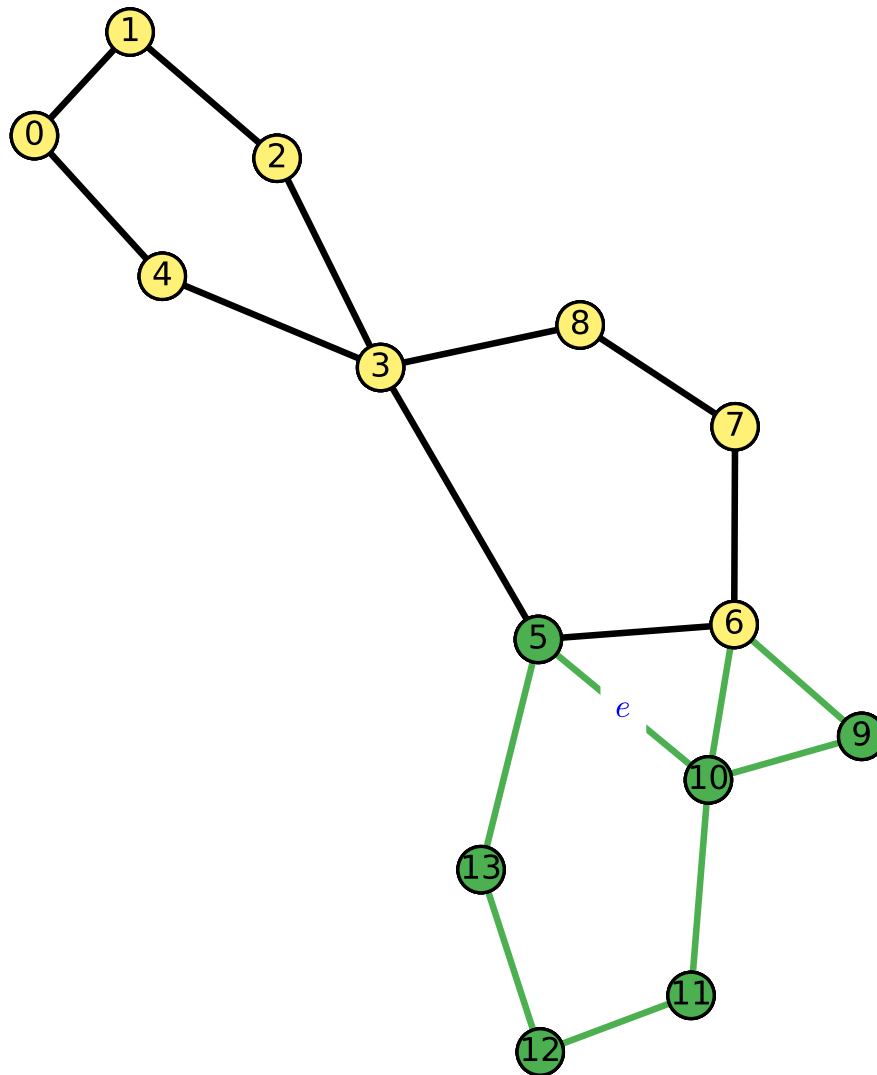


Figura 1.6.35: Esta es una ilustración de lo que podría suceder:  $P : 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 4, 0$  es el camino negro y  $C$  es el grafo conexo.

□

### 1.6.1. Conexidad

**Definición 1.6.2.** Decimos que un conjunto  $X$  de vértices o aristas **separa** a  $u, v \in V$  si  $u, v \notin X$  y todo camino entre  $u$  y  $v$  tiene un elemento de  $X$ .

Si  $X$  separa un par de vértices, decimos que es **separador** (de  $u, v$ ). Si un vértice solo, i.e.  $X$  es un singleton, es separador, decimos que es un **vértice de corte**. Un pequeño abuso de notación será simplemente referirnos a ese vértice en lugar del conjunto que lo contiene.

Análogamente, una arista sola  $X = \{e\}$  que separa sus vértices se dice **punte**. Un pequeño abuso de notación será simplemente referirnos a ese vértice en lugar del conjunto que lo contiene.

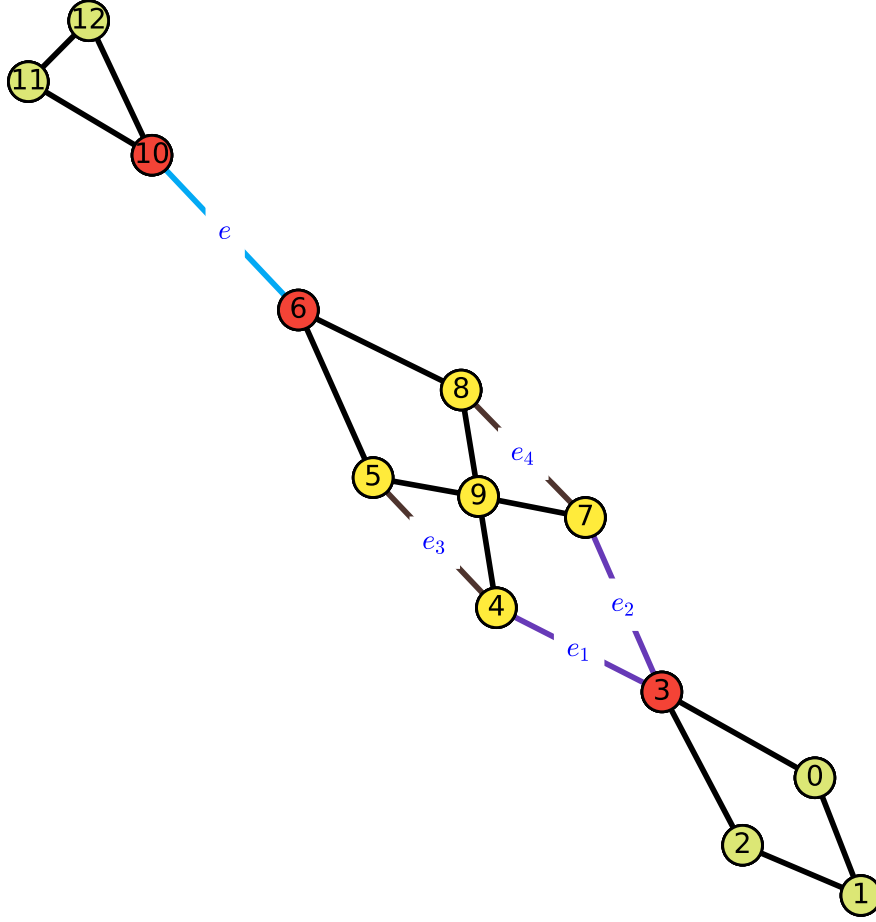


Figura 1.6.36: Ejemplo:  $X = \{4, 5, 7, 8, 9\}$  separa a  $u = 3, v = 6$ . También  $Y = \{e_1, e_2\}$  e  $Y' = \{e_3, e_4\}$  son separadores de  $u, v$ . La arista  $e = (6, 10)$  es un puente.

**Definición 1.6.3.** Para  $k \geq 0$  decimos que  $G = (V, E)$  es  **$k$ -conexo** si  $|V| > k$  y  $G \setminus X$  es conexo para todo  $X \subset V$  con  $|X| < k$ . Es decir, ningún conjunto de menos de  $k$ -vértices separa.

**Ejemplo 1.6.4.**    ■ 0-conexo: Todo grafo no vacío.

- 1-conexo: grafos conexos no triviales (tiene que tener al menos una arista).

**Definición 1.6.5.** La **conexidad**,  $\mathcal{K}(G)$  de  $G$ , es el máximo  $k \geq 0$  tal que  $G$  es  $k$ -conexo.

**Ejemplo 1.6.6.**    ■  $\mathcal{K}(G) = 0$ : Todo grafo desconexo no vacío o  $K_1$ .

- $\mathcal{K}(K_n) = n - 1, \forall n \geq 1$ .

**Definición 1.6.7.** Sea  $G$  no vacío y sea  $\ell \geq 1$ . Decimos que  $G$  es  **$\ell$ -arista conexo**, si  $G \setminus F$  es conexo para todo  $F \subset E$  con  $||F|| < \ell$ .

**Ejemplo 1.6.8.** 1-arista conexo: los grafos conexos no vacíos.

**Definición 1.6.9.** La **arista conexidad**,  $\lambda(G)$  de  $G$ , es el máximo  $\ell$  tal que  $G$  es  $\ell$ -arista conexo.

Figura 1.6.37: Ejemplo de grafo que tiene  $\mathcal{K} = 4, \lambda = 4$ .

**Ejemplo 1.6.10.**  $\lambda(K_n) = n - 1, \forall n \geq 1$ . Con lo cual, por el Ejemplo ?? tenemos que

$$\lambda(K_n) = \mathcal{K}(K_n).$$

**Ejercicio 1.6.11.** Calcular  $\mathcal{K}$  y  $\lambda$  del siguiente grafo  $G$ :

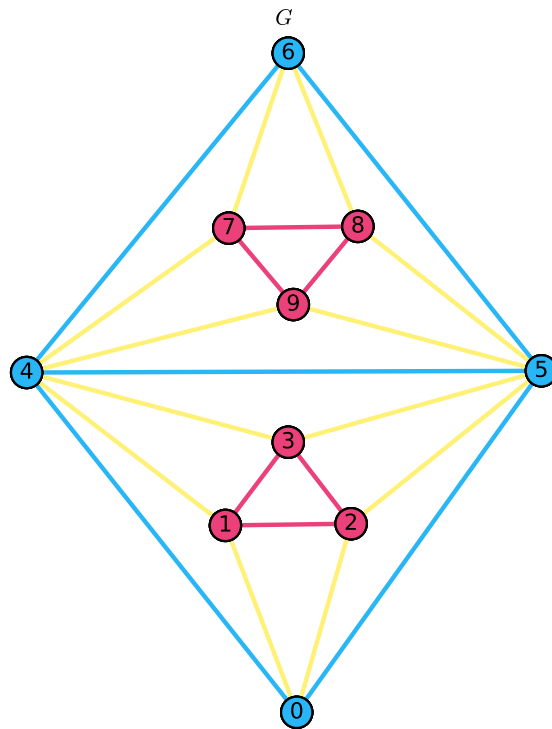


Figura 1.6.38: Grafo  $G$ .

*Solución.* Si quitamos los vértices 4, 5 entonces nos queda  $G$  desconexo, luego  $\mathcal{K}(G) < 3$ . Si quito cualquier vértice, entonces el grafo sigue siendo conexo, luego es 2-conexo, i.e.  $\mathcal{K}(G) \geq 2$ . Luego  $\mathcal{K}(G) = 2$ .

En el anterior ejemplo teníamos  $\lambda = 4$  en cada triángulo azul, y como sacar 3 aristas incidentes a 4, 5 no evita que  $G$  siga siendo conexo, tenemos que  $G$  es 4-arista conexo, i.e.  $\lambda(G) \geq 4$ . Por otro lado, si quitamos las 4 aristas incidentes en el vértice 1, queda el aislado del resto del grafo, i.e.  $\lambda(G) < 5$ . Luego  $\lambda(G) = 4$ .  $\square$

## 1.7. Clase 7: 03/04/23

**Proposición 1.7.1.** Si  $G$  es no trivial, entonces  $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$

*Demostración.* La segunda desigualdad se tiene porque todas las aristas incidentes en un vértice fijo separan a  $G$ .

Veamos ahora la primera desigualdad. Sea  $F$  un conjunto de aristas que separa a  $G$ , con  $|F| = \lambda(G)$ , tal que  $G \setminus F$  es desconexo. *Observación:*  $F$  es un conjunto de aristas minimal con la propiedad de ser separador.

CASO 1: Existe  $v \in V(G)$  que no incide en  $F$ . Sea  $C$  la componente conexa que contiene a  $v$  en  $G \setminus F$ . No puede haber una arista  $f$  de  $F$  con extremos en  $C$ , pues de lo contrario  $F \setminus \{f\}$  sería un conjunto más chico tal que es separador, lo cual contradice la minimalidad de  $F$ .

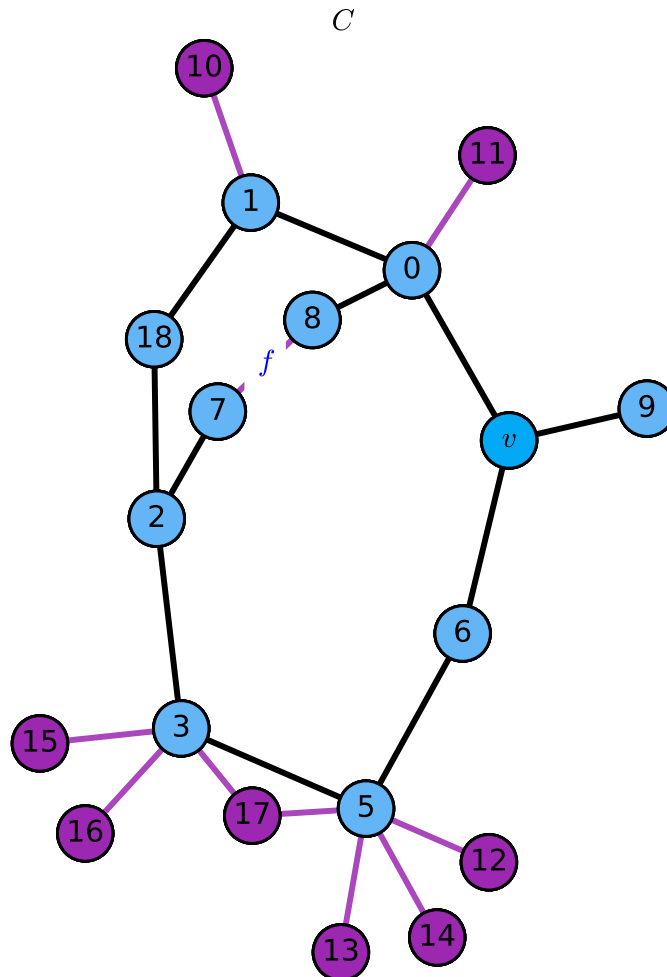


Figura 1.7.39: Ilustración de  $C$ , donde las aristas violeta corresponden a aristas de  $F$ .

Luego, si quitamos los vértices de las aristas de  $F$  incidentes en  $C$ , las cuales solo comparten un vértice de  $C$ , nos queda que  $v$  estaría separado del resto del

grafo. Esta cantidad de vértices es a lo sumo  $|F| = \lambda(G)$ . Con lo cual  $\mathcal{K}(G) \leq |F| = \lambda(G)$ .

CASO 2: Todo  $v \in V(G)$  incide en  $F$ . Fijemos  $v \in V(G)$  y  $C$  la componente conexa de  $G \setminus F$  que lo contiene. Consideremos  $N_G(v)$ , los vecinos de  $v$ . Cada  $w \in N_G(v)$  incide en una arista de  $F$ .

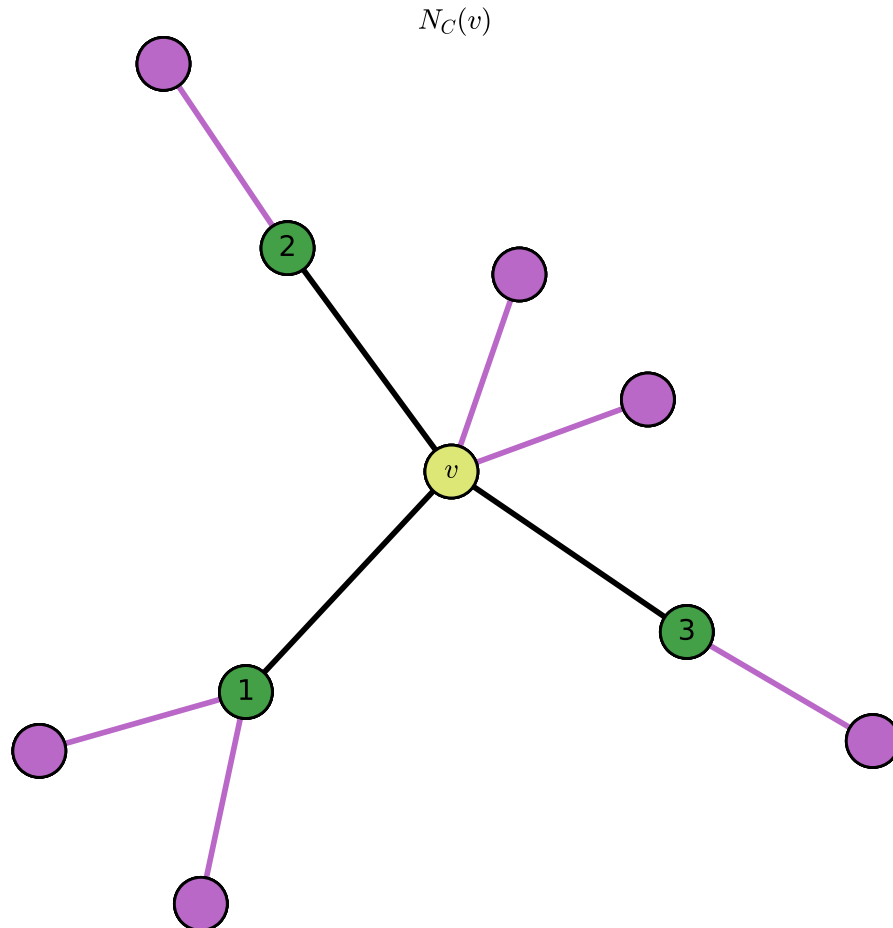


Figura 1.7.40: Ilustración de lo que sucede: los **vecinos** de  $v$  inciden en una **arista** de  $F$ .

Entonces  $d_G(v) \leq |F| = \lambda(G)$ . Por lo tanto, salvo que  $V(G) = \{v\} \cup N_G(v)$ , tenemos que  $N_G(v)$  separa a  $v$  del resto del grafo, y salvo ese caso tendríamos que  $\mathcal{K}(G) \leq |N_G(v)| \leq \lambda(G)$ . Pero  $v$  era arbitrario, entonces en el peor de todos los casos, tenemos que  $V(G) = \{v\} \cup N_G(v)$  para todo  $v \in G$ , i.e.  $G$  es un grafo completo. Pero en este caso vale la igualdad por el Ejemplo ??.

□

### 1.7.1. Grafos 2-conexos

**Definición 1.7.2.** Sea  $H$  un grafo. Decimos que un camino  $P$  es un  **$H$ -camino** si es no trivial (tiene al menos una arista) e interseca a  $H$  exactamente en sus extremos ( $P$  no tiene ni vértices ni aristas en  $H$ , salvo por sus extremos).

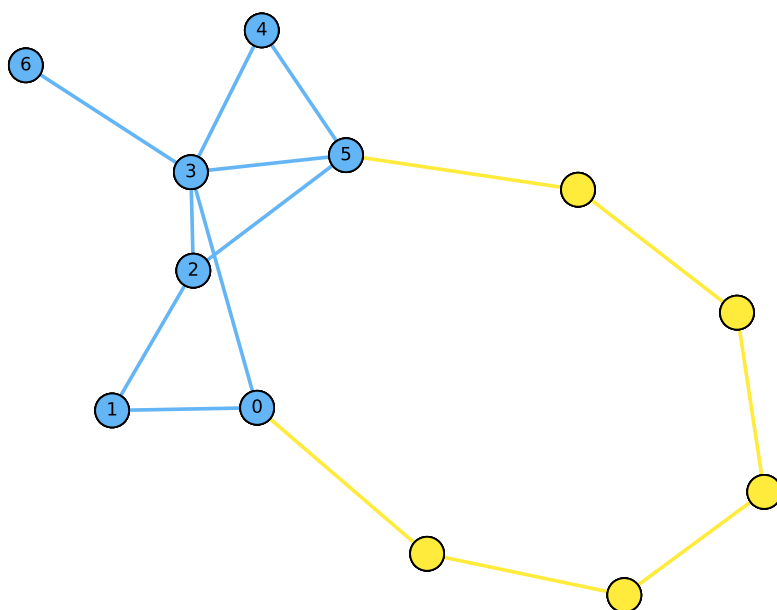


Figura 1.7.41: Ejemplo de  $H$ -camino  $P$  de un grafo  $H$ . Notar que en el dibujo consideramos a los vértices  $0,5$  como extremos de  $P$ .

Los ciclos son los grafos 2-conexos más elementales. Veamos que todos los demás se pueden construir a partir de ellos.

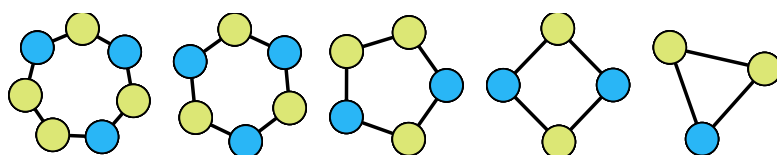


Figura 1.7.42: Ejemplos de ciclos:  $C_7, C_6, C_5, C_4$  y  $C_3$ .

**Proposición 1.7.3.** *Un grafo es 2-conexo si y solo si se puede construir a partir de un ciclo añadiendo sucesivamente  $H$ -caminos a grafos  $H$  ya construidos.*

**Comentario 1.7.4.** Es decir, si  $H_0$  es un ciclo, le agregamos un  $H_0$ -camino, y a la unión la llamamos  $H_1$ , el cual es 2-conexo, si quisieramos podemos agregar un  $H_1$ -camino y seguiría siendo 2-conexo, etc.

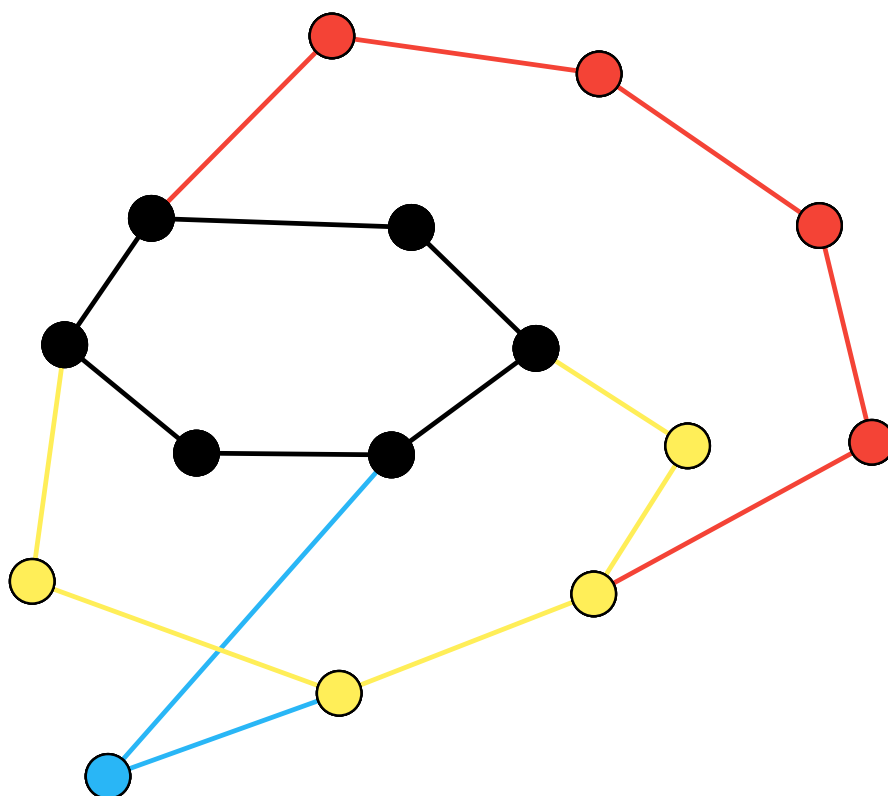


Figura 1.7.43: Ilustración de un ciclo  $H_0$  en negro, al que le agregamos  $H$ -caminos en el siguiente orden:  $H_0$ -camino,  $H_1$ -camino y por último  $H_2$ -camino.

*Demostración.*

- ( $\Leftarrow$ ) Claramente un grafo construido de esta manera no se puede separar por un solo vértice. Y por su puesto que tiene más de 2 vértices.
- ( $\Rightarrow$ ) Tomemos un grafo  $G$ , 2-conexo (en particular es también conexo). Como es 2-conexo, debe tener algún ciclo  $C$ , pues de lo contrario sería un árbol con al menos 3-vértices, y quitando un vértice que no es hoja nos quedaría separado. Nos fijamos si tiene un  $C$ -camino, si esto es así lo agregamos, y luego seguimos agregando hasta que no podamos más. Consideremos el subgrafo maximal  $H$  de  $G$  construido de esta manera a partir de  $C$ . Entonces toda arista  $xy \in E(G) \setminus E(H)$  tal que  $x, y \in V(H)$ , es un  $H$ -camino, con lo cual no puede existir por maximalidad de  $H$ . Es decir,  $H$  es un subgrafo inducido de  $G$ . Entonces todas las aristas de  $G$  que no están en  $H$  tienen un extremo fuera de  $H$ . Si  $H$  es  $G$  habríamos terminado, luego por el absurdo supongamos que no. Por conexión existe un vértice  $v \in G \setminus H$ , y conectándolo por un camino con  $H$  podemos asumir que  $v$  es incidente en  $H$ , es decir existe  $w \in H$  tal que  $vw$  es una arista incidente en  $H$ . Como  $G$  es 2-conexo, si quitamos a  $w$  el grafo sigue siendo conexo, luego debe ser que existe otro camino  $P$  de  $v$  a  $H$ , con lo cual  $P \cup vw$  es un  $H$ -camino. Absurdo por maximalidad de  $H$ .

□





abarcan todo el grafo ni son siempre disjuntos. Veamos como se arregla: podemos simplificar la noción para poder abarcar todo el grafo.

**Definición 1.8.1.** Un **bloque** es un subgrafo conexo maximal sin vértices de corte.

En la figura anterior, los bloques del grafo con los **ciclos** y las **aristas** 12 y 23.

**Observación 1.8.2.** Es fácil ver que los bloques van a ser o subgrafos 2-conexos o una *arista* o un *vértice*.

**Proposición 1.8.3.** Los ciclos de un grafo son los ciclos de sus bloques.

*Demostración.* Todo ciclo es 2-conexo, luego es conexo sin vértices de corte, y debe estar contenido en un subgrafo maximal con esta propiedad, i.e. un bloque.  $\square$

**Proposición 1.8.4.** Sean  $e, f \in E(G)$ . Entonces pertenecen a un mismo bloque si y solo si pertenecen a un mismo ciclo.

*Demostración.* Si pertenecen al mismo ciclo, entonces por la proposición anterior están en el mismo bloque.

Recíprocamente, como  $e, f$  son dos aristas en un mismo bloque, puedo asumir que el bloque es un subgrafo 2-conexo (no es arista sola o vértice solo). La idea es la siguiente: este subgrafo 2-conexo se construye a partir de un ciclo uniendo  $H$ -caminos, luego no es difícil ver que las dos aristas están contenidas en un mismo ciclo.  $\square$

**Definición 1.8.5.** El **grafo bloque** de un grafo  $G$  tiene un vértice por cada bloque y por cada vértice de corte de  $G$ ; hay una arista entre dos vértices si una representa un bloque y si el otro representa un vértice de corte que está dentro del bloque.

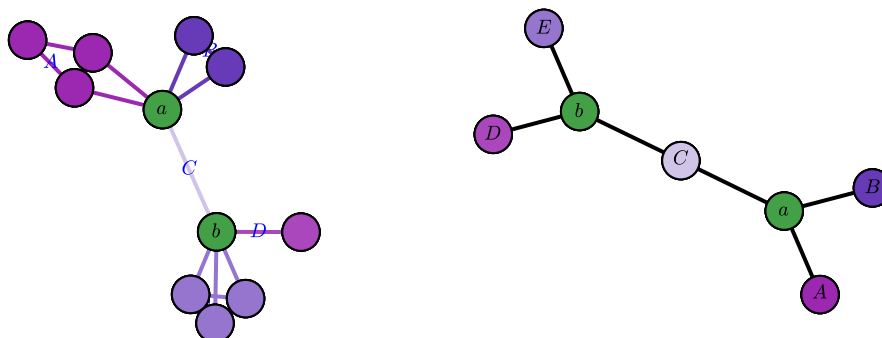


Figura 1.8.46: Ejemplo:  $G$  (izquierda) tiene 5 **bloques** (denotados por letras mayúscula:  $A, B, C, D, E$ ) y 2 **puntos de corte** (denotados por letras minúscula:  $a, b$ ). Luego el grafo bloque (derecha) de  $G$  tiene 7 vértices.

Notar que en nuestro ejemplo, el grafo bloque es un árbol. Esto no es casualidad:

**Ejercicio 1.8.6.** El grafo bloque de un grafo conexo es un árbol.

*Demostración.* Notación: al grafo bloque de  $G$  lo denotamos por  $Block(G)$ . A un subgrafo conexo sin vértices de corte maximal, i.e. un bloque, lo vamos a denotar con las letras mayusculas  $B, C, D$ . Y denotaremos con la misma letra al vértice que inducen en el grafo  $Block(G)$ . A los vértices de corte los denotaremos por una letra minúscula como  $x, y, z, u, v, w$  y los denotaremos de la misma manera en el grafo

$Block(G)$ . Quedará claro dependiendo del contexto, a qué grafo pertenece cada vértice en esta notación. Haremos el abuso de notación y llamaremos bloque tanto al subgrafo de  $G$  como al vértice de  $Block(G)$ . Análogamente, cuando digamos vértice de corte de  $Block(G)$  nos estamos refiriendo a un vértice que proviene de un vértice de corte de  $G$ .

Si  $G$  es conexo, luego  $Block(G)$  es conexo. Antes notemos que basta probar que entre dos bloques de  $Block(G)$  existe un camino, pues todo vértice de corte de  $Block(G)$  es adyacente a algún bloque en  $Block(G)$  por definición de grafo bloque. Sean  $B, B'$  dos bloques de  $Block(G)$ , consideremos luego a partir de un  $B, B'$ -camino siempre podemos construir un camino que no puede entrara y salir de un bloque más de una vez, por conexión del bloque. Este camino nos induce un camino en  $Block(G)$  dado por  $\tilde{P} : B_0 v_0 B_1 v_1 \cdots B_{r-1} v_{r-1} B_r$ , donde cada bloque o vértice aparece en el orden en el cual el camino  $P$  se intersecó por primera vez con estos en  $G$ .

Ahora veamos que  $Block(G)$  es aciclico. En efecto, supongamos que no, sea  $C$  un ciclo en  $Block(G)$ . Como  $Block(G)$  es bipartito (particionamos entre vértices de corte y bloques), no tiene ciclos impares, luego  $C$  tiene al menos 4 vértices (pueden ser cortes o bloques). Con lo cual, existen dos bloques distintos  $B_1, B_2$  y dos vértices de corte distintos  $v_1, v_2$  tal que podemos escribir  $C : B_1 v_1 B_2 \cdots v_2 B_1$ . Pero esto quiere decir que hay otro  $B_1, B_2$ -camino en  $G$  que no pasa por  $v_1$ , es decir que  $v_1$  no era vértice de corte, absurdo.  $\square$

### 1.8.1. Contracciones y menores

**Definición 1.8.7. Contraer una arista  $e = xy$**  equivale a borrar  $x$  e  $y$ , y añadir un nuevo vértice  $v_{xy}$  adyacente a todos los vértices que eran vecinos a  $x$  o  $y$ .

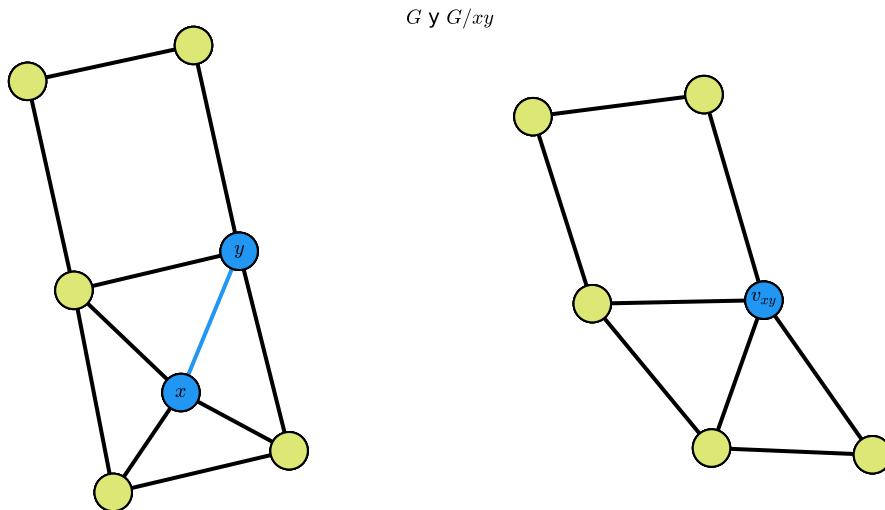


Figura 1.8.47: Ejemplo. Contraemos los vértices  $x, y$  y formamos  $v_{xy}$ .

**Notación 1.8.8.** Dado un grafo  $G$  y  $e = xy \in E(G)$ , notamos como  $G/e$  al grafo que se obtiene de  $G$  al contraer la arista  $e$ .

**Definición 1.8.9.** Decimos que  $H$  es un **menor** de  $G$  si se puede obtener  $H$  a partir de  $G$  al utilizar las siguientes operaciones:

1. Borrar vértices.

2. Borrar vértices y aristas.
3. Contraer aristas. O equivalentemente, contraer subgrafos conexos.

**Ejemplo 1.8.10.** Los subgrafos y contracciones de  $G$  son *menores* de  $G$ . No necesariamente vale la vuelta:

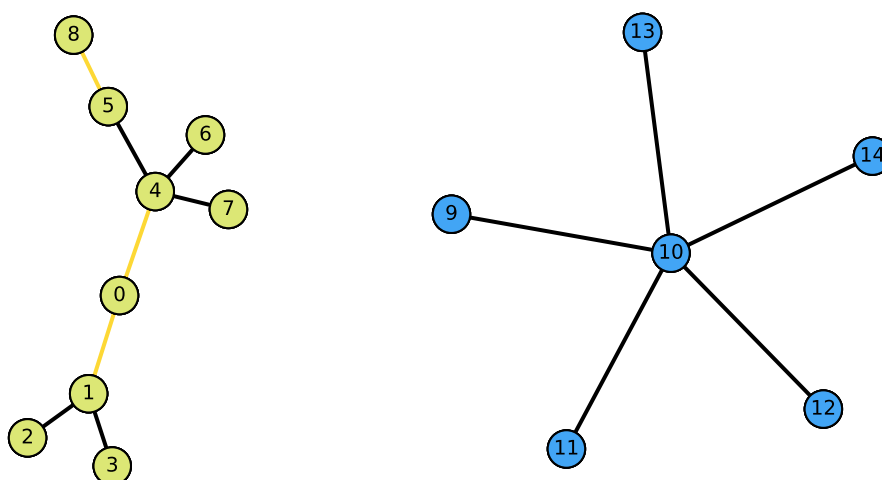


Figura 1.8.48: Ejemplo de menor  $H$  de  $G$ , que no es subgrafo porque tiene grado máximo  $\Delta(H) = 5$ . Pues  $H$  se obtiene luego de contraer las aristas de  $G$

## 1.8.2. subdivisiones

Sea  $X$  un grafo fijo.

**Definición 1.8.11.** Llamamos **subdivisión** de  $X$  a cualquier grafo  $G$  que se obtiene de *subdividir* algunas aristas de  $X$  y dibujando encima nuevos vértices. Más precisamente, reemplazamos las aristas de  $X$  con nuevos caminos entre sus extremos, de manera que estos caminos no se intersecan entre si y tampoco intersecan a  $V(X)$  salvo en los extremos. Diremos que  $G$  es un  $TX$ .

Llamaremos a los vértices originales de  $X$ , **vértices de ramificación de los de  $TX$** ; a los nuevos vértices los llamaremos **vértices subdivisores**.

Si un grafo  $Y$  contiene a  $TX$  como subgrafo, diremos que  $X$  es una **menor topológica** de  $Y$ .

Notar que los vértices subdivisores tienen grado 2 y los vértices de ramificación no cambian de grado.

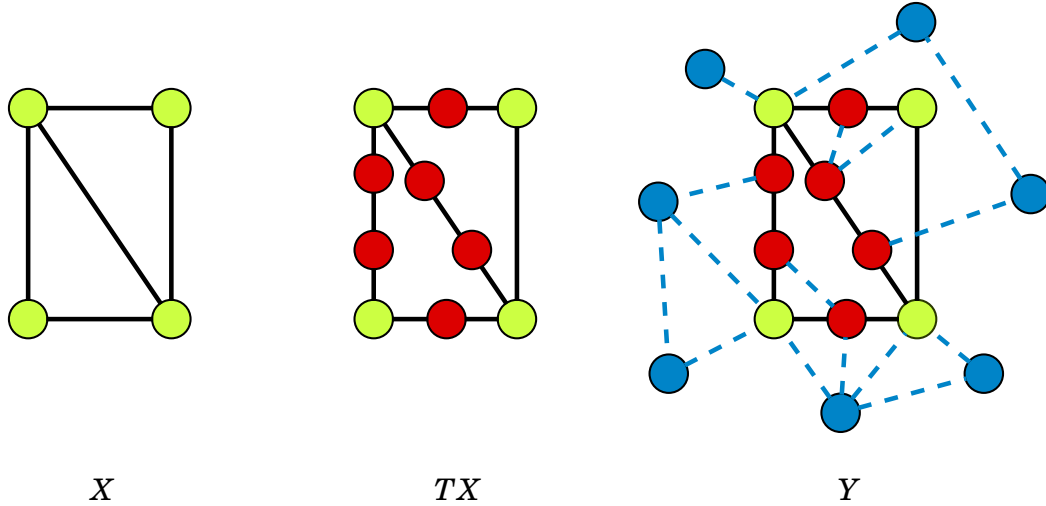


Figura 1.8.49: De izquierda a derecha, tenemos la construcción prograsia de  $X$ , luego le agregamos **vértices subdivisores** formando  $TX$ , y finalmente ilustramos un ejemplo de grafo  $Y$  con  $X$  como menor topológico.

**Definición 1.8.12.** Similarmente, reemplazando los vértices  $x \in X$  con grafos conexos disjuntos  $G_x$ , y las aristas  $xy \in X$  con conjuntos no vacíos de  $G_x - G_y$  aristas, obtenemos un grafo que llamaremos  $IX$ . Recíprocamente, decimos que  $X$  se obtiene a partir de  $G$  **contrayendo** subgrafos  $G_x$  (y fusionando las  $G_x - G_y$  aristas), y lo llamamos una **menor contraída** de  $G$ .

Si un grafo  $Y$  contiene un  $IX$  como subgrafo, decimos entonces que  $X$  es una **menor** de  $Y$ , llamamos a  $IX$  un **modelo** de  $X$  en  $Y$ , y denotamos  $X \leq Y$

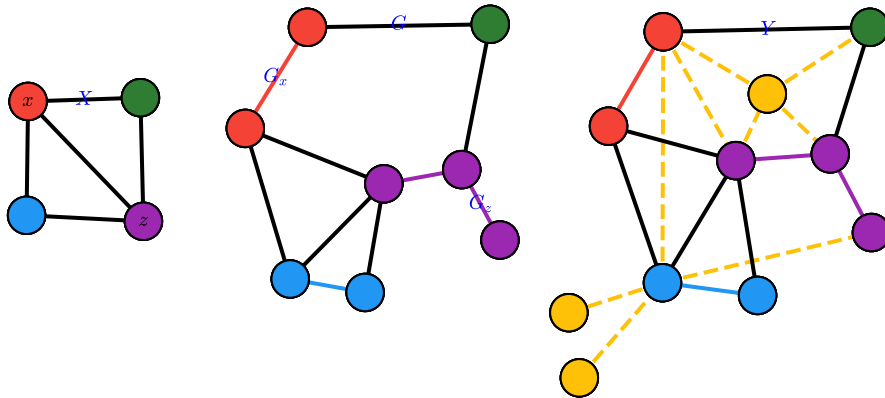


Figura 1.8.50: De izquierda a derecha, tenemos el grafo  $X$ , que se obtiene de contraer **subgrafos** de  $G$ ; finalmente, el grafo  $Y$  tiene a  $X$  como menor y a  $G$  como modelo de  $X$  en  $Y$

Por lo tanto,  $X$  es un menor de  $Y$  si y solo si existe una función  $\varphi : S \subset V(Y) \rightarrow V(X)$  tal que para todo vértice  $x \in X$  si preimagen  $\varphi^{-1}(x)$  es conexa en  $Y$  y para toda arista  $xx' \in E(X)$  existe una arista en  $Y$  entre conjuntos de ramificación  $\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(x')$ . Si el dominio de  $\varphi$  es todo  $V(Y) = S$ , y si  $xx' \in E(X)$  siempre que  $x \neq x'$  e  $Y$  tiene una arista entre  $\varphi^{-1}(x)$  y  $\varphi^{-1}(x')$  (es decir  $Y$  es una  $IX$ ), decimos que  $\varphi$  es una **contracción** de  $Y$  en  $X$ .

**Proposición 1.8.13.** *La relación de menores  $\leq$  y la relación de menores topológicos son ordenes parciales en la clase de grafos finitos. Es decir, son reflexivos, antisimétricos, y transitivos.*

Si  $G$  es una  $IX$ , luego  $P = \{G_x \mid x \in X\}$  es una partición de  $V(G)$ , y notamos  $G/P := X$ . Si  $U = G_x$  es el único conjunto de ramificación que no es un singleton, escribimos  $G/U := X$ , y notamos  $v_U$  al vértice  $x \in X$  al que se contrae  $U$ , y pensamos al resto de  $X$  como un subgrafo inducido de  $G$ . El caso más simple es cuando  $U$  contiene exactamente dos vértices que forman una arista  $e = U$ , aquí escribiremos  $G/e = X$ , el grafo que se obtiene de **contraer la arista  $e$** .

**Proposición 1.8.14.** *Sean  $X$  e  $Y$  grafos finitos. Entonces  $X$  es una menor de  $Y$  si y solo si existen grafos  $G_0, \dots, G_n$  tales que  $G_0 = Y$  y  $G_n = X$ , y además  $G_{i+1}$  se obtiene a partir de  $G_i$  borrando aristas, contrayendo aristas, o borrando vértices.*

*Demostración.* Estas tres últimas operaciones claramente producen una menor  $X$ , pues la relación de menor es transitiva. Recíprocamente, se puede hacer inducción en  $|Y| + ||Y||$ .  $\square$

Finalmente, tenemos la siguiente relación entre menores y menores topológicos:

**Proposición 1.8.15.** (I) *Todo  $TX$  es también un  $IX$  (ver la siguiente figura); por lo tanto, toda menor topológica de un grafo es su menor (ordinaria).*

(II) *Si  $\Delta(X) \leq 3$ , entonces todo  $IX$  contiene un  $TX$ ; con lo cual, toda menor con grado máximo a lo sumo 3 de un grafo es también su menor topológico.*

*Demostración.* Veamos solo (ii), el primer ítem es obvio. En efecto,  $IX$  es el grafo que se obtiene de  $X$  reemplazando cada vértice  $x$  de él por un subgrafo conexo  $G_x$  y cada arista por un conjunto de aristas no vacío, luego tomando una arista de ese conjunto, basta con escoger un vértice de  $G_x$  que tenga por cada vecino de  $x$  en  $X$  un camino distinto hacia cada arista incidente en  $G_x$ . Esto es posible: empezamos eligiendo de manera inocente al vértice que es extremo de una arista incidente con  $G_x$ , de este vértice, llamemoslo  $x$ , tendríamos que contrar dos caminos disjuntos con extremo final, en el peor de los casos pues  $\Delta(X) \leq 3$ , en otras dos aristas de  $X$ ; ahora si no se cruzan ya ganamos, de lo contrario se fusionan a partir de un momento, incluso varias veces, pero luego movemos nuestro vértice  $x$  a la última vez que se fusionan los caminos, y llamemoslo  $x'$ :

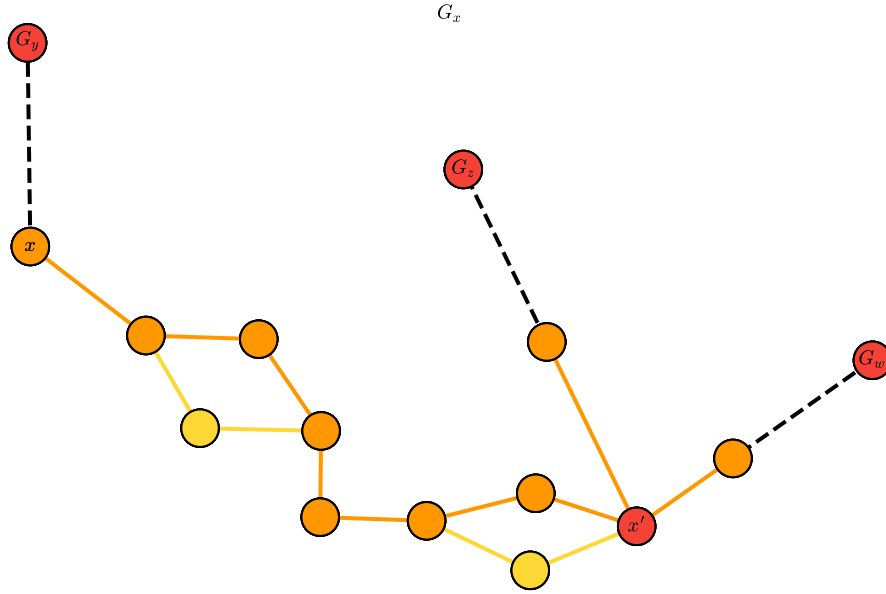


Figura 1.8.51: Ilustración de cómo se ven dos caminos, ambos de color amarillo pero uno más claro que el otro, que salen de nuestro vértice  $x$  y tienen que llegar a las aristas incidentes en  $G_x$ . Al final movemos nuestro vértice a  $x'$ .

□

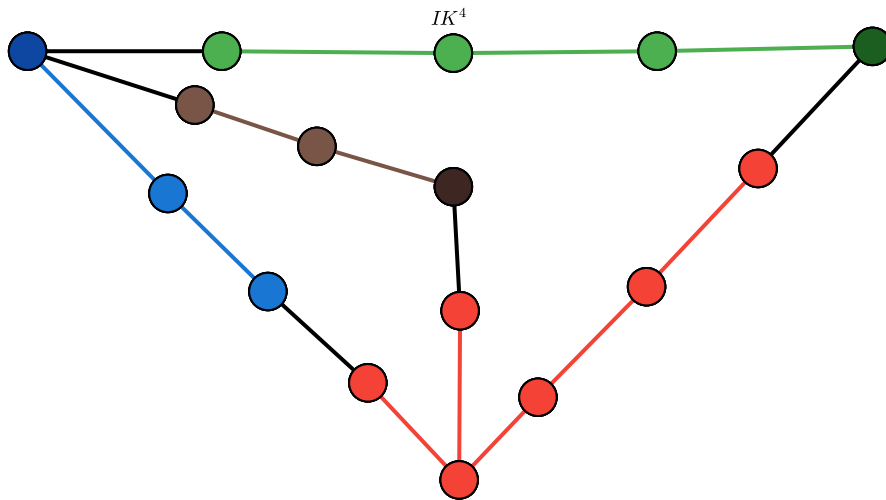


Figura 1.8.52: Ejemplo: Una subdivisión de  $K^4$  visto como  $IK^4$ .

Ahora que conocemos todas las relaciones standard entre grafos, podemos definir lo que significa embeber a un grafo en otro.

**Definición 1.8.16.** Básicamente, una **inmersión** (o **embedding** en inglés) de  $H$  en  $G$  es un mapa inyectivo  $\varphi : V(H) \rightarrow V(G)$  tal que preserva la estructura en la que estamos interesados. Con lo cual,  $\varphi$  embebe a  $H$  en  $G$  como un subgrafo si preserva la adyacencia entre vértices, y como subgrafo inducido si preserva tanto la adyacencia como la no adyacencia. Si  $\varphi$  está definido también en  $E(H)$  como en  $V(H)$  y manda  $xy$  en caminos independientes de  $G$  entre  $\varphi(x)$  y  $\varphi(y)$ , decimos que  $\varphi$  embebe a  $H$  en  $G$  como un menor topológico. Similarmente, decimos que es una inmersión de  $H$  en  $G$  como un menor, si mapea a  $V(H)$  en conjuntos disjuntos de vértices en  $G$  conexos, de manera que  $G$  tiene una arista entre los conjuntos  $\varphi(x)$

y  $\varphi(y)$  siempre que  $xy$  es una arista de  $H$ . Más variantes existen, pero depende del contexto en el que estemos; por ejemplo, se pueden definir de manera obvia las immersiones de 'subgrafos generadores', y 'menores inducidas', etc.

## 1.9. Clase 9: 17/04/23

**Lema 1.9.1.** *Todo grafo 3-conexo, distinto de  $K_4$ , tiene una arista  $e$  tal que  $G/e$  es 3-conexo.*

*Demostración.* Supongamos que no hay una arista con esta propiedad. Es decir, para toda  $xy \in E(G)$ , el grafo  $G/xy$  tiene un conjunto separador  $S$  de a lo más 2 vértices. Como  $G$  es 3-conexo,  $v_{xy}$  (el vértice que sale de contraer la arista  $xy$ ) tiene que estar en  $S$  y  $|S| = 2$ , ya que  $|S| = 0$  es imposible porque el grafo es conexo y por otro lado si  $|S| = 1$ , estamos diciendo que  $G$  se puede separar con un solo vértice si  $v_{xy} \notin S$  o si  $v_{xy} \in S$  entonces podemos desconectar a  $G$  con los vértices  $x, y$ , imposible. Luego, escribimos  $S = \{z, v_{xy}\}$  con  $z \notin \{x, y\}$  separador de  $G/xy$ . Con lo cual,  $T = \{z, x, y\}$  separa a  $G$ . Como ningún subconjunto propio de  $T$  separa, cada vértice de  $T$  tiene un vecino en cada componente de  $G \setminus T$ .

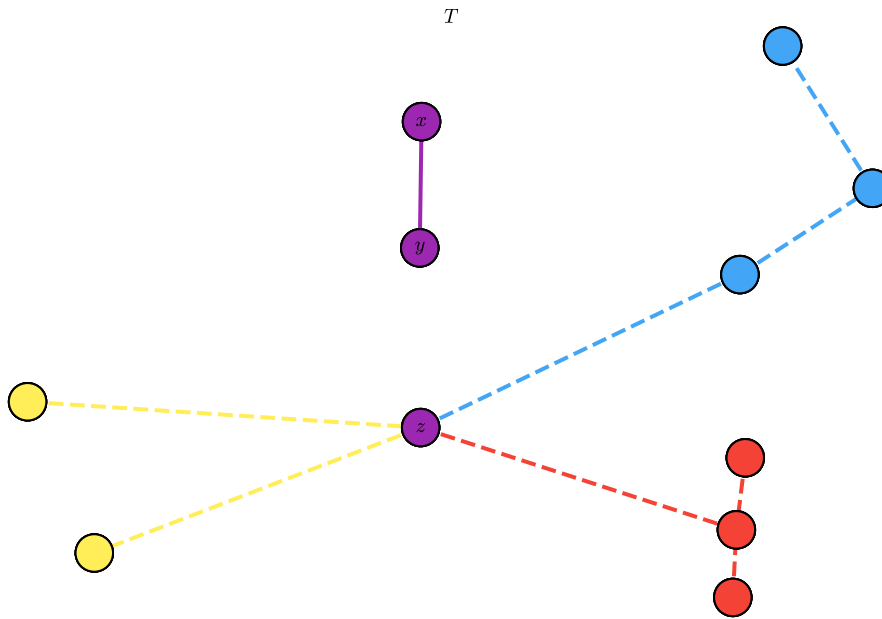


Figura 1.9.53: Ilustración del conjunto  $T$ , donde se muestra que el vértice  $z$  tiene vecinos en cada componente de  $G \setminus T$ .

Como  $xy$  era arbitrario, podemos elegir la arista  $xy$ , el vértice  $z$  y la componente  $C$  tal que  $|C|$  es mínimo. Tomo  $v \in C$  y es vecino de  $z$ . Entoncces  $G/vz$  tampoco es 3-conexo, o sea que existe  $w$  tal que  $v, z, w$  (distintos) separan  $G$ . Como antes cada una de  $v, z, w$  tiene un vecino en cada componente de  $G \setminus \{v, z, w\}$ . Como  $x$  e  $y$  son adyacentes, existe  $D$  componente de  $G \setminus \{v, z, w\}$  tal que  $D \cap \{x, y\} = \emptyset$  (porque  $G \neq K_4$ !).



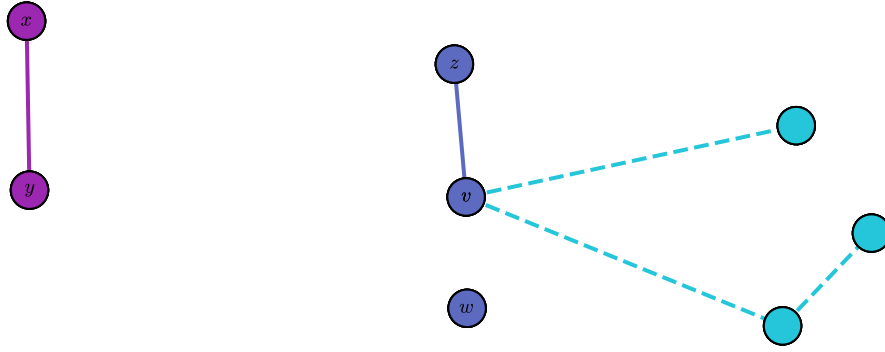


Figura 1.9.54:  $D$  está contenido en el subgrafo azul.

Dado que  $v \in C$ , los vecinos de  $v$  en  $D$  están en  $C$ . Tenemos que  $D \cap C \neq \emptyset$ , más aún,  $D \subsetneq C$ . Contradiciendo la minimalidad del orden de  $C$ .  $\square$

**Teorema 1.9.2** (Teorema de Tutte, 1961). *Un grafo  $G$  es 3-conexo si y solo si existe una secuencia de grafos  $G_0, G_1, \dots, G_n$  que cumple lo siguiente:*

- (I)  $G_0 = K_4$  y  $G_n = G$ .
- (II)  $G_{i+1}$  tiene una arista  $xy$  tal que  $d(x), d(y) \geq 3$  y  $G_i = G_{i+1}/xy$  para todo  $i < n$ .  
Más aún, cada  $G_i$  es 3-conexo.

*Demostración.* Por el lema anterior, podemos quitar una arista recursivamente hasta llegar a  $K_4$ . La vuelta esta en el DIESTEL.  $\square$

### 1.9.1. Teorema de Menger

**Definición 1.9.3.** Si  $A, B, X \subset V(G)$  son tales que todo  $A, B$ -camino tiene un vértice de  $X$ , decimos que  $X$  separa a  $A$  y  $B$  en  $G$ .

**Teorema 1.9.4** (Menger, 1927). *Sea  $G = (V, E)$  un grafo y sean  $A, B \subset V$ . El mínimo número de vértices que separa a  $A$  y  $B$  es igual al máximo número de  $A, B$ -caminos disjuntos.*

## 1.10. Clase 10: 20/04/23

**Teorema 1.10.1** (Menger, 1927). *Sea  $G = (V, E)$  un grafo y sean  $A, B \subset V$ . El mínimo número de vértices que separa a  $A$  y  $B$  es igual al máximo número de  $A, B$ -caminos disjuntos.*

*Demostración.* Sea  $k$  el mínimo numero de vértices que separan  $A$  y  $B$ . No es difícil convencerse que  $G$  no puede contener más de  $k$  caminos entre  $A$  y  $B$ , i.e.  $k \geq$  al máximo número de  $A, B$ -caminos disjuntos.

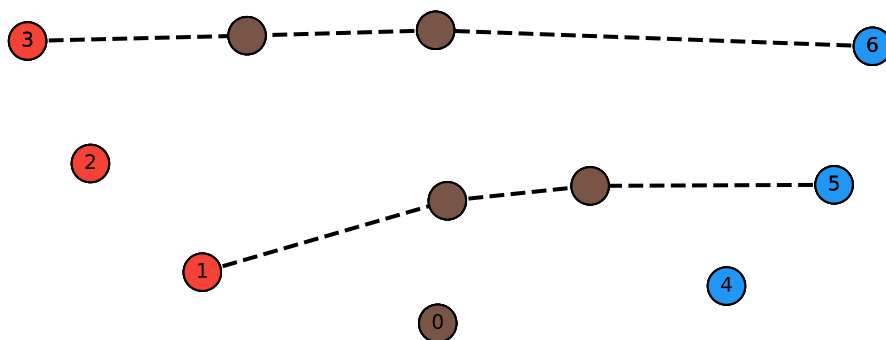


Figura 1.10.55: El conjunto separador con  $k$ -elementos se ilustra en el medio de los conjuntos  $A$  y  $B$ , formados por los vértices  $0,1,2,3$  y  $0,4,5,6$  respectivamente.

Para la otra desigualdad, haremos inducción en el número de aristas. Si  $G$  no tiene aristas entonces los  $A, B$ -caminos son puntos de  $A \cap B$ ! y trivialmente vale la igualdad. Ahora, si existe una arista  $e = xy$  de  $G$ , y si  $G$  no tiene  $k$  caminos entre  $A, B$  disjuntos (es decir tiene  $< k$ ), entonces  $G/e$  tampoco pues  $G/e$  no puede tener más  $A, B$ -caminos (contamos a  $v_e$  como elemento de  $A$  (o  $B$ ) si alguna de  $x$  o  $y$  está en  $A$  (o  $B$ )). Luego por hipótesis inductiva,  $G/e$  tiene un  $A, B$ -separador  $Y$  con menos de  $k$  vértices. El vértice  $v_e$  debe estar en  $Y$ , porque si no  $Y$  sería separador de  $G$ , contradiciendo minimalidad de  $k$ . Entonces  $X = (Y \setminus v_e) \cup \{x, y\}$  es un  $A, B$ -separador de  $G$  con exactamente  $k$  vértices. En efecto, por minimalidad  $k \leq |X|$ , y por construcción  $|X| = |Y| + 1 < k + 1 \leq k$ .

Consideremos ahora  $G \setminus e$ . Como  $x, y \in X$ , todo  $A, X$ -separador en  $G \setminus e$  es un  $A, B$ -separador en  $G$  con al menos  $k$ -vértices por minimalidad de  $k$ .

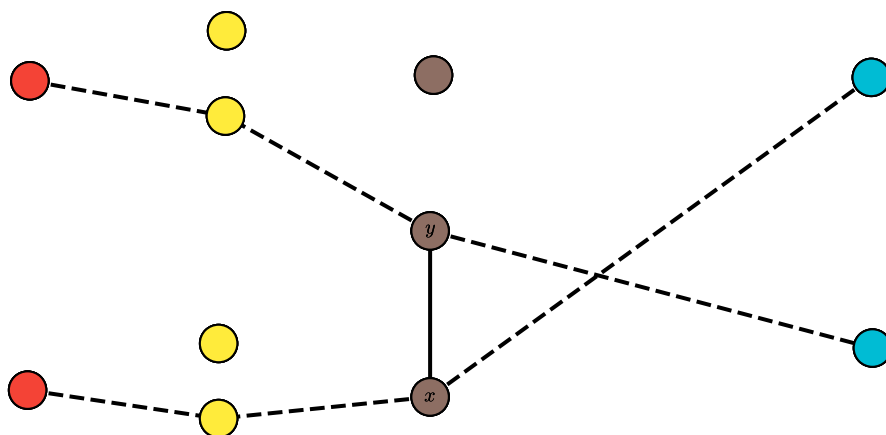


Figura 1.10.56: Ilustración del conjunto separador  $X$  y los conjuntos de vértices  $A$  y  $B$ . Notar que todos los  $A, B$ -caminos deben pasar por el  $A, X$ -separador.

Por inducción, hay al menos  $k$  caminos entre  $A, X$  disjuntos en  $G \setminus e$ . Lo mismo pasa con los  $B, X$ -caminos. Como  $X$  separa a  $A$  y  $B$ , estos caminos solo se encuentran en  $X$  y los puedo combinar para tener al menos  $k$  caminos entre  $A$  y  $B$  (disjuntos), contradicción.  $\square$

**Definición 1.10.2.** El **grafo línea**  $L(G)$  de un grafo  $G = (V, E)$  es aquel cuyo conjunto de vértices es  $E$  y hay una arista entre dos elementos de  $E$  si y solo si las aristas son adyacentes en  $G$ , es decir comparten un extremo.

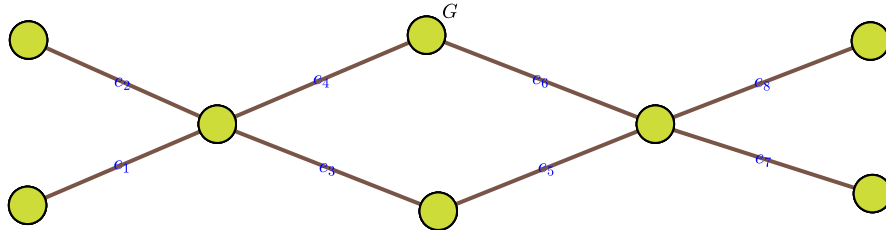


Figura 1.10.57: Ejemplo de un grafo  $G$ .

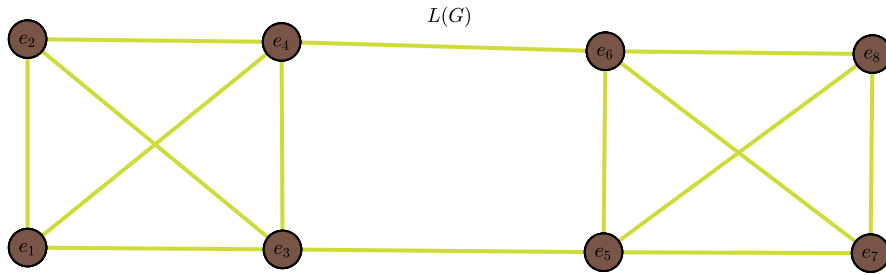


Figura 1.10.58: Grafo de línea de  $G$ , donde se puede ver que sus **vértices** son las **aristas** de  $G$ .

**Definición 1.10.3.** Un conjunto de  $a, B$ -caminos es un  $a, B$ -**abanico** si cada par de estos caminos se intersecta SOLO en  $a$ .

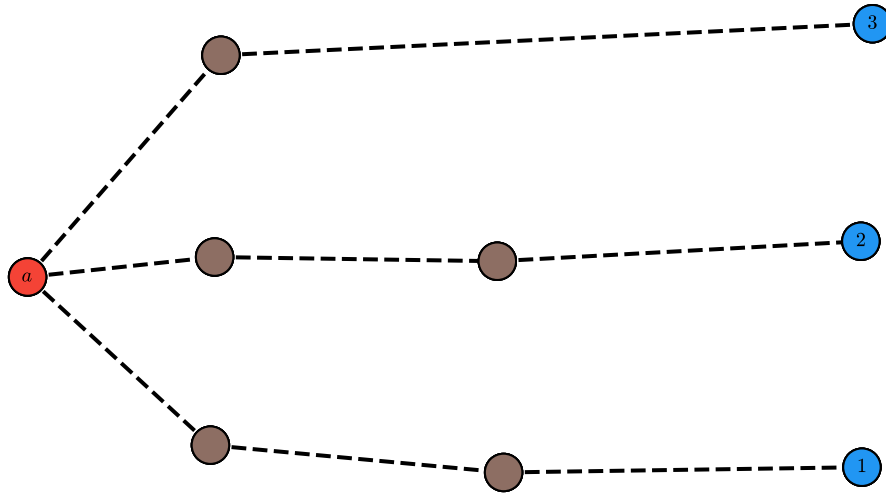


Figura 1.10.59: Ejemplo de  $a, B$ -abanico.

**Corolario 1.10.4.** Para  $B \subset V$  y  $a \in V \setminus B$ , el mínimo número de vértice que separan  $a$  de  $B$  en  $G$  es igual al máximo número de caminos en un  $a, B$ -abanico en  $G$ .

*Demostración.* Aplicamos el Teorema de Menger a  $G \setminus a$  con conjuntos  $A = N_G(a)$  y  $B$  como en el enunciado.

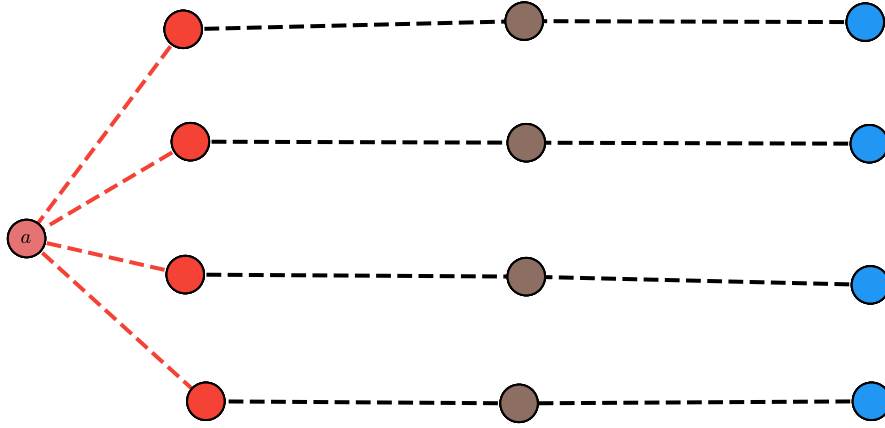


Figura 1.10.60: Ilustración del procedimiento: en rojo los **vecinos** de  $a$ , en azul el conjunto **B**, y en marrón a un conjunto **A**, **B**-separador **X**.

□

**Corolario 1.10.5.** Sean  $a$  y  $b$  vértices distintos de  $G = (V, E)$ .

- (I) Si  $ab \notin E$  ( $a, b$  no son adyacentes), entonces el mínimo número de vértices que separan  $a$  de  $b$  en  $G$  es igual al máximo número de  $a, b$ -caminos INTERNAMENTE disjuntos.
- (II) El mínimo número de aristas que separan  $a$  de  $b$  es igual al máximo número de  $a, b$ -caminos arista-disjuntos.

*Demostración.* (I) Aplicamos el Teorema de Menger a  $G \setminus \{a, b\}$  con  $A = N_G(a)$  y  $B = N_G(b)$ .

- (II) Aplicamos el Teorema de Menger al grafo  $L(G)$  con conjuntos  $A = E(a)$  y  $B = E(b)$  los conjuntos de aristas incidentes en  $a$  y  $b$ , respectivamente.

□

Notar que en el segundo ítem de la demostración anterior usamos que hay una correspondencia biyectiva entre aristas  $A, B$ -separadoras y vértices separadores de  $E(A), E(B)$  en  $L(G)$ , y también entre los  $A, B$ -caminos arista-disjuntos y los  $E(A), E(B)$ -caminos disjuntos de  $L(G)$ .

**Teorema 1.10.6** (Versión global de Menger). (I) Un grafo es  $k$ -conexo si y solo si contiene  $k$ -caminos internamente disjuntos entre cada par de vértices.

- (II) Un grafo es  $k$ -aristaconexo si y solo si contiene  $k$  caminos arista disjuntos entre cada par de vértices.

*Demostración.*

□

## 1.11. Ejercicios

**Ejercicio 1.11.1.** Sea  $G$  un grafo que contiene un ciclo  $C$ , y supongamos que  $G$  contiene un camino de longitud al menos  $k$  entre dos vértices de  $C$ . Probar que  $G$  contiene un ciclo de longitud al menos  $\sqrt{k}$ .

*Solución.* Si  $C$  tiene longitud  $\sqrt{k}$  entonces la afirmación vale. Si no, denotemos por  $P$  al camino de longitud  $k$  entre dos vértices  $x, y \in C$ . Como  $\|C\| < \sqrt{k}$ ,  $P$  interseca con  $C$  en menos de  $\sqrt{k}$  vértices, por lo tanto existen dos vértices  $a, b \in P \cap C$  tales que, en el orden inducido por el camino  $P$ , no hay otro vértice de  $C$  entre estos, y  $aPb$  tiene longitud  $\geq \sqrt{k}$ . Luego el ciclo  $aPbCa$  tiene longitud  $\geq \sqrt{k}$ .  $\square$

**Ejercicio 1.11.2.** Probar que los grafos de cintura  $\geq 5$  y orden  $n$  tienen  $\delta = o(n)$ . Es decir, existe  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que  $f(n)/n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y  $\delta(G) \leq f(n)$  para todo  $G$  de orden  $n$ .

*Solución.* En efecto, tenemos que

$$n = |G| \geq n_0(\delta, 5) = 1 + \delta(1 + (\delta - 1)) = 1 + \delta^2$$

por el Teorema débil ??, si  $\delta \geq 2$ .  $\square$

**Ejercicio 1.11.3.** Probar que todo grafo conexo  $G$  contiene un camino o un ciclo de longitud al menos  $\min\{2\delta(G), |G|\}$ .

*Solución.* Comentario, el resultado es falso solo para  $n = 2$ . En efecto, veremos en la demostración que vale para  $n \neq 2$ , y un camino de longitud uno no cumple pues  $2\delta = 2$  y  $n = 2$  pero la longitud de cualquier sub camino o ciclo es a lo más uno.

Consideremos  $P$  el camino de longitud máxima. Por maximalidad los vecinos de los extremos de  $P$  tienen que estar en  $P$ . Si  $G[P]$  forma un ciclo  $C$  de longitud mayor a  $P$ , i.e.  $G[C] = G[P]$  debe ser que

- (I)  $\|C\| = |G|$  si  $G = G[C]$ . Luego en este caso se tiene que vale la afirmación;
- (II) o si no, como  $G$  es conexo existe un vértice  $v \notin V(C)$  adyacente a  $C$ . Más aún, todos sus vecinos deben estar en  $C$ , de lo contrario podíamos encontrar un camino más grande que  $P$ . Con lo cual  $\delta(G) \leq d(v) \leq \|C\|/2$  porque no puede haber dos vecinos de  $v$  en  $C$  ayacentes mediante una arista de  $C$  por maximalidad de  $C$ . Luego en este caso también vale la afirmación.

Por otro lado, si  $G[P]$  no forma ciclos de longitud mayor a  $P$ , debe ser que los extremos de  $P$  (digamos  $x_1$  y  $x_2$ , que podemos suponer son distintos pues este caso es trivial) no son vecinos entre sí. Veamos que esto implica que  $\|P\| \geq 2\delta(G)$ , para eso, basta ver que  $\|P\| \geq d(x_1) + d(x_2)$ . En efecto, ordenemos a los vecinos de  $x_1$  en  $P$ :  $V : v_1 < v_2 < \dots < v_{d(x_1)}$ ; similarmente ordenamos los vecinos de  $x_2$  en  $P$ :  $W : w_1 < w_2 < \dots < w_{d(x_2)}$ . Notemos que un elemento de  $v \in V$  no puede ser adyacente a un elemento  $w \in W$  cuando  $v > w$ , pues podríamos construir un ciclo de longitud más grande que  $P$ :  $wx_2Pvx_1Pw$ . Luego con esta observación, probemos que el camino de  $P$  generado por todos los vértices  $x_i, y_j$  tiene longitud al menos  $d(x_1) + d(x_2) - 2$ . Para eso, basta ver que este conjunto tiene al menos  $d(x_1) + d(x_2) - 1$  vértices. Sea  $j_0$  el primer índice tal que  $y_{j_0}$  coincide con un  $x_i$ , luego debe ser que para todo  $y_j$  con  $j > j_0$  tal que coincide con un  $x_i$  no puede ser consecutivo a  $y_{j-1}$  (por la observación de recién con  $v = y_j$  y  $w = y_{j-1}$ ), de hecho debe haber un vértice entre  $y_{j-1}$  e  $y_j$  que no sea ningún  $x_i$ : el consecutivo a  $y_{j-1}$  por la observación anterior. Es decir, salvo por  $y_{j_0}$  los  $y_j$  son distintos a los  $x_i$  o si coinciden con algún  $x_i$  es porque hay un tercer vértice distinto de  $x_i$  o  $y_j$  que podemos contar en lugar de  $y_j$ .  $\square$

**Ejercicio 1.11.4.** Sean  $\alpha, \beta$  dos invariantes de grafos en  $\mathbb{N}$ .

**Ejercicio 1.11.5.** Probar que todo árbol  $T$  tiene al menos  $\Delta(T)$  hojas.

*Demostración.* En efecto, fijemos una raíz  $r$  con  $d(r) = \Delta(T)$ . Afirmamos que hay una hoja distinta por cada vecino de  $r$ , más aún, estos son los elementos maximales en el orden de árbol con raíz  $r$ . Y hay al menos  $d(r)$  de estos, tománd el máximo de cada conjunto  $w^{\geq} := \{v \in T \mid v \geq w\}$ , con  $w \in N_T(r)$ . Son distintos, pues de lo contrario, sean  $m_1$  al mínimo vértice de  $w_1^{\geq}$  y  $m_2$  el de  $w_2^{\geq}$  tales que no son más grandes que  $w_2$  y  $w_1$  respectivamente. En particular, existe  $m \geq w_1, w_2$ . Luego tenemos un ciclo  $r < w_1 < \dots < m_1 < m > m_2 > \dots > w_2 > r$ , lo cual es imposible.  $\square$

**Ejercicio 1.11.6.** Sean  $F, F'$  dos bosques en el mismo conjunto de vértices, y  $\|F\| < \|F'\|$ . Probar que  $F'$  tiene una arista  $e$  tal que  $F + e$  es nuevamente un bosque.

*Solución.* En efecto, si  $F$  tuviera más de una componente, entonces cualquier arista  $e \in F'$  con extremo en ambas funcionaría. Luego supongamos que  $F'$  no tiene aristas que conectan ninguna componente de  $F$ , es decir por inducción en  $\|F\|$  se sigue el resultado. Luego supongamos que  $F$  es conexo, es decir es un árbol, como  $\|F'\| = |F'| - \# \text{componentes}$ , se sigue de la desigualdad del enunciado que  $F'$  también es conexo. Ahora si consideramos el grafo  $G = F + F'$ , este grafo tiene dos árboles generadores  $F$  y  $F'$ . Si  $F$  y  $F'$  tuvieran una arista en común, luego el resultado se sigue. De lo contrario, tendríamos que por cada arista  $e \in F'$ , tenemos un ciclo en  $T + e$ , es decir un ciclo fundamental  $C_e$ . Pero por la Ecuación (??) aplicada al subespacio de cortes  $\mathcal{B}(G)$  y usando el Teorema ??:

$$\|F\| + \|F'\| = \dim \mathcal{E}(G) = n - 1 + \dim \mathcal{C}(G)$$

con  $n = |F| = |F'|$ , y como  $F$  es árbol  $n - 1 = \|F\|$ . Luego  $\dim \mathcal{C}(G) = \|F'\|$ . Análogamente,  $\dim \mathcal{C}(G) = \|F\| < \|F'\|$ , imposible.  $\square$

**Ejercicio 1.11.7.** Probar que todo grafo es 2-arista-conexo si y solo si tiene una orientación **fuertemente conexa**, es decir, tiene una orientación en la cual para todo par de vértices  $x, y$  existe un camino dirigido  $\vec{P}$  con dirección de  $x$  hacia  $y$ .

*Solución.*  $(\Rightarrow)$  Lo probaremos para multigrafos 2-arista-conexos, por inducción en el número de aristas. Primero supongamos que  $\delta(G) \geq 3$ , digamos con  $d(x) \geq 3$  y  $e$  aristas incidentes en  $x$ . Consideremos el grafo  $G \setminus e$ . Si sigue siendo 2-arista conexo, luego por inducción tenemos que tiene una orientación fuertemente conexa y en particular  $G$  también. De lo contrario, es porque existe otra arista  $f$ , distinta de  $e$ , tal que  $G \setminus \{e, f\}$  tiene exactamente dos componentes 2-conexas, conectadas entre sí por  $e$  y  $f$ , digamos  $H_1, H_2$  y por hipótesis inductiva tienen una orientación fuertemente conexa cada una, las cuales podemos extender a todo  $G$  declarando a  $f$  como la orientación  $H_1$  hacia  $H_2$  y a  $e$  como la orientación opuesta.

Ahora, si  $\Delta(G) \leq 2$ , tenemos que como  $2 \leq \lambda(G) \leq \delta(G) \leq \Delta(G)$ , en realidad vale la igualdad, es decir  $G$  es 2-regular. Si  $G$  tiene solo vértice no hay nada que probar, en general sea  $x \in V(G)$ , luego tiene dos vecinos o era el multigrafo con solo dos vértices de grado 2; en el primer caso podemos *remover* a  $x$ , es decir, los vecinos de  $x$  ahora van a estar unidos por una arista en vez de conectarse a  $x$ , como la cantidad de aristas disminuye pero sigue siendo 2-conexo, luego por inducción tiene una orientación fuertemente conexa, la cual sencillamente podemos extender a todo  $G$  como lo muestra el dibujo:

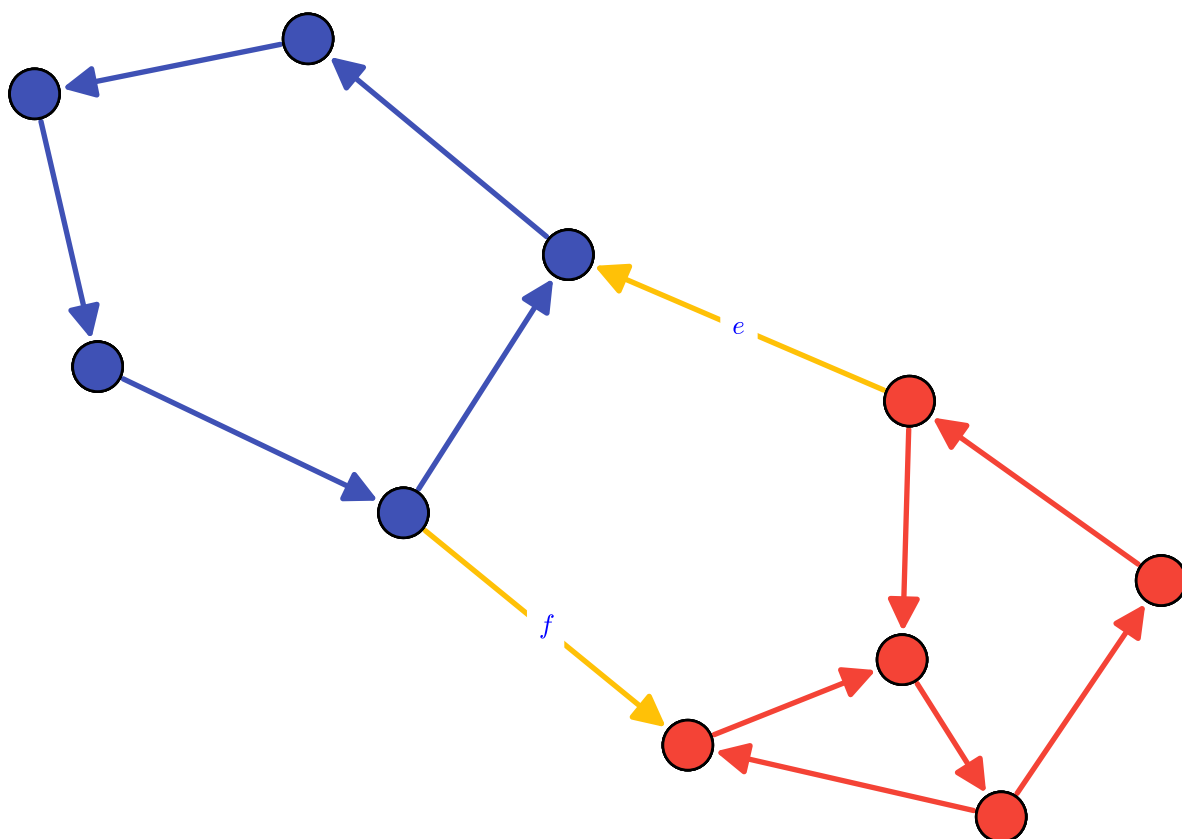


Figura 1.11.61: Por un lado tenemos a  $H_1$  y por el otro  $H_2$ , conectados por  $e$  y  $f$ .

( $\Leftarrow$ ) Quitar una arista no nos puede remover la conexión de  $G$ , de lo contrario, sean  $x, y$  dos vértices adyacentes tales que  $e = xy$  es un puente, i.e.  $G \setminus e$  es arista desconexo, tenemos que  $e$  tenía la orientación, digamos  $x$  a  $y$ , sin embargo existe un camino en  $G$  con orientación de  $y$  en  $x$ , el cual no puede tener ninguna arista igual a  $e$ , con lo cual  $x, y$  seguían siendo arista-conectados en  $G \setminus e$ , absurdo.

□

**Ejercicio 1.11.8.** Dar una demostración corta por inducción de la existencia de un árbol normal generador en cualquier grafo finito conexo (para cualquier orden de árbol).

*Solución.* Afirmamos que existe un vértice  $v$  de  $G$  que se puede eliminar y sigue siendo conexo:  $G$  tiene un árbol generador, luego quitamos una hoja. Ahora por inducción,  $G \setminus v$  tiene un árbol generador normal  $T'$ . Afirmamos que el árbol generador  $T = T'vx$  de  $G$  es también normal, donde  $x \in T'$  es adyacente a  $v$  en  $G$ , maximal en el orden de  $T'$ . Ahora, el orden de  $T'$  se extiende al de  $T$  para cualquier raíz  $r$  de  $T'$ . Sea  $P$  un  $T$ -camino entre dos vértices distintos de  $v$ , luego son comparables en  $T'$ ; por otro lado, si uno de los vértices es  $v$  y el otro es  $y$ , digamos, entonces  $xvPy$  es un  $T'$ -camino, luego  $x$  e  $y$  son comparables, y por lo tanto  $v$  e  $y$  también, pues por la maximalidad de  $x$ ,  $x \geq y$ . (Notar que luego vale para  $v$  como raíz también.) □

**Ejercicio 1.11.9** (Depth-first search). Sea  $G$  un grafo conexo, y  $r \in G$  un vértice arbitrario. Empezando desde  $r$ , nos movemos a través de las aristas de  $G$ , priorizando movernos a un vértice que no hayamos visitado aún. Si no hay ningún vértice,

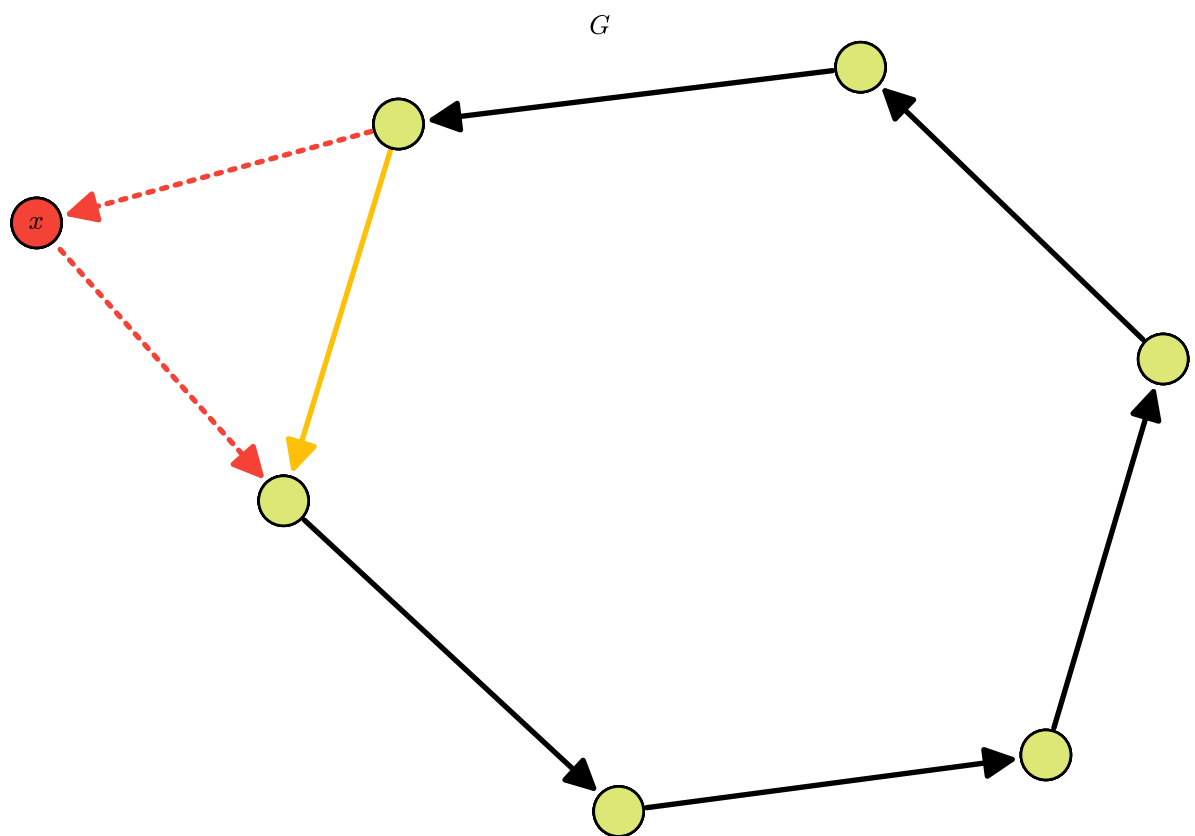


Figura 1.11.62: Remover  $x$  es equivalente a unir a sus vecinos por una **arista** y quitar **las aristas incidentes** en  $x$ .



retrocedemos por las aristas que visitamos por última vez, ordenadamente: la más reciente primero, intentando ocupar un vértice no visitado nuevamente. El algoritmo para cuando regresamos a  $r$ . Probar que las aristas recorridas forman un árbol normal generadores de  $G$  con raíz  $r$ .

*Solución.* Debemos probar varias cosas, primero que este recorrido, que llamaremos  $T$ , es un árbol: basta ver que no tiene ciclos; que es generador; y que es normal.

1. Sea  $C$  un ciclo con vértices consecutivos  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$  en  $T$ . Podemos suponer que  $x_k$  fue el último en haber sido visitado. Luego  $x_0$  tuvo que haber sido el vértice que se visitó primero de  $C$  y en consecuencia se visitó en orden:  $x_0, x_1, \dots, x_k$ . Pero una vez visitado  $x_k$  el algoritmo siguió corriendo sin volver a  $x_0$  pues este ya fue visitado, pero esto significa que  $C$  no puede tener la arista  $x_k x_0$ , absurdo.
2. Supongamos que existe un vértice no visitado, luego existe un vértice sin visitar a distancia mínima de  $T$ , i.e. adyacente a  $x \in T$ . Luego el algoritmo tuvo que pasar por este vértice cuando volvió a  $x$  por última vez.
3. Como  $T$  genera, se sigue que es normal si y solo si para todo par de vértices adyacentes en  $G \setminus T$  son comparables. En efecto, supongamos que el algoritmo visitó primero a  $x$  y luego a  $y$ , con lo cual  $x \leq y$ .

□

**Ejercicio 1.11.10.** Sea  $\mathcal{T}$  un conjunto de subárboles de un árbol  $T$ , y  $k \in \mathbb{N}$ .

- (I) Mostrar que si los árboles de  $\mathcal{T}$  no son disjuntos dos a dos, entonces  $\bigcap_{S \in \mathcal{T}} S \neq \emptyset$ .
- (II) Mostrar que o  $\mathcal{T}$  tiene  $k$  árboles disjuntos o existe un conjunto de a lo sumo  $k - 1$  vértices de  $T$  en  $\bigcap_{S \in \mathcal{T}} S$ .

Notar que  $\mathcal{T}$  tiene que ser finito, por ejemplo si  $T$  es finito, porque si no el primer ítem falla tomando una cadena (con el orden de inclusión) de conjuntos de caminos infinitos.

*Solución.* (I) Lo probaremos por inducción en  $n = |T|$ . Si  $n = 1$  es trivial. En general, si  $n > 1$ , tomamos una hoja  $x \in T$  y consideramos  $T' = T \setminus x$ . Sea  $\mathcal{T}$  un subconjunto de árboles de  $T$  con la propiedad de intersección dos a dos del enunciado. Si  $x \in \bigcap \mathcal{T}$ , entonces ganamos. Supongamos luego que no, y consideremos  $\mathcal{T}'$  el conjunto de los  $T'_i := T_i \setminus x$  con  $T_i \in \mathcal{T}$ . Este es un subconjunto de árboles en  $T'$ , luego si vemos que cumple la propiedad de intersección dos a dos, se seguirá por inducción que  $\emptyset \neq \bigcap \mathcal{T}' \subset \bigcap \mathcal{T}$ . En efecto, si existieran  $T'_1, T'_2 \in \mathcal{T}'$  tales que  $T'_1 \cap T'_2 = \emptyset$ , quiere decir que  $T_1 \cap T_2 = \{x\}$ , pero esto es imposible salvo que  $T_1$  o  $T_2$  sea igual a  $\{x\}$ , ya que  $x$  es una hoja de  $T$ , pero entonces por la intersección dos a dos de  $\mathcal{T}$ , tenemos que  $x \in \bigcap \mathcal{T}$ , pero ya habíamos descartado este caso.

- (II) Lo haremos por inducción en el número de vértices  $n$  de  $T$ . Si  $n = 1$ , el resultado es trivial. En general, tomemos una hoja  $x \in T$ , y consideremos un conjunto  $\mathcal{T}$  de árboles de  $T$ . Supongamos que no contiene  $k \in \mathbb{N}$  árboles disjuntos. Sea

$\mathcal{T}' := \{T \setminus \{x\} \mid T \in \mathcal{T}\}$ , una familia de subárboles de  $T' = T \setminus \{x\}$ . Pueden ocurrir dos casos: en el primero  $\mathcal{T}'$  no tiene  $k - 1$  árboles disjuntos, luego por hipótesis inductiva, existe un conjunto de vértices  $S \subset T' := T \setminus \{x\}$  con a lo más  $k - 2$  vértices que interseca a todos los árboles de  $\mathcal{T}'$ . Si ningún árbol de  $T$  fuera exactamente  $\{x\}$ , entonces se seguiría que esos vértices también intersecan a los de  $\mathcal{T}$ . De lo contrario, agregando a  $x$  tenemos un subconjunto de a lo más  $k - 1$  vértices que también sirve para  $\mathcal{T}$ . El segundo caso es cuando  $\mathcal{T}'$  tiene  $k - 1$  árboles disjuntos pero no tiene  $k$ . El mismo procedimiento nos daría un conjunto  $S \subset T'$  de a lo más  $k - 1$  elementos que interseca a los árboles de  $\mathcal{T}'$ , pero como hay  $k - 1$  disjuntos, debe ser exactamente  $k - 1$ . Ahora, estos  $k - 1$  árboles de  $\mathcal{T}'$ , originalmente a lo más uno podía contener a  $x$ , de lo contrario con  $x$  es hoja, su vecino y estaría en la intersección de dos árboles de  $\mathcal{T}'$ . Como  $\mathcal{T}$  no puede tener  $k$  árboles disjuntos, debe ser que el árbol  $\{x\}$  interseca a alguno de los que no se degeneraron en  $T'$ , o sea que hay exactamente un árbol  $T_0$  en  $\mathcal{T}$ , tal que  $x, y \in T_0$  pero que no están en ningún otro árbol, reemplazando al elemento de  $S \cap T'_0 = S \cap (T_0 \setminus \{x\}) = \{z\}$  por  $x$ , obtenemos que  $S$  tiene  $k - 1$  elementos e interseca a todos los árboles de  $\mathcal{T}$ .  $\square$

**Comentario 1.11.11.** Utilizando el vocabulario del Capítulo ?? del Apéndice, los ítems del ejercicio anterior se pueden traducir. Antes, vamos a considerar el conjunto  $\text{Trees}(T)$ , de subárboles de  $T$ , el cual es un orden parcial con la inclusión, pero nos va a interesar mirar el orden opuesto  $\leq := \supset$ . Así, la operación supremo entre un conjunto arbitrario de subárboles de  $T$ , digamos  $\mathcal{T}$ , es  $\bigvee \mathcal{T} = \bigcap \mathcal{T}$ , cuando el supremo exista, y este sea un subárbol de  $T$ . Notar que siempre que dos árboles en  $T$  no sean disjuntos, entonces la intersección está en  $\text{Trees}(T)$ , es decir tienen supremo. Con lo cual:

- (I) La hipótesis que todo par de elementos de  $\mathcal{T}$  tengan intersección dos a dos, equivale a decir que  $\mathcal{T}$  es un conjunto dirigido del orden parcial  $(\text{Tree}(T), \leq)$ ; y que  $\bigcap \mathcal{T} \neq \emptyset$  equivale a que  $\mathcal{T}$  tenga supremo en  $\text{Tree}(T)$  (pues la intersección de árboles sigue siendo un árbol, si el conjunto es dirigido). En resumen, en el ejercicio anterior probamos que  $(\text{Tree}(T), \leq)$  es un *orden parcial completo-dirigido*.
- (II) Más aún, el segundo ítem nos dice que todo  $\mathcal{T} \subset \text{Tree}(T)$  tiene  $k$  elementos sin relacionar o existe un conjunto de a lo más  $k - 1$  vértices (pensados como árboles) en  $\text{Tree}(T)$  cada uno  $\leq$  que algún árbol de  $\mathcal{T}$ . Intuitivamente,  $\mathcal{T}$  no tiene supremo, pero tenemos un poco de control que “tan lejos está de tener supremo”: a lo más  $k - 1$ , pues si fuera 1, tendríamos que  $\sup \mathcal{T} = \bigcap \mathcal{T}$  existe.

**Ejercicio 1.11.12.** Probar que todo automorfismo de un árbol fija un vértice o una arista.

*Solución.* Probaremos el enunciado por inducción en el cardinal de  $T$ . Si  $|T|$  es 1 el resultado es trivial. En general, consideramos  $f : T \rightarrow T$  endomorfismo de grafos, luego induce un endomorfismo  $f^* : L(T) \rightarrow L(T)$  entre grafos de línea, que manda  $e = xy \mapsto f^*(e) = f(x)f(y)$  (siempre está bien definido el morfismo de grafos  $f^*$  inducido por un morfismo de grafos  $f : G_1 \rightarrow G_2$ ). Como  $L(T)$  es un árbol también (en efecto, es el grafo de bloque de  $T$ ) y tiene  $n - 1$  vértices si  $n = |T|$ , se sigue por

inducción que  $f^*$  deja fijo a una arista o a un vértice de  $L(T)$ . En ambos casos se implica que  $f$  tiene un punto fijo.  $\square$

**Ejercicio 1.11.13.** Mostrar que en un grafo conexo los conjuntos de aristas que son minimales con la propiedad de contener una arista de cada árbol generador son precisamente los enlaces del grafo.

*Solución.* Por un lado, un corte de  $G$  tiene que tener una arista de cada árbol generador, pues el árbol es conexo y no se puede separar por las partes que inducen el corte; luego los enlaces son minimales con esta propiedad. Por otro lado, lo anterior implica que los conjuntos de aristas minimales con esta propiedad, cumplen que si son cortes entonces son enlaces. Luego basta probar que estos conjuntos son cortes. En efecto, sea  $E$  un conjunto de aristas minimal con la propiedad que interseca a todos los árboles generadores de  $G$ . Sea  $f \in E$ , por minimalidad tenemos que existe un árbol generador  $T$  tal que  $E(T) \cap E = \{f\}$ . Afirmamos que el corte fundamental

$$D_f = D_f(T) \subset E;$$

con lo cual, como  $D_f$  es un enlace, interseca a todos los árboles generadores, luego por minimalidad de  $E$  deben ser iguales, i.e.  $E$  es un corte (de hecho un enlace). Finalmente, veamos la afirmación: ya sabemos que  $f \in D_f \cap E$ ; sea ahora  $g \in D_f \setminus \{f\}$ , consideremos el árbol  $T' = T - f + g$  que es también generador de  $G$ . Notemos que  $T'$  debe intersecar a  $E$  porque es árbol generador, pero por cómo elegimos a  $T$ , la única arista que puede estar en  $E$  es  $g$ . Como  $g$  era arbitrario,  $D_f \subset E$ , como queríamos.  $\square$

**Ejercicio 1.11.14.** Probar que el espacio de ciclos de un grafo está generado por:

- (I) sus ciclos inducidos;
- (II) sus ciclos geodésicos;
- (III) sus ciclos sin cuerdas.

(Un ciclo  $C \subset G$  se dice **geodésico** en  $G$ , si para todo par de vértices de  $C$ , su distancia en  $G$  coincide con su distancia en  $C$ .)

*Solución.* Como todo elemento del espacio de ciclos se escribe como unión disjunta de ciclos, basta ver que los ciclos sin cuerdas generan a los ciclos. En efecto, sea  $C$  un ciclo, entonces consideremos la cuerda  $xPy$  de  $C$  en  $G$  con  $x, y \in V(C)$ . Podemos tomar la cuerda (si es que tiene, si no ya ganamos) de manera que el ciclo  $C' = xPyCx$  es un ciclo sin cuerdas, además

$$C = (C \setminus C' + P) + C'$$

donde  $C \setminus C' + P$  es un ciclo de  $G$  al que le podemos repetir este procedimiento recursivamente, así,

$$C = D_1 + D_2 + \cdots + D_k$$

se escribe como la suma de ciclos sin cuerdas.

Como los ciclos sin cuerdas son geodésicos y los ciclos geodésicos son ciclos inducidos, el ejercicio se sigue.  $\square$

**Ejercicio 1.11.15.** Sea  $F$  un conjunto de aristas en  $G$ .

1. Probar que  $F$  se extiende a un elemento de  $\mathcal{B}(G)$  si y solo si no contiene ciclos impares.
2. Probar que  $F$  se extiende a un elemento de  $\mathcal{C}(G)$  si y solo si no contiene cortes impares.

*Solución.* 1. Por un lado ningún elemento de  $\mathcal{B}(G)$  puede tener un ciclo impar pues el subgrafo inducido es bipartito. Recíprocamente, podemos agregar aristas de  $F$  tal que siga sin contener ciclos impares hasta obtener un conjunto maximal con esta propiedad. Claramente obtenemos una bipartición; cuya unión da  $G$  por maximalidad de  $F$ .

2. Por un lado, si  $F$  se extiende a un elemento de  $\mathcal{C}(G)$ , digamos  $\overline{F}$ , entonces no contiene cortes impares, pues de lo contrario, digamos que contiene a un corte  $E$  impar, luego tenemos que por ortogonalidad  $\langle E, \overline{F} \rangle = 0$ , i.e.  $\overline{F}$  interseca una cantidad par de veces a  $E$ , pero como  $E \subset F \subset \overline{F}$ , interseca en su totalidad a  $E$  que es una cantidad impar: absurdo. Recíprocamente, si no contiene cortes impares, podemos considerar el conjunto de aristas  $F$  maximal con la propiedad de no contener cortes impares, obtenido a partir de  $F$  agregando aristas. Luego para ver que está en el espacio de ciclos, hay que probar la propiedad de ortogonalidad:  $F$  interseca una cantidad par de veces a todos los cortes. Probemoslo por el absurdo, si no fuera así, existiría corte  $E$  que interseca a  $F$  una cantidad impar de veces, en particular,  $E$  no está contenido en  $F$ .

□

**Ejercicio 1.11.16.** Sea  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  la matriz de adyacencia de un grafo  $G$ . Probar que la matriz  $A^k = (a'_{i,j})_{n \times n}$ , tiene la propiedad de que  $a'_{i,j}$  es la cantidad de **paseos** (es decir caminatas donde se pueden repetir aristas) de longitud  $k$  que hay de  $v_i$  hasta  $v_j$  en  $G$ .

*Solución.* Por inducción en  $k$ . Si  $k = 1$  es trivial. En general, supongamos que vale para  $k \geq 1$ . Luego  $A^{k+1} = A^k \cdot A = (a''_{i,j})$  donde

$$a''_{i,j} = \sum_{1 \leq l \leq n} a'_{i,l} a_{l,j},$$

con  $A^k = (a'_{i,l})$  la cantidad de paseos de longitud  $k$  entre  $v_i$  y  $v_l$ . Luego la afirmación se sigue de la cantidad de  $k+1$  paseos entre  $v_i$  y  $v_j$  es igual a la cantidad de  $k$  paseos entre  $v_i$  y  $v_l$ , y luego de  $v_l$  a  $v_j$  para cada vértice  $v_l$  adyacente a  $v_j$ . □

## 1.12. Clase 11: 27/04/23

**Definición 1.12.1.** Un **matching** o **emparejamiento** en un grafo  $G = (V, E)$  es un subconjunto  $M \subset E$  tal que ningún par de aristas en  $M$  comparten un vértice.

Un matching es **maximal** si al añadirle cualquier otra arista deja de ser matching.

Un matching es **máximo** si no hay otro matching con mayor tamaño (número de aristas).

Decimos que un matching **cubre** a los vértices de sus aristas.

Un matching que cubre a todo  $V(G)$  es **perfecto**.

Notar que un matching de un grafo  $G$ , es la definición dual de conjuntos de vértices aislados en su grafo de línea  $L(G)$ .

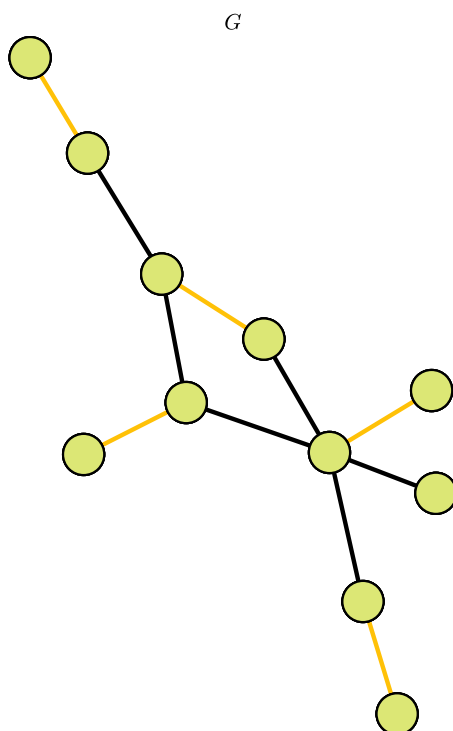


Figura 1.12.63: Ilustración de un **matching** de un grafo  $G$ . Observar que este matching es maximal, no perfecto. ¿Será máximo?

**Comentario 1.12.2.** Hay grafos sin matchings perfectos. Por ejemplo, el grafo de la ilustración anterior:

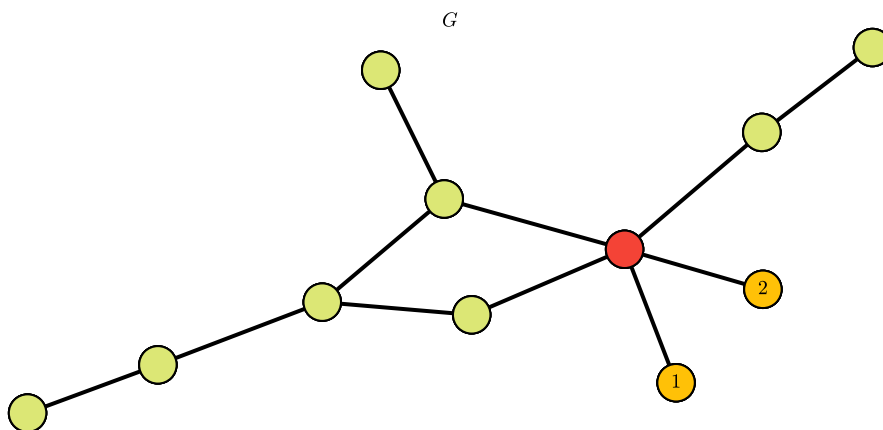


Figura 1.12.64: En efecto, todo matching perfecto debe cubrir a los vértices de grado uno: **1** y **2**, pero esto es imposible porque haría que sus aristas fueran adyacentes.

En particular, el ejemplo anterior muestra que todo grafo con un par vértices de grado 1, a distancia 2 entre sí, no puede tener un matching perfecto.

Sea  $G = (X \sqcup Y, E)$  un grafo bipartito (hablamos de un  $X, Y$ -**bigrafo**). Si  $G$  tiene un matching de tamaño  $|X|$  (en particular cubre a  $X$ ) los elementos de cualquier  $S \subset X$  tienen

$$|N(S)| \geq |S|. \quad (1.1)$$

**Definición 1.12.3** (Condición de Hall). Si subconjunto de vértices  $S \subset G$  cumple (??), decimos que  $S$  cumple la **condición de Hall**.

**Teorema 1.12.4** (Teorema de Hall (1935)). En un  $X, Y$ -bigrafo, existe un matching que cubre a  $X$  si y solo si  $S$  cumple la condición de Hall (??) para todo  $S \subset X$ .

*Demostración.* La primera implicación la vimos antes de la definición de condición de Hall.

Veamos la recíproca. Lo haremos por inducción en  $|X| =: n$ . Si  $n = 1$  es trivial. En general, si  $n > 1$ , queremos ver que vale para  $n + 1$ . Hay dos casos:

1.

Caso 1:  $|N(S)| > |S|$  para todo subconjunto  $S \subsetneq X$  no vacío. Tomemos un par de vértices que sean vecinos  $x \in X$  e  $y \in Y$ , luego consideramos la  $X', Y' = X \setminus \{x\}, Y \setminus \{y\}$ -bipartición proveniente de  $G$  al eliminar  $x, y$ ; todos los subconjuntos de  $X'$  siguen cumpliendo la condición de Hall, luego tiene un matching que cubre a  $X'$  por hipótesis inductiva, luego agregando  $xy$  obtenemos un matching que cubre a  $X$  en  $G$ .

Caso 2: Sea  $S \subset X$  no vacío tal que  $|N(S)| = |S|$ .

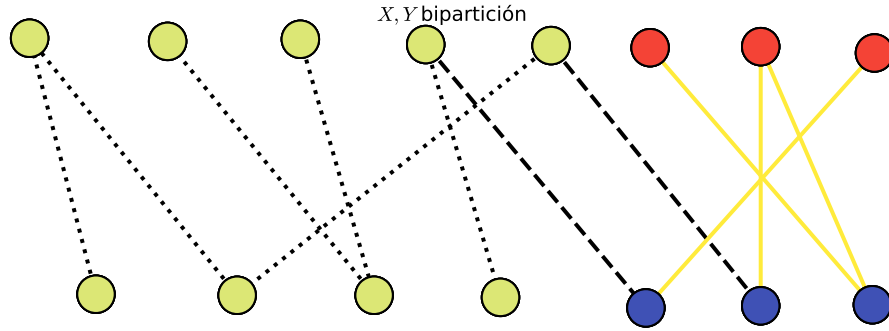


Figura 1.12.65: Ilustración:  $S$  y  $N(S)$  tienen el mismo cardinal, pero  $N(S)$  podría tener otros vecinos en  $X$  además de  $S$ . Junto con las aristas, los vértices de  $S$  y  $N(S)$  forman el grafo inducido  $G[S \cup N(S)]$ .

Sea  $G_1$  el grafo inducido por los vértices  $S \cup N(S)$ , y sea  $G_2$  el subgrafo inducido por  $G \setminus (S \cup N(S))$ . Notar que  $G_1$  cumple la condición de Hall. Por lo tanto, usando hipótesis inductiva, hay un matching en  $G_1$  que cubre  $S$ . Veamos que la condición de Hall se tiene que cumplir también en  $G_2$ . Consideremos  $T \subset X \setminus S$  y notemos que

$$N_{G_2}(T) = N_G(T \cup S) \setminus N_G(S).$$

Así tenemos que

$$|N_{G_2}(T)| = |N_G(T \cup S)| - |N_G(S)| \geq |T \cup S| - |N_G(S)| = |T \cup S| - |S| = |T|.$$

Entonces  $G_2$  cumple la condición de Hall, luego tiene un matching que cubre a  $X \setminus S$  por hipótesis inductiva. Uniendo los dos matchings obtenidos, conseguimos un matching que cubre a  $X$ .

□

**Corolario 1.12.5** (König-Frobenius). *Todo  $X, Y$ -bigrafo  $(k \geq 1)$ -regular tiene un matching perfecto. En particular  $|X| = |Y|$ .*

*Demostración.* En un  $X, Y$ -bigrafo  $k$ -regular  $G$ , consideramos  $S \subset X$ . Veamos que  $|N(S)| \geq |S|$ . Antes, notemos que la cantidad de aristas que inciden en  $S$  es  $k \cdot |S|$ . Análogamente, hay  $k \cdot |N(S)|$  aristas que inciden en  $N(S)$ . Todas las aristas que inciden en  $S$  también lo hacen en  $N(S)$ , pero no son las únicas, podría haber más aristas incidentes en  $N(S)$  que provienen de vértices de  $X \setminus S$ . (Pasa lo mismo que en la figura anterior.) Es decir,

$$k|S| \leq k|N(S)| \Leftrightarrow |S| \leq |N(S)|.$$

Como  $S \subset X$  era arbitrario, se cumple la condición de Hall, y luego por el Teorema anterior existe un matching de  $G$  que cubre a  $X$ .

De la misma manera, podemos conseguir un matching de  $G$  que cubra a  $Y$ . Consecuentemente,  $|X| = |Y|$  y luego el matching es perfecto. □

### 1.12.1. Matchings con preferencias

En algunas aplicaciones a la vida real, los matchings suelen ser buscados con algún tipo de “estabilidad”. Más formalmente, sea  $(\leq_v)_{v \in V}$  una familia de ordenes totales en  $E(v)$ : el **conjunto de preferencias** de  $G$ . Luego diremos que un matching  $M$  de  $G$  es **estable** si para toda arista  $e \in E \setminus M$ , existe una arista  $f \in M$  tal que  $e$  y  $f$  comparten un vértice  $v$  tal que  $e <_v f$ .

**Teorema 1.12.6** (El teorema del matrimonio estable - Gale & Shapley (1962)). *Para cualquier conjunto de preferencias  $(\leq_v)_{v \in V}$  de un  $X, Y$ -bigrafo  $G = (V, E)$ ,  $G$  tiene un matching estable.*

*Demostración.* Llamemos a un matching  $M$  de  $G$  **mejor** que un matching  $M' \neq M$ , si  $M$  hace que todos los vértices de  $Y$  más felices que  $M'$ , más precisamente, si todo vértice  $y \in Y$  incidente en una arista  $f' \in M'$  es también incidente a algún  $f \in M$  tal que  $f' \leq_y f$ . Construiremos una sucesión de matchings cada vez mejores. Como por cada vértice  $y \in Y$ , podemos mejorar su felicidad a lo más unas  $d(y)$  veces, este proceso debe terminar eventualmente.

Fijado un matching  $M$ , diremos que un vértice  $x \in X$  es **aceptable** para  $y \in Y$ , si  $e = xy \in E \setminus M$  y para cualquier arista  $f \in M$  incidente en  $y$  satisface  $f <_y e$ . Llamemos a  $x \in X$  **feliz con  $M$**  si  $x$  no está cubierto por  $M$  o si la arista  $f \in M$  que lo cubre satisface  $f >_x e$  para toda arista  $e = xy$  tal que  $x$  es aceptable para  $y$ .

Empezando con el matching vacío, construimos una sucesión de matchings que hagan felices a todos los vértices en  $X$ . Dados un matching  $M$  que cumple esto, consideremos un vértice  $x \in X$  que no está cubierto por  $M$  pero aceptable para algún  $y \in Y$  (Si  $x$  no existe, la sucesión termina). Luego agregamos a  $M$  la arista  $xy$  máxima respecto del orden  $\leq_x$  tal que  $x$  es aceptable para  $y$ , y descartemos de  $M$  cualquier otra arista de  $y$ .

Claramente, todo matching en nuestra sucesión es mejor que las anteriores y mantiene a los vértices de  $X$  felices, los cuales lo estaban desde el principio pues empezamos con el matching vacío. Con lo cual, la sucesión continua hasta que termina con algún matching  $M$  que no tiene vértices sin cubrir en  $X$  que sea aceptable

para algún vecino en  $Y$ . Como todo vértice en  $X$  es feliz con  $M$ , este matching es estable.  $\square$

**Definición 1.12.7.** Llamamos a un subgrafo  $k$ -regular generador de un grafo  $G$ , un **k-factor**.

**Corolario 1.12.8** (Petersen (1891)). *Todo grafo  $2k$ -regular ( $k \geq 1$ )  $G$  tiene un 2-factor.*

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad supongamos que  $G$  es conexo. Por el Teorema ??,  $G$  contiene un paseo Euleriano  $v_0 e_0 \cdots e_{\ell-1} v_\ell$  con  $v_0 = v_\ell$ . Reemplacemos cada vértice  $v$  por un par  $(v^-, v^+)$ , y cada arista  $e_i = v_i v_{i+1}$  por la arista  $v_i^+ v_{i+1}^-$ . Así obtenemos un grafo bipartito  $G'$  que es  $k$ -regular, con lo cual el Corolario ?? implica que tenemos un 1-factor (i.e. un matching perfecto). Colapsando cada par  $(v^-, v^+)$  de vuelta a su vértice original  $v$ , el 1-factor de  $G'$  se convierte en un 2-factor de  $G$ .

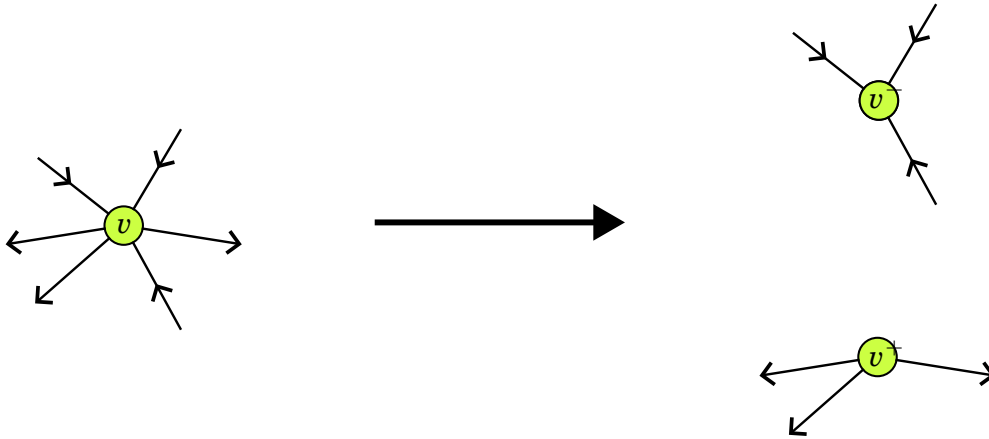


Figura 1.12.66: Partiendo el vértice  $v$  en  $v^-$  y  $v^+$ .

$\square$

## 1.12.2. Relaciones min-máx

El Teorema de Hall nos dice cuándo podemos encontrar un matching que cubre una de las partes de un grafo bipartito. Pero quizá, sabiendo que no puedo cubrir ninguna de las partes, igual quiero saber el tamaño máximo de un matching en mi grafo.

**Notación 1.12.9.** Denotamos por  $\alpha'(G)$  al tamaño máximo de un matching en un grafo  $G$  (cantidad de aristas del matching).

**Observación 1.12.10.** En un grafo  $G$  con un matching  $M$  de tamaño  $m$ , tenemos que  $2m \leq |G|$ , pues los vértices que cubre cada arista de  $M$  son disjuntos por definición de matching. Consecuentemente,

$$2\alpha'(G) \leq |G|.$$



**Definición 1.12.11.** Para un  $X, Y$ -bigrafo, el **defecto**  $\text{df}(S)$  de un conjunto  $S \subset X$  es la cantidad

$$|S| - |N(S)|.$$

**Corolario 1.12.12** (Fórmula del defecto). En un  $X, Y$ -bigrafo  $G$ , se tiene

$$\alpha'(G) = \min_{S \subset X} \{|X| - \text{df}(S)\}.$$

*Demostración.* Todo matching de  $G$  no cubre  $\text{df}(S)$  vértices de  $S$ , para cualquier subconjunto  $S \subset X$  arbitrario. Es decir, todo matching tiene a lo más  $|X| - \text{df}(S)$  elementos. Así,

$$\alpha'(G) \leq |X| - \text{df}(S), \forall S \subset X.$$

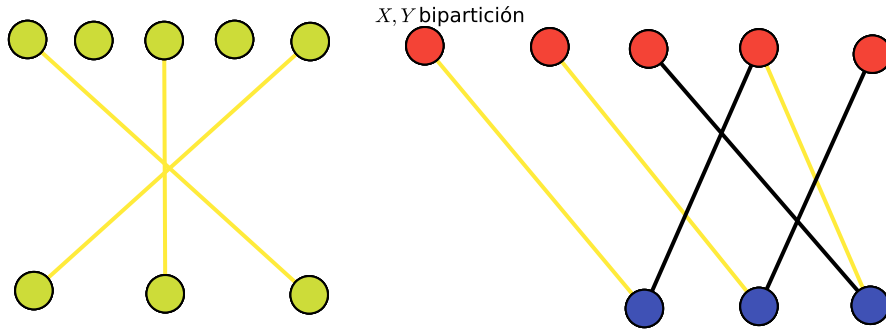


Figura 1.12.67: Visualización: por un lado está  $S \subset X$ , y por otro  $N(S) \subset Y$ . En **matching** no cubre  $\text{df}(S) = 5 - 2$  vértices de  $S$ , con lo cual cubre a lo más  $|X| - \text{df}(S) = 8 - 2 = 6$  vértices de  $X$ .

Para la otra desigualdad construiremos un matching de tamaño mínimo. Como vimos recién  $\alpha'(G) \leq |X| - \text{df}(S), \forall S \subset X$ . Si tomamos  $d = \max_{S \subset X} \{\text{df}(S)\}$ , en particular tenemos que

$$\alpha'(G) \leq |X| - d.$$

Luego basta encontrar un matching de tamaño al menos  $|X| - d$ . Construyamos un grafo  $G'$  añadiendo  $d$  vértices a  $Y$ , cada uno adyacente a todo  $X$ .

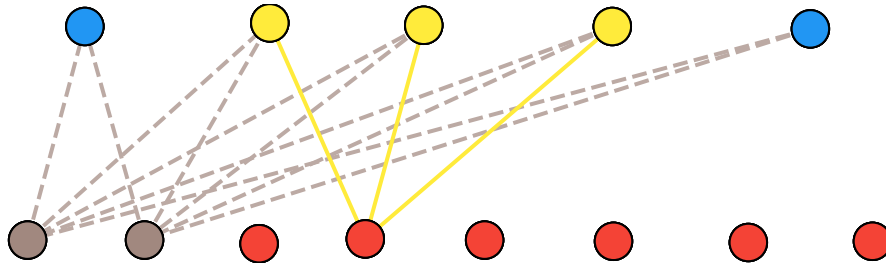


Figura 1.12.68: Ilustración de  $G'$ : agregamos en el dibujo dos vértices adyacentes a todos los vértices de  $X$  (fila superior con vértices azules y amarillos). Notar que en este caso 2 es el defecto de  $S$ .

El grafo  $G'$  cumple la condición de Hall, pues para cada subconjunto  $S \subset X$  le añado  $d \geq \text{df}(S)$  vecinos nuevos. Con lo cual  $G'$  tiene un matching que cubre a  $X$ . En el peor de los casos, este matching tiene que cubrir a los  $d$  vértices nuevos que agregamos a  $Y$ , es decir, que quitando estos vértices obtenemos un matching con al menos  $|X| - d$  vértices de  $X$  cubiertos.  $\square$

El tamaño de un matching está acotado por un parámetro “dual” natural.

**Definición 1.12.13.** Un **cubrimiento por vértices** es un conjunto de vértices que contiene al menos un extremo de cada arista.

Denotamos por  $\beta(G)$  al tamaño mínimo de un cubrimiento por vértices.

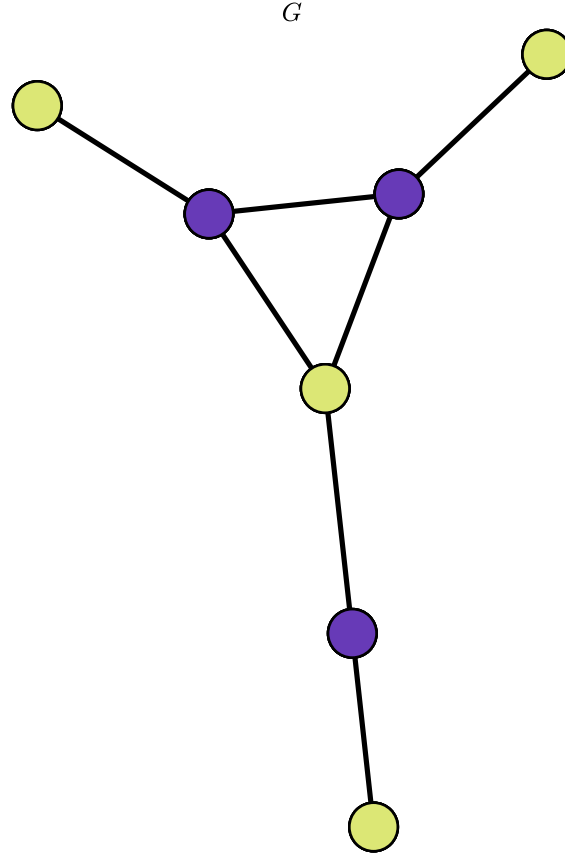


Figura 1.12.69: Ejemplo de **cubrimiento por vértices** de un grafo  $G$ .

Notar que un cubrimiento obvio, pero poco interesante, de un grafo  $G$  es todo el conjunto de vértices  $V(G)$ .

**Observación 1.12.14.** Tenemos que

$$\#\{\text{Componentes conexas no triviales de } G\} \leq \beta(G) \leq \min\{|G|, ||G||\}.$$

*Demostración.* Por un lado, cada componente conexa no trivial debe tener una arista, que debe ser cubierto por al menos un vértice. Así se ve la primera desigualdad. Notar que esta cota es tight porque podemos considerar un grafo que sea la unión disjunta de  $k$  estrellas de cualquier cantidad de aristas y  $l$  vértices aislados.

Por otro lado, cada vértice  $u$  de un cubrimiento  $U$  por vértices de  $G$  de tamaño mínimo  $\beta(G)$  es extremo de alguna arista  $e_u$  cuyo otro extremo está fuera de  $U$ . Luego si  $u, u'$  son distintos, es porque sus aristas  $e_u$  y  $e_{u'}$  también lo son. Esto nos dice que  $G$  tiene al menos  $|U| = \beta(G)$  aristas. Como trivialmente  $|U| \leq |G|$ , se tiene la segunda desigualdad. Notar que esta cota es tight porque podemos considerar a  $G$  como la unión disjunta de una cantidad  $k$  de 1-caminos.  $\square$

**Teorema 1.12.15** (König-Egevary (1931)). Si  $G$  es bipartito, entonces

$$\alpha'(G) = \beta(G).$$

**Comentario 1.12.16.** 1. En todo grafo (no necesariamente bipartito) se cumple

$$\alpha'(G) \leq \beta(G).$$

En efecto, tomemos un cubrimiento de tamaño mínimo  $\beta(G)$ , dados un matching de  $G$ , toda arista del matching cubre a algún vértice del cubrimiento, pero dadas dos aristas distintas del matching, no tienen el mismo vértice del cubrimiento pues no son adyacentes.

2. El Teorema de König-Egevary nos garantiza que en un grafo bipartito podemos demostrar la optimalidad de un matching al encontrar un cubrimiento por vértices del mismo tamaño (y viceversa).

**Teorema. Puede entrar en el control** Sea  $G$  un  $X, Y$ -bigrafo. Ya vimos una de las desigualdades, ahora veamos la otra. Vamos a buscar un cubrimiento por vértices, de tamaño  $\alpha'(G)$ . La fórmula del defecto nos dice que  $\alpha'(G) = \min_{S \subset X} \{|X| - \text{df}(S)\}$ , tomando  $T \subset X$  que realice el mínimo:

$$\alpha'(G) = |X| - \text{df}(T) = |X| - |T| + |N(T)| = |X \setminus T| + |N(T)|.$$

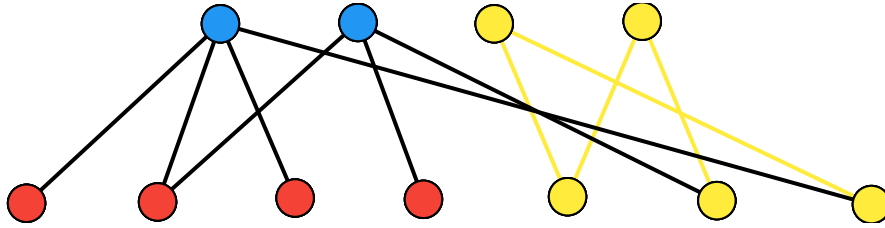


Figura 1.12.70: Inspiremonos con el dibujo. Del lado  $X$  tenemos a  $T$ , y del lado  $Y$  tenemos  $N(T)$ .

Un cubrimiento por vértices de tamaño  $\alpha'(G)$  es entonces  $(X \setminus T) \cup N(T)$ , luego el cubrimiento mínimo debe ser  $\beta(G) \leq \alpha'(G)$ .  $\square$

Como corolario, este teorema nos dice que en un bigrafo encontrar un matching máximo, o un cubrimiento por vértices mínimo son problemas de optimización duales.

**Ejercicio 1.12.17.** Calcular  $\alpha'(K_n)$  para todo  $n \geq 3$ . (Notar que  $\alpha'(K_2) = 1$ ).

*Solución.* Vamos a probar por inducción que

$$\alpha'(K_{n+1}) = \alpha'(K_n) + 1, \quad \forall n \geq 3. \quad (1.2)$$

Esto, junto con el hecho de que  $\alpha'(K_3) = 1$ , prueba la afirmación:

$$\alpha'(K_n) = n - 2, \quad \forall n \geq 3.$$

Claramente vale (1.2) para  $n = 3$ . En general, tomando un vértice  $x \in K_{n+1}$  y considerando  $K_n = K_{n+1} \setminus \{x\}$  se ve por inducción que agregando una arista incidente a  $x$  a un matching de  $K_n$  de tamaño  $\alpha'(K_n)$ , obtenemos un matching de  $K_{n+1}$  una unidad mayor, i.e.  $\alpha'(K_n) + 1 \leq \alpha'(K_{n+1})$ . Por otro lado, un matching de  $K_{n+1}$  de tamaño  $\alpha'(K_{n+1})$  se convierte en un matching de  $K_n$  si quitamos un vértice de  $K_{n+1}$  cubierto por él, i.e.  $\alpha'(K_{n+1}) - 1 \leq \alpha'(K_n)$ . Probando así la igualdad (1.2).  $\square$

Veamos otro par de problemas duales.

**Definición 1.12.18.** El **número de independencia** de un grafo  $G$  es el tamaño máximo de un conjunto independiente de vértices en  $G$ . Denotamos a esta cantidad  $\alpha(G)$ .

Notar que  $\alpha'(G) = \alpha(L(G))$ , es decir que independencia de vértices y matchings son conceptos *duales*.

En un  $X, Y$ -bigrafo, ambas partes  $X, Y$  son conjuntos independientes, pero podría pasar que  $\alpha(G) > \max\{|X|, |Y|\}$ :

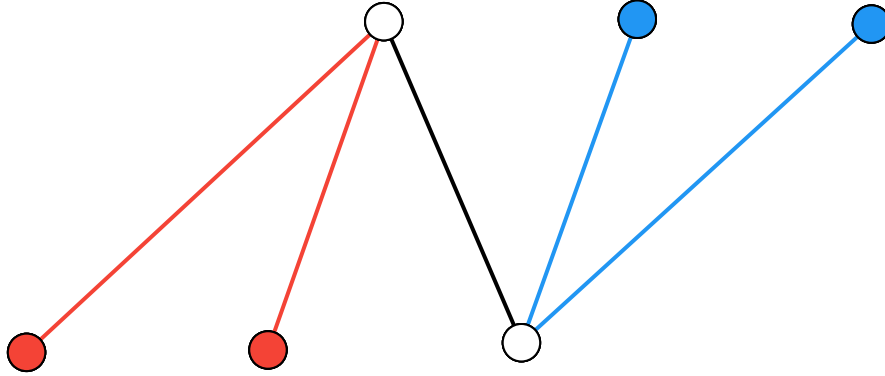


Figura 1.12.71: Ejemplo.

**Observación 1.12.19.** Si  $S$  es un conjunto de vértices independientes de tamaño máximo  $\alpha(G)$ , se tiene todo vértice en  $V(G) \setminus S$  es adyacente a algún vértice de  $S$ . Luego

$$|G| - \alpha(G) \leq ||G|| \Leftrightarrow |G| - ||G|| \leq \alpha(G).$$

Pero en la mayoría de los casos no nos dice nada, pues el lado izquierdo es negativo.

**Definición 1.12.20.** Un **cubrimiento por aristas** de  $G$  es un conjunto de aristas tal que todo vértice de  $G$  es extremo de alguna arista en el conjunto. Notemos a esta cantidad  $\beta'(G)$ .

Notar que lo más inocente que uno podría intentar hacer en un grafo  $G$  para encontrar un cubrimiento por aristas, es elegir el conjunto de todas las aristas  $E$ , sin embargo, si  $G$  tiene vértices aislados entonces no hay cubrimiento! (En este caso definimos  $\beta'(G) := \infty$ ). Es decir, solamente los grafos sin vértices aislados tienen cubrimiento por aristas.

**Observación 1.12.21.** Tenemos que

$$|G|/2 \leq \beta'(G) \leq |G| - \#\{\text{componentes conexas de } G\}.$$

*Demostración.* Sea  $S$  un cubrimiento por aristas de  $G$  de tamaño mínimo  $\beta'(G)$ . Por minimalidad de  $S$ , ambos extremos de una arista de  $S$  no pueden tener otras aristas incidentes de  $S$ , luego en el peor de los casos, se necesitan  $|G| - 1$  aristas para cubrir  $G$ . Luego  $\beta'(G) \leq |G| - 1$ . Este argumento se puede luego aplicar a cada componente de  $G$ , pues un cubrimiento de  $G$  es la unión disjunta de los cubrimientos de sus componentes. Esta cota es tight porque podemos considerar un grafo que sea la unión disjunta de  $k$  estrellas de grado  $n$ .

Por otro lado, por cada arista  $e \in S$  cubrimos a lo más dos vértices, luego en el peor de los casos  $|G|/2 \leq |S| = \beta'(G)$ .  $\square$

**Ejercicio 1.12.22.** Probar que  $\alpha(G) \leq \beta'(G)$ .

*Solución.* Claramente si  $G$  tiene puntos aislados la desigualdad se cumple trivialmente. Tomemos un conjunto  $U$  de vértices de  $G$  que son aislados de tamaño máximo  $\alpha(G)$ . Consideremos un conjunto de aristas  $F$  de  $G$  de tamaño mínimo que cubre a  $G$ . Todo vértice  $x$  de  $U$  es extremo de una arista de  $F$ , más aún, dos vértices distintos de  $U$  no pueden compartir la misma arista porque no son adyacentes, luego  $\alpha(G) = |U| \leq |F| = \beta'(G)$ .  $\square$

**Teorema 1.12.23** (König (1916)). Si  $G$  es bipartito sin vértices aislados

$$\alpha(G) = \beta'(G).$$

*Demostración.* El ejercicio anterior prueba una desigualdad. Para probar la otra desigualdad basta encontrar un cubrimiento por aristas de tamaño  $\leq \alpha(G)$ . Tomemos un conjunto de vértices independiente  $U$  de tamaño máximo  $\alpha(G)$ . Por maximalidad, cualquier vértice de  $V(G) \setminus U$  es adyacente a un vértice de  $U$ . Es decir, el conjunto  $F$  de aristas que inciden en  $U$  cubre  $G$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $F$  es minimal. Veamos que por cada vértice de  $u \in U$  hay a lo más una arista incidente; como consecuencia se sigue que  $|F| \leq \alpha(G)$  como queríamos encontrar. En efecto, de lo contrario, si  $u$  tuviera dos vecinos distintos  $v, v'$  en el complemento de  $U$  (digamos  $u \in X$  y  $v, v' \in Y$ ), por minimalidad de  $F$  debe ser que  $v$  y  $v'$  no tienen otro vecino en  $U$  que no sea  $u$ . Luego llegamos a un absurdo construyendo un conjunto de vértices independiente más grande:  $U \setminus \{u\} \cup \{v, v'\}$ .  $\square$

### 1.12.3. Ejercicios

**Ejercicio 1.12.24.** (a) Si  $M$  es un matching en un grafo  $G$  tal que  $|M| < \delta(G)/2$ , entonces  $M$  no es máximo. Concluya que  $\alpha'(G) \geq \delta(G)/2$  para todo grafo  $G$ .

(b) Demuestre para todo grafo  $G$  bipartito,  $\alpha'(G) \geq \delta(G)$ .

(c) En cada caso, encontrar una familia infinita de grafos donde se cumple la igualdad.

*Solución.* (a) Esto equivale a probar que todo grafo  $G$  tiene un matching the tamaño al menos  $\lceil \delta(G)/2 \rceil$ . En efecto, sabemos que todo grafo contiene un camino de longitud  $\geq \delta(G)$ , luego en ese camino podemos construir un matching obvio de longitud  $\geq \lceil \delta(G)/2 \rceil \geq \delta(G)/2$ : elegimos la primera arista (en un orden natural inducido por el camino) y luego la siguiente arista no adyacente más cercana, y repetimos el procedimiento de manera recursiva. (En un camino de longitud  $n = 2k$  este algoritmo construye un matching de tamaño  $k$ , y en un camino de longitud  $n = 2k + 1$  construye uno de tamaño  $k + 1$ ). Esto implica que  $\alpha'(G) \geq \delta(G)/2$ .

(b) En un  $X, Y$ -bigrafo. Tomemos  $y_0 \in Y$ . Como  $y$  tiene  $d(y) \geq \delta(G)$  vecinos en  $X$ , sabemos que  $X$  tiene al menos  $\delta(G)$  vértices. Tomemos un subconjunto  $T \subset X$  de tamaño  $\delta(G)$  (por ejemplo los vecinos de  $y$ ). Notemos que  $T$  cumple la Condición de Hall. En efecto, para todo  $S \subset T$  no vacío, sabemos que cualquier vértice de  $S$  tiene al menos  $\delta(G)$  vecinos, en particular

$$|N(S)| \geq \delta(G) = |T| \geq |S|.$$

Con lo cual, el Teorema de Hall no dice que existe un matching de  $G$  que cubre a  $T$ , es decir, un matching con  $|T| = \delta(G)$  aristas. Consecuentemente  $\alpha'(G) \geq \delta(G)$ .

- (c) (a) Consideremos la familia  $G_k = (P_{2k})^{2k}$ , es decir, la familia de las  $2k$ -potencias de caminos de longitud  $2k$  con  $k \in \mathbb{N}$ . Recordar que la  $i$ -potencia de un grafo  $G$  es un grafo con los mismos vértices pero donde dos vértices son adyacentes si y solo si estaban a distancia a lo más  $i$  en  $G$ . Afirmamos que  $\delta(G_k) = 2k$  y que  $\alpha'(G_k) = k$ . Numerando a los vértices de  $P_{2k} : x_0 x_1 \cdots x_{2k}$ , tenemos que claramente  $x_i$  es adyacente a  $x_j$  en  $G_k$ , para todo  $0 \leq i, j \leq 2k$ , luego  $G_k$  es  $2k$ -regular, en particular  $\delta(G_k) = 2k$ . Ahora, notemos que el conjunto de aristas de  $G_k$  dado por  $\{e_i\}_{i=1}^k$  con  $e_i = x_{2i-1} x_{2i}$  es un matching de  $G_k$  con  $k$  aristas. Esto nos dice que  $\alpha'(G) \geq k$ . Por otro lado, observemos que un grafo  $G$  arbitrario, con un matching de  $r$  aristas, se tiene que  $2r \leq |G|$ , pues el matching cubre  $2r$  vértices distintos, con lo cual  $2\alpha'(G) \leq |G|$ . Aplicando esta observación a  $G_k$ , se sigue que  $\alpha'(G_k) \leq |G_k|/2 = k$ . En resumen, hemos visto que  $\alpha'(G_k) = k = \delta(G_k)/2$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .
- (b) Consideremos ahora la familia  $G_k = K_{k,k}$  de grafos bipartitos completos con dos particiones de  $k$  elementos, para  $k \in \mathbb{N}$ .  $G_k$  es  $k$ -regular, en particular  $\delta(G_k) = k$ . Por otro lado, vimos en el ítem (b) que  $\alpha'(G_k) \geq \delta(G_k) = k$ . Veamos que no puede haber un matching con más de  $k$  aristas. En efecto, todo matching de  $G_k$  cubre a lo más  $k$  vértices en una de las particiones de  $K_{k,k} = G_k$ . Esto concluye la demostración de que  $\alpha'(G_k) = k = \delta(G_k)$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

□

**Ejercicio 1.12.25.** Demuestre que un grafo  $G$  es bipartito si y solo si  $\alpha'(H) = \beta(H)$  para todo subgrafo  $H$  de  $G$ .

*Solución.* En clase vimos la demostración del Teorema de König-Egevary, que dice que vale la igualdad  $\alpha'(G) = \beta(G)$  para todo grafo bipartito  $G$ , luego como todo subgrafo  $H$  de  $G$  es también bipartito, salvo por el subgrafo trivial donde no hay nada que probar, se tiene una de las implicaciones del ejercicio.

Veamos la recíproca, es decir, veamos que si un grafo  $G$  cumple la igualdad para todo subgrafo  $H$  de  $G$ , entonces es bipartito. En efecto, supongamos por el absurdo que  $G$  no es bipartito, i.e.  $G$  contiene un ciclo impar  $H$ . Llegaremos a un absurdo si logramos probar que para todo ciclo impar, no se cumple la igualdad del enunciado.

Así es, pues si escribimos  $C : x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdots x_{2k} \cdot x_0$  para cualquier ciclo impar con  $k \geq 1$ , entonces  $\beta(C) = k + 1$  ya que los vértices de índice par cubren todas las aristas y con  $k$  vértices no se pueden cubrir todas las aristas, pues cada vértice cubre 2 aristas de  $C$  pero  $C$  tiene  $2k + 1$  aristas; por otro lado, sabemos que en todo grafo  $\alpha'(C) \leq \beta(C)$ , entonces basta ver que no hay un matching en  $C$  de tamaño  $k + 1$ : como notamos en el ejercicio anterior, en un matching con  $r = k + 1$  aristas,  $2r \leq |C| = 2k + 1$ , imposible. Esto prueba que  $G$  no puede tener ciclos impares. □

**Ejercicio 1.12.26.** Sea  $G$  un  $X, Y$ -bigrafo tal que  $|X| = \alpha(G)$ , donde  $\alpha(G)$  es el tamaño máximo de un conjunto de vértices independiente de  $G$ . Demuestre que  $G$  tiene un matching que cubre a  $Y$ .

*Solución.* Notemos primero que la igualdad  $|X| = \alpha(G)$  nos dice que  $|Y| \leq |X|$ , ya que  $Y$  también es un conjunto independiente. Para probar que  $G$  tiene un matching que cubre a  $Y$ , esto equivale a probar que todos los subconjuntos de  $Y$  cumplen la Condición de Hall. En efecto, supongamos por el absurdo que no, es decir, existe un subconjunto  $S \subset Y$  no vacío de tamaño mínimo tal que no cumple la condición de Hall. Claramente  $|S| > 1$ , pues si no  $S = \{y\}$  con  $y$  sin vecinos en  $X$ , pero luego  $X \cup S$  es independiente y  $\alpha(G) > |X|$ . Ahora tomemos  $y \in S$ , y notemos  $S' = S \setminus \{y\} \neq \emptyset$ . Por minimalidad de  $S$ , el conjunto  $S'$  cumple la condición de Hall, i.e. existe un matching de  $G$  que cubre a  $S'$ ; más aún,  $|N(S')| = |S'|$ , de lo contrario  $S$  cumpliría la condición de Hall. Consideramos ahora el conjunto  $X \setminus N(S') \cup S = X \setminus N(S') \cup S' \cup \{y\}$  de  $G$  de tamaño  $|X| + 1$ . Por hipótesis, no puede ser independiente, y por construcción, debe ser que  $y$  tiene un vecino en  $X \setminus N(S')$ , es decir,  $|N(S)| \geq |N(S')| + 1 = |S'| + 1 = |S|$ , lo cual es imposible porque  $S$  no cumplía la condición de Hall.  $\square$

## 1.13. Clase 12: 8/05/23

**Proposición 1.13.1.** *Tenemos la fórmula*

$$\alpha(G) + \beta(G) = |G|.$$

*Demostración.* Tomemos un conjunto  $U$  de vértices independiente de tamaño máximo  $\alpha(G)$ . Sea  $W := V(G) \setminus U$ , tenemos que todos los vértices de  $W$  son adyacentes a algún vértice de  $U$  por maximalidad. Notar que  $W$  debe ser un cubrimiento de  $G$  porque no hay aristas con ambos extremos en  $U$ . Con lo cual

$$\alpha(G) + \beta(G) \leq \alpha(G) + |W| = |G|.$$

Recíprocamente, tomemos un cubrimiento por vértices  $S$  de  $G$  de tamaño mínimo  $\beta(G)$ . Por minimalidad de  $G$  tenemos que el conjunto  $T := V(G) \setminus S$  es independiente. Es decir,

$$|G| = |T| + \beta(G) \leq \alpha(G) + \beta(G).$$

$\square$

Análogamente:

**Proposición 1.13.2.** *Si  $G$  no tiene vértices aislados:*

$$\alpha'(G) + \beta'(G) = |G|.$$

*Demostración.* Sea  $S$  un matching de tamaño máximo  $\alpha'(G)$  en  $G$ . Consideremos  $U$  el conjunto de vértices de  $G$  que no son cubiertos por  $S$ , i.e.  $|U| = |G| - 2\alpha'(G)$ . Por maximalidad de  $S$ , todas las aristas incidentes a un vértice  $u \in U$  deben tener su otro extremo en  $W = V(G) \setminus U$ . Por cada vértice de  $U$ , tomemos una de estas aristas. Luego este conjunto de aristas junto con  $S$  cubren a  $G$ , i.e.

$$\beta'(G) \leq |S| + |U| = \alpha'(G) + (|G| - 2\alpha'(G)) = |G| - \alpha'(G),$$

obteniendo así una desigualdad.

Para obtener la otra, consideremos un conjunto  $S$  de aristas que cubren a  $G$  de tamaño mínimo, consideremos también a  $S'$  matching de  $G$  compuesto de aristas

de  $S$  de tamaño más grande. Sea  $U'$  el conjunto de vértices cubiertos por  $S'$ , i.e.  $|U'| = 2|S'|$ . Tomemos  $U = V(G) \setminus U'$ , este es cubierto por una única arista de  $S \setminus S'$ . En efecto, sea  $u \in U$ , está cubierto por una arista de  $S$  que no puede estar en  $S'$  por definición de  $U$ , y de hecho si hubiera otra arista de  $S$  incidente en  $u$ , entonces cualquier otro extremo que no sea  $u$  tiene que estar cubierto por  $S'$ , de lo contrario podríamos agrandar  $S'$  agregando esta arista (contradiciendo maximalidad de  $S'$ ), pero esto es imposible por minimalidad de  $S$  (podríamos quitar esta arista y seguiríamos teniendo un cubrimiento de  $G$ ). Con lo cual,  $|U| \leq |S \setminus S'| = |S| - |S'|$ . Juntando todo:

$$|G| = |U| + |U'| \leq |S| + |S'| = \beta'(G) + |S'| \leq \beta'(G) + \alpha'(G),$$

pues  $S'$  es un matching de  $G$ . □

### 1.13.1. Caminos aumentantes

**Definición 1.13.3.** Dado un matching  $M$  de un grafo  $G$ . Llamamos **camino  $M$ -alternante** a un camino de  $G$  que alterna entre aristas de  $M$  y aristas de  $E(G) \setminus M$ .

Un camino  $M$ -alternante cuyos vértices extremos no están cubiertos por  $M$  se llama  **$M$ -aumentante**.

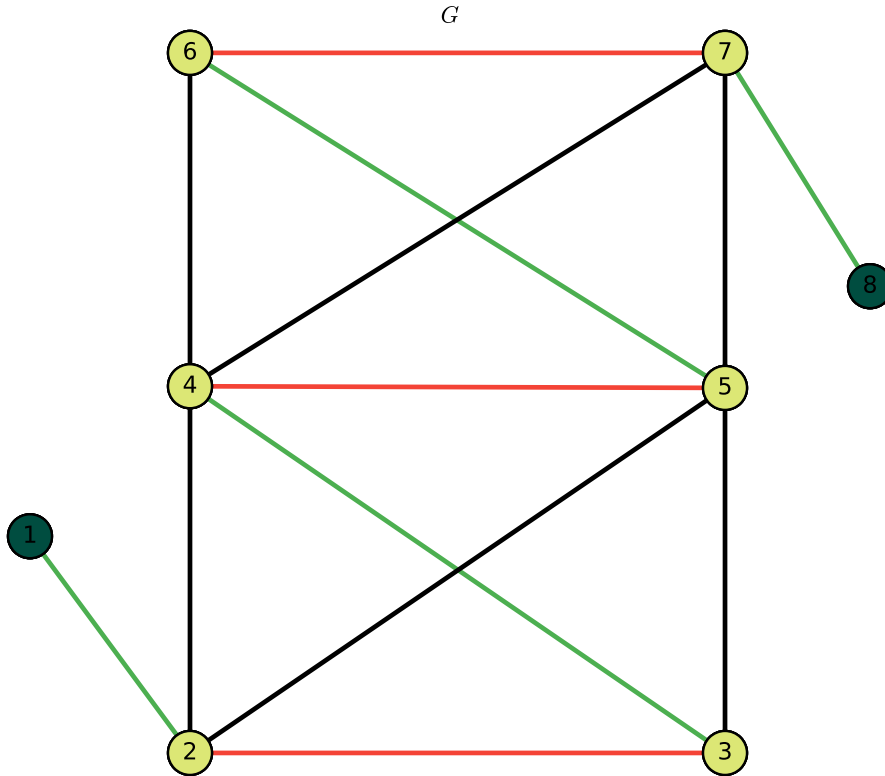


Figura 1.13.72: Ejemplo de camino  $M$ -aumentante: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Si  $P$  es un camino  $M$ -aumentante, entonces reemplazando las aristas de  $M$  que están en  $P$  por las aristas de  $E(G) \setminus M$  en  $P$  obtenemos un nuevo matching  $M'$  de tamaño estrictamente mayor a  $M$ . De aquí el nombre “aumentante”. Así, un matching máximo  $M$  no tiene caminos  $M$ -aumentantes. Más aún, vale la recíproca:



**Teorema 1.13.4** (Berge (1957)). Sea  $M$  un conjunto de aristas en un grafo  $G$ .  $M$  es un matching de tamaño máximo si y solo si  $G$  no tiene caminos  $M$ -aumentantes.

*Demostración.* Acabamos de observar una de las implicaciones, veamos la vuelta. Supongamos que sí hay un matching  $M'$  de tamaño estrictamente más grande que un matching  $M$  sin caminos  $M$ -aumentantes. Sea  $F = M \Delta M'$  la diferencia simétrica entre estos dos conjuntos. Como  $M$  y  $M'$  son matchings, cada vértice incide en a lo más una arista de  $M$  y una de  $M'$ . Así,  $\Delta(H) \leq 2$  si vemos a  $F$  como un grafo  $H := (V(G), F)$ . Entonces  $H$  es unión disjunta de ciclos y caminos.

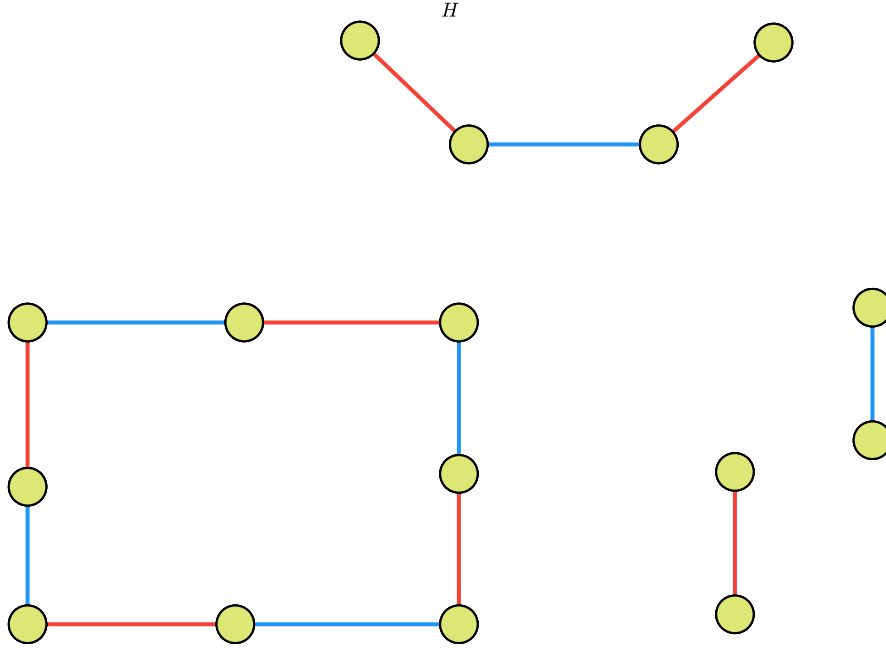


Figura 1.13.73: Ilustración de  $H$ , donde por un lado tenemos las aristas de  $M' \setminus M$  y las de  $M \setminus M'$ .

Cada componente de  $H$  alterna entre  $M$  y  $M'$ , y por lo tanto sus ciclos son pares. Al tener  $|M'| > |M|$  tiene que haber en  $H$  una componente que no es ciclo. Más aún, alguna de las componentes que no son ciclos tiene que tener más aristas de  $M'$  que de  $M$ . Por lo tanto, hay una componente que es camino que empieza y termina con aristas de  $M'$ . Esta componente nos da un camino  $M$ -aumentante, lo cual es imposible.  $\square$

**Observación 1.13.5.** En general, sea  $G$  un grafo con un matching máximo  $M$ , y sea  $U$  el conjunto de vértices de  $G$  que no están cubiertos por  $M$ . Luego si  $u \in U$ , implica que todos los vecinos de  $u$  están cubiertos por  $M$ .

*Demostración.* En efecto, pues de lo contrario, si  $u' \in U$  es un vecino de  $u$ , agregando la arista  $uu'$  a  $M$  obtendríamos un matching más grande.  $\square$

**Ejercicio 1.13.6.** Sea  $G$  un grafo con grado máximo  $\Delta(G) = k$ . Sea  $M$  un matching máximo de  $G$ . Para  $k \geq 3$ , demuestre que el número de aristas que unen vértices cubiertos por  $M$  a vértices no cubiertos por  $M$  es a lo más  $(k - 1)|M|$ .

*Solución.* Sea  $S$  el conjunto de aristas que unen vértices cubiertos por  $M$  a vértices no cubiertos por  $M$ . Llamemos  $U$  al conjunto de vértices que no están cubiertos por  $M$ . Tenemos que para todo  $u \in U$  los vecinos de  $u$  son todos vértices cubiertos por  $M$  por la Observación ??.

**Definición 1.13.7.** Sea  $u \in U$  con  $U$  como recién. Sea  $e$  una arista de  $M$  que tiene uno de sus extremos vecino a  $u$ . Si  $e$  tiene alguno de sus extremos adyacente a  $u$ , diremos que  $e$  es **vecina** de  $u$  y diremos que  $u$  es **vecino** de  $e$ . Diremos que  $u$  es **compañero** de  $e$  si es adyacente a ambos extremos de  $e$ . De lo contrario, diremos que es **no compañero**, y notaremos como  $x_u$  al único vértice de  $e$  adyacente a  $u$ .

**Lema 1.13.8.** Para  $e \in M$  fijo pueden ocurrir dos casos disjuntos:

1.  $e$  tiene solamente un único vecino en  $U$ , el cual es compañero de  $e$ .
2. Todos los vecinos  $u \in U$  de  $e$  son no compañeros ( $e$  podría no tener vecinos en  $U$ ) adyacentes a un único extremo de  $e$ .

*Demostración.* Supongamos que  $e \in M$  tiene algún vecino  $u \in U$ . Si  $u$  es el único vecino, o estamos en el primer caso o estamos en el segundo. Si  $u$  no es único, es decir, existe otro vértice  $v \in U$  vecino de  $e$ , entonces si o si  $u$  y  $v$  deben ser ambos adyacentes al mismo vértice  $x$  o  $y$ , donde  $e = xy$ . En efecto, de lo contrario si  $u$  es adyacente a  $x$  y  $v$  es adyacente a  $y$ , entonces como  $u, v$  no son extremos de ninguna arista de  $M$ , reemplazando la arista  $e \in M$  por las aristas  $xu$  e  $yv$ , obtenemos un matching más grande que  $M$ , absurdo. Esta misma demostración prueba que  $u$  y  $v$  no pueden tener más de un vecino que sea extremo de  $e$ , es decir, ambos son no compañeros. Con lo cual, si aplicamos este razonamiento a todos los vecinos de  $e$  en  $U$ , deben ser todos no compañeros y adyacentes a un único extremo de  $e$ , i.e. estamos en el segundo caso.

Es claro que estos dos casos son disjuntos. □

El lema anterior nos permite contar de la siguiente manera: para cada  $e \in M$  nos fijamos si estamos en el caso 1. o en el caso 2. En el primer caso contamos solamente un vecino de  $e$  en  $U$ , i.e.  $2 \leq k - 1$  aristas de  $S$ . En el segundo caso, todos los vecinos de  $e = xy$  en  $U$  son adyacentes a un único extremo  $x$  o  $y$ , digamos  $x$ , luego  $e$  puede tener a lo más  $k - 1$  vecinos en  $U$  (no contamos a  $y$ ), i.e. contamos  $\leq k - 1$  aristas de  $S$ . Juntando ambos casos disjuntos, nos queda que  $|S| \leq (k - 1)|M|$ . □

**Ejercicio 1.13.9.** Dos personas juegan un juego en un grafo: se alternan para elegir vértices  $v_1, v_2, \dots$  de modo que para todo  $i \geq 2$ , el vértice  $v_i$  es adyacente al vértice  $v_{i-1}$  y no ha sido escogido antes. El último jugador capaz de escoger un vértice gana.

- (a) Demuestre que el segundo jugador tiene una estrategia ganadora si el grafo tiene un matching perfecto.
- (b) Demuestre que el primer jugador tiene una estrategia ganadora si el grafo no posee un matching perfecto.

*Solución.* (a) Sea  $M$  un matching perfecto de  $G$ . Afirmo que la estrategia ganadora del segundo jugador es elegir el extremo opuesto de la arista de  $M$  cuyo extremo ha sido escogido por el primer jugador en el anterior turno. En efecto, supongamos que esta estrategia falló. Es decir, ocurrió una cantidad impar elecciones de vértices de  $G$ :  $v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_{2k-1}$  para algún  $k \in \mathbb{N}$  y  $v_{2k-1}$  no tiene vecinos sin visitar. (Notar que  $k \geq 2$ , pues el grafo está cubierto por un conjunto de aristas no vacío  $M$ ). Ahora, la estrategia del segundo jugador implica que las aristas  $e_1 := v_1v_2, e_2 := v_3v_4, \dots, e_{k-1} := v_{2k-3}v_{2k-2}$  pertenecen al matching  $M$ . Luego  $v_{2k-1}$  pertenece a una arista de  $M$  distinta de  $e_1, \dots, e_{k-1}$ ,

es decir,  $v_{2k-1}$  tiene un vecino distinto sin escoger: el extremo opuesto de una arista de  $M$  que cubre a  $v_{2k-1}$ , absurdo. Con lo cual, esta era una estrategia ganadora para el segundo jugador.

- (b) Sea  $M$  un matching máximo de  $G$ , con  $G$  sin matching perfecto. Sea  $U$  el conjunto de vértices de  $G$  que no están cubiertos por  $M$ . Notemos por  $U_k$  al conjunto de vértices que no están cubiertos por las aristas de  $M_k := M \cap E(G_k)$ , donde  $G_k$  es el grafo obtenido a partir de  $G$  luego quitar todos los vértices escogidos por ambos jugadores previos al  $k$ -ésimo turno del primer jugador. La estrategia del primer jugador será siempre elegir un vértice de  $U_k$  en su  $k$ -ésimo turno. A priori no sabemos que siempre se pueda escoger un vértice de  $U_k$ . Sin embargo, veremos que efectivamente se puede. Más precisamente, probaremos por inducción la afirmación más fuerte:

**Proposición 1.13.10.** *Para todo  $k \geq 1$ , se tiene que si el primer jugador no ganó en su  $(k-1)$ -ésimo turno, entonces*

- (I)  $M_k$  es un matching máximo de  $G_k$ ;
- (II) Todos los vecinos de cualquier elemento  $u$  de  $U_k$  están cubiertos por una arista de  $M_k$ .
- (III) El primer jugador puede escoger un vértice de  $U_k$  en su  $k$ -ésimo turno.

Necesitamos un lema previo:

**Lema 1.13.11.** *En general, si  $M$  es un matching máximo de un grafo  $G$ , y  $x$  es un extremo de una arista  $e$  de  $M$ , e  $y$  es un vértice adyacente a  $x$  que no está cubierto por  $M$ . Entonces el grafo  $G' = G \setminus \{x, y\}$  tiene a  $M' = M \cap E(G')$  como matching máximo.*

*Demostración.* Supongamos que no, es decir que existe un matching  $W$  de  $G'$  con más aristas que  $M'$ , es decir  $|M'| \leq |W| - 1$ . Notar que  $|M'| = |M| - 1$  porque borramos dos vértices  $x, y$ : donde  $x$  solamente es extremo de una arista de  $M$  por ser un matching, e  $y$  no era extremo de ninguna arista de  $M$  por cómo lo elegimos. Esto implica que  $\alpha'(G) - 1 \leq |W| - 1$ . Luego como  $W$  también es un matching de  $G$ , debe ser que  $|W| \leq \alpha'(G)$ , con lo cual  $\alpha'(G) = |W|$  y  $W$  es un matching máximo de  $G$ . Sean  $x$  y  $e \in M$  como al principio. Por construcción de  $W$ , tenemos que  $e = xy$  no está en  $W$ , más aún, esta arista es independiente de  $W$ , luego  $W \cup \{e\}$  es un matching de  $G$  de tamaño  $\alpha'(G) + 1$ , absurdo. Esto prueba que  $M'$  es un matching máximo de  $G'$ .  $\square$

Estamos ahora en condiciones de probar la Proposición ??:

*Demostración.* Si  $k = 1$ , como  $M_k = M$ ,  $G_k = G$  y  $U_k = U$ , no hay nada que probar en (i); (ii) se sigue inmediatamente de la Observación ??; (iii) se sigue de que  $G_k$  no tiene matching perfecto. En general, si el primer jugador no ganó en su  $k$ -ésimo turno,  $M_{k+1}$  es igual a  $M_k \cap E(G_{k+1})$ , donde notemos que  $G_{k+1} = G_k \setminus \{x_k, y_k\}$ , y  $x_k$  es el vértice escogido por el primer jugador en el  $k$ -ésimo turno  $y_k$  el vértice (adyacente) escogido subsecuentemente por el segundo jugador, más aún, por hipótesis inductiva  $x_k \in U_k$  es un vértice no

cubierto por el matching máximo  $M_k$  de  $G_k$ , con lo cual  $y_k$  es adyacente a  $x_k$  y está cubierto por una arista de  $M_k$  y luego por el Lema ??  $M_{k+1}$  es un matching máximo de  $G_{k+1}$ . Esto prueba (i). Por la Observación ??, los vecinos de todo  $u \in U_{k+1}$  tienen que estar cubiertos por el matching máximo  $M_{k+1}$ , probando así (ii). Como  $y_k$  está cubierto por una arista de  $M_k$ , el otro extremo de esta arista puede ser escogido por el primer jugador, y además debe estar en  $U_{k+1}$ , pues la única arista de  $M$  que incide en este extremo fue eliminado de  $G_k$  (recordar que  $M_{k+1} = M_k \cap E(G_k) = M \cap E(G_{k+1})$ ). Así, se sigue (iii).  $\square$

Finalmente, el último ítem de la Proposición ?? dice que si el primer jugador no ganó en su  $k$ -ésimo turno, luego puede escoger un vértice en su  $(k+1)$ -ésimo turno. Esto significa que el primer jugador siempre va a ser el último en escoger un vértice, es decir, cuando el juego eventualmente termine, el primer jugador ganará: la estrategia es ganadora.  $\square$

### 1.13.2. Matchings en grafos generales

Dados un grafo  $G$  llamemos  $\mathcal{C}_G$  al conjunto de componentes conexas, y por  $q(G)$  al número de sus componentes de orden impar. Si  $G$  tiene un matching perfecto  $M$ , luego claramente tenemos

$$q(G \setminus S) \leq |S| \quad \forall S \subset V(G), \quad (1.3)$$

ya que toda componente impar de  $G \setminus S$  tiene que mandar una arista de  $M$  en  $S$ : por paridad una de las aristas de  $M$  tiene un extremo en la componente impar y el otro en  $S$ ; claramente dos componentes no pueden estar asociadas de esta manera a un mismo vértice de  $S$  porque  $M$  es un matching.

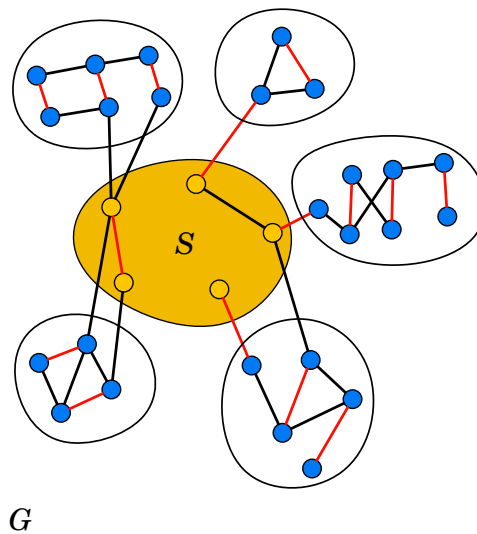


Figura 1.13.74: Ilustración de la condición de Tutte, de un conjunto  $S$  con  $q(G \setminus S) = 3$  componentes impares en  $G \setminus S$ , luego se cumple la condición de Tutte pues  $|S| = 5$ .

**Teorema 1.13.12** (Tutte (1947)). *Un grafo  $G$  tiene un matching perfecto si y solo si*

$$q(G \setminus S) \leq |S| \quad \forall S \subset V(G),$$

*Demostración.* Recien vimos una implicación, con lo cual nos resta ver la implicación recíproca. Por el absurdo, supongamos que  $G = (V, E)$  es un grafo sin matching perfecto, y supongamos que es arista-maximal con esta propiedad: esto es posible pues si  $G'$  se obtiene a partir de  $G$  agregando aristas y  $S \subset V$  no cumple la condición de Tutte en  $G'$ , luego  $S$  tampoco lo cumple en  $G$ , pues toda componente impar de  $G' \setminus S$  es la unión de las componentes impares de  $G \setminus S$ , o sea que una de estas debe ser impar.

**Afirmación 1.13.13.** *Todas las componentes de  $G \setminus S$  son completas y todo vértice  $s \in S$  es adyacente a todos los vértices de  $G \setminus s$ .*

Pero recíprocamente, si un conjunto  $S \subset V$  satisface la afirmación anterior, entonces  $S$  o el conjunto vacío deben violar la condición de Tutte: Si  $S$  no viola la condición de Tutte, podemos unir las componentes impares de  $G \setminus S$  de manera disjunta con  $S$  y emparejar a todos los vértices restantes formando un matching perfecto, salvo que  $|G|$  sea impar, en cuyo caso  $\emptyset$  no cumple (??).

Con lo cual, si probamos que  $G$  contiene un subconjunto  $S$  que cumple la afirmación llegaremos a un absurdo. Sea  $S$  el conjunto de vértices que son adyacentes a todo otro vértice. Si  $S$  no cumple la afirmación, es porque alguna componente de  $G \setminus S$  tiene dos vértices  $a, a'$  no adyacentes. Sean  $a, b, c$  los primeros tres vértices en algún  $a$ - $a'$  camino de longitud mínima dentro de esta componente; entonces  $ab, bc \in E$  pero  $ac \notin E$ . Como  $b \notin S$ , existe un vértice  $d \in V$  tal que  $bd \notin E$ . Por maximalidad de  $G$ , existe un matching  $M_1$  que cubre  $V$  en  $G + ac$ , y otro matching  $M_2$  que cubre a  $V$  en  $G + bd$ .

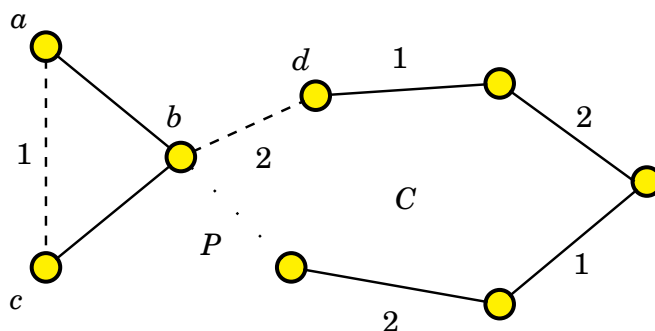


Figura 1.13.75: Ver la pagina 42 para una ilustración de la contradicción.

Sea  $P = d \cdots v$  un camino maximal en  $G$  que empieza en  $d$  con una arista de  $M_1$  y que contiene alternadamente aristas de  $M_1$  y  $M_2$  como se ve en el dibujo de arriba. Si la última arista de  $P$  se encuentra en  $M_1$ , entonces  $v = b$ , pues si no podríamos continuar  $P$  y obtener un camino  $M_2$ -aumentante en  $G + bd$ . Escribamos entonces  $C := P + bd$  en este caso. Por otro lado, si la última arista de  $P$  yace en  $M_2$ , entonces por maximalidad de  $P$  la  $M_1$ -arista en  $v$  debe ser  $ac$ , con lo cual  $v \in \{a, c\}$ ; en este caso escribamos  $C := dPvbd$ . En cualquier caso,  $C$  es un ciclo par donde las aristas se alternan afuera y adentro de  $M_2$ , y con su única arista fuera de  $E$  es  $bd$ . Reemplazando en  $M_2$  sus aristas en  $C$  por las aristas de  $C \setminus M_2$ , obtenemos un matching perfecto de  $G$  contenido en  $E$ , absurdo.  $\square$

**Corolario 1.13.14.** *Todo grafo  $G = (V, E)$  3-regular sin puentes tiene un matching perfecto.*

*Demostración.* Por el Teorema de Tutte, basta ver que todo  $S \subset V$  cumple la condición (??). En efecto, consideremos las componentes impares  $C$  de  $G \setminus S$ . Como  $G$  es 3-regular, los grado en  $G$  de los vértices en  $C$  suman un número impar, pero solamente una cantidad par de esta suma proviene de aristas en  $C$ : tenemos la siguiente ecuación módulo 2

$$\begin{aligned} 1 &\equiv \sum_{v \in C} d_G(v) \\ &= \left( \sum_{v \in C} d_C(v) \right) + \#\{C\text{-}S \text{ caminos}\}, \end{aligned}$$

pero la sumatoria del lado derecho es par, pues recordemos que esta sumatoria es el doble de la cantidad de aristas de  $C$ . Con lo cual,  $G$  tiene un número impar de  $S$ - $C$  aristas, y por lo tanto tiene al menos 3 de estas aristas ya que  $G$  no tiene puentes. Consecuentemente el número de aristas entre  $S$  y  $G \setminus S$  es al menos  $3q(G \setminus S)$ . Por otro lado, esta cantidad es a lo más  $3|S|$ , porque  $G$  es 3-regular. Juntando ambas cosas, nos queda  $q(G \setminus S) \leq |S|$ , como queríamos probar.  $\square$

**Definición 1.13.15.** Un grafo no vacío  $G = (V, E)$  se llama **factor-crítico** si no tiene matching perfecto, pero para cada vértice  $v \in G$ , el grafo  $G \setminus \{v\}$  tiene un matching perfecto.

Llamamos a un conjunto de vértices  $S \subset V$  matcheable con  $\mathcal{C}_{G \setminus S}$  si el grafo bipartito  $G_S^2$  contiene un matching que cubre a  $S$ .

---

<sup>2</sup> $G_S$  es el grafo creado a partir de  $G$  por contracción de las componentes  $C \in \mathcal{C}_{G \setminus S}$  a vértices y borrando todas las aristas dentro de  $S$ . Formalmente,  $G_S$  es el grafo con conjunto de vértices  $S \cup \mathcal{C}_{G \setminus S}$  y conjunto de aristas  $\{sC \mid \text{existe un vértice } c \in C \text{ adyacente a } s \text{ en } G\}$ .

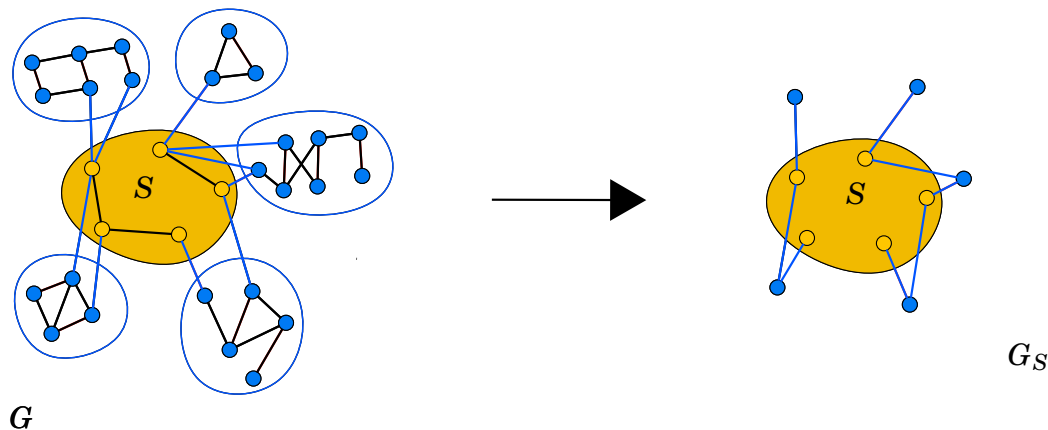


Figura 1.13.76: Ilustración cómo se ve el grafo  $G_S$  construido a partir de  $S$ .

**Teorema 1.13.16.** *Todo grafo  $G = (V, E)$  contiene un conjunto de vértices  $S$  con las siguientes propiedades:*

1.  $S$  es matcheable con  $\mathcal{C}_{G \setminus S}$ ;
2. toda componente de  $G \setminus S$  es factor-crítico.

Más aún, dados un conjunto  $S$  de esta forma, el grafo  $G$  contiene un matching perfecto si y solo si  $|S| = |\mathcal{C}_{G \setminus S}|$ .

Para un grafo  $G$ , la afirmación del teorema de Tutte se sigue directamente de este resultado. En efecto, por (i) e (ii) tenemos que  $|S| \leq |\mathcal{C}_{G \setminus S}| = q(G \setminus S)$  ya que los grafos factores-críticos tienen orden impar; con lo cual la condición (??)  $q(G \setminus S) \leq |S|$  implica  $|S| = |\mathcal{C}_{G \setminus S}|$ , y la existencia de un matching perfecto se sigue de la última afirmación del resultado.

*Demostración.* Notemos que la última afirmación del teorema se sigue de los ítems (i) y (ii): como  $|S| \leq |\mathcal{C}_{G \setminus S}| = q(G \setminus S)$  porque todas las componentes de  $G \setminus S$  son impares al ser factores críticos, se sigue que si  $G$  tiene un matching perfecto, luego  $q(G \setminus S) \leq |S|$  y por lo tanto  $|S| = |\mathcal{C}_{G \setminus S}|$ ; recíprocamente, si  $|S| = |\mathcal{C}_{G \setminus S}|$ , luego existe un matching perfecto de los ítems (i) y (ii).

Ahora probaremos la existencia de  $S$  por inducción en  $|G|$ . Si  $|G| = 0$  podemos tomar  $S = \emptyset$ . En general, supongamos que  $|G| > 0$ .

Consideremos los conjuntos  $T \subset V$  para los cuales no se cumple la condición (??) y

$$d(T) := d_G(T) := q(G \setminus T) - |T|$$

es máximo; tomemos un conjunto  $T$ , llamado  $S$ , de cardinal máximo. Observemos sique  $d(S) \geq d(\emptyset) \geq 0$ .

Veamos primero que todas las componentes  $C \in \mathcal{C}_{G \setminus S}$  son impares. En efecto, si  $|C|$  es par, podemos tomar  $c \in C$  y considerar  $T := S \cup \{c\}$ . Como  $C \setminus \{c\}$  tiene orden impar, debe tener al menos una componente impar, la cual también es componente de  $G \setminus T$ . Así,

$$q(G \setminus T) \neq q(G \setminus S) + 1 \quad \text{mientras que} \quad |T| = |S| + 1,$$

con lo cual  $d(T) \geq d(S)$  contradiciendo la elección de  $S$  de tamaño máximo.

Luego probaremos la afirmación (ii), eso es que todo  $C \in \mathcal{C}_{G \setminus S}$  tiene un factor crítico. Supongamos que no, es decir, existen  $C \in \mathcal{C}_{G \setminus S}$  y  $c \in C$  tales que  $C' := C \setminus \{c\}$  no tiene matching perfecto. Por la hipótesis inductiva, y la observación anterior, en donde vimos que este teorema implica el Teorema de Tutte ??, existe un conjunto  $S' \subset V(C')$  tal que

$$q(C' \setminus S') > |S'|.$$

Como  $|C|$  es impar,  $|C'|$  es par, las cantidades  $q(C' \setminus S')$  y  $|S'|$  son ambos pares o impares, con lo cual difieren por al menos 2 unidades, i.e.

$$q(C' \setminus S') \geq |S'| + 2$$

y  $d_{C'}(S') \neq 2$ . Tomemos  $T := S \cup \{c\} \cup S'$ , cumple:

$$d(T) \geq (q(G \setminus S) - 1 + q(C' \setminus S')) - (|S| + 1 + |S'|) \geq d(S) - 1 - 1 + d_{C'}(S') \geq d(S),$$

donde el primer  $-1$  proviene de que perdimos la componente impar  $C$  y el segundo  $-1$  proviene de incluir a  $c$  en  $T$ . Nuevamente, esto contradice la elección de  $S$ .

Finalmente, nos queda probar que  $S$  es matcheable con  $\mathcal{C}_{G \setminus S}$ . Si no lo fuera, entonces por el Teorema ?? aplicado al grafo bipartito  $G_S$ , existe un conjunto  $S' \subset S$  con más vértices que vecinos, es decir,  $S'$  tiene menos aristas que componentes de  $\mathcal{C}_{G \setminus S}$ . Debido a que las componentes no adyacentes a  $S'$  son también componentes de  $G \setminus (S \setminus S')$ , y de que al quitar los vértices  $S'$  de  $S$  nos quedan también las componentes, el conjunto  $T = S \setminus S'$  satisface

$$d(T) \geq (q(G \setminus S) - |N_{G_S}(S')|) - (|S| - |S'|) > d(S),$$

contradiendo la elección de  $S$ . □

Podemos caracterizar a los matchings máximos de un grafo  $G$  conociendo al conjunto  $S$  del teorema de arriba. Sea  $M$  un matching en  $G$  y sea  $\mathcal{C} := \mathcal{C}_{G \setminus S}$ . Denotemos  $k_S$  al número de aristas en  $M$  que cubren a algún vértice de  $S$ , y  $k_{\mathcal{C}}$  al número de aristas de  $M$  con ambos extremos en  $G \setminus S$ . Tenemos que

**Proposición 1.13.17.** *Todo matching  $M$  cumple*

$$k_S \leq |S| \quad y \quad k_{\mathcal{C}} \leq \frac{|V| - |S| - |\mathcal{C}|}{2}. \quad (1.4)$$

*Más aún,  $M$  es un matching máximo si y solo si se alcanzan ambas igualdades.*

*Demostración.* Primero veamos que todo matching cumple (?). Por un lado, claramente vale la primera desigualdad. Por otro lado, como todos los  $C \in \mathcal{C}$  son impares, alguno de sus vértices no es incidente con una arista de  $M$ , así contando vértices cubiertos por  $M$  en  $G \setminus S$ , vale la segunda desigualdad.

Más aún, existe un matching  $M_0$  que cumple las igualdades en (?): Tomemos  $|S|$  aristas entre  $S \cup \mathcal{C}$  gracias a (i), y luego usemos (ii) para encontrar un conjunto de  $\frac{|C|-1}{2}$  aristas en cada componente  $C \in \mathcal{C}$ . Así,  $M_0$  tiene

$$|M_0| = |S| + \frac{|V| - |S| - |\mathcal{C}|}{2}$$

aristas. Esto implica junto con (?) que todo matching máximo tiene que cumplir las igualdades en (?).



Recíprocamente, si  $M$  cumple las igualdades en (??), entonces  $k_S = |S|$  implica que todo vértice  $s \in S$  tiene una arista  $st \in M$  con  $t \in G \setminus S$ , y por  $k_{\mathcal{C}} = \frac{|V| - |S| - |\mathcal{C}|}{2}$  se tiene que  $M$  tiene exactamente  $\frac{|C|-1}{2}$  aristas en  $C$  para cada  $C \in \mathcal{C}$ . Como estas últimas aristas solamente no cubren a un vértice en  $C$ , el extremo  $t$  de cada arista  $st$ , debe caer en una distinta componente  $C$  para cada distinto  $s$ . Con lo cual  $M$  tiene el mismo cardinal que el matching máximo  $M_0$ .  $\square$

**Comentario 1.13.18.** Existe algoritmos polinomiales para encontrar matchings máximos en un grafo. Más precisamente, el “blossom algorithm” desarrollado por Jack Edmonds en 1961<sup>3</sup> corre en tiempo  $O(|E||V|^2)$  donde  $G = (V, E)$ . Existe un algoritmo más eficiente, obtenido por Micali y Vazirani<sup>4</sup>, que corre en tiempo  $O(|E|\sqrt{|V|})$ , pero es mucho más complicado.

**Definición 1.13.19.** Decimos que  $G$  cumple la **condición de Tutte débil** si para  $S \subset V(G)$  tal que  $|S| \leq 1$ , hay a lo más una componente impar en  $\mathcal{C}_{G \setminus \{x\}}$ . En particular tomando  $S = \emptyset$ ,  $G$  tiene que tener orden par, no tiene vértices aislados y por lo tanto tiene al menos una arista.

**Ejercicio 1.13.20.** Probar que las siguientes clases de grafos cumplen la Condición de Tutte débil ?? si y solo si tienen un matching perfecto:

- (I) Los árboles.
- (II) Los bosques.
- (III) Los  $X, Y$ -bigrafos con  $|X| = |Y|$ .

*Solución.* Como el Teorema de Tutte ?? dice que un grafo con matching perfecto cumple la condición de Tutte (??), en particular se cumple la condición débil, luego solo necesitamos probar la recíproca.

Como los primeros son un caso particular de grafos bipartitos, basta con probar la última afirmación. De todas formas, como no estoy seguro de que esté bien la demostración para grafos bipartitos, daré una demostración diferente que sirve para bosques (el cual implica el de árboles)

*Caso bosques:* Por inducción en la cantidad de vértices  $n$  de un bosque  $T$ . Recordemos que  $n$  tiene que ser par y  $G$  tiene que tener al menos una arista, luego los casos  $n = 2, 3$  son triviales. En general para  $n \geq 4$ , si  $x \in G$  es una hoja con un padre  $y$ , consideramos el bosque  $T' = T \setminus \{x, y\}$ . Este nuevo bosque sigue cumpliendo la condición de Tutte débil ?. En efecto, sea  $z \in T'$ , las componentes conexas de  $T' \setminus \{z\}$  de orden impar son a lo más la cantidad de componentes impares de  $T \setminus \{z\}$ , pues como no hay ciclos en  $T$ ,  $x$  e  $y$  son adyacentes como mucho a una componente de  $T' \setminus \{z\}$ , luego por la condición débil,  $T' \setminus \{z\}$  tiene a lo más una componente impar. Como  $z \in T'$  era arbitrario, podemos aplicar hipótesis inductiva con  $|T'| = n - 2 \geq 2$ , luego  $T'$  tiene matching perfecto, con lo cual agregando la arista  $xy$  obtenemos un matching perfecto de  $T$ .

<sup>3</sup>Ver [?].

<sup>4</sup>Ver [?].

*Caso  $X, Y$ -bigrafos:* Por la condición de Tutte débil ??, existe un subconjunto  $S \subset X$  que tiene al menos un vecino, i.e. cumple la condición de Hall (??), luego tomemos  $S$  de tamaño máximo tal que cumple la condición (en particular es no trivial). Supongamos por el absurdo que no tenemos un matching perfecto, es decir que  $S \subsetneq X$ . Sea  $x \in X \setminus S$  arbitrario. Por maximalidad de  $S$ , tenemos que  $|S| = |N|(S) \subset Y$ , más aún,  $N(x) \subset S$ , i.e. los vértices de  $Y \setminus N(S)$  son aislados. Como  $|X| = |Y|$ , debe haber al menos un  $y \in Y \setminus N(S)$ , sin embargo  $G$  no tiene vértices aislados, absurdo.

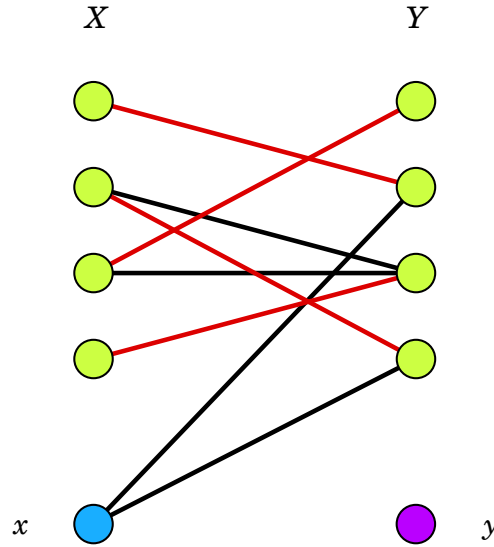


Figura 1.13.77: Ilustración del absurdo en un bigrafo que cumple la condición débil.

□

### 1.13.3. The Erdős-Pósa theorem

Estamos motivados ahora de generalizar los teoremas de König y Hall: dados una clase de grafos  $\mathcal{H}$ , nos gustaría encontrar una función  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  independiente de cualquier grafo  $G$ , tal que  $G$  tiene  $k$  subgrafos disjuntos isomorfos a un grafo de  $\mathcal{H}$  o tiene un subconjunto con a lo más  $f(k)$  vértices que cubren los subgrafos de  $G$  pertenecientes a  $\mathcal{H}$ . Si existe una función  $f$  para  $\mathcal{H}$  que cumple lo anteriormente mencionado, decimos que  $\mathcal{H}$  tiene la **propiedad de Erdős-Pósa**.

**ADVERTENCIA 1.13.21.** En lo que sigue, usamos la notación del diestral “log” que creo que se refiere al logaritmo en base 2.

**Lema 1.13.22.** Sea  $k \in \mathbb{N}$ , y  $H$  un multigrafo 3-regular. Si  $|H| \geq s_k$ , entonces  $H$  contiene  $k$  ciclos disjuntos. Donde

$$s_k := \begin{cases} 4kr_k & \text{si } k \geq 2, \\ 1 & \text{si } k \leq 1 \end{cases} \quad \text{donde } r_k := \log k + \log \log k + 4.$$

*Demostración.* Haremos inducción en  $k$ . Si  $k \leq 1$ , la afirmación es trivial, con lo cual supongamos que  $k \geq 2$ . Sea  $C$  el ciclo mas corto en  $H$ .

Veamos primer que  $H \setminus C$  contiene una subdivisión de un multigrafo 3-regular  $H'$  con  $|H'| \geq |H| - 2|C|$ . Sea  $m$  el número de aristas entre  $C$  y  $H \setminus C$ . Como  $H$  es 3-regular y  $d(C) = 2$ , tenemos que  $m \leq |C|$ . Ahora consideramos biparticiones  $\{V_1, V_2\}$  de  $V(H)$ , empezando con  $V_1 := V(C)$  (eventualmente permitiremos que  $V_2$  sea vacío). Si  $H[V_2]$  tiene un vértice de grado a lo más 1, movemos este vértice a  $V_1$ , obteniendo una nueva partición  $\{V_1, V_2\}$  con menos aristas que antes. Supongamos que podemos realizar una sucesión con  $n$  pasos, pero no más. Luego la partición final  $\{V_1, V_2\}$  tiene a lo más  $m - n$  aristas. Y  $H[V_2]$  tiene a lo más  $m - n$  vértices de grado  $< 3$ , ya que cada una de estas incide en una arista de cruce entre  $V_1$  y  $V_2$ . De hecho, estos vértices tienen grado exactamente 2 en  $H[V_2]$ , pues no podemos mover más vértices a  $V_1$ . Sea  $H'$  el multigrafo 3-regular obtenido a partir de  $H[V_2]$  luego de eliminar estos vértices de grado  $< 3$ . Tenemos que

$$|H'| \geq |H| - |C| - n - (m - n) \geq |H| - 2|C|,$$

como queríamos.

Para finalizar la demostración, basta ver que  $|H'| \geq s_{k-1}$ . Ya que  $|C| \leq 2 \log |H|$  por el Corolario ?? (vale dx), y  $|H| \geq s_k \geq 6$ , tenemos

$$|H'| \geq |H| - 2|C| \geq |H| - 4 \log |H| \geq s_k - 4 \log s_k.$$

(En la última desigualdad usamos que la función  $x \mapsto x - 4 \log x$  es creciente para todo  $x \geq 6$ .) Así, basta ver que  $s_k - 4 \log s_k \geq s_{k-1}$ . En efecto, si  $k = 2$  es claro, luego supongamos que  $k \geq 3$ . Entonces  $r_k \leq 4 \log k$  para  $k \geq 4$ , y el caso  $k = 3$  es fácil. Consecuentemente,

$$\begin{aligned} s_k - 4 \log s_k &= 4(k-1)r_k + 4 \log k + 4 \log \log k + 16 - (8 + 4 \log k + 4 \log r_k) \\ &\geq s_{k-1} + 4 \log \log k + 8 - 4 \log(4 \log k) = s_{k-1}. \end{aligned}$$

□

**Teorema 1.13.23** (Erdős & Pósa (1965)). *Existe una función  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que, dados cualquier  $k \in \mathbb{N}$ , todo grafo contiene  $k$  ciclos disjuntos o un conjunto de a lo más  $f(k)$  vértices cubriendo todos sus ciclos.*

*Demostración.* Veamos que vale para  $f(k) := \lfloor s_k + k - 1 \rfloor$ . Sea  $k$  fijo, y  $G$  un grafo. Podemos suponer que  $G$  contiene un ciclo, y luego tiene un subgrafo maximal  $H$  en el cual todo vértice tiene grado 2 o 3. Sea  $U$  su conjunto vértices de grado 3.

Sea  $\mathcal{C}$  el conjunto de todos sus ciclos en  $G$  que no intersecan a  $U$ , pero que intersecan a  $H$  en exactamente un vértice. Sea  $Z \subset v(H) \setminus U$  el conjunto de estos vértices. Para cada  $z \in Z$  elegimos un ciclo  $C_z \in \mathcal{C}$  que interseca a  $H$  en  $z$ , y escribamos  $\mathcal{C}' := \{C_z \mid z \in Z\}$ . Por maximalidad de  $H$ , los ciclos en  $\mathcal{C}'$  son disjuntos.

Sea  $\mathcal{D}$  el conjunto de las componentes 2-regulares de  $H$  que no intersecan  $Z$ . Luego  $\mathcal{C}' \cup \mathcal{D}$  es otro conjunto de ciclos disjuntos. Si  $|\mathcal{C}' \cup \mathcal{D}| \geq k$ , terminamos. De lo contrario, podemos agregar a  $Z$  un vértice de cada ciclo en  $\mathcal{D}$  y obtener un conjunto  $X$  de a lo más  $k - 1$  vértices que intersecan a todos los ciclos en  $\mathcal{C}$  y a todas las componentes 2-regulares de  $H$ . Ahora consideremos cualquier ciclo de  $G$  que no interseca  $X$ . Por maximalidad de  $H$ , interseca  $H$ . Sin embargo, no es una componente

conexa de  $H$ , no está en  $\mathcal{C}$ , y no contiene un  $H$ -camino entre distintos vértices fuera de  $U$  (por maximalidad de  $H$ ). Así que este ciclo interseca  $U$ .

Esto prueba que todo ciclo de  $G$  interseca a  $X \cup U$ . Como  $|X| \leq k-1$ , basta probar que  $|U| < s_k$  a menos que  $H$  contenga  $k$  ciclos disjuntos. Pero esto se sigue del lema anterior aplicado al multigrafo obtenido de  $H$  luego de suprimir sus vértices de grado 2 (puede quedar un multigrafo).  $\square$

#### 1.13.4. Empaquetamiento de árboles y arboricidad

El problema de encontrar la máxima cantidad de árboles arista-disjuntos en un grafo o la mínima cantidad de árboles que cubren las aristas es un problema clásico, el cual resolveremos como corolario de una unificación reciente, obtenida por Bowler y Carmesin: el Teorema de packing-covering.

La motivación de encontrar  $k$  subárboles arista-disjuntos en un grafo, es que permite una aplicación en la vida real: si tu computadora tiene guardado en su memoria estos árboles, rápidamente puede encontrar, de manera canónica,  $k$  caminos arista disjuntos entre dos vértices dados.

**Definición 1.13.24.** Sea  $G$  un grafo con una partición de sus vértices  $V(G)$  en  $r$  conjuntos, cada uno generando un árbol de  $G$ . Llamamos **cross-edge**, a las aristas de  $G$  cuyos extremos yacen en distintos conjuntos de la partición.

**Observación 1.13.25.** Sea  $G$  un grafo con  $k$  árboles arista disjuntos generadores de  $G$ . Sea  $U_1, \dots, U_r$  una partición de  $V(G)$  en  $r$  conjuntos. Entoncees todo árbol generador  $T$  de  $G$  tiene al menos  $r-1$  cross-edges, con lo cual,  $G$  tiene al menos  $k(r-1)$  cross-edges.

*Demostración.* En efecto, por inducción en la cantidad de vértices de  $G$ , el caso base es trivial, en general tomamos una hoja  $h \in T$ , y supongamos sin pérdida de generalidad que  $h \in U_1$ , y supongamos que  $r > 1$  pues si no la afirmación es trivial. Entonces consideramos  $G' := G \setminus \{h\}$ , que tiene una partición  $U_1 \setminus \{h\}, U_2, \dots, U_r$  luego como  $T \setminus \{h\}$  es un árbol generador podemos aplicar hipótesis inductiva. Si  $U_1 \setminus \{h\} = \emptyset$ , entonces tenemos al menos  $r-2$  cross-edges en  $G'$ , luego  $r-1$  en  $G$ , pues la arista  $hv$  con  $v$  el único vecino de  $h$  en  $T$  es un cross-edge; pero si  $U_1 \setminus \{h\}$  es no vacío, entonces por hipótesis inductiva  $G'$ , y por lo tanto  $G$ , tiene al menos  $r-1$  cross-edges.  $\square$

La observación no solo es necesaria, si no también es suficiente:

**Teorema 1.13.26** (Nash-Williams (1961); Tutte (1961)). *Un multigrafo contiene  $k$  árboles generadores arista-disjuntos si y solo si toda partición  $P = \{U_1, U_2, \dots, U_r\}$  de los vértices de tiene al menos  $k(r-1)$  cross-edges.*

**Comentario 1.13.27.** El teorema equivale a cambiar la partición  $P$  por una partición en conjuntos conexos. En efecto, cualquier partición se puede refinar en una partición en conjuntos de vértices que inducen subgrafos conexos: por cada  $U \in P$ , consideramos la partición en las componentes conexas de  $G[U]$ . Luego, los cross-edges deben inducir cross-edges de la partición original, pues si  $V, V'$  son dos componentes conexas de  $U \in P$ , no pueden tener aristas que las unan.

Así, el teorema dice que un multigrafo  $G$  tiene  $k$  árboles generadores disjuntos si y solo si sus contracciones por  $r$  menores tienen al menos  $k(r-1)$  aristas.

**Corolario 1.13.28.** *Todo multigrafo  $G$  que es  $2k$ -arista conexo tiene  $k$  árboles generadores disjuntos.*

*Demostración.* Saliendo de cada conjunto  $U_i$  tienen que salir al menos  $2k$  cross-edges, pues  $G$  es  $2k$ -arista conexo (estamos suponiendo que  $r > 1$  pues si no es trivial). Con lo cual,  $G$  tiene al menos  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^r 2k = kr$  cross-edges (consideramos el grafo obtenido luego de contraer cada  $U_i$  en un solo vértice y estimamos inferiormente el grado total). Así, se sigue el resultado del teorema anterior.  $\square$

**Definición 1.13.29.** Decimos que un conjunto  $\{H_i\}_i$  de subgrafos de un multigrafo  $G$  forma una **descomposición en aristas** de  $G$  si  $\{E(H_i)\}_i$  particiona  $E(G)$ .

En esta terminología, el objetivo de esta sección es reponder la pregunta: ¿cuántos subgrafos generadores que forman una descomposición en aristas tiene un multigrafo  $G$ ?

Como un subgrafo conexo es generador si y solo si interseca todos los enlaces de  $G$ , la pregunta anterior tiene una pregunta dual: ¿cuál es la mínima cantidad de subgrafos **few-acyclic** (i.e. su complemento interseca a todos los circuitos) podemos descomponer en aristas a  $G$ ?

**Definición 1.13.30.** Diremos que una familia de grafos **cubre sus aristas**, si toda arista de  $G$  yacen en al menos uno de estos grafos.

Nuestro problema dual se traduce entonces a encontrar cuáles son los multigrafos  $G$  a los que se les pueden cubrir sus aristas por a lo más  $k$  árboles.

**Observación 1.13.31.** Necesariamente, todo subconjunto  $U \subset V(G)$ , induce a lo más  $k(|U| - 1)$  aristas, no más de  $|U| - 1$  por cada árbol. Dualmente, no hay manera de “eliminar” menores de  $G$ , de manera que nos quede un grafo con demasiadas aristas para ser cubiertas por  $k$  árboles

La observación no solo es necesaria, si no también es suficiente:

**Teorema 1.13.32** (Nash-Williams (1964)). *Las aristas de un multigrafo  $G = (V, E)$  se pueden cubrir por a lo más  $k$  árboles si y solo si  $\|G[U]\| \leq k(|U| - 1)$  para todo subconjunto no vacío  $U \subset V$ .*

**Definición 1.13.33.** El menor número de árboles que puede cubrir las aristas de un grafo es la **arboricidad**.

Por el Teorema anterior ??, la arboricidad de un grafo mide la densidad máxima local: un grafo tiene poca arboricidad si y solo si es “nunca denso” en el sentido de que no tiene subgrafos  $H$  con  $e(H)$  grande.

**Teorema 1.13.34** (Bowler & Carmesin (2015)). *Para todo multigrafo conexo  $G = (V, E)$  y todo  $k \in \mathbb{N}$ , existe una partición  $P$  de  $V$  tal que todo  $G[U]$  con  $U \in P$  tiene  $k$  árboles generadores arista-disjuntos y las aristas de  $G/P$  (el grafo contraído: aristas entre dos conjuntos  $U, U' \in P$  se vuelven aristas paralelas en  $G/P$ ) pueden cubrirse con  $k$  árboles generadores.*

*Demostración.*

**Notación 1.13.35.** Sea  $T$  un árbol generador de  $G$ ,  $e$  una cuerda, y  $f \in E(T)$  una arista en el ciclo fundamental  $C_e$ . Entonces  $T' = T + e - f$  es otro árbol generador: por el Corolario ??, pues  $T'$  es conexo y tiene el mismo número de aristas que  $T$ . Decimos que  $T'$  es obtenido de  $T$  al **intercambiar**  $f$  por  $e$ .

Ahora, sea  $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_k\}$  una familia de árboles generadores de  $G$ . Llamemos a una sucesión  $e_0, \dots, e_n$  de aristas una **cadena de intercambios** para  $\mathcal{T}$  **empezando** en  $e_0$  si  $e_n$  no yace en ninguno de estos árboles, pero para todo  $i < n$  existe  $j = j(i)$  tal que  $e_i \in T_j$  mientras que  $e_{i+1}$  es una cuerda de  $T_j$  cuyo ciclo fundamental con respecto de  $T_j$  contiene a  $e_i$ .

Escribamos  $E(\mathcal{T}) = \bigcup \{E(T) \mid T \in \mathcal{T}\}$  para una familia.

**Lema 1.13.36.** Si  $e_0$  comienza una cadena de intercambios para  $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_k\}$  y yace en dos de sus árboles, luego existe una familia  $\mathcal{T}'$  de  $k$  árboles generadores de  $G$  tal que  $E(\mathcal{T}) \subsetneq E(\mathcal{T}')$ .

*Demostración.* Tomemos una cadena de intercambios  $e_0, \dots, e_n$  de longitud mínima para  $\mathcal{T}$  que empiece en  $e_0$ . Entonces ninguno de los  $e_i$  yace en el ciclo fundamental, con respecto de cualquier árbol en  $\mathcal{T}$ , para cualquier  $e_\ell$  con  $\ell > i + 1$ : de lo contrario podríamos acortar la secuencia saltando de  $e_i$  en  $e_\ell$  o  $e_{\ell+1}$ .

Ahora, empezando con  $\mathcal{T}^0 = \mathcal{T}$ , definimos  $\mathcal{T}^{i+1}$  recursivamente para  $i = 0, \dots, n-1$  reemplazando en  $\mathcal{T}^i = \{T_1^i, \dots, T_k^i\}$  el árbol  $T_j^i$  por  $T_j^i + e_{i+1} - e_i =: T_j^{i+1}$  para  $j = j(i)$ . Notar que para  $j = j(i)$  la minimalidad de nuestra secuencia implica que toda arista  $e$  de  $T_j$  en su ciclo fundamental para  $e_{i+1}$  está todavía en  $T_j^i$ : de lo contrario  $e = e_{i'}$  para algún  $i' < i$ , obteniendo una contradicción para  $\ell := i + 1 > i' + 1$ . Así, si  $T_j^i$  es un árbol generador de  $G$ , lo cual podemos asumir inductivamente, implica que  $T_j^{i+1}$  también lo es.

Claramente,  $\mathcal{T}' := \{T_1^n, \dots, T_k^n\}$  cumple  $E(\mathcal{T}') = E(\mathcal{T}) \cup \{e_n\}$ . □

Ahora estamos en condiciones de probar el teorema. Sea  $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_k\}$  una familia de  $k$  árboles generadores de  $G$ , elegidos de manera que  $E(\mathcal{T})$  es maximal. Sea  $D$  el conjunto de todas sus aristas en  $G$  que empiezan una cadena de intercambios para  $\mathcal{T}$ . Estas incluyen todas las aristas que no están en  $E(\mathcal{T})$ , pues estas forman cadenas de intercambio con una sola arista. Sea  $P$  la partición de  $V$  en sus conjuntos de vértices de las componentes conexas de  $(V, D)$ .

Para la afirmación de la parte de packing del teorema, sea  $U \in P$ . Para todo  $j = 1, \dots, k$  sea  $S_j$  el subgrafo de  $T_j[U]$  formado por sus aristas en  $D$ . Estos bosques  $S_j$  son arista disjuntos, pues por maximalidad de  $\mathcal{T}$  y el lema anterior, ninguna arista en  $D$  yace en más de un  $T_j$ . Veamos que los  $S_j$  son conexos, i.e. árboles.

En efecto, como las aristas de  $D$  forman un submultigrafo conexo en  $U$ , basta probar que para cada aristas  $uu' \in D$  con  $u, u' \in U$  existe un  $u$ - $u'$  camino en  $S_j$ . Es claro que si  $uu'$  yace en  $T_j$ , luego yace en  $S_j$ . Si no, entonces existe un camino  $uT_ju'$  que sigue teniendo sus aristas  $e \in D$ , y por lo tanto yace en  $S_j$ : si  $e_0, \dots, e_n$  es un intercambio de cadenas tal que  $e_0 = uu' \in D$ , entonces  $e, e_0, \dots, e_n$  es un intercambio de cadenas poniendo  $e \in D$ , pues  $e$  yace en el ciclo fundamental de  $e_0$  respecto de  $T_j$ .

Como todo  $T_j$  induce subgrafos conexos  $S_j$  en los conjuntos de la partición  $P$ , contrayendo estos  $S_j$  convierte los  $T_j$  en árboles generadores  $T'_j$  de  $G/P$ . Estos  $T'_j$  cubren todas las aristas de  $G/P$ , ya que  $E \setminus E(\mathcal{T}) \subset D$ . □

(Nash-Williams; Tutte). Supongamos que un multigrafo  $G$  tiene al menos  $k(|P| - 1)$  cross-edges por cada partición  $P$  de  $V(G)$ . Sea  $P$  la partición del Teorema ???. Por el teorema,  $G/P$  tiene  $k$  árboles generadores que cubren sus aristas. Como  $\|G/P\| \geq k(|P| - 1)$ , deben ser arista disjuntos. Combinandolas con los árboles generadores arista-disjuntos de  $G[U]$  que también son provistos por el Teorema ??, obtenemos los  $k$  árboles generadores de  $G$  que buscábamos.  $\square$

(Nash-Williams). Supongamos que todo  $U \subset V$  induce a lo más  $k(|U| - 1)$  aristas en  $G$ . Sea  $C$  una componente de  $G$ , y  $P$  la partición de  $V(C)$  provista por el Teorema ???. Para cada  $U \in P$ , cada uno de los  $k$  árboles generadores arista disjuntos de  $G[U]$  que provee el teorema tiene  $|U| - 1$  aristas, con lo cual todas las aristas de  $G[U]$  yacen en estos árboles. Combinando estos árboles con los árboles generadores de  $C/P$  que cubren todas sus aristas (provisto por el teorema) obtenemos  $k$  árboles generadores de  $C$  que cubren todas sus aristas. Estos se pueden combinar en  $k$  árboles que cubren las aristas de  $G$ . Solo falta agregar aristas para convertir estos nosques en los  $k$  árboles deseados.  $\square$

### 1.13.5. Cubrimiento por caminos

Estamos motivados en esta subsección a responder la pregunta: ¿cuántos caminos en un grafo dirigido bastan para cubrir todos los vértices?

**Definición 1.13.37.** Un **camino dirigido** en un grafo dirigido  $P \neq \emptyset$  cuyos distintos vértices  $x_0, \dots, x_k$  y aristas  $e_0, \dots, e_{k-1}$  tales que  $e_i$  es una arista dirigida de  $x_i$  en  $x_{i+1}$ , para todo  $i < k$ . En esta sección nos referiremos con camino a un camino dirigido.

Llamamos a  $x_k$  el **último vértice** de  $P$ , y cuando  $\mathcal{P}$  es un conjunto de caminos dirigidos, escribimos por  $\text{ter}(\mathcal{P})$  al conjunto de los últimos vértices.

Un **cubrimiento por caminos** en un grafo dirigido es un conjunto de caminos disjuntos en  $G$  que juntos cubren todos los vértices de  $G$ .

**Teorema 1.13.38** (Gallai & Milgram (1960)). *Todo grafo dirigido  $G$  tiene un cubrimiento por caminos  $\mathcal{P}$  y un conjunto independiente  $\{v_P | P \in \mathcal{P}\}$  de vértices tales que  $v_P \in P$  para todo  $P \in \mathcal{P}$*

*Demostración.* Claramente  $G$  tiene un cubrimiento de caminos, i.e. el cubrimiento por caminos triviales. Probaremos por inducción en  $|G|$  que para cada cubrimiento por caminos  $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_m\}$  con  $\text{ter}(\mathcal{P})$  minimal, existe un conjunto  $\{v_P | P \in \mathcal{P}\}$  de vértices independientes como buscábamos. Para cada  $i$ , escribamos  $v_i$  para el último vértice de  $P_i$ .

Si  $\text{ter}(\mathcal{P}) = \{v_1, \dots, v_m\}$  es independiente, no hay nada que probar, luego supongamos que  $G$  tiene una arista de  $v_2$  en  $v_1$ . Como  $P_2 v_2 v_1$  es nuevamente un camino, la minimalidad de  $\text{ter}(\mathcal{P})$  implica que  $v_1$  no es el único vértice de  $P_1$ ; sea  $v$  el vértice que precede a  $v_1$  en  $P_1$ . Entonces  $\mathcal{P}' := \{P_1 v, P_2, \dots, P_m\}$  es un cubrimiento por caminos de  $G' := G \setminus v_1$ .

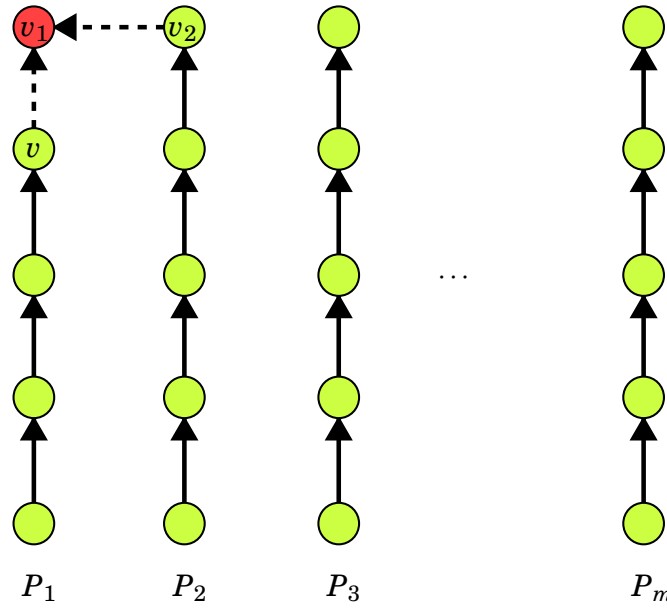


Figura 1.13.78: Cubrimiento por caminos de  $G$  y  $G'$ .

Claramente, cualquier otro conjunto independiente de representantes para  $\mathcal{P}'$  en  $G'$  va a funcionar para  $\mathcal{P}$  en  $G$ , con lo cual solo tenemos que verificar que podemos aplicar la hipótesis inductiva en  $\mathcal{P}'$ . Así, basta ver que  $\text{ter}(\mathcal{P}') = \{v, v_2, \dots, v_m\}$  es minimal respecto a los conjuntos de últimos vértices de cubrimientos por caminos de  $G'$ .

Supongamos por el absurdo que no, es decir, que  $G'$  tiene un cubrimiento por caminos  $\mathcal{P}''$  con  $\text{ter}(\mathcal{P}'') \subsetneq \text{ter}(\mathcal{P}')$ . Si un camino  $P \in \mathcal{P}''$  termina en  $v$ , podemos reemplazar  $P$  en  $\mathcal{P}''$  por  $Pvv_1$  y así obtener un cubrimiento por caminos de  $G$  cuyo conjunto de últimos vértices es un subconjunto propio de  $\text{ter}(\mathcal{P})$ , contradiciendo la elección de  $\mathcal{P}$ . Si  $P \in \mathcal{P}''$  es un camino que termina en  $v_2$ , pero ninguno en  $v$ , podemos similarmente reemplazar  $P$  en  $\mathcal{P}''$  por  $Pv_2v_1$ , contradiciendo la minimalidad de  $\text{ter}(\mathcal{P})$ . Consecuentemente,  $\mathcal{P}'' \subset \{v_3, \dots, v_m\}$ . Pero ahora  $\mathcal{P}''$  y el camino trivial  $\{v_1\}$  juntos forman un cubrimiento por caminos de  $G$ , contradiciendo la minimalidad de  $\text{ter}(\mathcal{P})$ .  $\square$

**Definición 1.13.39.** Sea  $(G, \leq)$  un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que es una **cadena** si sus elementos son comparables dos a dos; decimos que es una **anticadena** si no son comparables dos a dos.

**Corolario 1.13.40** (Teorema de Dilworth (1950)). *En todo conjunto finito parcialmente ordenado  $(G, \leq)$ , el mínimo número de cadenas que cubre  $G$  es igual al máximo número de anticadenas en  $G$ .*

*Demostración.* Si  $A$  es una anticadena de  $G$  de máxima cardinalidad, entonces claramente  $G$  no puede ser cubierto por menos de  $|A|$  cadenas. El hecho de que  $|A|$  cadenas bastan se sigue del teorema anterior aplicado al grafo  $G$  con aristas dirigidas  $\{(x, y) | x < y\}$ .  $\square$



### 1.13.6. Ejercicios

**Ejercicio 1.13.41.** Probar que si existen funciones inyectivas  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow A$  entre dos conjuntos infinitos, entonces existe una biyección entre  $A \rightarrow B$ .

*Solución.* Consideremos el  $A, B$ -bigrafo  $G$  donde  $ab$  con  $a \in A$ ,  $b \in B$  es una arista si y solo si  $b = f(a)$  o  $a = g(b)$ . Luego basta ver que existe una biyección inducida por cada componente conexa del grafo. Notar que cada componente es a lo sumo numerable. Sea  $a \in A$  en una componente de  $G$ , digamos  $C$ , el cual es un  $A', B'$  grafo bipartito.

Si  $C$  es finito, luego como  $A'$  cumple la condición de Hall ?? para cualquier subconjunto pues  $f$  es inyectiva, existe un matching perfecto que lo cubre y así  $|A'| \leq |B'|$ ; similarmente como  $g$  es inyectiva tenemos que  $|B'| \leq |A'|$ .

Si  $C$  es infinito (numerable), tenemos que los vértices son  $x_0 = a, x_1 = f(a), x_2 = g(x_1), x_3 = f(x_2), \dots$ . Luego definimos una biyección  $h : A' \rightarrow B'$  en  $C$  dada por  $h(a') = f(a')$ , la cual claramente es inyectiva, por ser la restricción de  $f$ , y además es sobreyectiva.  $\square$

**Ejercicio 1.13.42.** Sea  $k$  un entero y  $A$  un conjunto finito. Probar que dadas dos particiones  $P^i = \{A_1^i, \dots, A_r^i\}$  para  $i = 1, 2$  en subconjuntos de  $k$  elementos de  $A$ , existe una elección de representantes  $a_1, \dots, a_r$  de los conjuntos de  $P_1$  y  $P_2$ .<sup>5</sup>

*Solución.* Consideremos el  $X, Y$ -bigrafo dado por  $X = P^1$  e  $Y = P^2$ , donde  $A_i^1 A_j^2$  es una arista si y solo si  $A_i^1 \cap A_j^2 \neq \emptyset$ . Este grafo cumple la condición de Hall ??, en efecto, sea  $S \subset X$ , entonces el subconjunto  $\bigcup_{A_j^1 \in S} A_j^1$  de  $A$  tiene  $k|S|$  elementos, y por lo tanto, debe haber al menos  $|S|$  conjuntos de la partición  $P^2$  que contengan a estos vértices, es decir,  $|S| \leq |N(S)|$ . Por lo tanto, el Teorema de Hall ?? garantiza la existencia de un matching que cubre a  $X$ , el cual debe cubrir a  $Y$  pues  $|X| = |Y|$ .

Escribimos  $M = \{e_1, \dots, e_r\}$  a este matching. Así, podemos tomar un conjunto de representantes  $x_1, x_2, \dots, x_r$  tal que  $x_i$  pertenece a ambos conjuntos de las particiones que constituyen los extremos de la arista  $e_i \in M$ .  $\square$

**Ejercicio 1.13.43.** Sea  $A$  un conjunto finito con subconjuntos  $A_1, \dots, A_n$ , y sean  $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}$ . Mostrar que existen subconjuntos disjuntos  $D_k \subset A_k$ , con  $|D_k| = d_k$  para todo  $1 \leq k \leq n$  si y solo si

$$|\bigcup_{i \in I} A_i| \geq \sum_{i \in I} d_i$$

para todo  $I \subset \{1, \dots, n\}$ .

*Solución.* Consideremos el  $X, Y$ -bigrafo tal que  $X = A$  e  $Y$  el conjunto con  $d_i$  copias de  $A_i$  para cada  $i = 1, \dots, n$ , donde  $d$  tiene una arista con todas las copias de  $A_i$  si  $d \in A_i$ . Luego tenemos un matching que cubre a  $Y$  por el Teorema de Hall ?? En efecto, para todo  $S \subset Y$  se tiene que  $|S| \leq \sum_{i \in I} d_i$  donde  $I$  es el conjunto de índices  $j$  tal que aparece alguna copia de  $A_j$  en  $S$ ; con lo cual,

$$|S| \leq \sum_{i \in I} d_i \leq |\bigcup_{i \in I} A_i| = |N(S)|.$$

<sup>5</sup>Un conjunto de representantes de una partición es un conjunto de elementos, cada único perteneciente a un único conjunto de la partición, y todos los conjuntos tienen algún elemento.

Así, hay un matching que cubre a  $Y$ , luego tomando por cada copia  $A_i$  un elemento de  $A$ , podemos construir  $D_i \subset A_i$  de  $d_i$  elementos, tales que  $D_i \cap D_j = \emptyset$  para todo  $i \neq j$ .  $\square$

**Ejercicio 1.13.44.** Sea  $G$  un grafo bipartito con bipartición  $\{A, B\}$ . Supongamos que  $\delta(G) \geq 1$  y que  $d(a) \geq d(b)$  para toda arista  $ab$  con  $a \in A$ . Probar que  $G$  contiene un matching que cubre a  $A$ .

*Solución.* Supongamos que no hay matching que cubra  $A$ , es decir, existe un subconjunto  $S \subsetneq A$  de cardinal máximo tal que cumple la condición de Hall ??; notar que  $|S| \geq 1$  pues  $\delta \geq 1$ . Sea  $a \in A \setminus S$ , por maximalidad los vecinos de  $a$  están en  $N(S) = B$ . Más aún, por maximalidad  $|S| = |N(S)| = |B|$ , si no  $S \cup \{a\}$  seguiría cumpliendo la condición de Hall. Sea  $M = \{s_1 t_1, \dots, s_r t_r\}$  el matching de  $S$  con  $N(S)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} 2|E(G)| &= \sum_{x \in A} d(x) + \sum_{y \in B} d(y) \\ &> \sum_{x \in S} d(x) + \sum_{y \in B} d(y) \\ &= \sum_{i=1}^r d(s_i) + d(t_r) \\ &\geq 2 \sum_{y \in Y} d(y). \end{aligned}$$

Con lo cual,  $|E(G)| > \sum_{y \in Y} d(y)$ , lo cual es imposible porque todas las aristas de  $G$  inciden en  $Y$ .  $\square$

**Definición 1.13.45.** Decimos que un grafo  $G$  es **vértice-transitivo** si para todo par de vértices  $v, w \in G$  existe un automorfismo de  $G$  tal que  $v \mapsto w$ .

**Ejercicio 1.13.46.** Probar que todo grafo conexo transitivo de orden par contiene un matching perfecto.

*Solución.* Por el Teorema ?? existe un conjunto  $S$  que nos caracteriza si  $G$  tiene matching perfecto. Sea  $M$  un matching máximo, y supongamos que no es perfecto, es decir, existe  $v \in G$  que no está cubierto por  $M$ . Sin pérdida de generalidad, mandando  $v$  a un elemento de  $S$  vía un automorfismo, podemos suponer que  $v \in S$ . (Notar que  $S \neq \emptyset$  porque  $G$  es conexo y de orden par).

Ahora, el grafo  $S$  tiene la propiedad de que el bigrafo inducido  $G_S$  es matcheable, en particular  $v$  tiene un vecino  $u$  en alguna componente  $C \in \mathcal{C}_{G \setminus S}$ . El teorema nos dice que  $C$  es factor-crítico, es decir  $C \setminus \{u\}$  tiene un matching perfecto. Quitando las aristas de  $M$  que inciden en  $C$  (las cuales son exactamente las que inciden en  $C \setminus \{u\}$  pues  $v$  no está cubierto por  $M$ ) y cambiándolas por las aristas de un matching de  $C \setminus \{u\}$  obtenemos un nuevo matching con igual o más aristas que antes, luego por maximidad era de igual cardinalidad, i.e.  $M$  cubría a  $C \setminus \{u\}$ . Pero esto nos dice que  $M \cup \{vu\}$  es un matching de tamaño más grande; absurdo.  $\square$

**Ejercicio 1.13.47.** Encontrar un grafo 3-regular sin matching perfecto.

*Solución.* Por el Corolario ?? un matching perfecto, con lo cual un contraejemplo tiene que tener un puente. El grafo 3 regular más chico es  $K_4$ . Notar que podemos contruir grafos 3-regulares agarrando uno 3-regular, agregar una subdivisión y conectar ese vértice por un puente a otro grafo 3-regular. Notar que los grafos 3 regulares tienen una cantidad de vértices par por la Proposición ?. Con lo cual, nuestra construcción si tiene un puente no debería conectar directamente dos grafos 3-regulares, pues quitar esos vértices no nos llevaría a un absurdo: queremos quitar un conjunto de  $S$  vértices tal que  $|S| < q(G \setminus S)$ . Así, la mejor idea que tenemos es que el puente tenga un extremo que conecte con *tres* grafos 3-regulares. En efecto, el contraejemplo más simple que se nos ocurre es:

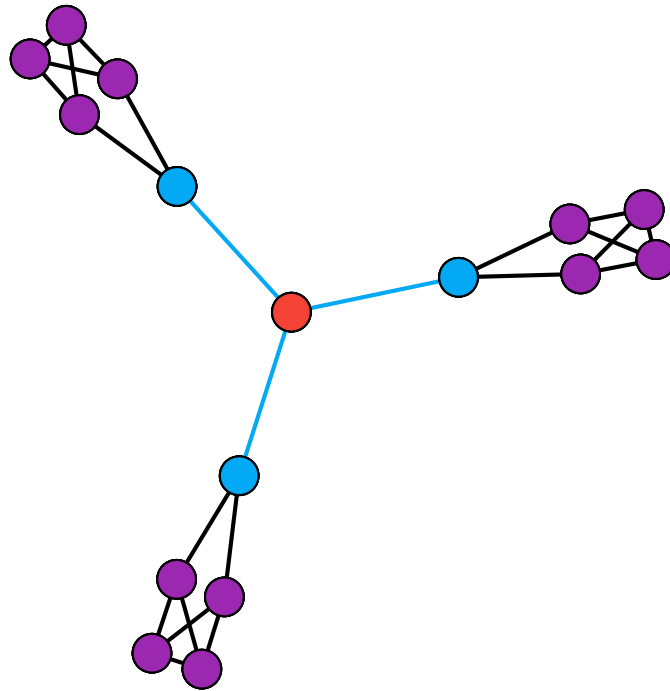


Figura 1.13.79: Grafo 3-regular con tres puentes que no tiene matching perfecto, pues viola la Condición de Tutte (??): considerar el singleton  $S$  dado por  $\{v\}$  (ver el Teorema ??.)

□

**Ejercicio 1.13.48.** Sea  $T$  un árbol y  $\mathcal{T}$  un conjunto de subárboles de  $T$ . Probar que el máximo número de árboles disjuntos en  $\mathcal{T}$  es igual al menor cardinal de un conjunto  $X$  de vértices tal que  $T \setminus X$  no contiene ningún árbol de  $\mathcal{T}$ .

*Solución.* Notar que  $X$  posee la propiedad de que  $T \setminus X$  no contiene ningún árbol de  $\mathcal{T}$  si y solo si  $X$  interseca a todos los árboles de  $\mathcal{T}$ . Además, el segundo ítem del Ejercicio ?? dice que existe un conjunto con a lo más  $k$  vértices intersecando todos los árboles de  $\mathcal{T}$ , luego si  $m$  es el mínimo cardinal que puede tener  $X$ , se sigue que  $m \leq k$ . Para la desigualdad recíproca,  $X$  tiene que tener al menos un vértice de cada uno de los  $k$  árboles disjuntos, con lo cual  $k \leq |X| = m$ . □

**Ejercicio 1.13.49.** Sea  $\alpha(G)$  la máxima cantidad de vértices independientes. Probar que  $G$  puede ser cubierto por a lo más  $\alpha(G)$  subgrafos disjuntos, cada uno isomorfo a un ciclo, a un 1-camino, o un vértice.

*Solución.* Veamos primero que existe un subgrafo  $H$  de  $G$  de tipo  $\mathcal{H}$ , con la propiedad de que tiene un vértice  $v \in H$  que no es adyacente a ningún vértice de  $G \setminus H$ . Consideremos el camino  $P : x_0, \dots, x_k$  con  $k \geq 0$  de longitud máxima en  $G$ . Entonces  $v = x_0$  funciona: si no tiene vecinos es obvio porque podemos tomar  $x_0$ , si su único vecino es  $x_1$  ganamos, y si tiene un vecino distinto de  $x_1$ , digamos  $x_i$  con  $i > 1$  máximo, entonces  $x_0$  está en el ciclo  $x_0 x_1 \dots x_i x_0$  y no tiene vecinos afuera de este.

Denotemos por  $m(G)$  el mínimo cardinal de un cubrimiento por subgrafos disjuntos de tipo  $\mathcal{H}$  de un grafo  $G$ .

**Lema 1.13.50.** *Tenemos que*

$$(I) \quad \alpha(G \setminus H) + 1 \leq \alpha(G);$$

$$(II) \quad m(G) \leq m(G \setminus H) + 1.$$

*Demostración.*

Tomemos un conjunto de vértices aislados de tamaño máximo  $\alpha(G \setminus H)$  en  $G \setminus H$ , luego como ese conjunto junto con  $v \in H$  es aislado en  $G$  se sigue que  $\alpha(G \setminus H) + 1 \leq \alpha(G)$ .

Como  $m(G) \leq m(G \setminus H)$ , tenemos que  $m(G \setminus H) + 1 \leq m(G)$ . Por otro lado, si agarramos un cubrimiento por subgrafos disjuntos de tipo  $\mathcal{H}$  de  $G \setminus H$  y le agregamos  $H$ , obtenemos un cubrimiento disjunto de  $G$ , luego  $m(G \setminus H) + 1 \geq m(G)$ .  $\square$

Luego por el lema anterior, y aplicando hipótesis inductiva a  $G \setminus H$ , tenemos que

$$m(G) \leq m(G \setminus H) + 1 = \alpha(G \setminus H) + 1 \leq \alpha(G).$$

$\square$

**Ejercicio 1.13.51.** Probar que si  $G$  tiene dos árboles arista disjuntos que generan  $G$ , entonces tiene un subgrafo conexo generador, tal que todos sus vértices tienen grado par.

*Solución.* Probemos la siguiente afirmación más fuerte: si  $G$  contiene un grafo conexo generador  $T_1$  y un árbol (posiblemente no generador)  $T_2$  arista disjunto con  $T_1$ , tal que  $T_2$  contiene todos los vértices de grado impar de  $T_1$ , entonces  $G$  posee un subgrafo conexo generador cuyos vértices son de grado par.

Por inducción en el número de aristas de  $T_2$ . Si  $T_2$  tiene una sola arista, luego ambos extremos son pares o impares en  $T_1$ , pues todo grafo tiene una cantidad par de vértices impares; así, en el primer caso  $T_1$  es un grafo conexo generador de  $G$  con todos sus vértices de grado par, y en el segundo caso agregamos la arista de  $T_2$  a  $T_1$  y ganamos. En general, si  $uv$  es una arista con  $v$  una hoja de  $T_2$ , separamos en dos casos: si  $v$  tiene grado impar en  $T_1$ , agregamos  $uv$  a  $T_1$  y quitamos  $v$  de  $T_2$ ; si  $v$  tiene grado par en  $T_1$ , quitamos a  $v$  de  $T_1$ . Luego por hipótesis inductiva,  $G$  tiene un subgrafo conexo generador con todos los vértices de grado par.  $\square$

**Ejercicio 1.13.52.** Probar que todo grafo  $G$  con 2 árboles generadores arista-disjuntos es fuertemente conexa.

En particular, el Ejercicio ?? implica que  $G$  es 2-arista-conexo.

*Solución.* Sean  $T_1, T_2$  los respectivos árboles generadores arista-dijuntos, y sea  $r_1$  una raíz de  $T_1$ . Fijemos  $r_2 := r_1$  como raíz de  $T_2$ . Luego orientamos las aristas de  $T_1$  respecto al orden opuesto inducido por  $r_1$ , es decir, si  $xy$  es una arista de  $T_1$  con  $x \leq_{T_1} y$ , ponemos  $y$  como el comienzo y  $x$  como el final de la arista. De manera opuesta, orientamos las aristas de  $T_2$  respecto del orden raíz, es decir, esta vez si  $xy$  es una arista de  $T_2$  con  $x \leq_{T_2} y$  entonces  $x$  es el comienzo e  $y$  el final de la arista. El resto de las aristas de  $G$  se les da una orientación arbitraria.

Así,  $G$  obtuvo una orientación, veamos que además es fuertemente conexa, es decir, que para todo  $x, y \in G$  existe un camino orientado entre ambos. En efecto, tenemos un camino orientado de  $x$  hacia  $r_1$  en  $T_1$  y luego lo concatenamos con el camino de  $r_1 = r_2$  hacia  $y$  en  $T_2$ .  $\square$

**Ejercicio 1.13.53.** Probar que un conjunto parcialmente ordenado  $(G, \leq)$  con al menos  $rs + 1$  elementos contiene una cadena de tamaño  $r + 1$  o una anticadena de tamaño  $s + 1$ .

*Solución.* Supongamos que no, es decir, que las cadenas tienen tamaño  $\leq r$  y las anticadenas tamaño  $\leq s$ . Por el Teorema ?? aplicado al grafo obvio inducido por el orden parcial tiene un cubrimiento por caminos dirigidos  $\mathcal{P}$  y un conjunto independiente (i.e. una anticadena)  $\{x_P\}_{P \in \mathcal{P}}$ . Así,  $|G| \leq rs < rs + 1$ , absurdo.  $\square$

**Ejercicio 1.13.54.** Probar la siguiente versión dual del Teorema de Dilworth ??: en un conjunto parcialmente ordenado  $(G, \leq)$ , el mínimo número de anticadenas cuya unión de  $G$  es igual al máximo cardinal de una cadena en  $G$ .

*Solución.* Pensemos a  $G$  como un grafo dirigido de la manera obvia. Sea  $k$  el cardinal de un conjunto de anticadenas de tamaño mínimo cuya unión de  $G$ . Sea  $P$  una cadena de tamaño máximo  $m$ , entonces claramente cada vértice de  $P$  está en una anticadena, y una anticadena no puede cubrir más de un vértice de  $P$ , así  $m \leq k$ .

Consideremos el conjunto  $\mathcal{P}$  de los caminos dirigidos de tamaño máximo  $m$  en  $G$ . Luego el conjunto  $S = \text{ter}(\mathcal{P})$  es un conjunto de vértices independientes (i.e. una anticadena), por maximalidad de los caminos. Consideremos entonces el grafo dirigido  $G' = G \setminus S$ , donde los caminos de tamaño máximo tienen a lo más  $m - 1$  vértices. Haciendo inducción en el cardinal de  $G$ , se tiene que hay un conjunto de anticadenas que cubre  $G'$  de a lo más  $m - 1$  anticadenas. Luego este conjunto, junto con  $S$  obtenemos un conjunto de a lo más  $m$  anticadenas que cubre a  $G$ , i.e.  $k \leq m$ .  $\square$

**Ejercicio 1.13.55.** Encontrar un conjunto parcialmente ordenado anticadenas infinitas pero que no es la unión de finitas cadenas.

*Solución.* Considerar el orden parcial inducido por el siguiente grafo dirigido infinito:

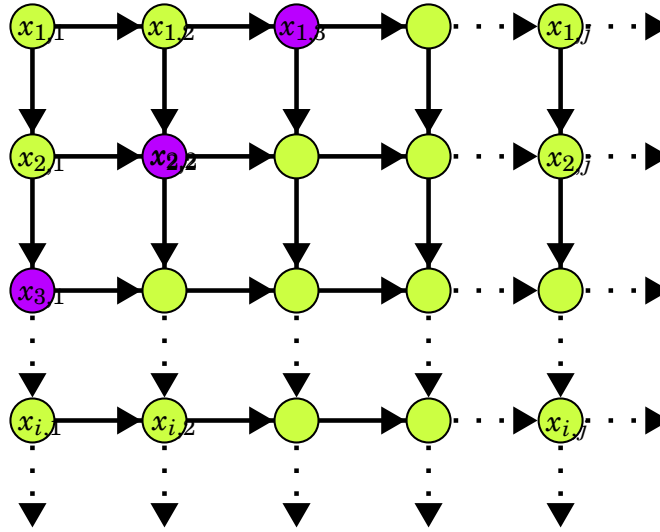


Figura 1.13.80: Grafo dirigido infinito. En **violeta** se ilustra  $A_3$ .

Formalmente, este es el conjunto dirigido  $\{x_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}}$  tal que  $x_{i,j} \leq x_{i',j'}$  si y solo si  $i \leq i'$  y  $j \leq j'$ . Notemos que no puede tener una anticadena infinita. En efecto, sea  $A = \{x_{i,j}\}_{i \in I, j \in J}$  una anticadena infinita. Si  $I$  e  $J$  son infinitos, luego claramente para algún  $x^0 = x_{i_0, j_0} \in A$  existe  $x^1 = x_{i_1, j_1} \in A$  con  $i_0 \leq i_1$  y  $j_0 \leq j_1$ , i.e.  $x^0 \leq x^1$ , absurdo. Por otro lado, podemos suponer por simetría que  $I$  es infinito, pero que  $J$  es finito, digamos  $J \subset \{1, \dots, k\}$ . Como hay infinitos elementos en  $A$ , debe haber al menos dos elementos distintos  $x = x_{i,j}$ ,  $x' = x_{i',j'}$  en  $A$  con  $j = j'$ , con lo cual  $x < x'$  o  $x' < x$ , absurdo.

Observemos que también este orden parcial tiene anticadenas de cardinal  $k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . En efecto, considerar los conjuntos  $A_k = \{x_{k-j+1, j}\}_{j=1}^k$ . En particular, no pueden existir cubrimientos por finitas cadenas: si cubrimos al grafo dirigido con  $l$  cadenas, tenemos que  $k = |A_k| \leq l$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , pues  $A_k$  es una anticadena (cada cadena contiene a lo más un elemento).  $\square$

## 1.14. Clase 13: 15/05/23

### 1.14.1. Grafos planares

#### Prerequisitos topológicos

**Definición 1.14.1.** (a) Un **segmento de recta** en el plano Euclídeo es un conjunto de puntos de la forma  $\{P + \lambda(Q - P) | 0 \leq \lambda \leq 1\}$  para un par de puntos fijos  $P, Q \in \mathbb{R}^2$ .

(b) Un **polígono** es un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  que es unión de un número finito de segmentos que es homeomorfo<sup>6</sup> al círculo unitario.

(c) Un **arco** (poligonal) es la unión de un número finito de segmentos que es homeomorfo al intervalo cerrado  $[0, 1]$ . En particular, un arco es cerrado. Fijado

<sup>6</sup>Recordar que un **homeomorfismo**  $\varphi : X \rightarrow Y$  entre dos espacios topológicos  $X$  e  $Y$ , es una función continua y biyectiva tal que su función inversa  $\varphi^{-1} : Y \rightarrow X$  también es continua.

un homeomorfismo, las pre-imágenes de 0 y 1 son los **extremos** del arco y decimos que el arco **une** o **va entre** sus extremos. Observar que los extremos de un arco son distintos, pues un homeomorfismo es biyectivo. Si  $P$  es un arco entre  $x$  y  $y$ , denotamos por  $I(P)$  al **interior** del arco, es decir,  $I(P) := P \setminus \{x, y\}$ .

- (d) Sea  $A \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto abierto. Estar unido por un arco en  $A$ , define una relación de equivalencia en los elementos de  $A$ . Las clases de equivalencia las llamamos **regiones**. (Notar que las regiones son las componentes arco-conexas (por curvas continuas), o equivalentemente, las componentes conexas).
- (e) La **frontera** de un conjunto  $X \subset \mathbb{R}^2$  es el conjunto  $Y$  de todos los puntos  $y \in \mathbb{R}^2$  tal que todo vecindario de  $y$  intersecta a ambos  $X$  y  $\mathbb{R}^2 \setminus X$ .

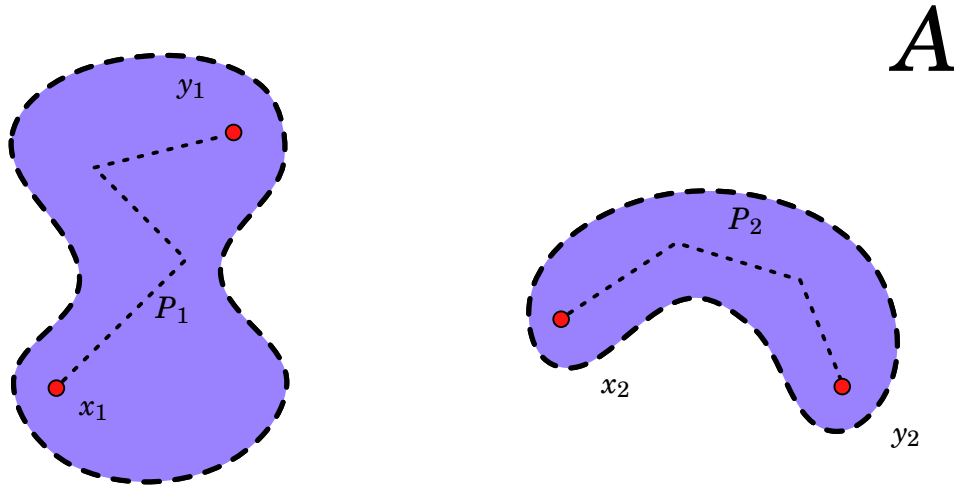


Figura 1.14.81: Ilustración de un abierto  $A$ . Ilustramos los puntos  $x_1, y_1 \in A$  equivalentes, ya que podemos dibujar un arco  $P_1 \subset A$  entre ellos. Similarmente,  $x_2, y_2$  están unidos por un arco  $P_2$  en  $A$ , luego son equivalentes entre sí. Las regiones de  $A$  son el *maní* y el *boomerang*. La frontera de  $A$  es la “cáscara” del maní (líneas punteadas) y el “borde” del boomerang.

**Teorema 1.14.2** (De la curva de Jordan para polígonos). *Para todo polígono  $P \subset \mathbb{R}^2$ , el conjunto  $\mathbb{R}^2 \setminus P$  tiene dos regiones: una acotada<sup>7</sup> y otra no acotada. Cada región tiene a  $P$  como frontera.*

Con este teorema no es difícil probar lo siguiente:

**Lema 1.14.3.** *Sean  $P_1, P_2, P_3$  arcos disjuntos salvo en sus extremos, donde cualquier par de arcos comparten ambos extremos. Entonces:*

- (I)  $\mathbb{R}^2 \setminus (P_1 \cup P_2 \cup P_3)$  tiene exactamente tres regiones con fronteras  $P_1 \cup P_2$ ,  $P_2 \cup P_3$  y  $P_1 \cup P_3$ .
- (II) Si  $P$  es un arco entre un punto en  $I(P_1)$  y otro en  $I(P_3)$ , tal que  $I(P)$  está en la región  $\mathbb{R}^2 \setminus (P_1 \cup P_3)$  que contiene a  $I(P_2)$ , entonces  $I(P) \cap I(P_2) \neq \emptyset$ .

<sup>7</sup>En  $\mathbb{R}^2$  o más en general en  $\mathbb{R}^n$ , decimos que un conjunto es **acotado**, si está contenido en alguna bola de tamaño lo suficientemente grande.

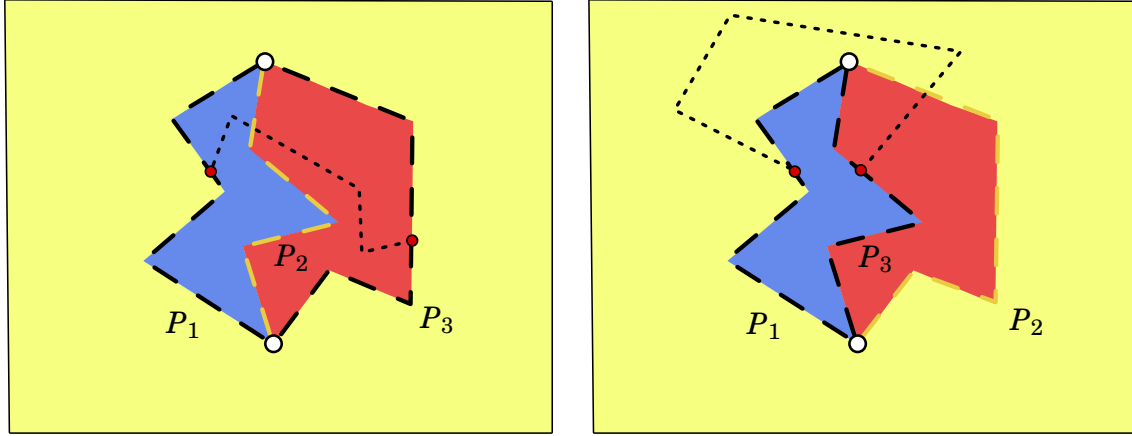


Figura 1.14.82: Dos ilustraciones del lema.

**Lema 1.14.4.** Para todo arco  $P$ , el conjunto  $\mathbb{R}^2 \setminus P$  tiene una sola región.

El lemma se puede generalizar un poco más: Sean  $X_1, X_2 \subset \mathbb{R}^2$  dos conjuntos disjuntos, cada uno la unión de finitos puntos y arcos, y sea  $P$  un arco entre un punto de  $X_1$  y otro de  $X_2$  cuyo interior yace en una región  $O$  de  $\mathbb{R}^2 \setminus (X_1 \cup X_2)$ . Entonces  $O \setminus P$  es una región de  $\mathbb{R}^2 \setminus (X_1 \cup P \cup X_2)$ .

Un par de definiciones extras que serán útiles para entender partes que no vimos del Diestel.

Sea  $\pi : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  la proyección estereográfica de la esfera en el plano. Sea  $P \subset \mathbb{R}^2$  un polígono y  $O$  su región acotada de  $\mathbb{R}^2 \setminus P$ , llamamos **círculo en  $S^2$**  a  $C := \pi^{-1}(P)$ , y **regiones de  $S^2 \setminus C$**  a los conjuntos  $\pi^{-1}(O)$  y  $S^2 \setminus \pi^{-1}(P \cup O)$ .

**Teorema 1.14.5.** Sea  $\varphi : C_1 \rightarrow C_2$  un homeomorfismo entre dos círculos en  $S^2$ , sea  $O_1$  una región de  $S^2 \setminus C_1$ , y sea  $O_2$  una región de  $S^2 \setminus C_2$ . Entonces  $\varphi$  se puede extender a un homeomorfismo de  $C_1 \cup O_1 \rightarrow C_2 \cup O_2$ .

**Definición 1.14.6.** Un **grafo plano** (no confundir con *grafo planar*) es un par  $(V, E)$  que cumple:

1.  $V \subset \mathbb{R}^2$  es finito.
2.  $E$  es un conjunto de arcos entre elementos de  $V$ .
3. Aristas distintas tienen distintos conjuntos de extremos.
4. El interior de una arista no contiene ningún vértice y ningún punto de otra arista.

Todo grafo plano  $(V, E)$  define un grafo  $G$  en  $V$  de manera natural.

**Definición 1.14.7.** Decimos que  $G$  es un **grafo planar** si se puede construir a partir de un grafo plano.



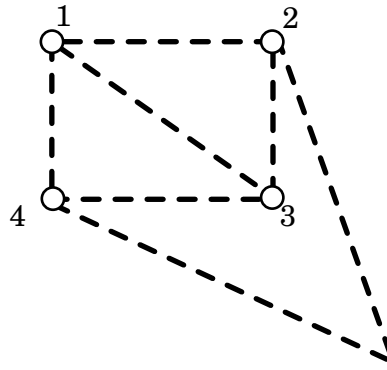


Figura 1.14.83: Ejemplo de grafo plano, correspondiente a  $K_4$ .

Es conveniente pensar al *grafo plano* asociado a un *grafo planar*  $G$ , como el “dibujo” de  $G$ . A veces haremos el abuso de notación, y hablaremos de grafo plano y de su grafo planar asociado refiriéndonos a cualquiera de los dos sin preocuparnos por ser correctos con la terminología.

## 1.15. Clase 14: 18/05/23

**Definición 1.15.1.** Si  $G$  es un grafo plano, llamamos **caras** a las regiones de  $\mathbb{R} \setminus G$ . Al conjunto de caras de  $G$  lo denotamos por  $F(G)$ .

Como trabajamos con grafos planos finitos, estos son acotados, es decir, existe una bola  $B \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $G \subset B$ . Siempre va a haber una cara que contiene a  $\mathbb{R}^2 \setminus B$  y esa cara la llamamos **cara exterior**.

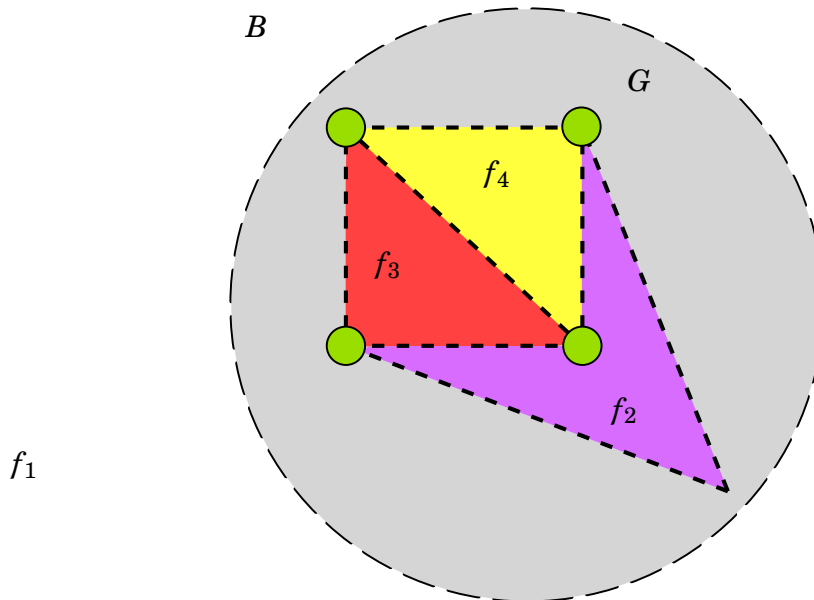


Figura 1.15.84: Grafo plano  $G$  contenido en una bola  $B$ , con caras  $f_1, f_2, f_3, f_4$ . La cara exterior  $f_1$  contiene a  $B$ .

**Lema 1.15.2.** Sea  $G$  un grafo plano,  $f$  una de sus caras y  $H$  un subgrafo de  $G$ . Entonces,

- (I)  $H$  tiene una cara  $f'$  que contiene a  $f$ .
- (II) Más aún, si la frontera de  $f$  está en  $H$ , entonces  $f' = f$ .

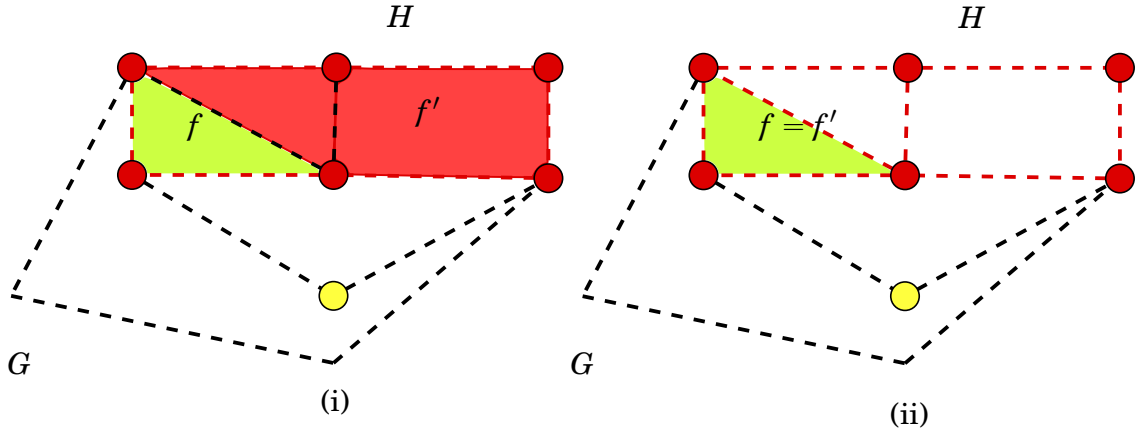


Figura 1.15.85: Del lado izquierdo un ejemplo del ítem (i), y del derecho uno del ítem (ii).

*Demostración.* (I) Es claro que los puntos en  $f$  son equivalentes en  $\mathbb{R}^2 \setminus H$ ; escojo  $f'$  como la clase de equivalencia que los contiene.

- (II) Todo arco entre  $f$  y  $f' \setminus f$  pasa por la frontera  $X$  de  $f$ . Si  $f' \setminus f \neq \emptyset$ , entonces hay un arco dentro de  $f'$  cuyos puntos en  $X$  no están en  $H$ . Entonces  $X \not\subset H$ .  $\square$

**Lema 1.15.3.** Sea  $G$  un grafo plano y  $e$  una arista de  $G$ . Entonces,

- (I) Si  $X$  es la frontera de una cara de  $G$ , luego o bien  $e \subset X$  o se tiene que  $X \cap I(e) = \emptyset$ .
- (II) Si  $e$  está en un ciclo  $C \subset G$ , luego  $e$  está en la frontera de exactamente dos caras de  $G$ , más aún, estas están contenidas en distintas caras de  $C$ .
- (III) Si  $e$  no está contenida en un ciclo, entonces  $e$  está contenido en la frontera de exactamente una sola cara de  $G$ .

*Demostración.*  $\square$

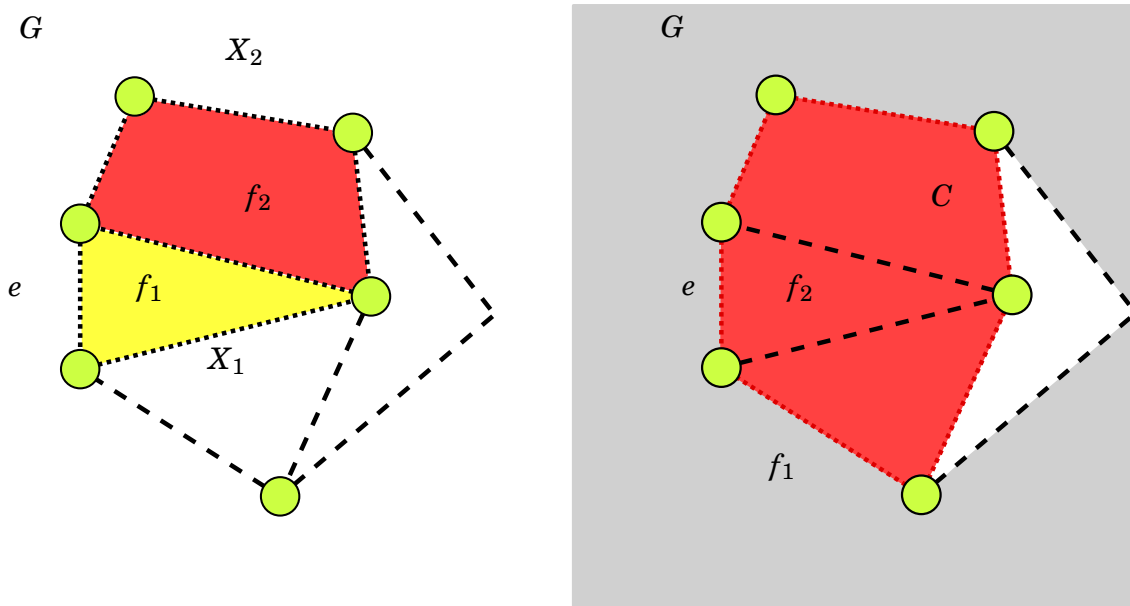


Figura 1.15.86: Del lado izquierdo tenemos una ilustración del ítem (i), con una arista  $e$  contenida en la frontera  $X_1$  pero no en la frontera  $f_2$ . Del lado derecho se ilustra el ítem (ii), con una arista en un ciclo  $C$  también contenida en las caras  $f_1$  y  $f_2$  de  $G$ , las cuales están contenidas en las dos caras de  $C$  la exterior y la interior.

**Proposición 1.15.4.** Si  $G$  es un grafo plano que corresponde a un árbol,  $G$  tiene una sola cara.

*Demostración.* Se deduce del Lema ?? dice que un arco genera una sola cara.  $\square$

**Teorema 1.15.5** (Fórmula de Euler). Sea  $G$  un grafo plano conexo con  $n$  vértices,  $m$  aristas y  $f$  caras. Entonces, se tiene

$$n - m + f = 2.$$

*Demostración.* Fijemos  $n$  y hacemos inducción en la cantidad de aristas  $m$ . Si  $m \leq n - 1$ , entonces  $G$  es un árbol y  $m = n - 1$ ; pero la proposición anterior implica que el árbol tiene una sola cara, y por lo tanto  $n - m + f = n - (n - 1) + 1 = 2$ .

Ahora, supongamos que  $m \geq n$ , entonces  $G$  tiene una arista  $e$  que está en un ciclo. Sea  $G' = G \setminus e$ . Por el lema anterior ítem (ii),  $e$  está en la frontera de exactamente dos caras  $f_1, f_2$  de  $G$ . Como los puntos en  $I(e)$  de  $G$ . Como los puntos en  $I(e)$  son equivalentes en  $\mathbb{R}^2 \setminus G'$ , entonces hay una cara  $f_e$  de  $G'$  que contiene a  $I(e)$ .

Luego basta demostrar que

$$F(G) \setminus \{f_1, f_2\} = F(G') \setminus \{f_e\},$$

porque luego  $G'$  tiene exactamente una cara y una arista menos que  $G$ . Así obtenemos el resultado por hipótesis inductiva.  $\square$

## 1.16. Clase 15: 25/05/23

**Definición 1.16.1.** Llamamos **subdivisión** de  $G$  a cualquier grafo  $H$  que se obtiene luego de *subdividir* algunas aristas de  $G$  y dibujando encima nuevos vértices. Más

precisamente, reemplazamos las aristas de  $G$  por caminos entre sus extremos, de manera que los interiores de estos caminos son disjuntos y tampoco intersecan a  $V(G)$ , salvo en los extremos.

Si un grafo  $X$  contiene un subgrafo  $H$  obtenido luego de subdividir a  $G$ , diremos que  $G$  es un **menor topológico** de  $X$ .

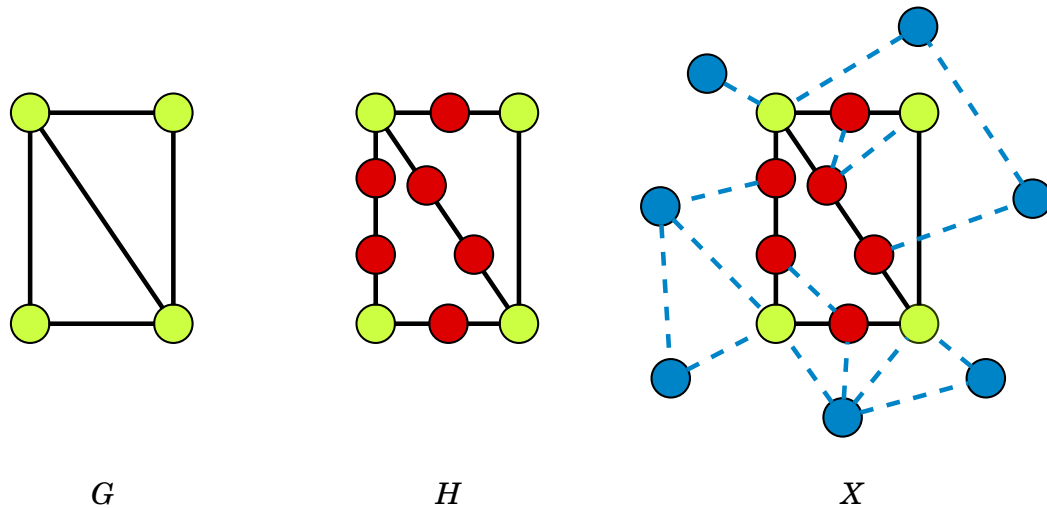


Figura 1.16.87: De izquierda a derecha, tenemos la construcción progresiva: primero  $G$ , luego creamos **vértices subdivisores** formando  $H$ , y finalmente ilustramos un ejemplo de grafo  $X$  con  $G$  como menor topológico.

### Operaciones que conocemos

Subgrafo inducido: remover vértices.

Subgrafo: remover vértices y aristas.

Menor: remover vértices, aristas, y contraer aristas.

Menor topológico: remover vértices, aristas, y **contraer vértices** de grado 2.

Contraer un vértice  $v$  de grado 2 quiere decir que lo quitamos, pero si  $u, w$  eran sus vecinos de  $v$ , entonces nuestro nuevo grafo tiene a  $u$  y  $w$  como vecinos. Equivalentemente, es lo mismo que contraer una de las dos aristas que inciden en  $v$ .

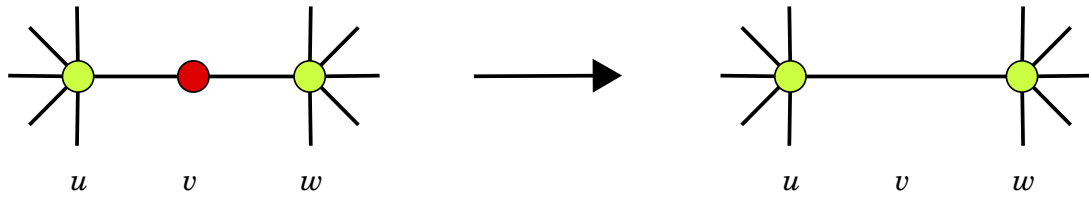


Figura 1.16.88: Ejemplo de contracción de un vértice  $v$ .

### Otra perspectiva con respecto a los menores

**Definición 1.16.2.** Sean  $G, H$  dos grafos. Decimos que  $G$  contiene un **modelo** de  $H$ , si  $V(G)$  admite una partición  $\{V_x | x \in V(H)\}$  en subconjuntos que inducen subgrafos conexos tales que dos vértices  $x, y \in V(H)$  son adyacentes en  $H$  si y solo si  $G$  contiene una arista entre  $V_x$  y  $V_y$ .

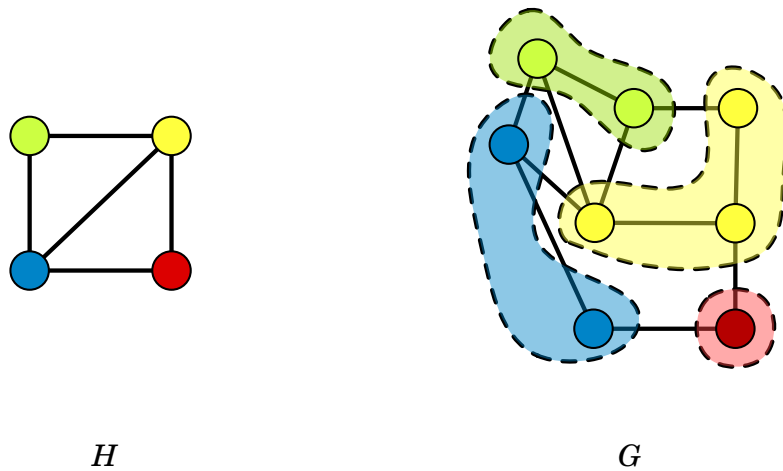


Figura 1.16.89: A la izquierda un grafo  $H$ , y a la derecha un grafo  $G$  que contiene un modelo de  $H$ .

Si  $F$  es un grafo que contiene como subgrafo a un modelo de  $H$ , entonces decimos que  $H$  es **menor** de  $F$ .

**Proposición 1.16.3.** *Tenemos que*

- (I) *Todo menor topológico de un grafo también es un menor.*
- (II) *Todo menor  $H$  con  $\Delta(H) \leq 3$  de un grafo es también un menor topológico.*

## Retomando grafos planos

Recordemos la Fórmula de Euler:

**Teorema 1.16.4** (Fórmula de Euler). *Sea  $G$  un grafo plano conexo con  $n$  vértices,  $m$  aristas, y  $f$  caras. Se tiene*

$$n - m + f = 2.$$

**Definición 1.16.5.** Un grafo plano es **maximal plano** si al agregar cualquier arista, deja de ser plano.

Un grafo plano es una **triangulación** si todas sus caras tienen por frontera un triángulo.

Estas dos definiciones son equivalentes:

**Proposición 1.16.6.** *Un grafo es maximal plano si y solo si es una triangulación.*

**Corolario 1.16.7.** *Un grafo plano  $G$  con  $n \geq 3$  vértices tiene a lo más  $3n - 6$  aristas. Más aún, toda triangulación con  $n$  vértices tiene exactamente  $3n - 6$  aristas; es decir, un grafo plano es una triangulación si y solo si tiene exactamente  $3n - 6$  aristas.*

*Demostración.* Basta demostrar la segunda afirmación gracias a la proposición anterior. En una triangulación, cada cara tiene 3 aristas en su frontera y cada arista está en la frontera de exactamente dos caras (por el segundo ítem del Lema ??). Consideramos ahora el  $X, Y$ -bigrafo que tiene los conjuntos de vértices  $X := E(G)$  e  $Y := F(G)$ , donde  $ef$  es una arista ( $e \in E(G)$ ,  $f \in F(G)$ ) si y solo si  $e$  está en la frontera de  $f$ .

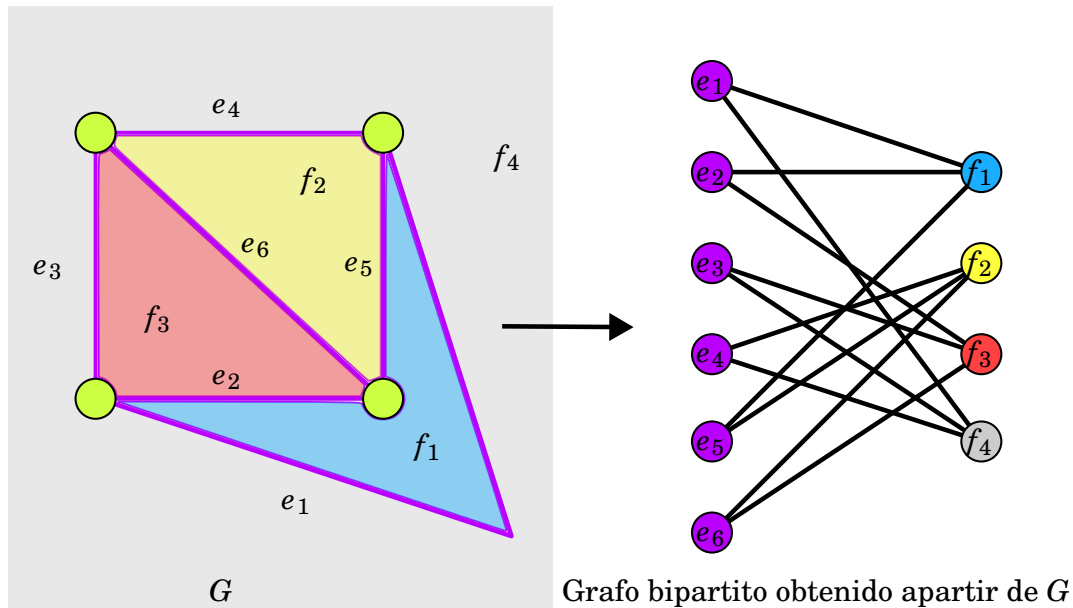


Figura 1.16.90: Ejemplo de grafo bipartito obtenido a partir de una triangulación  $G$ .

Notar que el número de aristas de este grafo bipartito es justamente  $2|E(G)| = 3|F(G)|$ . Luego reemplazando  $f = \frac{2}{3}m$  en la fórmula de Euler:

$$n - m + \frac{2}{3}m = 2 \Leftrightarrow m = 3n - 6.$$

□

## 1.17. Clase 16: 26/05/23

**Ejemplo 1.17.1.** El grafo  $G := K_5$  no es planar. En efecto, tiene  $n = 5$  vértices y  $m = \binom{5}{2} = 10$  aristas, pero el Corolario ?? dice que si  $G$  fuera planar, su grafo plano correspondiente tendría  $10 \leq 9$  aristas, absurdo.

**Ejemplo 1.17.2.** El grafo  $G := K_{3,3}$  no es planar. En efecto, al ser bipartito todos los ciclos son pares, luego si tuviera un grafo plano correspondiente, las fronteras de sus caras van a ser de largo al menos 4, pues las fronteras de un grafo plano siempre forman un ciclo (si es que el grafo plano tiene más de una cara). Como en la demostración del último corolario de la clase anterior ??, construimos el  $X, Y$ -bigrafo asociado al grafo plano con  $X = E(K_{3,3})$  e  $Y = F(K_{3,3})$ . Pero similarmente a la demostración de dicho corolario, inspeccionando este grafo bipartito, vemos que tiene  $2|E|(G)$  aristas y al menos  $4|F|$  caras. Llamemos  $n, m, f$  al número de vértices, aristas, y caras de  $G$ , respectivamente. Así, la desigualdad anterior se traduce a que  $2f \leq m$ . Con lo cual, aplicando el Teorema de Euler y reemplazando los valores de  $n$  y  $m$  de  $G = K_{3,3}$ :

$$\begin{aligned} 2 = n - m + f &\leq n - m + \frac{m}{2} && (2f \leq m), \\ &\leq \frac{3}{2} && (n = 6, m = 9), \end{aligned}$$

absurdo.

**Observación 1.17.3.** Si un grafo  $H$  no es planar, entonces los grafos que contienen una subdivisión de  $H$  tampoco, porque quitar subdivisiones y eliminar vértices de un grafo planar te devuelve un grafo planar.

**Ejemplo 1.17.4.** Como  $K_5$  y  $K_{3,3}$  no son planares, tampoco lo son los grafos que contienen subdivisiones de estos. Con lo cual, si  $G$  es un grafo planar entonces  $G$  no contiene ni a  $K_5$  ni a  $K_{3,3}$  como subdivisión. De hecho, vale la recíproca:

**Teorema 1.17.5.** *Un grafo es planar si y solo si no contiene a  $K_5$  o  $K_{3,3}$  como subdivisión.*

**Lema 1.17.6.** *Un grafo contiene a  $K_5$  o  $K_{3,3}$  como menor si y solo si contiene a  $K_5$  o  $K_{3,3}$  como subdivisión (i.e. como menor topológico).*

Con lo cual, el teorema anterior equivale a pedir que contenga a estos grafos como menor.

*Demostración.*  $(\Leftarrow)$  Esta implicancia es gratis pues una subdivisión es un menor topológico, y en particular es menor (ver el primer ítem de la Proposición ??).

$(\Rightarrow)$  Por el segundo ítem de la Proposición ?? si  $G$  contiene un grafo  $H$  con  $\Delta(H) \leq 3$ , entonces  $G$  contiene a  $H$  como subdivisión. Entonces nos basta demostrar que si  $G$  contiene a  $K_5$  como menor, entonces contiene a  $K_5$  o a  $K_{3,3}$  como subdivisión. Supongamos que  $G$  contiene a  $K_5$  como menor y tomo como modelo de  $K_5$  en  $G$  que sea minimal con respecto a las aristas, es decir, si particionamos los vértices del modelo como  $V_x$  con  $x \in K_5$ , las aristas en  $V_x$  son mínimas tal que es conexo, es decir, es un árbol, y entre cada  $V_x, V_y$  con  $x \neq y \in K_5$  hay una única arista.

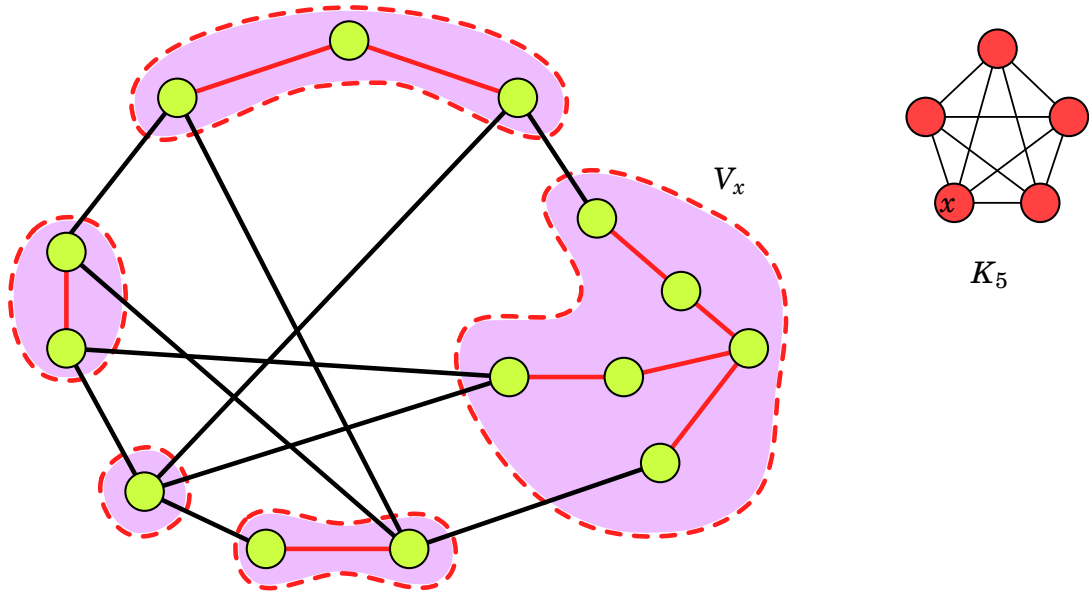


Figura 1.17.91: Ilustración del modelo de  $K_5$ .

Si consideramos el grafo inducido por  $V_x$  y las cuatro aristas que salen de él incluyendo un vértice de cada  $V_y$  con  $y \neq x$ , obtengo un árbol  $T_x$ . Nuevamente por minimalidad, el árbol  $T_x$  tiene exactamente 4 hojas. Si cada  $T_x$  fuese una subdivisión de un  $K_{1,4}$  entonces ya tenemos la subdivisión de  $K_5$ .

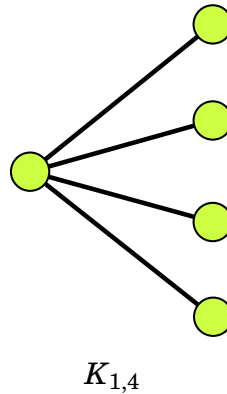


Figura 1.17.92: Dibujo de  $K_{1,4}$ .

Luego supongamos que no sucede, es decir, existe un  $V_x$  tal que  $T_x$  no es subdivisión de  $K_{1,4}$ . Entonces tiene exactamente dos vértices de grado 3. Tomo esos dos vértices como extremos de su subdivisión y junto con otros extremos en los otros  $V_y$  con  $y \neq x$  obtengo una subdivisión de grafo que contiene a  $K_{3,3}$ .



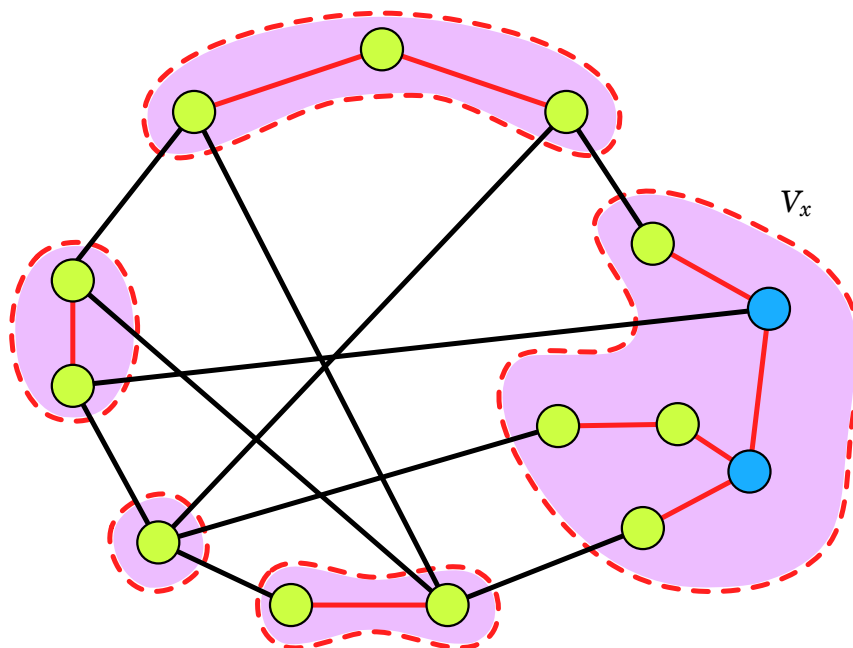


Figura 1.17.93: Ilustración: los dos vértices de grado 3 en  $V_x$  de color azul.

□

# Apéndice A

## Primera parte de la materia (primer capítulo del Diestel)

### A.1. Un poco de álgebra lineal

Sea  $G = (V, E)$  un grafo con  $n$  vértices y  $m$  aristas, digamos  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  y  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ .

**Definición A.1.1.** El **espacio de vértices**  $\mathcal{V}(G)$  de  $G$ , es el  $\mathbb{F}_2$ -espacio vectorial de todas las funciones  $V \rightarrow \mathbb{F}_2$ .

Todo elemento de  $\mathcal{V}(G)$  corresponde naturalmente con un subconjunto de  $V$ , más precisamente con la preimagen de 1, y más aún todo subconjunto de  $V$  se representa de manera única de esta manera por su función indicadora. Con lo cual, podemos identificar a  $\mathcal{V}(G)$  con el conjunto de subconjuntos de  $V$ , i.e.  $2^V$ ; así tenemos un espacio vectorial de los subconjuntos de  $V$ :  $U + U' = U \Delta U'$  es la diferencia simétrica! y  $U = -U$ . El cero en este espacio vectorial corresponde con el subconjunto vacío  $\emptyset \subset V$ . Notar que  $\{\{v_1\}, \dots, \{v_n\}\}$  es una base de  $\mathcal{V}(G)$ , llamada la **base standard**; tenemos entonces que  $\dim \mathcal{V}(G) = n$ .

**Definición A.1.2.** Análogamente, podemos definir el **espacio de aristas**  $\mathcal{E}(G)$  de  $G$ , más precisamente, el  $\mathbb{F}_2$ -espacio vectorial de funciones  $E \rightarrow \mathbb{F}_2$ .

Nuevamente, los elementos de  $\mathcal{E}(G)$  se corresponden con subconjuntos de  $E$ : tomamos la preimagen de 1. En este caso, la suma de vectores es la diferencia simétrica de conjuntos de aristas, y el conjunto vacío  $\emptyset \subset E$  corresponde con el cero, además  $F = -F$  para todo  $F \subset E$ . La **base standard** es  $\{\{e_1\}, \dots, \{e_m\}\}$ , luego  $\dim \mathcal{E}(G) = m$ .

Dados  $F, F' \in \mathcal{E}(G)$ , vistos como funciones, podemos definir:

$$\langle F, F' \rangle := \sum_{e \in E} F(e)F'(e) \in \mathbb{F}_2.$$

Esta cantidad es cero si y solo si  $F$  y  $F'$  tienen una cantidad par de aristas en común, i.e.  $|F \cap F'| \equiv 0 \pmod{2}$ ; en particular ciertamente puede suceder que  $\langle F, F \rangle = 0$  con  $F \neq \emptyset$ . De todas formas, es simétrico y  $\mathbb{F}_2$ -bilineal. De manera la manera usual, para cualquier subespacio  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}(G)$ , podemos definir el subespacio ortogonal:

$$\mathcal{F}^\perp := \{D \in \mathcal{E}(G) \mid \langle F, D \rangle = 0, \forall F \in \mathcal{F}\}.$$

Que es un subespacio. Se tiene que

$$\dim \mathcal{F} + \dim \mathcal{F}^\perp = m. \quad (\text{A.1})$$

Pues se sigue de la demostración standard, ya que este producto es *no degenerado*, es decir el morfismo de espacios vectoriales  $F \mapsto \langle \cdot, F \rangle$  es inyectivo, luego la ecuación se sigue de álgebra lineal (estudiando el espacio dual).

**Definición A.1.3.** El **espacio de ciclos**  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G)$  es el subespacio de  $\mathcal{E}(G)$  generado por todos los ciclos de  $G$  (por sus aristas). La dimensión de este espacio se lo llama a veces **número ciclomático** de  $G$ .

**Proposición A.1.4.** Las siguientes afirmaciones son equivalentes para conjuntos de aristas  $D \subset E$ :

1.  $D \in \mathcal{C}(G)$ ;
2.  $D$  es una unión (posiblemente vacía) disjunta de ciclos en  $G$ ;
3. Todos los grados de los vértices de  $(V, D)$  son pares.

*Demostración.* Como los ciclos tienen grados pares y tomar diferencia simétrica preserva esta propiedad, luego 1. implica 3. por inducción en la cantidad de ciclos que generan  $D$  con la suma. Que 3. implica 2. se sigue por inducción en  $|D|$ : si  $D \neq \emptyset$  entonces  $(V, D)$  contiene un ciclo por la Proposición ??, borrando las aristas de  $C$  podemos proceder inductivamente pues los vértices siguen teniendo grado par. Finalmente la implicación 2.  $\Rightarrow$  1. es inmediata de la definición de  $\mathcal{C}(G)$ .  $\square$

**Definición A.1.5.** Un conjunto  $F$  de aristas se dice un **corte**<sup>1</sup> de  $G$  si existe una partición  $\{V_1, V_2\}$  de  $V$  tal que  $F = E(V_1, V_2)$ . Decimos que las aristas de  $F$  **cortan** esta partición. Los conjuntos  $V_1, V_2$  son los **lados** del corte. A un corte no vacío minimal lo llamamos **enlace**.

**Proposición A.1.6.** Junto con el conjunto vacío  $\emptyset$ , los cortes en  $G$  forman un subespacio  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(G) \subset \mathcal{E}(G)$ . Este espacio está generado por los cortes de la forma  $E(v)$  (es decir los conjuntos de aristas incidentes a un vértice).

*Demostración.* Sea  $\mathcal{B}$  el subespacio generado por los cortes de la forma  $E(v)$  en  $\mathcal{E}(G)$ . Todo corte de  $G$ , con partición  $\{V_1, V_2\}$ , coincide con  $\sum_{v \in V_1} E(v)$  y por lo tanto está en  $\mathcal{B}$ . En efecto, el conjunto  $\sum_{v \in V_1} E(v)$  es la diferencia simétrica de los conjuntos  $E(v)$ , i.e. las aristas que están en algún  $E(v), v \in V_1$  pero no en todos, es decir, las aristas que inciden en un vértice de  $V_1$  y que su otro extremo no puede estar en  $V_1$ , es decir tiene que estar en  $V_2$ . Recíprocamente, todo conjunto  $\sum_{u \in U} E(u) \in \mathcal{B}$  es vacío, por ejemplo si  $U \in \{\emptyset, V\}$ , o es el corte  $E(U, V \setminus U)$  (mismo razonamiento de antes).  $\square$

**Definición A.1.7.** El espacio  $\mathcal{B}(G)$  es el **espacio de cortes**, o el **espacio de enlaces** de  $G$ .

<sup>1</sup>No vamos a incluir el caso de particiones vacías. Luego la única manera de que el conjunto vacío de aristas sea un corte es que el grafo subyacente sea desconexo.

**Observación A.1.8.** Los enlaces son para  $\mathcal{B}$ , lo que son los ciclos para  $\mathcal{C}$ : elementos minimales no vacíos.

Si  $G$  es conexo, entonces los enlaces son justamente sus cortes minimales: un corte en un grafo conexo es minimal si y solo si ambos lados de la partición inducen subgrafos conexos. En efecto, por un lado, dados un corte minimal con bipartición  $\{V_1, V_2\}$  induce subgrafos conexos  $G[V_1], G[V_2]$ , pues de lo contrario eligiendo un vértice  $v_1 \in V_1$  aislado en  $G[V_1]$ , se sigue que el corte  $E(V_1 \setminus \{v_1\}, V_2 \cup \{v_1\})$  pierde todas la  $V_1, V_2$  aristas incidentes en  $v_1$  ( $G$  es conexo), contradiciendo minimalidad; por otro lado, un corte con bipartición  $\{V_1, V_2\}$  de conjuntos de vértices que inducen subgrafos conexos tiene que ser minimal, de lo contrario es que se le pueden quitar aristas y sigue siendo un corte, luego es porque uno de los subgrafos inducidos no era conexo. Ahora, si  $G$  es desconexo, luego sus enlaces son los cortes minimales de sus componentes conexas, pues unir cortes de cada componente conexa sigue dando un corte (y por lo tanto un corte no es minimal a menos que esté contenido en una componente).

**Lema A.1.9.** *Todo corte es la unión disjunta de enlaces.*

*Demostración.* Haremos inducción en el tamaño del corte  $F$  a considerar. Para  $F = \emptyset$  no hay nada que probar. Si  $F \neq \emptyset$ , y no es un enlace, luego contiene propiamente a algún corte  $F'$ . Por la proposición anterior, la suma de cortes es un corte (forman un subespacio), es decir  $F \setminus F' = F + F'$  es un corte más chico no vacío. Por inducción tenemos que  $F'$  y  $F \setminus F'$  son ambos unión disjunta de enlaces, y por lo tanto  $F$  también.  $\square$

**Ejercicio A.1.10.** Hallar una base de  $\mathcal{B}(G)$  dada por conjuntos de aristas de la forma  $E(v)$ .

*Solución.* Sabemos que los  $E(v), v \in V(G)$  generan  $\mathcal{B}(G)$ ; afirmamos que si  $G$  es conexo, entonces para todo  $w \in V(G)$  el siguiente conjunto forma una base del subespacio de cortes:

$$\{E(v)\}_{v \in V(G) \setminus \{w\}}.$$

En efecto, el conjunto de generadores de  $\mathcal{B}(G)$  es linealmente dependiente porque  $\sum_{v \in V(G)} E(v) = \emptyset$ , pero si quitamos cualquier vértice se vuelve linealmente independiente, pues que sea linealmente dependiente equivale a que existe un subconjunto  $S \subsetneq V(G)$  no vacío tal que

$$\emptyset = \sum_{v \in S} E(v) = E(S, V(G) \setminus S),$$

que es imposible si  $G$  es conexo.

En general, si  $G$  no es conexo escribimos  $G = \bigsqcup_i C_i$ , donde  $C_i$  son sus componentes conexas, luego una base de  $\mathcal{B}(G)$  es la unión de las bases de  $\mathcal{B}(C_i)$ , pues podemos hacer el abuso de notación  $\mathcal{B}(G) = \bigoplus_i \mathcal{B}(C_i)$ .  $\square$

**Corolario A.1.11.** *Se sigue que*

$$\dim \mathcal{B}(G) = \sum_{C \text{ componente de } G} (|C| - 1) = |G| - \#\{\text{componentes de } G\}.$$

*En particular si  $G$  es conexo,*

$$\dim \mathcal{B}(G) = |G| - 1.$$

**Ejercicio A.1.12.** Construir de manera explícita la partición en enlaces de un corte: sea  $F$  un corte en  $G$ , con partición  $\{V_1, V_2\}$ . Para  $i = 1, 2$  escribamos  $C_1^i, \dots, C_{k(i)}^i$  a las componentes conexas de  $G[V_i]$ . Usar los  $C_j^i$  para definir los enlaces que forman una unión disjunta para  $F$ .

*Solución.* Vamos a considerar el caso  $G$  conexo, pues el caso disconexo directamente escribimos a un corte como la unión disjunta de sus aristas en cada componente. Ahora, si  $G$  es conexo consideremos los conjuntos de aristas

$$E(C_i^1 \cup \bigcup_{C_j^2 \cap N(C_i^1) \neq \emptyset} C_j^2, \bigcup_{C_j^2 \cap N(C_i^1) = \emptyset} C_j^2 \cup \bigcup_{C_k^1 \neq C_i^1} C_k^1),$$

para todo  $1 \leq i \leq k(1)$  fijo. Hay que verificar que estos son disjuntos entre sí, y su unión da  $E(V_1, V_2)$ , y además que son enlaces (basta ver que su partición induce subgrafos conexos). En efecto,  $E(V_1, V_2)$  está claramente contenido en su unión; recíprocamente, las aristas de  $E(C_i^1 \cup N(C_i^1) \cap V_2, *)$  están en  $E(V_1, V_2)$  pues hay dos posibilidades: o la arista está en  $E(C_i^1, C_j^2)$  con  $C_j^2 \cap N(C_i^1) = \emptyset$  o está en  $E(C_j^2, C_{i'}^1)$ . Por construcción son enlaces porque cada parte de la partición es un subgrafo inducido conexo, pues la parte  $\bigcup_{C_j^2 \cap N(C_i^1) = \emptyset} C_j^2 \cup \bigcup_{C_k^1 \neq C_i^1} C_k^1$  tiene que ser conexa porque  $G$  lo es y las  $C_j^i$  con  $i$  fijo no están conectadas entre sí porque son las componentes de  $V_i$ . Finalmente, tienen que ser claramente disjuntas.  $\square$

**Teorema A.1.13.** El espacio de ciclos  $\mathcal{C}(G)$  y el espacio de cortes  $\mathcal{B}(G)$  de cualquier grafo satisfacen

$$\mathcal{C} = \mathcal{B}^\perp \quad \text{y} \quad \mathcal{B} = \mathcal{C}^\perp.$$

*Demostración.* Consideremos un grafo  $G = (V, E)$ . Claramente todo ciclo en  $G$  tiene un número par de aristas en cada corte, luego los ciclos son ortogonales a los cortes, es decir

$$\mathcal{C}(B) \subset \mathcal{B}(G)^\perp \quad \text{y} \quad \mathcal{B}(G) \subset \mathcal{C}(G)^\perp.$$

Para probar  $\mathcal{B}(G)^\perp \subset \mathcal{C}$  hay que usar la anteúltima proposición que caracteriza los vectores del subespacio de ciclos, es decir  $F \notin \mathcal{C}(G)$  si y solo si tiene un vértice incidente con un número impar de aristas en  $F$ . Luego  $\langle E(v), F \rangle = 1$ , entonces como  $E(v) \in \mathcal{B}(G)$  se sigue que  $F \notin \mathcal{B}(G)^\perp$ . Esto termina de probar que  $\mathcal{C} = \mathcal{B}^\perp$  en  $G$ .

Finalmente, para probar  $(G)^\perp \subset \mathcal{B}(G)$ , tomemos  $F \in \mathcal{C}(G)^\perp$ . Consideremos el multigrafo  $H$  obtenido a partir de  $G$  luego de contraer las aristas de  $E \setminus F$ . Todo ciclo en  $H$  tiene sus aristas en  $F$ . Como lo podemos extender a cualquier ciclo en  $G$  agregando aristas de  $E \setminus F$ , entonces el número de aristas del ciclo extendido que están en  $F$  (es decir las aristas del ciclo en  $H$  original) debe ser par, pues  $F \in \mathcal{C}^\perp$ . Usando la caracterización de grafos bipartitos, tenemos que  $H$  es bipartito. Su partición induce una partición  $(V_1, V_2)$  de  $V$  (ya que las aristas que habíamos contraído convierten la bipartición en un corte), tal que  $E(V_1, V_2) = F$ , i.e.  $F \in \mathcal{B}(G)$ .  $\square$

Consideremos ahora un grafo conexo  $G = (V, E)$  con un árbol generador  $T \subset G$ . Para toda cuerda  $e \in E \setminus E(T)$  existe un único ciclo  $C_e$  en  $T + e$ , que llamaremos el **ciclo fundamental** de  $e$  con respecto a  $T$ . Similarmente, para toda arista  $f \in T$ , el bosque tiene exactamente dos componentes (por la caracterización de árbol). El conjunto  $D_f \subset E$  de aristas de  $G$  entre ambas componentes es un *enlace* (usando una de las propiedades probadas en esta sección, pues ambos lados de la partición

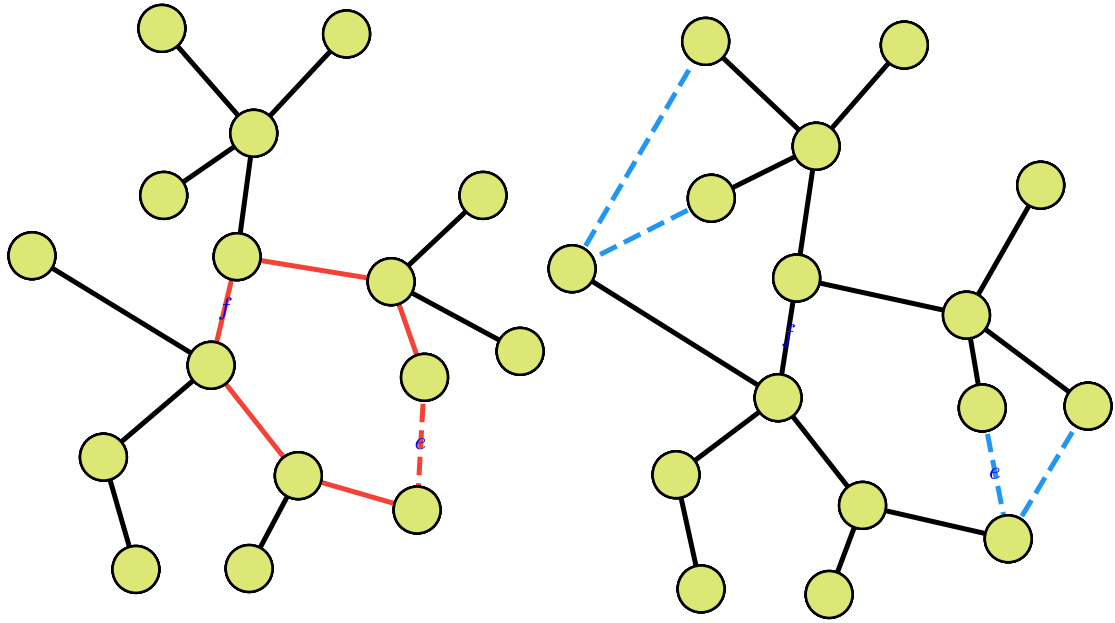


Figura A.1.1: Ejemplo: El ciclo fundamental  $C_e$ , y el corte fundamental  $D_f$ .

son subgrafos inducidos conexos) en  $G$ , el **corte fundamental** de  $f$  con respecto de  $T$ .

Notar que  $f \in C_e$  si y solo si  $e \in D_f$ , para todo  $e \notin T$  y  $f \in T$ . En efecto, por un lado si  $e \notin T$  y  $f \in T$ , entonces  $f \in C_e$  entonces sacar a  $f$  de  $T$  hace que se parta en dos componentes, que tienen que estar conectada por la cuerda  $e$  ya que todo camino entre ambas componentes pasaba por  $f$ , luego por  $C_e$  y cuando quitas una arista de un ciclo los caminos pueden seguir pasando por los vértices de  $f$  a través de  $e$ , i.e.  $e \in D_f$ . Por otro lado, si  $e \in D_f$  entonces el camino  $f \cdots e \cdots f$  tiene que ser un ciclo en  $G$  porque las aristas de  $f \cdots e$  están en una componente y las aristas  $e \cdots f$  en otra, así  $f \in C_e$ . Esto indica una conexión más profunda de dualidad; el siguiente teorema explora un poco este descubrimiento.

**Teorema A.1.14.** Sea  $G$  un grafo conexo con  $n$  vértices y  $m$  aristas, y sea  $T \subset G$  un árbol generador.

(I) Los cortes fundamentales y los ciclos fundamentales de  $G$  respecto de  $T$  forman bases de  $\mathcal{B}(G)$  y  $\mathcal{C}(G)$ , respectivamente.

(II) Consecuentemente,

$$\dim \mathcal{B}(G) = n - 1 \quad \text{y} \quad \dim \mathcal{C}(G) = m - n + 1.$$

*Demostración.* (I) Notemos que toda arista  $f \in T$  yace en  $D_f$ , pero ningún otro corte fundamental lo hace (estas son aristas de  $T$ ), mientras que una arista  $e \notin T$  yace en  $C_e$  pero no en otro ciclo fundamental (este ciclo está construido con una sola arista fuera de  $T$ ). Es decir, dados un subconjunto arbitrario de cortes fundamentales  $\{D_{f_1}, \dots, D_{f_r}\}$ , entonces

$$\sum_{i=1}^r D_{f_i} \neq \emptyset.$$

Análogamente, lo mismo sucede para un subconjunto de ciclos fundamentales  $\{C_{e_1}, \dots, C_{e_s}\}$ . Con lo cual los cortes fundamentales y los ciclos fundamentales son, respectivamente, conjuntos linealmente independientes en  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(G)$  y  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G)$ .

Veamos ahora que los ciclos fundamentales generan a un ciclo  $C$  arbitrario. Por nuestra observación inicial,  $D := C + \sum_{e \in C \setminus T} C_e$ , es decir a  $C$  le estamos quitando todas las aristas fuera de  $T$ , es un elemento de  $\mathcal{C}$ , que no contiene ninguna arista fuera de  $T$ , i.e. está contenido en  $T$ . Pero por el ítem 2. de la Proposición ??, los elementos de  $\mathcal{C}$  son unión disjunta de ciclos, pero como  $T$  es aciclico, la única opción es que sea el conjunto  $\emptyset$ . En consecuencia  $D = \emptyset$  y en particular  $C = \sum_{e \in C \setminus T} C_e$ .

Similarmente, todo corte  $D$  es la suma de cortes fundamentales. En efecto, el elemento  $D + \sum_{f \in D \cap T} D_f$  de  $\mathcal{B}$  no contiene aristas en  $T$ . Así es, pues si  $e \in (E(G) \setminus E(T)) \cap (D + \sum_{f \in D \cap T} D_f)$ , entonces por la observación inicial  $C_e \cap (D + \sum_{f \in D \cap T} D_f) = \{e\}$  ya que la única arista extra  $g$  que podría aparecer debería estar en  $T$  pues  $C_e$  de lo contrario  $g \in C_g \cap C_e$ , por otro lado  $g$  está en  $D$  o en algún  $D_f$ ; por un lado si está en  $D$  luego está en un único  $D_f$  por la observación inicial, es decir no está en  $D + \sum_{f \in D \cap T} D_f$ , por otro lado si no o está en  $D$ , no puede estar en ningún  $D_f$  con  $f \in D \cap T$  pues  $D_f$  contiene a un único corte fundamental. En resumen,  $D + \sum_{f \in D \cap T} D_f$  es vacío. Es decir,  $D = \sum_{f \in D \cap T} D_f$ .

- (II) Por un lado hay  $n - 1$  cortes fundamentales, pues hay uno por cada arista del árbol generador  $T$  de  $G$ , el cual tiene  $n$  vértices (usamos que los grafos conexos de  $n$  vértices tienen  $n - 1$  aristas si y solo si son árboles). Por otro lado, como vimos que  $\mathcal{C}(G) = \mathcal{B}(G)^\perp$  y que para todo subespacio  $V \subset \mathcal{E}(G)$  se tiene  $\dim V + \dim V^\perp = \dim \mathcal{E}(G) = m$ , se sigue que  $\dim \mathcal{C}(G) = m - n + 1$ .  $\square$

**Definición A.1.15.** La **matriz de incidencia**  $B = (b_{ij})_{n \times m} \in \mathbb{F}_2^{n \times m}$  de un grafo  $G = (V, E)$  con  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  y  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$  está dada por

$$b_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \in e_j \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Luego las matrices  $B$  y  $B^t$  definen las transformaciones lineales

$$B : \mathcal{E}(G) \rightarrow \mathcal{V}(G) \quad \text{y} \quad B^t \mathcal{V}(G) \rightarrow \mathcal{E}(G)$$

definidas respecto de las bases standard.

**Observación A.1.16.** La transformación  $B$  manda conjuntos de aristas  $F \subset E$  en al conjunto de vértices incidentes en un número impar de aristas de  $F$ . Mientras que  $B^t$  manda un conjunto de vértices  $U \subset V$  en el conjunto de aristas con exactamente un solo extremo en  $U$ .

Como consecuencia obtenemos:

**Corolario A.1.17.** (I) El núcleo de  $B$  es  $\mathcal{C}(G)$ .

(II) La imagen de  $B^t$  es  $\mathcal{B}(G)$ .

*Demostración.* (I)  $C \in \text{Ker } B$  si y solo si todos los vértices de  $G$  tienen un número par de aristas incidentes en  $C$ , es decir  $(G, C)$  tiene todos sus vértices de grado par, lo cual es una definición equivalente de estar en  $\mathcal{C}(G)$ .

(II) Sea  $U \subset V$ , entoncces  $B^t(U) = F$  el conjunto de aristas con exactamente un extremo en  $U$ , es decir,  $F = E(U, V \setminus U)$  es un corte. □

**Definición A.1.18.** La **matriz de adyasencia**  $A = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{F}_2^{n \times n}$  de  $G$  está dada por

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } v_i v_j \in E \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

**Observación A.1.19.** Esta matriz es simétrica. Además, se puede ver como una transformación lineal  $A : \mathcal{V}(G) \rightarrow \mathcal{V}(G)$ , que manda subconjuntos de vértices  $U \subset V$  al conjunto de vértices con un número impar de vecinos en  $U$ .

Denotemos por  $D$  a la matriz *real* diagonal  $(d_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  con  $d_{ii} = d(v_i)$ . Nuestra última proposición establece una conexión de  $A$  y  $B$  vistos como matrices reales:

**Proposición A.1.20.**

$$B \cdot B^t = A + D.$$

*Demostración.* La cuenta se tiene que hacer entre matrices reales, la cual una cuenta muy elemental. □

Notar que la misma ecuación sigue valiendo módulo 2.

## A.2. Otras nociones sobre grafos

**Definición A.2.1.** Un **hipergrafo** es un par  $(V, E)$  de conjuntos disjuntos, donde los elementos de  $E$  son subconjuntos no vacíos (de cualquier cardinalidad) de  $V$ . Con lo cual, los grafos son un caso particular de los hipergafos.

**Definición A.2.2.** Un **grafo dirigido** o **digrafo** es un par  $(V, E)$  de conjuntos disjuntos de vértices y aristas, junto con dos funciones  $\text{init} : E \rightarrow V$  y  $\text{ter} : E \rightarrow V$  que mandan una arista  $e$  en un **vértice inicial**  $\text{init}(e)$  y en un **vértice terminal**  $\text{ter}(e)$ . La arista  $e$  se dice **dirigida desde**  $\text{init}(e)$  **hasta**  $\text{ter}(e)$ .

Notar que un grafo dirigido puede tener varias aristas entre dos vértices  $x, y$ . Estas aristas se llaman **aristas múltiples**; si tienen la misma dirección, digamos de  $x$  a  $y$ , se dicen **paralelas**. Si  $\text{init}(e) = \text{ter}(e)$ , decimos que  $e$  es un **bucle**.

Un grafo dirigido  $D$  es una **orientación** de un grafo (sin dirigir)  $G$  si  $V(D) = V(G)$  y  $E(D) = E(G)$ , y además  $\{\text{init}(e), \text{ter}(e)\} = \{x, y\}$  para toda aristas  $e = xy$ . Intuitivamente, este **grafo orientado** surge de un grafo sin dirigir simplemente luego de darle una orientación a cada arista de  $G$ , desde uno de sus extremos hasta el otro. En particular, los grafos orientados son grafos dirigidos sin bucles ni aristas múltiples.



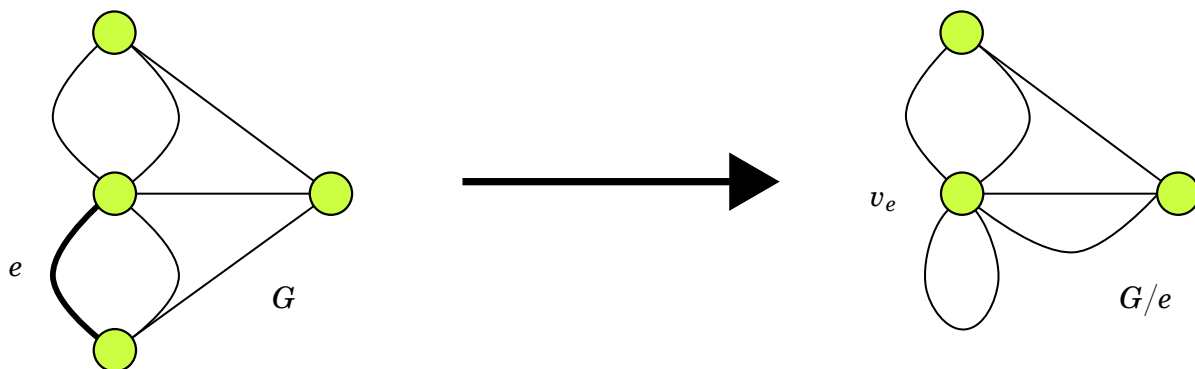


Figura A.2.2: Contracción de la arista  $e$  en un multigrafo  $G$ .

**Definición A.2.3.** Un **multigrafo** es un par  $(V, E)$  de conjuntos disjuntos de vértices y aristas con una función  $E \rightarrow V \cup [V]^2$  que le asigna a cada arista uno o dos vértices a sus extremos.

Por lo tanto, los multigrafos pueden tener bucles y aristas múltiples: podemos pensar a los multigrafos como grafos dirigidos, donde las direcciones de sus aristas fueron eliminadas. Para expresar que  $x$  e  $y$  son los extremos de una arista  $e$ , escribimos  $e = xy$ , sin embargo esta escritura no siempre es única!

Un grafo es entonces un multigrafo sin bucles ni aristas múltiples. De manera sorprendente, a veces probar un teorema para grafos es más difícil que probar para multigrafos. Más aún, existen áreas de la teoría de grafos donde los multigrafos surgen de manera más natural que los grafos, y donde restringirse a estos últimos resulta artificial y más complicado (por ejemplo dualidad de planos). Para multigrafos usaremos la misma terminología que vimos para grafos, pues estas definiciones se trasladan de manera obvia. Por ejemplo, ver la Figura ??.

De todas maneras, cabe resaltar algunas diferencias. Un multigrafo puede tener ciclos de longitud 1 o 2: los bucles, y los pares de aristas de aristas múltiples o las **aristas doble**. Un bucle en un vértice vuelve a su vértice su propio vecino, con lo cual en la figura anterior tenemos que  $d_{G/e}(v_e) = 6$ , o sea que también contamos a un vecino multiples veces, una por cada aristas que compartan ambos vértices! Los extremos de los bucles y de las aristas paralelas en un multigrafo  $G$ , se consideran separadoras de esta aristas del resto de  $G$ . El vértice  $v$  de un bucle  $e$ , es entonces un vértice de corte, a menos que  $(\{v\}, \{e\})$  sea una componente de  $G$ , con lo cual  $(\{v\}, \{e\})$  es un bloque. En efecto, un vértice de corte  $v$  es aquel que separa dos vértices  $x, y$ , i.e. todos los  $x, y$ -caminos pasan por  $v$  pero en un multigrafo podemos

considerar  $x = v = y$ . Entonces un multigrafo con un bucle nunca es 2-conexo, y todo multigrafo 3-conexo es de hecho un grafo.

La noción de arista contracción es mucho más simple en multigrafos que en grafos: si contraemos una arista  $e = xy$  en un multigrafo  $G = (V, E)$  a un vértice  $v_e$ , entonces ya no necesitamos borrar cualquier arista distinta de  $e$ : las aristas paralelas a  $e$  se convierten en bucles de  $v_e$ , mientras que las aristas  $xv$  e  $yv$  se vuelven aristas paralelas entre  $v_e$  y  $v$  (ver la figura anterior). Formalmente,  $E(G/e) = E \setminus \{e\}$ , y solamente debemos modificar al **mapa de incidencia**  $e' \mapsto \{\text{init}(e'), \text{ter}(e')\}$  de  $G$  para ajustarse a los vértices de  $G/e$ . Contraer un bucle es, por lo tanto, lo mismo que eliminarlo.

La noción de menor se adapta de manera acorde. La menor de contracción  $G/P$  definida a partir de una partición  $P$  de  $V(G)$  en conjuntos conexos tiene precisamente las aristas de  $G$  que unen dos particiones distintas. Si hay varias aristas entre dos de estos conjuntos, entonces se convierten en aristas paralelas de  $G/P$ . Sin embargo, normalmente no le daremos a  $G/P$  bucles provenientes de aristas de  $G$  cuyos extremos yacen en la mismo conjunto conexo de la partición.

Si  $v$  es un vértice de grado 2 en un multigrafo  $G$ , luego **suprimir**  $v$  significa quitarlo y agregar una arista entre sus dos vecinos. (Si dos aristas incidentes son idénticas, i.e. forman un bucle en  $v$ , no agregamos ninguna arista y solo obtenemos  $G \setminus v$ . Si ambas aristas van al mismo vértice  $w \neq v$ , la arista agregada será entonces un bucle en  $w$ . Ver la Figura ??.) Como los grados de todos los vértices distintos de  $v$  permanecen inmutados cuando  $v$  es suprimido, suprimir varios vértices de  $G$  siempre nos dará un multigrafo bien definido, que es independiente del orden escogido para suprimir los vértices.

En cuanto a terminología, algunos autores se refieren a los multigrafos como grafos; en este contexto nuestros grafos serían llamados **grafos simples**.

## Apéndice B

# Orden parcial completo-dirigido y teorema del punto fijo de Kleene

Este capítulo del apéndice fue creado con la esperanza de poder resolver el Ejercicio ??, pero este no se pudo resolver así, pues considerar un morfismo de grafos  $f : T \rightarrow T$  no tiene por qué ser Scott continua con el  $r$ -orden de árbol de  $T \ni r$ . Y de hecho, el ejercicio se pudo resolver muy fácilmente haciendo inducción y considerando brillantemente el morfismo  $f : L(T) \rightarrow L(T)$ .

**Definición B.0.1.** Un **orden parcial completo-dirigido**, o **opcd** es un orden parcial donde todo subconjunto dirigido  $D$  (es decir, es no vacío y para todo  $x, y \in D$  existe  $z \in D$  tal que  $x, y \leq z$ ) tiene supremo.

A un orden parcial (en particular a un opcd) se le puede dar la **topología Scott** en la cual los abiertos son los subconjuntos  $S$  cerrados superiormente (recordemos que esto era cuando  $S$  coincidía con la unión de los  $[x]$  con  $x \in S$ ) e **inaccesibles por supremos de subconjuntos dirigidos**, es decir, si todos los subconjuntos dirigidos  $D$  con supremo  $\sup(D) \in S$  intersecan a  $S$ . Con esta topología podemos definir las funciones continuas entre dos ordenes parciales  $A, B$ :

**Definición B.0.2.** Una función  $f : A \rightarrow B$  se dice **Scott continua** si es continua con la topología de Scott en  $A$  y  $B$ .

**Lema B.0.3.** Sea  $f : A \rightarrow B$  una función entre dos conjuntos ordenados  $A, B$ . Luego  $f$  es Scott continua si y solo si preserva supremos de subconjuntos dirigidos.

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Notemos que  $f$  es monótona creciente. En efecto, sean  $x \leq x' \in A$ , supongamos que  $f(x) \not\leq f(x')$ . Consideremos el conjunto  $U = B \setminus [f(x')]$ , el cual es Scott abierto (fácil de verificar), más aún  $f(x) \in U$ . Como  $f$  es Scott continua, tenemos que  $f^{-1}(U)$  es Scott abierto de  $A$ , y notemos que  $x \in f^{-1}(U)$ . Pero  $x' \geq x$ , luego debe ser que  $x' \in f^{-1}(U)$ , i.e.  $f(x') \in U$  absurdo! O sea que  $f$  es monótona creciente. Sea  $d = \sup D$  con  $D$  un subconjunto dirigido de  $A$ . Por un lado,  $a \leq d$  para todo  $a \in D$  implica que  $f(d) \geq b$  para todo  $b \in f(D)$ . Por otro lado, si  $c \in B$  es tal que  $c \geq f(a)$  para todo  $a \in D$ , debe ser que  $c \geq f(d)$ . En efecto, si esto no fuera cierto, tendríamos que  $f(d) \in U := B \setminus [c]$  Scott abierto y por continuidad de  $f$  se sigue que  $d$  pertenece al Scott abierto  $f^{-1}(U) \subset A$ . Con lo cual, como  $d$  es el supremo del conjunto dirigido  $D$ , tenemos que existe  $a' \in D$  tal que  $a' \in f^{-1}(U)$ , i.e.  $f(a') \in U$  con  $a' \in D$  absurdo! Esto dice que  $f(d) = \sup f(D)$ .

( $\Leftarrow$ ) Notar que  $f$  es monótona creciente, pues si  $x \leq x'$  entonces  $f(x') = f(\sup\{x, x'\}) = \sup\{f(x), f(x')\}$ , con lo cual  $f(x') \geq f(x)$ . Esto implica muy facilmente que  $f$  es Scott continua. □

Notar que en la demostración anterior vimos que las funciones Scott continuas son monótona crecientes.

**Definición B.0.4.** Sea  $m$  un elemento mínimo de un conjunto ordenado. Una **cadena ascendente de Kleene** de  $f$ , es la cadena

$$m \leq f(m) \leq f(f(m)) \leq f(f(f(m))) \leq \dots$$

**Teorema B.0.5** (Teorema del punto fijo de Kleene). *Sea  $T$  un opcd con un mínimo  $m$ , y sea  $f : T \rightarrow T$  una función Scott continua (y en particular monótona). Entonces  $f$  tiene un **mínimo punto fijo**, es decir, el conjunto de puntos fijos de  $f$  es no vacío y tiene un elemento mínimo. Más aún, este elemento mínimo es el supremo de una cadena ascendente de Kleene de  $f$ .*

*Demostración.* Consideremos la cadena ascendente de Kleene inducida por  $m$ . Este es un conjunto dirigido, pues es una cadena. Luego como  $T$  es un opcd tiene un supremo, digamos  $s$ . Tenemos que probar que  $s$  es un punto fijo de  $f$  y que efectivamente es el mínimo de todos los puntos fijos. Por un lado, como  $f$  es Scott continua, el lema anterior nos dice que  $f(s) = \sup_{i \geq 1} f^i(m)$ , pero  $\sup_{i \geq 1} f^i(m) = \sup_{i \geq 0} f^i(m)$ , es decir  $s$  es un punto fijo de  $f$ . Por otro lado, si  $s'$  es un punto fijo de  $f$ , tenemos que  $s' \geq f^i(m)$  para todo  $i \geq 0$ , con lo cual  $s' \geq s$  porque  $s$  es el supremo de la cadena. En efecto, vale para  $i = 0$ , luego por inducción supongamos que  $s' \geq f^i(m)$  entonces como  $f$  es monótona creciente  $f(s')$ , tenemos que  $s' = f(s') \geq f(f^i(m)) = f^{i+1}(m)$ . □

## DEMOSTRACIÓN ERRONEA

**Corolario B.0.6.** *Todo automorfismo de un árbol fija un vértice o una arista.*

*Demostración.* Sea  $T$  un árbol y  $r \in T$  una raíz. Consideremos el orden parcial inducido por la raíz en  $T$ . Notar que  $r$  es el mínimo de  $T$  y que todo subconjunto dirigido de  $T$  tiene supremo porque  $T$  es un orden parcial en un conjunto finito. O sea que  $T$  es un opcd. Análogamente, podemos considerar el orden de raíz de  $T$  respecto de  $f(r)$ . Ahora, un morfismo de grafos  $f : T \rightarrow T$ , es una función entre dos opcds considerando el  $r$ -orden del dominio y el  $f(r)$ -orden en el codominio. Afirmamos que  $f$  es Scott continua. En efecto, por el lema anterior, esto equivale a probar que preserva el supremo de subconjuntos dirigidos. Sea  $D \subset T$  dirigido y  $s = \sup D$  (como  $T$  es finito  $s \in D$ ); tenemos que  $D$  es el camino  $xTd$  (pensando en el  $r$ -orden:  $x \leq d$ ) para el mínimo en  $D$ , pues todos los elementos de  $D$  son comparables. Con lo cual, como  $f$  es morfismo de grafos, preserva la adyacencia de aristas, luego manda caminos en caminos, pero entonces  $f(D) = f(xTd) = f(x)Tf(d)$  (pensando en el  $f(r)$ -orden:  $f(x) \leq f(d)$ ), i.e.  $f(d)$  es el supremo (máximo) de  $f(D)$  en el  $f(r)$ -orden.

Por el Teorema del punto fijo de Kleen, existe en particular un punto fijo de  $T$ . □