

RIEMANN-ROCH PARA SUPERFICIES

ENZO GIANNOTTA

RESUMEN. Presentaremos una introducción al número de intersección de dos curvas en una superficie y probaremos el Teorema de Riemann-Roch para superficies.

ÍNDICE

1. Notación	1
2. Riemann-Roch para curvas	2
3. Número de intersección	2
4. Riemann-Roch para superficies	5
Referencias	6

Agradecimientos. Agradezco al profesor Pedro por sugerir este tema para la ayudantía, por compartir su tiempo para conversar sobre este tema, y por hacer disponible el material bibliográfico necesario para prepararlo.

1. NOTACIÓN

Todas las superficies, que notaremos S, S' , serán superficies suaves proyectivas irreducibles sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k . Notaremos por D, D' a dos divisores de S ; $D \sim D'$ significa que D y D' son linealmente equivalentes, es decir, $D - D'$ es un divisor principal. $\mathcal{O}_S(D)$ denota al haz invertible correspondiente al divisor D , y $H^i(S, \mathcal{O}_S(D)) =: H^i(\mathcal{O}_S(D)) =: H^i(D)$ a su i -ésimo grupo de cohomología respecto del haz $\mathcal{O}_S(D)$.

Recordemos que si X es una variedad algebraica proyectiva de dimensión n , y \mathcal{F} es un haz coherente en X (por ejemplo, en estas notas estaremos trabajando exactamente dentro de este contexto). Definimos la **característica de Euler-Poincaré** de \mathcal{F} como la cantidad finita (gracias a los teoremas de finitud y anulación de Grothendieck; ver [Mon23, §5]):

$$\chi(\mathcal{F}) := \chi(X, \mathcal{F}) := \sum_{i \geq 0} (-1)^i h^i(X, \mathcal{F}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i h^i(X, \mathcal{F}),$$

donde $h^i(X, \mathcal{F}) := h^i(\mathcal{F}) := \dim_k(H^i(X, \mathcal{F}))$. Por ejemplo, cuando $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(D)$ es el haz asociado a un divisor D de X , notaremos $h^i(X, \mathcal{F}) =: h^i(D)$; es costumbre notar $\ell(D)$ a la dimensión del **espacio de Riemann-Roch** de D , es decir, del espacio $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$. Recordar que en este contexto (ver [Mon23, Lema 5.2.5]) la característica de Euler-Poincaré es **aditiva**, es decir, dada una sucesión exacta de haces coherentes en X (variedad proyectiva)

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

entonces

$$\chi(\mathcal{G}) = \chi(\mathcal{F}) + \chi(\mathcal{H}).$$

Si X es una variedad algebraica, se define el **grupo de Picard** de X , como el grupo abeliano

$$\text{Pic}(X) := \{\text{fibrados en recta en } X\} / \cong,$$

con la estructura de grupo dada por el producto tensorial de fibrados $L \otimes L'$ y con inversa de un elemento L dada por su fibrado dual L^\vee .

Cuando X es una variedad algebraica suave e irreducible, se define el **fibrado en rectas canónico** ω_X de X como

$$\omega_X := \det(\Omega_X^1),$$

donde Ω_X^1 es el *fibrado cotangente* de X . Un **divisor canónico** K_X es cualquier divisor tal que

$$\omega_X \cong \mathcal{O}_X(K_X) \quad \text{en } \text{Pic}(X).$$

Similarmente, su fibrado dual $\omega_X^\vee \cong \mathcal{O}_X(-K_X)$ es llamado el **fibrado en rectas anticanónico**, y $-K_X$ un **divisor anti-canónico**.

Cuando X sea una variedad algebraica irreducible suave, tenemos un “diccionario” entre fibrados en rectas, divisores de Weil, y divisores de Cartier; el cual utilizaremos libremente (cf. [Mon23, §3]):

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}(X) & \xleftarrow{L \mapsto \mathcal{L}, \text{ con } \mathcal{L}(U) := H^0(U, L|_U)} & \{\text{haces invertibles}\} / \cong \\ \uparrow [D] \mapsto \mathcal{O}_X(D) & & \\ \text{Div}(X)/\text{PDIV}(X) & \xleftarrow{D = [(f_i, U_i)] \mapsto \hat{D} = \sum_Y v_Y(f_i) Y} & \text{WDiv}(X)/\text{PWDIV}(X) \end{array}$$

2. RIEMANN-ROCH PARA CURVAS

En [Mon23, §5] vimos el Teorema de Riemann-Roch para curvas $X = C$ (Teorema 5.2.8):

Sea $X = C$ una curva algebraica proyectiva irreducible, de género $g(C) := h^0(C, \omega_C) = h^1(C, \mathcal{O}_C)$. Entonces para todo $L \cong \mathcal{O}_C(D) \in \text{Pic}(C)$, se tiene que

$$\chi(C, \mathcal{O}_C(D)) = \chi(C, \mathcal{O}_C) + \deg(D).$$

Equivalentemente,

$$h^0(C, \mathcal{O}_C(D)) - h^0(C, \mathcal{O}_C(K_C - D)) = \deg(D) + 1 - g(C).$$

Informalmente, el Teorema de Riemann-Roch dice que para el caso de una variedad proyectiva irreducible X que sea una curva, podemos escribir la característica de Euler-Poincaré de un divisor D en función de invariantes geométricos de X y una cantidad que se define geométricamente en función de D (en el caso $X = C$ su grado). El propósito de estas notas es probar un enunciado similar para $X = S$ una superficie proyectiva suave irreducible.

3. NÚMERO DE INTERSECCIÓN

Definición 3.1. Sean C y C' dos curvas irreducibles distintas en una superficie S , y $x \in C \cap C'$, notemos por \mathcal{O}_x al anillo local de S en x . En \mathcal{O}_x , notemos por f una ecuación que define C , y similarmente g a otra que define C' . Luego definimos la **multiplicidad de intersección** de C y C' en x como la cantidad

$$m_x(C \cap C') := \dim_k \mathcal{O}_x / (f, g).$$

Observación 3.2. A priori podría suceder que la dimensión de $\mathcal{O}_x/(f, g)$ como k -espacio vectorial sea infinita, sin embargo, como C y C' son curvas distintas, resulta que $\dim_k \mathcal{O}_x/(f, g)$ es finito, ya que podemos aplicar el siguiente resultado (cf. [Ati18, Corolario 11.8])

Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y B un dominio íntegro el cual es una k -álgebra finitamente generada. Entonces para todo ideal primo \mathfrak{p} de B ,

$$\text{height}(\mathfrak{p}) + \dim_{\text{Krull}}(B/\mathfrak{p}) = \dim_{\text{Krull}}(B).$$

Ejemplo 3.3. Cuando $m_x(C \cap C') = 1$, geométricamente lo que está pasando es que C y C' son **transversales** en x , i.e., f y g forman un sistema local de coordenadas en un entorno abierto de x (por ejemplo, si las tangentes de C y C' en x son distintas). En efecto, notar que $m_x(C \cap C') = 1$ si y solo si f y g generan el ideal maximal $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_x$. Claramente si $(f, g) = \mathfrak{m}_x$ se tiene que $\mathcal{O}_x/(f, g) = \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$ es un cuerpo pues estamos cocientando por un ideal maximal. Recíprocamente, si $\mathcal{O}_x/(f, g)$ tiene dimensión 1, es un cuerpo, y por lo tanto (f, g) es un ideal maximal de \mathcal{O}_x ; como $(f, g) \subset \mathfrak{m}_x$ se sigue que de hecho vale la igualdad.

Definición 3.4. Sean C y C' dos curvas irreducibles distintas en S , definimos el **número de intersección**:

$$\langle C, C' \rangle := \sum_{x \in C \cap C'} m_x(C \cap C').$$

Observación 3.5. Nuevamente, podría suceder que la cantidad de la derecha sea infinita, pero ya vimos que cada término es finito, y más aún, notemos que la sumatoria tiene una cantidad finita de términos pues, al ser C y C' curvas irreducibles distintas, no se pueden intersectar en más de finitos puntos: $C \cap C'$ es un cerrado de C que no tiene muchas posibilidades, puede tener dimensión 1 o 0, y el primer caso no sucede pues $C \neq C'$.

Recordemos que C y C' se pueden pensar como haces invertibles $\mathcal{O}_S(-C)$ y $\mathcal{O}_S(-C')$ respectivamente, luego definimos el haz

$$\mathcal{O}_{C \cap C'} := \mathcal{O}_S / (\mathcal{O}_S(-C) \oplus \mathcal{O}_S(-C')).$$

Resulta que este haz es un *haz rascacielos*, concentrado en el conjunto finito $C \cap C'$; en cada uno de estos puntos x , tenemos que $(\mathcal{O}_{C \cap C'})_x = \mathcal{O}_x/(f, g)$. Por lo tanto

$$(C, C') = h^0(S, \mathcal{O}_{C \cap C'}) = \chi(S, \mathcal{O}_{C \cap C'}).$$

Teorema 3.6. Para L y L' dos fibrados en rectas de $\text{Pic}(S)$, definimos

$$\langle L, L' \rangle := \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(L^\vee) - \chi(L'^\vee) + \chi(L^\vee \otimes L'^\vee).$$

Entonces se tiene que $\langle \cdot, \cdot \rangle : \text{Pic}(S) \times \text{Pic}(S) \rightarrow \mathbb{Z}$ es una forma simétrica bilineal en el grupo abeliano $\text{Pic}(S)$, de tal suerte que si C y C' son dos curvas irreducibles distintas en S , se tiene que

$$\langle \mathcal{O}_S(C), \mathcal{O}_S(C') \rangle = \langle C, C' \rangle.$$

En otras palabras, el invariante geométrico número de intersección se puede traducir a un invariante cohomológico pensando a las curvas como haces invertibles.

La demostración detallada del teorema se encuentra en [Bea96]. Daré solamente un bosquejo:

Sketch de la demostración.

Lema 3.7. (a) Sean $s \in H^0(S, \mathcal{O}_S(C))$ y $s' \in H^0(S, \mathcal{O}_S(C'))$ secciones no nulas que se anulan en C y C' respectivamente. Entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(-C - C') \xrightarrow{(s', -s)} \mathcal{O}_S(-C) \oplus \mathcal{O}_S(-C') \xrightarrow{(s, s')} \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_{C \cap C'} \longrightarrow 0$$

es exacta.

(b) Sea C una curva suave irreducible en S . Para todo $L \in \text{Pic}(S)$, se tiene que

$$\langle \mathcal{O}_S(C), L \rangle = \deg(L|_C)$$

(c) Sea D un divisor en S , y H una sección por un hiperplano de S , entonces existe $n \geq 0$ tal que $D + nH$ es una sección por un hiperplano. En particular, podemos escribir $D \sim A - B$, donde A y B son curvas suaves de S con $A \sim D + nH$ y $B \sim nH$.

(El ítem (c) fue visto en clase).

Ahora, el ítem (a) y la aditividad de la característica de Euler-Poincaré nos da $\langle \mathcal{O}_S(C), \mathcal{O}_S(C') \rangle = \langle C, C' \rangle$, pues desarrollando la definición del lado izquierdo, se puede ver que es igual a $\chi(\mathcal{O}_{C \cap C'}) = h^0(C \cap C') = \langle C, C' \rangle$. Luego para probar el teorema basta probar la bilinearidad (que la forma es simétrica es obvio). Si L y L' son dos haces invertibles. Por el ítem (c), podemos escribir $L' = \mathcal{O}_S(A - B)$, donde A y B son dos curvas suaves en S . Consideremos la expresión

$$s(L_1, L_2, L_3) := \langle L_1, L_2 \otimes L_3 \rangle - \langle L_1, L_2 \rangle - \langle L_1, L_3 \rangle;$$

claramente la expresión es simétrica en las tres variables, y el ítem (b) implica que si $L_1 = \mathcal{O}_S(C)$ para una curva irreducible suave C de S , entonces $s(L_1, L_2, L_3) = 0$; simétricamente, si L_2 o L_3 es $\mathcal{O}_S(C)$ también se anula la expresión. Tomando $L_1 = L$, $L_2 = L'$ y $L_3 = \mathcal{O}_S(B)$, despejamos,

$$\langle L, L' \rangle = \langle L, \mathcal{O}_S(A) \rangle - \langle L, \mathcal{O}_S(B) \rangle.$$

Así, el ítem (b) prueba que $\langle L, L' \rangle$ es lineal en L (ambos términos lo son). La simetría implica que es lineal en la segunda coordenada también. \square

En otras palabras, que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sea bilineal en $\text{Pic}(S)$, implica que:

- (I) $\langle L \otimes L', L'' \rangle = \langle L, L'' \rangle + \langle L', L'' \rangle$.
- (II) $\langle L^\vee, L' \rangle = -\langle L, L' \rangle$ y $\langle \mathcal{O}_S, L \rangle = 0$.

(En la primera coordenada. Similarmente, en la segunda valen estas identidades).

Observación 3.8. Dados dos divisores en S , digamos D y D' , la gracia del teorema es que podemos calcular el producto $\langle \mathcal{O}_S(D), \mathcal{O}_S(D') \rangle$ reemplazando D y D' por divisores linealmente equivalentes (pues su representante en $\text{Pic}(S)$ no cambia!).

Esto tiene dos implicancias:

Proposición 3.9. (1) Sea C una curva suave, $f : S \rightarrow C$ un morfismo sobreyectivo, F una fibra de f . Entonces $\langle \mathcal{O}_S(F), \mathcal{O}_S(F) \rangle = 0$.

(2) Si S' es una superficie y $g : S \rightarrow S'$ es un morfismo genéricamente finito de grado d , entonces

$$\langle \mathcal{O}_S(g^*D), \mathcal{O}_S(g^*D') \rangle = d \langle \mathcal{O}_{S'}(D), \mathcal{O}_{S'}(D') \rangle.$$

Demostración. (1) Escribamos $F = f^*\{x\}$ para algún C . Existe un divisor A en C linealmente equivalente a x tal que $x \notin A$, con lo cual $F \sim f^*A$. Como f^*A es una combinación lineal de fibras de f distintas de F , tenemos que

$$\langle \mathcal{O}_S(F), \mathcal{O}_S(F) \rangle = \langle \mathcal{O}_S(F), f^*A \rangle = 0.$$

- (2) Por el ítem (c), basta probar la fórmula para el caso en el que D y D' son secciones de hiperplanos de S . Existe un abierto U de S' tal que las fibras de g tienen grado d . Entonces podemos mover D y D' de tal manera que se intersecten transversalmente y la intersección caiga en U . Consecuentemente, g^*D y g^*D' se intersectan transversalmente y además $g^*D \cap g^*D' = g^{-1}(D \cap D')$, y se sigue el resultado. \square

Ejemplo 3.10 (Teorema de Bezout). Tomemos $S = \mathbb{P}^2$. Recordemos que $\text{Pic}(\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{Z}$: más precisamente, toda curva de grado d es linealmente equivalente a dL para una recta L . Así, sean C y C' dos curvas de grado d y d' , y sean L y L' dos rectas distintas; como $C \sim dL$ y $C' \sim d'L'$, el Teorema 3.6 implica el Teorema de Bezout:

$$\langle C, C' \rangle = \langle \mathcal{O}_S(C), \mathcal{O}_S(C') \rangle = \langle dL, dL' \rangle = dd' \langle L, L' \rangle = dd'.$$

4. RIEMANN-ROCH PARA SUPERFICIES

Recordemos Teorema de dualidad de Serre (cuya demostración vimos en [Mon23, Teorema 5.1.3]):

Teorema 4.1 (Dualidad de Serre). *Sea X una variedad algebraica proyectiva suave e irreducible de dimensión n , y sea $\omega_X = \det(\Omega_X^1)$. Entonces, para todo fibrado vectorial $E \rightarrow X$,*

$$H^i(X, E) \cong H^{n-i}(X, E^\vee \otimes \omega_X)^\vee.$$

En particular, $h^i(X, E) = h^i(X, E^\vee \otimes \omega_X)$.

En nuestro caso $X = S$, deducimos que $\chi(L) = \chi(\omega_S \otimes L^\vee)$ por la definición de número de Euler-Poincaré.

Gracias a esto podemos probar el Teorema de Riemann-Roch para superficies:

Teorema 4.2 (Riemann-Roch para superficies). *Para todo $L \in \text{Pic}(S)$, se tiene*

$$\chi(L) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(\langle L, L \rangle - \langle L, \omega_S \rangle).$$

Demostración. Primero calculemos por definición:

$$\langle L^\vee, L \otimes \omega_S^\vee \rangle := \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(L) - \chi(\omega_S \otimes L^\vee) + \chi(\omega_S).$$

Por dualidad de Serre 4.1, $\chi(\omega_S) = \chi(\mathcal{O}_S)$ y $\chi(\omega_S \otimes L^\vee) = \chi(L)$, y por lo tanto

$$\langle L^\vee, L \otimes \omega_S^\vee \rangle = 2(\chi(\mathcal{O}_S) - \chi(L)).$$

Por otro lado, aplicando bilinealidad (3.6) del lado izquierdo:

$$\begin{aligned} \langle L^\vee, L \otimes \omega_S^\vee \rangle &= \langle L^\vee, L \rangle + \langle L^\vee, \omega_S^\vee \rangle \\ &= -\langle L, L \rangle + \langle L, \omega_S \rangle. \end{aligned}$$

Juntando ambas igualdades obtenemos el teorema. \square

Observación 4.3. Podemos reescribir el enunacio de Riemann-Roch en término de divisores. Sea $h^i(D) := h^i(S, \mathcal{O}_S(D))$ y K_S un divisor canónico, i.e., $\mathcal{O}_S(K_S) = \omega_S$. En este lenguaje la dualidad de Serre 4.1 nos queda $h^i(D) = h^{n-i}(K_S - D)$ con $n = \dim(S) = 2$. Así, Riemann-Roch 4.2 queda:

$$h^0(D) + h^0(K - D) - h^1(D) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(\langle \mathcal{O}_S(D), \mathcal{O}_S(D) \rangle - \langle \mathcal{O}_S(D), \mathcal{O}_S(K_S) \rangle).$$

Usualmente no tendremos información de $h^1(D)$, aún así Riemann-roch nos provee de la siguiente desigualdad útil:

$$h^0(D) + h^0(K_S - D) \geq \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(\langle \mathcal{O}_S(D), \mathcal{O}_S(D) \rangle - \langle \mathcal{O}_S(D), \mathcal{O}_S(K) \rangle).$$

Sea $g(C) := h^1(C, \mathcal{O}_C)$ el género de una curva C suave irreducible en S , entonces podemos deducir la siguiente fórmula a partir de Riemann-Roch:

Teorema 4.4 (Fórmula del Género). *Sea C una curva irreducible suave en S . Entonces*

$$g(C) = 1 + \frac{1}{2}(\langle \mathcal{O}_S(C), \mathcal{O}_S(C) \rangle - \langle \mathcal{O}_S(C), \mathcal{O}_S(K_S) \rangle).$$

Demostración. Primero, tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(-C) \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0,$$

la cual utilizando la aditividad de la característica de Euler-Pincaré nos da

$$\chi(\mathcal{O}_C) = \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(\mathcal{O}_S(-C)).$$

Como $\chi(\mathcal{O}_C) := 1 - g(C)$, nos queda,

$$1 - g(C) = \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(\mathcal{O}_S(-C)).$$

Finalmente, obtenemos la fórmula aplicando Riemann-Roch con $L = \mathcal{O}_S(-C)$, pues nos dice que

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{O}_S(-C)) &= \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(\langle \mathcal{O}_S(-C), \mathcal{O}_S(-C) \rangle - \langle \mathcal{O}_S(-C), \mathcal{O}_S(K_S) \rangle) \\ &= \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(\langle \mathcal{O}_S(C), \mathcal{O}_S(C) \rangle + \langle \mathcal{O}_S(C), \mathcal{O}_S(K_S) \rangle), \end{aligned}$$

con lo cual podemos reemplazar esto arriba y despejar $g(C)$. □

Ejemplo 4.5. Cuando $S = \mathbb{P}^2$, si C es una curva irreducible suave de grado d en S , como $\text{Pic}(S) \cong \mathbb{Z}$, podemos elegir cualquier fibrado en rectas L y se tiene que $C \sim dL$. Recordar que $\omega_S = -3L'$ para cualquier otra recta L' distinta de L . Entonces la Fórmula del Género

REFERENCIAS

- [Ati18] Michael Atiyah, *Introduction to commutative algebra*, CRC Press, 2018.
- [Bea96] Arnaud Beauville, *Complex algebraic surfaces*, no. 34, Cambridge University Press, 1996, Estas notas se basan en el Capítulo 1.
- [Mon23] Pedro Montero, *Notas de curvas algebraicas (mat426)*, http://pmontero.mat.utfsm.cl/mat426_2023_2.html, 2023.