TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BOREL

ENZO GIANNOTTA

Resumen. En este artículo probaremos el Teorema del punto fijo de Borel, el cual dice que todo grupo algebraico afín y soluble actuando en una variedad algebraica proyectiva admite un punto fijo. Como consecuencia obtendremos varios resultados sobre la estructura de un grupo algebraico.

Índice

> I feel that what mathematics needs least are pundits who issue prescriptions or guidelines for presumably less enlightened mortals.
>
> *Armand Borel*

1. Introducción

De por sí los grupos lineales clásicos como $\mathrm{GL}_n(k)$, $T_n(k)$, $U_n(k)$, $D_n(k)$, etc, son ubicuos en la matemática, pues aparecen en el contexto de representaciones, herramienta que nos permite entender objetos mucho más complicados. No es diferente el caso de la geometría algebraica, donde nos interesa estudiar variedades algebraicas como por ejemplo variedades proyectivas como el espacio proyectivo, las grassmannianas, y más generalmente, las variedades bandera: es aquí donde actúa naturalmente el grupo general lineal $\mathrm{GL}(V)$ para algún espacio vectorial de dimensión finita V.

Estos grupos lineales clásicos tiene estructura de variedad algebraica y no solo de grupos, además, estas estructuras son mutuamente compatibles, lo cual nos permite estudiarlas mediante el lenguaje de la geometría algebraica. Más generalmente, podemos definir qué es un grupo algebraico: simplemente es una generalización de este hecho.

Así, es natural querer estudiar la estructura de los grupos algebraicos. Es por eso que el propósito de este artículo es estudiar grupos algebraicos y su estructura. Más precisamente, varias consecuencias importantes se desprenderán del teorema principal de este artículo:

Teorema 1.1 (Teorema del punto fijo de Borel)**.** *Sea G un grupo algebraico conexo soluble, y sea X una variedad completa (no vacía) donde actúa G. Entonces G tiene un punto fijo en X.*

Estructura del artículo. Comenzamos en la Sección 2 y 3 fijando notación y lenguaje sobre grupos abstractos que utilizaremos a lo largo de todo el artículo. En la Sección 4 hablamos de la variedades Bandera. En las secciones 5,6,7,8 y 9 introducimos las nociones básicas de grupos algebraicos, homomorfismos de grupos algebraicos y acciones. Luego pasamos a hablar sobre la descomposición de Jordan-Chevalley, y definimos grupos diagonalizables, solubles y nilpotentes en el contexto de grupos algebraicos, además introducimos resultados (y varios los demostramos) que serán necesarios para probar el Teorema del punto fijo de Borel, en las secciones 10 a 12. Finalmente, en la Sección 13 repasamos rápidamente las propiedades importantes de las variedades completas para poder pasar a la demostración del Teorema del punto fijo en la Sección 14; en la Sección 15 terminamos con consecuencias importantes de este.

Agradecimientos. Agradezco al profesor Pedro por sugerir este tema para el artículo, y por hacer disponible el material bibliográfico necesario para prepararlo.

2. Notación, convenciones y hechos preliminares

2.1. Convención. Durante todo el artículo, todas las variedades y morfismos estarán definidos sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado, de característica arbitraria.

2.2. Notación. Denotamos por $\mathbb{P}^n$ (resp. $\mathbb{A}^n$)S al *espacio proyectivo* $\mathbb{P}^n(k)$ (resp. *espacio afín* $\mathbb{A}^n(k)$) de dimensión n sobre el cuerpo k. Más generalmente, dado un espacio vectorial de dimensión finita V, denotamos por $\mathbb{P}(V)$ a la *proyectivización* de V, i.e., el conjunto de todos los subespacios vectoriales de dimensión 1 de V. El *grupo multiplicativo* $\mathbb{G}_m := (k^\times, \cdot)$.

3. Terminología de teoría de grupos y acciones

En esta sección introducimos notación clásica de Teoría de Grupos. Sea G un grupo, escribamos

- $Z(G)$ es el **centro** de G, es decir, todos los $x \in G$ tales que $xg = gx$ para todo $g \in G$.
- $R(G)$ es el **radical** de G, es decir, el subgrupo conexo normal soluble de G. Donde estamos suponiendo que G es un *grupo algebraico.*
- Dado $S \subset G$, $C_G(S)$ es el **centralizador** de S, es decir, los $x \in G$ tales que $xg = gx$ para todo $g \in S$. Cuando $S = \{x\}$ es un singleton, escribimos $C_G(x)$ en lugar de $C_G(S)$. Dado $y \in G$, definimos la **clase de conjugación** (de y), como el conjunto de elementos de G de la forma zyz^{-1}, $z \in G$. Las clases de conjugación particionan G.
- Dado $S \subset G$, $N_G(S)$ es el **normalizador** de S, es decir, los $x \in G$ tales que $xgx^{-1} \in S$ para todo $g \in S$. Cuando $S = \{x\}$ es un singleton, escribimos $N_G(x)$ en lugar de $N_G(S)$.
- $[G, G]$ es el **subgrupo derivado** de G, es decir, el subgrupo generado por los conmutadores $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$ con $x, y \in G$. Más generalmente, si $S_1, S_2 \subset G$, escribimos $[S_1, S_2]$ para el subgrupo generado por los $[s_1, s_2]$ con $s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$. Notar que $[S_1, S_2]$ es normal en G si y solo si S_1 y S_2 son normales en G.
- Dado un conjunto arbitrario X, una **acción** de G (decimos también que G **actúa** sobre X, o para no confundirnos con otras estructuras que aparecerán más adelante, que G **actúa mórficamente** en X) es un mapa
$$\begin{aligned} \varphi : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$
tal que $1 \cdot x = x$ y $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ para todo $x \in X$ y $g, h \in G$. Dado un conjunto $S \subset X$, escribimos G_S para el **estabilizador** o **grupo de isotropía** de S, es decir, los $g \in G$ tales que $g \cdot x = x$ para todo $x \in S$; claramente es un subgrupo de G. Cuando $S = \{x\}$ es un singleton, simplemente escribimos G_x en lugar de G_S. Por otro lado, $G \cdot S$ es la **órbita** de S, es decir, el conjunto de elementos $x \in X$ tales que $x = g \cdot s$ para algún $g \in G$ y $s \in S$. Cuando $S = \{x\}$ es un singleton, simplemente escribimos $G \cdot x$ en lugar de G_S. Quitando redundancias (i.e. $G \cdot x = G \cdot x'$), las órbitas particionan X.
- Decimos que un grupo G actúa **transitivamente** (sobre un conjunto X) si $G \cdot x = X$ para algún $x \in X$ (equivalentemente para todo $x \in X$). En particular, G actúa transitivamente en cada órbita.
- Si G actúa en X, entonces denotamos por X^G al conjunto de **puntos fijos** de G, i.e., aquellos $x \in X$ tales que $G \cdot x = \{x\}$, en otras palabras, los elementos cuya órbita es un singleton.

- Dados $Y, Z \subset X$, definimos el **transportador**, como el conjunto $\operatorname{Tran}_G(Y,Z) := \{\, g \in G \mid g \cdot Y \subset Z \,\}$.

Ejemplo 3.1. Con estas definiciones y terminologías, dado un grupo G, este actúa sobre sus elementos vía **automorfismos interiores**, es decir, $y \mapsto xyx^{-1} =: \operatorname{Int}_x(y)$, correspondiente al homomorfismo $G \to \operatorname{Aut} G$; el núcleo es $Z(G)$ y la imagen es $\operatorname{Int} G$ (el cual es un subgrupo normal de $\operatorname{Aut}(G)$). La órbita de y son las clases de conjugación, y su grupo de isotropía el centralizador $C_G(y)$. Los puntos fijos corresponden con el núcleo del homomorfismo, i.e., $Z(G)$.

4. Variedades Bandera

En esta sección construiremos un ejemplo de variedades proyectivas: las *variedades bandera*.

Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo k. $\bigwedge V$ denota el **álgebra exterior** (el cociente del *álgebra de tensores* de V por el ideal bilátero generado por $v \otimes v$, $v \in V$). Recordemos que $\bigwedge V$ es una k-álgebra de dimensión finita, más aún, es una k-álgebra graduada por $\{\bigwedge^i V\}_{i=0}^n$. En particular $\bigwedge^0 V = k$ y $\bigwedge^1 V = V$. Dada una base ordenada $(v_1, \ldots, v_n)$ de V, entonces los *productos cuña* $v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_d)$ forman una k-base de $\bigwedge^d V$ de cardinal $\binom{n}{d}$. En particular $\bigwedge^n V$ es 1-dimensional, i.e., el producto cuña de una base arbitraria de V está determinada salvo un múltiplo escalar. Si W es un subespacio vectorial de V, entonces podemos identificar canónicamente a $\bigwedge^d W$ con un subespacio de $\bigwedge^d V$.

Así, tenemos un mapa ψ saliendo del conjunto $\mathfrak{G}_d(V)$ de todos los subespacios d-dimensionales de V en $\mathbb{P}(\bigwedge^d V)$, que manda un subespacio D al punto en la proyectivización $\mathbb{P}(\bigwedge^d V)$ correspondiente a $\bigwedge^d D$ $(d \geq 1)$. Afirmamos que ψ es inyectiva. En efecto, supongamos que D, D' son dos subespacios d-dimensionales. Fijemos una base de V de tal suerte que $v_1, \ldots, v_d$ genera D, mientras que $v_{r,\ldots,v_{r+d-1}}$ genera D'. De esta manera $v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$ no puede ser un múltiplo de $v_r \wedge \cdots \wedge v_{r+d-1}$ a menos que $r = 1$, i.e. $D = D'$.

Para poder brindarle a $\mathfrak{G}_d(V)$ una estructura de variedad proyectiva, basta ver que la imagen de ψ es cerrada. Para esto, basta probarlo en cada cubrimiento afín de $\mathbb{P}(\bigwedge^d(V))$. Los casos $d = 1, d = n$ son triviales.

Fijemos una base ordenada $(v_1, \ldots, v_n)$ de V, y asociemos la base $\{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d}\}_{i_1 < \cdots < i_d}$ de $\bigwedge^d V$. Consideremos los abiertos afines U que cubren $\mathbb{P}(\bigwedge^d(V))$ que consisten de puntos cuya coordenada homogénea relativa a $v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d}$ $(i_1 < \cdots < i_d)$ es no nula. Por ejemplo, veamos por simplicidad el caso dado por $v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$. Veamos ahora que la intersección $\operatorname{Im} \psi \cap U$ es cerrada en U. Pongamos D_0 como el subespacio generado por $v_1, \ldots, v_d$. Claramente $\psi(D)$ pertenece a U si y solo si la proyección natural de V sobre D_0 manda D de manera isomorfa a D_0. En este caso, las imágenes inversas de $v_1, \ldots, v_d$ forman una base de D de la forma $v_i + x_i(D)$ donde $x_i(D) := \sum_{j>d} a_{ij} v_j$ (y esta es la única base de D que tiene esta forma). El producto cuña luce de la siguiente forma

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_d + \sum_{i=1}^{d} (v_1 \wedge \cdots \wedge x_i(D) \wedge \cdots \wedge v_d) + (\star),$$

donde $(\star)$ involucre una base de vectores con dos o más $v_1, \ldots, v_d$ omitidos. Aquí se tiene que $v_1 \wedge \cdots \wedge x_i(D) \wedge \cdots \wedge v_d = \sum_{j>d} a_{ij} (v_1 \wedge \cdots \wedge v_j \wedge \cdots \wedge v_d)$ con v_j reemplazado por v_i. Por lo tanto $\pm a_{ij}$ $(1 \leq i \leq d, d+1 \leq j \leq n)$ puede recuperarse como el coeficiente de la base de elementos $v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v_i} \wedge \cdots \wedge v_d \wedge v_j$ (v_i omitido), en el producto cuña de la base de D dada arriba. Más aún, los coeficientes en $(\star)$ son obviamente funciones polinomiales de los a_{ij}, independientes de D.

Recíprocamente, dados $d(n-d)$ escalares a_{ij} arbitrarios, claramente los vectores resultantes $v_i + x_i(D)$ generan un subespacio d-dimensional de V, cuya imagen bajo ψ yace en U. Consecuentemente, $\operatorname{Im} \psi \cap U$ consiste de todos los puntos cuyas coordenadas afines son $(\ldots a_{ij} \ldots, f_k(a_{ij}) \ldots)$, donde los a_{ij} son arbitrarios y los f_k son funciones polinomiales en $\mathbb{A}^{d(n-d)}$. Este conjunto se puede ver como el *grafo* de un morfismo de $\mathbb{A}^{d(n-d)}$ en otro espacio afín. Como los grafos son cerrados en la *topología Zariski producto* ([Mon23, Teorema 2.6.12]), concluimos que $\operatorname{Im} \psi \cap U$ es cerrado en U.

Definición 4.1. Las **variedades Grassmannianas** son los $\mathfrak{G}_d(V)$. Una **bandera** en V, es por definición una cadena

$$0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_k = V$$

de subespacios k-vectoriales de V, tales que las inclusiones son propias. Una **bandera completa** es una en la que $k = \dim V$, i.e., $\dim V_{i+1}/V_i = 1$. $\mathfrak{F}(V)$ denota al conjunto de todas las banderas completas de V. Una vez que brindemos a $\mathfrak{F}(V)$ una estructura de variedad proyectiva, llamaremos a estas variedades: **variedad bandera** de V.

Como vimos en [Mon23, Corolario 2.7.17], el producto de grassmanianas $\mathfrak{G}_1(V) \times \cdots \times \mathfrak{G}_n(V)$ tiene la estructura de variedad proyectiva. Por otro lado, $\mathfrak{F}(V)$ se identifica con un subconjunto en este producto de grassmanianas de manera obvia, luego para darle una estructura de variedad proyectiva basta ver que este conjunto es cerrado. Para simplificar la notación, consideremos solamente el producto $\mathfrak{G}_d(V) \times \mathfrak{G}_{d+1}(V)$, y probemos que el conjunto S de pares (D, D') con $D \subset D'$ es cerrado.

Nuevamente como antes, fijemos una base ordenada $(v_1, \dots, v_n)$ de V, y consideremos dos abiertos afines de $\mathbb{P}(\bigwedge^d(V))$ y $\mathbb{P}(\bigwedge^{d+1}(V))$, de tal suerte que los productos cubren la variedad $\mathfrak{G}_d(V) \times \mathfrak{G}_{d+1}(V)$. Otra vez para simplificar la notación, tomemos estos abiertos afines U, U' definidos relativos a $v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$, $v_1 \wedge \cdots \wedge v_{d+1}$ respectivamente. Si D (respectivamente D') es la imagen en U (respectivamente U'), obtenemos como ante bases canónicas: $v_i + x_i(D)$ $(1 \leq i \leq d)$; $v_i + y_i(D')$ $(1 \leq i \leq d+1)$. Con lo cual $x_i(D) = \sum_{j>d} a_{ij}v_j$, $y_i(D') = \sum_{j>d+1} b_{ij}v_j$. Notemos que $D \subset D'$ si y solo si $x_i(D) = y_i(D') + a_{i,d+1}(v_{d+1} + y_{d+1}(D'))$ para $1 \leq i \leq d$. Esto a su vez se convierte en condiciones polinomiales en los coeficientes a_{ij}, b_{ij}, con lo cual S interseca $U \times U'$ en un cerrado de $U \times U'$.

5. Introducción a Grupos Algebraicos

Sea G una variedad algebraica dotada de estructura de grupo. Si los mapas

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\longrightarrow G \\ (x,y) &\longmapsto xy \end{aligned}, \qquad \begin{aligned} \iota : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto x^{-1} \end{aligned}$$

son morfismos de variedades, decimos que G es un **grupo algebraico**. Notar que un grupo algebraico <u>no</u> es un grupo topológico, excepto cuando la dimensión es 0. En efecto, para grupos topológicos, T_1 es equivalente a T_2, con lo cual si G fuera un grupo topológico con la topología Zariski, entonces sería de dimensión 0.

Trasladar por un elemento $y \in G$, i.e. $x \mapsto xy$, es un isomorfismo de variedades algebraicas $G \to G$, entonces todas las propiedades geométricas que sucedan en un punto de G se transfieren a cualquier otro punto al hacer variar y. Por ejemplo, como G tiene algún punto suave (el conjunto de puntos suaves G_{reg} de la variedad G es un abierto denso de G por [Mon23, Teorema 2.13.12]), todos los puntos de G son suaves, es decir, G es suave.

Definimos un **isomorfismo** de grupos algebraicos G y G', como un isomorfismo de variedades algebraicas $\varphi : G \to G'$ el cual es a su vez un isomorfismo de grupos. Así, un **automorfismo** de G es un isomorfismo de G en G. A partir de ahora nos concentraremos en el caso en el cual la estructura de variedad de G sea afín, y seguiremos nombrándola "grupo algebraico".

Ejemplo 5.1. El **grupo aditivo** $\mathbb{G}_a$ es la recta afín $\mathbb{A}^1$ con la estructura de grupo dada por la suma $\mu(x,y) = x+y$ y $\iota(x) = -x$. El **grupo multiplicativo** $\mathbb{G}_m$ es el abierto afín $k^\times \subset \mathbb{A}^1$ con la estructura de grupo dada por la multiplicación $\mu(x,y) = xy$ y $\iota(x) = x^{-1}$. Notar que ambos grupos son variedades irreducibles de dimensión 1.

Más en general, $\mathbb{A}^n$ es un grupo algebraico con la estructura aditiva.

Ejemplo 5.2. Sea $\mathrm{GL}_n(k)$ el conjunto de todas las matrices invertibles con coeficientes en k y de tamaño $n \times n$. Es un grupo con la multiplicación de matrices, y se lo suele llamar el **grupo general lineal**. El conjunto $M_n(k)$ de las matrices con coeficientes en k y de tamaño $n \times n$ puede ser identificado con $\mathbb{A}^{n^2}$, y $\mathrm{GL}_n(k)$ con el abierto principal definido por la función polinomial det. Así, visto como una variedad afín, $\mathrm{GL}_n(k)$ tiene su álgebra de funciones regulares generada por las restricciones de las n^2 funciones coordenada T_{ij} junto con $1/\det(T_{ij})$. Claramente la multiplicación e inversión de matrices son morfismos de variedades algebraicas, y por lo tanto $\mathrm{GL}_n(k)$ es un grupo algebraico.

Observación 5.3. Un subgrupo cerrado de un grupo algebraico es nuevamente un grupo algebraico.

Demostración. Sea $H \leq G$ un subgrupo cerrado para la topología Zariski de un grupo algebraico G, entonces H tiene una estructura de variedad inducida por G. Más aún, los morfismos $\mu : G \times G \to G$ y $\iota : G \to G$ se restringen y correstringen a $H \times H \to H$ y $H \to H$, respectivamente, y siguen siendo morfismos regulares. $\square$

Gracias a esta observación, podemos construir más ejemplos de grupos algebraicos:

Ejemplo 5.4. El grupo de **matrices triangulares superiores** (análogamente las triangulares inferiores) $T_n(k)$ es el conjunto de ceros en $\mathrm{GL}_n(k)$ de los polinomios T_{ij} con $i > j$. También tenemos los subgrupos $D_n(k)$ y $U_n(k)$ de las matrices diagonales y las matrices triangulares superiores con entradas 1 en la diagonal son cerrados de $\mathrm{GL}_n(k)$. En efecto, como recién, las matrices diagonales es el conjunto de ceros de T_{ij} con $i \neq j$ y las matrices de $U_n(k)$ son los ceros de T_{ij} con $i > j$ y $T_{ii} - 1$.

Observación 5.5. El **producto directo** de finitos grupos algebraicos es nuevamente un grupo algebraico con la topología producto Zariski y la estructura de grupo dada por el producto cartesiano de grupos. Con un poco más de esfuerzo se puede probar que el **producto semidirecto** de dos grupos algebraicos es nuevamente un grupo algebraico con la topología producto Zariski y la estructura de grupo dada por el producto semidirecto de grupos abstractos.

Demostración. Veamos solo el caso de producto de dos grupos algebraicos G_1, G_2, el caso general se sigue por inducción. Solo tenemos que probar que

$$\begin{array}{ll} \mu : G_1 \times G_2 \times G_1 \times G_2 & \longrightarrow G_1 \times G_2 \\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) & \longmapsto (x_1 y_1, x_2 y_2) \end{array}, \quad \begin{array}{ll} \iota : G_1 \times G_2 & \longrightarrow G_1 \times G_2 \\ (x_1, x_2) & \longmapsto (x_1^{-1}, x_2^{-1}) \end{array}$$

son morfismos regulares. Pero por la propiedad universal del producto de variedades (ver [Mon23, Teorema 2.6.5]) basta ver que estos mapas son regulares cuando componemos por la proyección a la primera o segunda coordenada. Esto es obvio, pues G_1 y G_2 son grupos algebraicos, con lo cual sus respectivos mapas μ y ι son regulares. □

Finalmente, mencionamos algunos otros nombres de grupos algebraicos clásicos: el **grupo especial lineal** $\mathrm{SL}_n(k)$ de matrices de $\mathrm{GL}_n(k)$ con determinante 1 (es el conjunto de ceros de $\det(T_{ij})-1$); el **grupo simpléctico** $\mathrm{Sp}_{2n}(k)$ dada por las matrices $x \in \mathrm{GL}_{2n}(k)$ tales que ${}^t x \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix}$, donde J es la matriz de tamaño $n \times n$ que tiene 1 en la antidiagonal y ceros en el resto de los lugares, y ${}^t x$ es la matriz transpuesta de x (es el conjunto de ceros dada por ciertas condiciones polinomiales en x); el **grupo especial ortogonal** $\mathrm{SO}_{2n+1}(k)$ que en $\mathrm{Char}\, k \neq 2$ consiste de las matrices $x \in \mathrm{SL}_{2n+1}(k)$ tales que ${}^t x s x = s$, donde $s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J \\ 0 & J & 0 \end{pmatrix}$, y también existe otro **grupo especial ortogonal** $\mathrm{SO}_{2n}(k)$ dada por ${}^t x s x = s$, donde ahora $s = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix}$ si $\mathrm{Char}\, k \neq 2$[1].

6. La componente de la identidad

Sea G un grupo algebraico. Afirmamos que una sola componente irreducible de G (como variedad algebraica) puede pasar por 1. En efecto, sea $X_1, \ldots, X_m$ las componentes distintas que contengan a 1. La imagen de la variedad irreducible $X_1 \times \cdots \times X_m$ en G bajo el morfismo producto es un subconjunto irreducible $X_1 \cdots X_m$ de G, que vuelve a contener a e. Por lo tanto $X_1 \cdots X_m$ está contenido en algún X_i. Por otro lado, claramente todas las componentes $X_1, \ldots, X_m$ están contenidas en $X_1 \cdots X_m$. Esto fuerza a que $m = 1$. Con lo cual, la siguiente definición tiene sentido:

Definición 6.1. Sea G un grupo algebraico. Denotamos por G° a la única componente irreducible de G que contiene a 1. La llamaremos **componente de la identidad** de G.

Proposición 6.2. *Sea G un grupo algebraico. Entonces:*

(1) G° es un subgrupo normal cerrado de índice finito en G, cuyos coclases son las componentes conexas, como también las componentes irreducibles de G.
(2) Todo subgrupo cerrado de índice finito de G contiene a G°.

Demostración. (1) Para cada $x \in G^\circ$, $x^{-1}G^\circ$ es una componente irreducible de G que contiene a 1, luego por unicidad $x^{-1}G^\circ = G^\circ$. Es decir, $G^\circ = (G^\circ)^{-1}$ y por lo tanto $G^\circ G^\circ = G^\circ$, i.e., G° es un subgrupo cerrado (es una componente irreducible) de G. Para todo $x \in G$, nuevamente $xG^\circ x^{-1}$ es una componente irreducible de G que contiene a 1, con lo cual la unicidad fuerza a que $xG^\circ x^{-1} = G^\circ$, i.e., G° es normal en G. Sus coclases a izquierda o derecha son traslaciones de G°, y por lo tanto deben ser componentes irreducibles de G; solamente puede haber un número finito de estos (G es un espacio Noetheriano; ver [Mon23, Teorema 2.8.9]), en particular G° tiene índice finito. Como estos conjuntos son disjuntos, deben ser también componentes conexas de G, ya que los conjuntos irreducibles en un espacio topológico son conexos, y al ser finitos cerrados (son componentes irreducibles) disjuntos también son abiertos.

[1]En general los grupos simpléctico y especial ortogonales surgen geométricamente de grupos de transformaciones lineales que preservan ciertas formas bilineales, pero en característica $\mathrm{Char}\, k = 2$ hay que tener cierto cuidado al definirlos, cf [Die56], [Car89, Ch. 1].

(2) Si H es un subgrupo cerrado de índice finito en G, entonces cada uno de sus finitas coclases a izquierda son también cerrados, con lo cual la unión de los coclases distintos de H también lo es. Como el complemento de un cerrado es abierto, tenemos que H es abierto. Consecuentemente, las coclases a izquierda de H particionan G° en una unión finita de abiertos-cerrados, como G° es conexo e interseca H, debe ser que $G^\circ \subset H$.

□

Esto motiva a la siguiente definición:

Definición 6.3. Diremos que un grupo algebraico es **conexo**[2] si $G = G^\circ$.

Ejemplo 6.4. La mayoría de los grupos algebraicos que hemos mencionado son conexos: $\mathbb{G}_a, \mathbb{G}_m, \mathrm{GL}_n(k), \mathrm{SL}_n(k)$. Que $\mathrm{GL}_n(k)$ es conexo es consecuencia de ser un abierto principal del espacio afín $\mathbb{A}^{n^2}$. Sin embargo, probar tanto que $\mathrm{SL}_n(k)$ como otros grupos clásicos son conexos no se deduce trivialmente de la definición de estos grupos (ver el Ejemplo 7.9).

7. Subgrupos y Homomorfismos

Usaremos en esta sección un lema útil:

Lema 7.1. *Sean U, V dos abiertos densos de un grupo algebraico G. Entonces $G = UV$.*

Demostración. Como invertir es un isomorfismo de variedades, V^{-1} es un abierto denso de G; similarmente, las traslaciones xV^{-1} con $x \in G$ son abiertos densos. Por lo tanto U interseca xV^{-1}, forzando a que $x \in UV$. Como $x \in G$ era arbitrario se tiene el lema. □

Definición 7.2. Un **morfismo de grupos algebraicos** es un homomorfismo de grupos $\varphi : G \to G'$ que también es un morfismo de variedades algebraicas.

Proposición 7.3. *Sea H un subgrupo de un grupo algebraico G, sea $\overline{H}$ su clausura en la topología Zariski. Entonces:*

(a) $\overline{H}$ es un subgrupo de G. En particular, como es cerrado es un subgrupo algebraico de G.
(b) Si H es constructible[3]*, entonces $H = \overline{H}$.*
(c) Más en general, si $\varphi : G \to G'$ es un morfismo de variedades algebraicas y H es un subgrupo constructible de G, entonces $\varphi(H)$ es cerrado en G' (en particular, como los cerrados de G son constructibles, φ es cerrado).

Demostración. (a) Como invertir es un isomorfismo de variedades, $\overline{H}^{-1} = \overline{H^{-1}} = \overline{H}$. Similarmente, trasladar por $x \in H$ es un isomorfismo de G, por lo tanto $x\overline{H} = \overline{xH} = \overline{H}$, es decir, $H\overline{H} \subset \overline{H}$. Similarmente $\overline{H}H \subset H$. Esto prueba que $\overline{H}$ es un grupo.

(b) Si H es constructible, contiene un conjunto $U \cap V$ con U abierto (no vacío) y V cerrado, entonces $W := U \cap V \subset \overline{H}$ es un abierto denso de $\overline{H}$. Por el ítem (a) sabemos que $\overline{H}$ es un grupo algebraico, y por el lema de arriba $\overline{H} = WW \subset HH = H$.

(c) Sea $H' := \varphi(H)$, es un subgrupo de G'. El Teorema de Chevalley probado en la entrega de ejercicios del curso MAT426 dice que H' es constructible. Luego el ítem (b) implica que H' es cerrado.

□

Corolario 7.4. *Sean A, B subgrupos cerrados de un grupo algebraico G. Si B normaliza*[4] *A, entonces AB es un subgrupo cerrado de G.*

Demostración. Como $B \subset N_G(A)$, AB es un subgrupo de G. Como $A \times B$ es un subgrupo cerrado, en particular constructible en $G \times G$, el ítem (c) de la proposición de arriba dice que la imagen AB del morfismo de grupos $\mu : G \times G \to G$ es cerrado en G. □

Proposición 7.5. *Sea $\varphi : G \to G'$ un morfismo de grupos algebraicos. Entonces:*

(a) $\operatorname{Ker}\varphi$ es un subgrupo cerrado de G.
(b) $\operatorname{Im}\varphi$ es un subgrupo cerrado de G'.

---

[2]El uso del término “irreducible” tiene reservado un significado totalmente distinto en el contexto de grupos lineales y representaciones de grupos.

[3]Unión finita de conjuntos $U \cap V$ con U abiertos y V cerrado.

[4]Es decir, $B \subset N_G(A)$.

(c) $\varphi(G^\circ) = \varphi(G)^\circ$.
(d) $\dim G = \dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi$.

Demostración. (a) Como φ es continuo y el $\operatorname{Ker} \varphi$ es por definición la preimagen del conjunto cerrado $\{1\}$, entonces $\operatorname{Ker} \varphi$ es cerrado. Ya sabemos que es un subgrupo.

(b) $\varphi(G)$ es un subgrupo de G'. Como G es trivialmente constructible en G, el ítem (c) de la proposición de arriba implica que la imagen es cerrada.

(c) $\varphi(G^\circ)$ es cerrada por el ítem (c) de la proposición de arriba (G° es cerrado en G, en particular constructible) y es conexo (G° es conexo), como contiene al 1, debe estar contenido en $\varphi(G)^\circ$ (esta notación cobra sentido pues el ítem (b) dice que la imagen de φ es una subvariedad algebraica de G'), ya que las coclases de $\varphi(G)^\circ$ son las componentes conexas de $\varphi(G)$ (ítem (1) de la Proposición 6.2). Por otro lado, como G° tiene índice finito en G, $\varphi(G^\circ)$ tiene índice finito en $\varphi(G)$, con lo cual contiene a $\varphi(G)^\circ$, i.e., $\varphi(G^\circ) = \varphi(G)^\circ$, por el ítem (b) de la Proposición 6.2.

(d) [Mon23, Ítem (2) del Teorema 2.12.9] nos dice que para casi todo $x \in \varphi(G)$, $\dim G - \dim \varphi(G) = \dim \varphi^{-1}(x)$. Pero todas las fibras $\varphi^{-1}(x)$ tienen la dimensión de $\operatorname{Ker} \varphi$, y se sigue la afirmación. En efecto, $\varphi^{-1}(x) = x \operatorname{Ker} \varphi$, y trasladar por x es un isomorfismo de variedades. Como las componentes irreducibles de G son traslaciones de Γ° (ítem (a) de la Proposición 6.2), y trasladar es un isomorfismo de variedades algebraicas, tenemos que $\dim G = \dim G^\circ$ y $\dim \varphi(G) = \dim \varphi(G)^\circ$, por lo tanto el ítem anterior nos permite restringirnos a $\varphi\big|_{G^\circ} : G^\circ \twoheadrightarrow \varphi(G)^\circ$, con lo cual podemos suponer que φ es sobreyectiva y que G y G' son variedades irreducibles. El ítem (c) de la proposición de arriba dice que φ es cerrado, por lo que podemos rematar la demostración utilizando [Mon23, Teorema 2.12.13]:

> Sea $f : X \twoheadrightarrow Y$ un morfismo regular sobreyectivo y cerrado entre variedades algebraicas. Supongamos que
> (I) Y es irreducible, y que
> (II) Todas las fibras de f son irreducibles de la misma dimensión $d \in \mathbb{N}N$.
> Entonces, X es irreducible y $\dim(X) = \dim(Y) + d$.

□

Ejemplo 7.6. Consideremos el morfismo de grupos algebraicos $\varphi = \det : \mathrm{GL}_n(k) \to \mathrm{GL}_1(k)$ sobreyectivo y el núcleo es $\mathrm{SL}_n(k)$. Por el ítem (d) del corolario de arriba, tenemos que $\dim \mathrm{SL}_n(k) = n^2 - 1$ (la dimensión de $\mathrm{GL}_n(k)$ es n^2 pues es un abierto de $\mathbb{A}^{n^2}$).

Observación 7.7. Dado un k-espacio vectorial n-dimensional V, podemos fijar una base de V e identificar al grupo transformaciones lineales invertibles $\mathrm{GL}(V)$ de V con el grupo de matrices $\mathrm{GL}_n(k)$, y hacerle heredar la estructura de grupo algebraico proveniente del grupo general lineal; llamemos **topología Zariski** a esta topología en $\mathrm{GL}(V)$. Como cambiar de base en k^n corresponde con aplicar un automorfismo $x \mapsto yxy^{-1}$ en $\mathrm{GL}_n(k)$, la topología Zariski de $\mathrm{GL}(V)$ no depende de la base de V elegida.

Un resultado útil para probar que algunos grupos algebraicos son grupos conexos, es el siguiente:

Proposición 7.8. *Sea G un grupo algebraico, Y_i con $i \in I$ una familia de subgrupos conexos y cerrados de G que lo generan como grupo. Entonces G es conexo.*

Demostración. La demostración de este resultado se obtiene como corolario de [Hum12, Proposición §7.5]. □

Ejemplo 7.9. Se tiene entonces que $\mathrm{SL}_n(k)$ y $U_n(k)$ son grupos conexos. En efecto, el primero está generado por los subgrupos U_{ij} con $i \neq j$, donde U_{ij} consiste de las matrices con 1 en la diagonal, una entrada arbitraria en la posición (i, j), y ceros en el resto; similarmente, el segundo grupo está generado por los U_{ij} con $i < j$. Notar que U_{ij} es isomorfo como grupo algebraico a $\mathbb{G}_a$ pues la multiplicación de matrices se convierte en $(k, +)$ en la coordenada (i, j), i.e., U_{ij} es conexo.

8. Acciones de grupos algebraicos sobre variedades

Definición 8.1. Sea G un grupo algebraico y X una variedad algebraica. Supongamos que tenemos una acción del grupo subyacente G en el conjunto X, digamos $\varphi : G \times X \to X$ de tal suerte que es un morfismo de variedades algebraicas (el dominio es la variedad producto), entonces decimos que G **actúa mórficamente** en X (o cuando no haya confusión, diremos simplemente que actúa en X).

Si G actúa mórficamente sobre dos variedades algebraicas X, Y, decimos que un morfismo $f : X \to Y$ es **G-equivariante** si $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ para todo $g \in G$ y $x \in X$.

Proposición 8.2. *Sea un grupo algebraico G actuando mórficamente en una variedad algebraica X. Sean Y, Z subconjuntos de X con Z cerrado. Entonces:*

1. $\mathrm{Tran}_G(Y, Z)$ *es cerrado en* G.
2. *Para cada $x \in X$, G_x es un subgrupo cerrado de G; en particular G_S es cerrado para todo $S \subset X$.*
3. *El conjunto de puntos fijos de $g \in G$ es cerrado en X; en particular, X^G es cerrado.*
4. *Si G es un grupo algebraico conexo, entonces estabiliza cada componente irreducible de X, en particular actúa trivialmente en X si este es finito.*

Demostración. 1. Para cada $x \in X$, tenemos el mapa de la órbita de x, es decir

$$\begin{aligned} \varphi_x : G &\longrightarrow X \\ g &\longmapsto g \cdot x, \end{aligned}$$

el cual es la composición de $g \mapsto (g, x)$ con φ, y por lo tanto es un morfismo de variedades algebraicas. Como

$$\mathrm{Tran}_G(Y, Z) = \bigcap_{x \in Y} \varphi_x^{-1}(Z)$$

es la intersección de cerrados, es cerrado en G.
2. Como $G_x = \mathrm{Tran}_G(\{x\}, \{x\})$, G_x es cerrado de G por el ítem anterior. Así, $G_S = \bigcap_{x \in S} G_x$ también es cerrado.
3. Sea $g \in G$, consideremos el morfismo algebraico $\psi : X \to X \times X$ dado por $x \mapsto (x, g \cdot x)$. El conjunto de puntos fijos X^g es precisamente la preimagen de la diagonal vía ψ, la cual es cerrada porque X es una variedad algebraica, luego X^g es cerrado.
4. Supongamos que G es un grupo conexo. El estabilizador H en G de una componente irreducible de X es cerrada por el primer ítem, además es un subgrupo de G. Como G permuta estas finitas componentes de X, H tiene índice finito en G. Con lo cual el ítem (2) de la Proposición 6.2 implica que $H = G$.

□

Corolario 8.3. *Sea G un grupo algebraico, y H un subgrupo cerrado. Entonces $N_G(H)$ y $C_G(H)$ son subgrupos cerrados; también lo es $C_G(g)$, para cualquier $g \in G$.*

Demostración. Para probar que $C_G(H)$ o $C_G(x)$ son cerrados, basta aplicar el ítem 2. de la proposición de arriba, simplemente hay que considerar la acción mórfica de G en si mismo por automorfismos internos. Para $N_G(H)$, aplicamos el ítem 1. y el hecho de que $N_G(H) = \mathrm{Tran}_G(H, H)$ vía esta acción. En efecto, el automorfismo Int_x con $x \in G$ manda H a un subgrupo cerrado de G, de la misma dimensión que H (es un isomorfismo de variedades algebraicas), y la componente de la identidad tiene índice $[H : H^\circ]$. Con lo cual Int_x manda H inyectivamente en H si y solo si manda H sobreyectivamente a H. En otras palabras, $x \in N_G(H)$ si y solo si $x \in \mathrm{Tran}_G(H, H)$. □

8.1. Órbitas cerradas.

Proposición 8.4. *Sea G un grupo algebraico actuando mórficamente en una variedad algebraica X. Entonces cada órbita es un subconjunto suave localmente cerrado de X, cuya frontera es la unión de algunas órbitas con dimensión estrictamente menor. En particular, las órbitas de dimensión minimal son cerradas (y por lo tanto existen órbitas cerradas).*

Demostración. Sea $Y := G \cdot y$ la órbita de $y \in X$. Como la imagen de G bajo el mapa de la órbita $\varphi_y : G \to X$, Y es constructible, luego el Teorema de Chevalley dice que existe un abierto denso de $\overline{Y}$. Como G actúa transitivamente en Y (dejando $\overline{Y}$ estable), Y tiene que ser suave (existe al menos un punto suave y podemos trasladarlo a cualquier punto de Y), así Y es suave y contiene un abierto de $\overline{Y}$ en cada uno de sus puntos (trasladando), luego Y es abierto en $\overline{Y}$. Por lo tanto $\overline{Y} \setminus Y$ es cerrado y de dimensión estrictamente menor que $\overline{Y}$. Como es G-estable, esta frontera es justamente la unión de las otras G-órbitas. □

8.2. Traslación de funciones. Es interesante notar que dado un grupo algebraico G actuando sobre una variedad afín X, entonces G actúa naturalmente sobre $\Gamma = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$:

$$\begin{aligned} L_g : \Gamma &\longrightarrow \Gamma \\ f &\longmapsto L_g(f)(y) = f(g^{-1} \cdot x), \forall x \in X \end{aligned}, \qquad \begin{aligned} R_g : \Gamma &\longrightarrow \Gamma \\ f &\longmapsto R_g(f)(y) = f(x \cdot g), \forall x \in X \end{aligned}$$

para cualquier $g \in G$ fijo. A la función L_g la llamamos **traslación a izquierda** y a R_g **traslación a derecha** (por g). Así, $g \mapsto L_g$ y $g \mapsto R_g$ son acciones de G en Γ. Estas operaciones son importantes, por ejemplo caracterizan contención en un subgrupo cerrado:

Proposición 8.5. *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo algebraico afín G. Sea I el ideal de $\Gamma(G, \mathcal{O}_G)$ de las funciones regulares de G que se anulan en H. Entonces $H = \{ g \in G \mid R_g(I) \subset I \}$.*

Demostración. Por un lado, si $g \in H$ y $f \in I$, entonces $L_g(x) = f(x \cdot g) = 0$ para todo $x \in H$ pues H es cerrado por el producto, i.e., $L_g(f) \in I$. Por otro lado, si $L_g(I) \subset I$, se tiene que $L_g(f)$ se anula en $1 \in H$ para todo $f \in I$, es decir, $f(g) = 0$, consecuentemente, $g \in \overline{H} = H$. □

8.3. Linearización de grupos afines. Habíamos observado (5.3) que todo subgrupo cerrado de $\mathrm{GL}_n(k)$ es un grupo algebraico (afín). Sin embargo, vale también la recíproca cuando G es afín: construiremos un subespacio de dimensión finita de $\Gamma := \Gamma(G, \mathcal{O}_G)$, en el cual G actuará por traslación. Antes necesitamos algunos resultados preliminares:

Proposición 8.6. *Sea G un grupo algebraico actuando afín mórficamente en una variedad afín X, y sea V un subespacio de dimensión finito de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Entonces:*

(a) Existe un subespacio de dimensión finita W de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ conteniendo a V, el cual es estable por traslaciones L_g, $g \in G$.
(b) V es estable por la acción de los L_g, $g \in G$ si y solo si $\psi^*(V) \subset \Gamma \otimes_k V$, donde $\psi : G \times X \to X$ está dada por $\psi(g, x) := g^{-1} \cdot x$.
(c) Valen los ítems (a) y (b) cambiando L_g por R_g, y cambiando ψ por $\nu : X \times G \to X$ dada por $\nu(x, g) = x \cdot g$.

Demostración. (a) Sin pérdida de generalidad podemos suponer que V es 1-dimensional y está generado por un solo elemento $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, pues podemos sumar los subespacios W obtenidos. Escribamos $\psi^*(f) = \sum_i f_i \otimes g_i \in \Gamma \otimes_k \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Para cada $g \in G$, $x \in X$, tenemos $L_g(f)(x) = f(g^{-1} \cdot x) = \sum_i f_i(g) g_i(x)$, y por lo tanto $L_g f = \sum_i f_i(g) g_i$. Las funciones g_i por lo tanto genera un subespacio de dimensión finita de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, el cual contiene a f. Así, podemos tomar W como el generado por los $L_g f$ funciona.
(b) Si $\psi^* V \subset \Gamma \otimes_k V$, entonces inspeccionando la demostración del ítem anterior vemos que las funciones g_i pueden tomarse en V, es decir, V es estable bajo los L_g, $g \in G$. Recíprocamente, sea V estable por estas traslaciones, y extendamos una base $\{f_i\}_i$ del espacio vectorial V a una base $\{f_i\}_i \cup \{g_j\}_j$ de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Escribiendo $\psi^* f = \sum_i r_i \otimes f_i + \sum_j s_j \otimes g_j$, se sigue que $L_g f = \sum_i r_i(g) f_i + \sum_j s_j(g) g_j$. Como $L_g f$ pertenece a V, las funciones s_j deben anularse en G (y por lo tanto son cero porque k es algebraicamente cerrado), es decir, $\psi^* V \subset \Gamma \otimes_k V$.
(c) La demostración de este hecho es completamente análogo a lo que ya hicimos.

□

Teorema 8.7. *Sea G un grupo algebraico afín. Entonces G es isomorfo a un subgrupo cerrado para algún $\mathrm{GL}_n(k)$.*

Demostración. Tomemos generadores $f_1, \dots, f_n$ de la k-álgebra finitamente generada Γ. Por el ítem (c) de la proposición anterior, aplicado al subespacio V generado por estos f_i, podemos encontrar un subespacio de dimensión finita W de Γ, estable por las traslaciones R_g con $g \in G$. Cambiando de notación, podemos suponer que los f_i generan una base de W (y también la k-álgebra Γ). Sea $\nu : G \times G \to G$ dada por $\nu(x, y) = yx$, el ítem (c) de la proposición de arriba, podemos escribir $\nu^* f_i = \sum_j m_{ij} \otimes f_j$, con $m_{ij} \in \Gamma$. Entonces $R_x f_i(y) = f_i(yx) = \sum_j m_{ij}(x) f_j(y)$, por lo tanto $R_x f_i = \sum_j m_{ij(x) f_j}$. En otras palabras, la matriz de $L_x\big|_W$ relativa a la base $(f_1, \dots, f_n)$ es $(m_i j(x))_{ij}$. Esto prueba que

$$
\begin{aligned}
\sigma : G &\longrightarrow \mathrm{GL}_n(k) \\
x &\longmapsto (m_{ij}(x))_{ij}
\end{aligned}
$$

es un morfismo de grupos algebraicos ($m_{ij} \in \Gamma$).

Observemos que $f_i(x) = f_i(1 \cdot x) = \sum_j m_{ij}(x) f_j(1)$, i.e., $f_i = \sum_j f_j(1) m_{ij}$. Esto muestra que los m_{ij} generan Γ; en particular σ es inyectivo. Más aún, la imagen $G' := \sigma(G)$ es un subgrupo cerrado en $\mathrm{GL}_n(k)$ por el ítem (b) de la Proposición 7.5. Finalmente, nos resta probar que σ es un isomorfismo de variedades algebraicas. Pero la restricción a G' de las funciones coordenada T_{ij} son enviadas vía σ^* a los m_{ij} respectivos, los cuales generan Γ. Luego σ^* es sobreyectivo, e induce un isomorfismo de k-álgebras entre $\Gamma(G', \mathcal{O}_{G'})$ y Γ. □

9. Cocientes

Dado un subgrupo cerrado H de un grupo algebraico afín G, existe un morfismo G-equivariante *separable*[5] $\pi : G \to Y$ con fibras las coclases gH. Cuando H es normal en G, Y se puede tomar como un grupo algebraico afín y π un homomorfismo de grupos. Más aún, se verifica la siguiente propiedad universal: dada una variedad algebraica X y un morfismo $\varphi : G \to X$ cuyas fibras no vacías son uniones de coclases gH, entonces existe un único morfismo $\overline{\varphi} : Y \to X$ tal que $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$. Como es usual, el par (π, Y) es único salvo isomorfismo de variedades. Por lo tanto tenemos todo el derecho de llamar a Y el **espacio homogéneo** G/H y llamar a π el **morfismo canónico**. De manera análoga, podemos hablar del espacio $H\backslash G$ de coclases Hg. Para una discusión rigurosa se sugiere consultar las secciones 11 y 12 de [Hum12].

10. Descomposición de Jordan-Chevalley

10.1. Descomposición de un endomorfismo. Sea $x \in \operatorname{End} V$, donde V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre k. Entonces decimos que x es **nilpotente**, si $x^n = 0$ para algún n; equivalentemente, 0 es el único autovalor de x. En contraste, decimos que x es **semisimple**, si el polinomio minimal de x tiene todas sus raíces distintas; equivalentemente x es diagonalizables sobre k. Por otro lado, un endomorfismo invertible x se dice **unipotente**, si se puede escribir como la identidad mas un endomorfismo nilpotente; equivalentemente, su único autovalor es 1.

Recordemos el *Teorema de descomposición de Jordan (aditivo):*

Lema 10.1. *Sea $x \in \operatorname{End} V$. Entonces:*

(i) *Existen únicos elementos $x_s, x_n \in \operatorname{End} V$ tales que $x = x_s + x_n$ con x_s semisimple, x_n nilpotente, y $x_s x_n = x_n x_s$.*
(ii) *Existen polinomios $p(T), q(T)$ en la variable T tales que $p(0) = q(0) = 0$, y de tal suerte que $x_s = p(x)$ y $x_n = q(x)$. En particular, x_s y x_n conmutan con cualquier endomorfismo de V que conmute con x.*
(iii) *Si $A \subset B \subset V$ son subespacios, y x manda B en A, entonces x_s y x_n también.*
(iv) *x y x_s tienen los mismos autovalores.*
(v) *Si $xy = yx$ para algún $y \in \operatorname{End} V$, luego $(x + y)_s = x_s + y_s$ y $(x + y)_n = x_n + y_n$.*

Si $x \in \mathrm{GL}(V)$, entonces sus *autovalores* (i.e., *valores propios*) son no nulos y por lo tanto $x_s \in \mathrm{GL}(V)$ (ítem (d)). Así, tiene sentido escribir $x_u = 1 + x_s^{-1} x_n$, y obtenemos el *Teorema de descomposición de Jordan (multiplicativo)*, i.e., x se puede escribir de manera única como $x_s x_u = x_u x_s$, donde $x_s \in \mathrm{GL}(V)$ es un endomorfismo semisimple y $x_u \in \mathrm{GL}(V)$ un endomorfismo unipotente. En efecto, por construcción, $x_u := 1 + x_s^{-1} x_n$ y como x_s, x_n conmutan entre sí, $x_s^{-1} x_n$ es nilpotente pues x_n lo es. Recíprocamente, si $x = su$ con s semisimple, $u = 1 + n$ unipotente (y n nilpotente) tales que s y u conmutan entre sí, entonces $x = x_s + x_n$ con x_s, x_n conmutando entre sí y $x_s := s$ semisimple, $x_n := sn$ nilpotente. Por lo tanto podemos el lema de arriba prueba:

Lema 10.2. *Sea $x \in \mathrm{GL}(V)$. Entonces:*

(i) *Existen únicos $x_s, x_u \in \mathrm{GL}(V)$ tales que $x = x_s x_u$, con x_s semisimple, x_u unipotente y $x_s x_u = x_u x_s$.*
(ii) *x_s y x_u conmutan con cualquier endomorfismo de V que conmute con x.*
(iii) *Si A es un subespacio de V estable bajo x, entonces A estable bajo x_s, x_u.*
(iv) *x y x_s tienen los mismos autovalores.*
(v) *Si $xy = yx$ para algún $y \in \operatorname{GL} V$, luego $(xy)_s = x_s y_s$ y $(xy)_u = x_u y_u$.*

Notación 10.3. A los endomorfismos únicos que descomponen (aditiva o multiplicativa) a x, los llamamos: x_s la **parte semisimple**, x_n la **parte nilpotente**, y x_u la **parte unipotente**.

Observación 10.4. Con la notación de arriba, si V (no necesariamente de dimensión finita) es la unión de subespacios de dimensión finita estables bajo x, entonces las descomposiciones $x\big|_W = (x\big|_{|}W)_s(x\big|_{|}W)_u$ y $x\big|_W = (x\big|_{|}W)_s + (x\big|_W)_n$ existen para cualquiera de estos subespacios W. Más aún, la restricción de un endomorfismo semisimple, nilpotente, unipotente a una intersección $W \cap W'$ es del mismo tipo, respectivamente, por lo tanto podemos combinar estas descomposiciones para obtener un endomorfismo x, nuevamente a esta descomposición la podemos notar $x = x_s x_u$ o $x = x_s + x_n$. Es importante notar que por el ítem (c) de ambos lemas de arriba, x_s, x_n, x_u dejan estables todo subespacio de V (de dimensión finita o no) que sea estable por x.

[5]No definiremos esto ya que no lo usaremos en ningún momento, pero se puede consultar la definición formal en [Hum12].

El comportamiento de endomorfismos semisimples a prácticamente idéntico cuando la característica de k es cero o no. Sin embargo, no para endomorfismos unipotentes: si $\operatorname{Char} k = p > 0$, entonces $x \in \mathrm{GL}(V)$ es unipotente si y solo si $x^{p^i} = 1$ para algún i, en efecto, si n es un endomorfismo nilpotente, se tiene que para todo $j \geq 1$ la identidad $(1+n^{p^j}) = (1+n)^{p^j}$. En cambio, si $\operatorname{Char} k = 0$, un endomorfismo unipotente distinto de 1 tiene orden infinito: si tuviera orden finito sería semisimple, pues su polinomio minimal dividiría el polinomio $T^m - 1$ para algún m que tiene todas sus raíces distintas, luego notar que el único endomorfismo unipotente semisimple es 1. En este caso, tiene sentido definir las series de potencias *exponencial* y *logaritmo*: si n es un endomorfismo nilpotente, luego $\exp n := \sum_{i=0}^{\infty} n^i/i!$ es un polinomio y define un elemento de $\mathrm{GL}(V)$, que es unipotente; si u es unipotente, entonces $u-1$ es nilpotente y la serie $\log u := \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}(u-1)^i/i$ es un polinomio que define un endomorfismo nilpotente de V. Además, las identidades formales usuales de estas series de potencias implican las identidades $\exp\log u = u$ y $\log\exp n = n$.

Lema 10.5. *Supongamos que* $\operatorname{Char} k = 0$*. Si* $1 \neq x \in \mathrm{GL}(V)$ *es unipotente, el mapa*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{G}_a &\longrightarrow \mathrm{GL}(V) \\ \lambda &\longmapsto \exp(\lambda \cdot n), \end{aligned}$$

donde $n := \log x$*, define un isomorfismo* $\mathbb{G}_a$ *en un subgrupo cerrado de* $\mathrm{GL}(V)$*, el cual es el único subgrupo cerrado más chico de* $\mathrm{GL}(V)$ *que contiene a* x*. En particular, todo subgrupo conexo cerrado* 1*-dimensional de* $\mathrm{GL}(V)$ *que contiene un elemento unipotente distinto de* 1 *debe ser isomorfo a* $\mathbb{G}_a$*.*

Demostración. Claramente φ define un morfismo de variedades, el cual más aún es un homomorfismo de grupos por las propiedades formales de la serie exponencial $(\exp((T+T')n) = (\exp Tn)(\exp T'n)$ en el anillo de series de potencias formales en las variables T, T' sobre el subanillo conmutativo $k[n] \subset \operatorname{End} V)$. Más aún, $\varphi(1) = x$. De hecho, φ es un isomorfismo, ya que

$$\lambda n = \log\exp(\lambda n) = \log\varphi(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}(\varphi(a)-1)^i/i$$

es polinomial en $\varphi(\lambda)$. Finalmente, como x tiene orden finito (porque $x \neq 1$), la clausura del subgrupo generado por x en $\mathrm{GL}(V)$ tiene dimensión al menos 1, y por lo tanto debe coincidir con el subgrupo cerrado irreducible $\varphi(\mathbb{G}_a)$ de dimensión 1. $\square$

10.2. Descomposición de Jordan en grupos algebraicos. Si G es un subgrupo arbitrario de $\mathrm{GL}_n(k)$, no es razonable esperar que G contenga la parte semisimple o la parte unipotente de cualquiera de sus elementos. Sin embargo, si G es cerrado, esto si sucede. La razón se vuelve evidente si recordamos la Proposición 8.5:

Proposición 10.6. *Sea* $G = \mathrm{GL}_n(k)$*. Si* $x \in G$*, entonces* R_x *tiene descomposición de Jordan* $R_{x_s}R_{x_u}$*.*

Demostración. Como $\Gamma := \Gamma(G, \mathcal{O}_G)$ es la unión de subespacios de dimensión finita estables bajo R_x, tenemos descomposición de Jordan como discutimos en la subsección anterior. Más aún, $R_x = R_{x_s}R_{x_u}$, y los operadores conmutan, con lo cual basta ver que R_{x_s} es semisimple y R_{x_u} unipotente.

Γ se identifica con el anillo de cocientes de polinomios $k[T_{ij}]$ en n^2 variables por potencias del determinante $d = \det(T_{ij})$ en el denominador. Sabemos que $k[T_{ij}]$ es estable por traslación a derecha. Más aún, $(L_x d)(y) = \det(yx) = \det y \cdot \det x$, luego $\mathrm{L}_x d = \det x \cdot d$. Así, el espacio generado por d es G-estable. De aquí vemos que es sencillo describir la acción de L_x en Γ a partir de la de $k[T_{ij}]$.

En particular, si $L_x\big|_{k[T_{ij}]}$ es semisimple, entonces L_x es semisimple (d es un autovector de L_x en cualquier caso). Si $L_x\big|_{k[T_{ij}]}$ es unipotente, luego su autovalor $\det x$ en el espacio generado por d debe ser 1, con lo cual L_x es unipotente. Con lo cual basta estudiar la acción de L_x en $k[T_{ij}]$ en lugar de Γ.

Sea $E = \operatorname{End} V$ con $V = k^n$, identifiquemos G como un subconjunto de $\mathrm{GL}(V)$ de E. Así, identificamos $k[T_{ij}]$ como el *álgebra simétrica* $\mathfrak{S}(E^*)$ del espacio dual E^* de E. Si $x \in E$, definimos el endomorfismo $r_x : E \to E$ vía $r_x(y) = yx$, y escribimos $r_x^* : E^* \to E^*$ para su transpuesta. Notemos que L_x es justamente la extensión canónica de r_x^* a un automorfismo de $\mathfrak{G}(E^*)$. De esta forma basta verificar que la semisimplicidad y unipotencia se preserva en cada paso: x a r_x a r_x^* a L_x. El paso de r_x a r_x^* es inmediato. Para pasar de la acción de E^* a $\mathfrak{G}(E^*)$ primero actuamos sobre cada potencia tensorial de E^*, luego factorizamos el álgebra tensorial por el ideal apropiado estable bajo la acción para llegar a $\mathfrak{G}(E^*)$. Finalmente veamos el pasaje de x a r_x con $x \in E$.

Consideremos ambos casos por separado. Si $x \in E$ es semisimple, tomemos una base $(v_1, \ldots, v_n)$ de V consistiendo de autovectores, digamos $x \cdot v_i = \lambda_i v_i$ con $\lambda_i \in k$. Tomemos la base correspondiente e_{ij} de E, tal que $e_{ij}(v_k) = \delta_{jk}v_i$, entonces $r_x e_{ij} = \lambda_j e_{ij}$. Esto prueba que r_x es semisimple. Si $x \in E$ es nilpotente, digamos

$x^t = 0$, entonces $(r_x)^t(y) = yx^t = 0$ para todo $y \in E$, así r_x es nilpotente. Ahora, si $x = 1 + n$ es unipotente con $n^t = 0$, entonces $r_x = 1 + r_n$, y por lo tanto $(r_x - 1)^t = 0$, i.e., r_x es unipotente. □

Queremos tratar ahora el caso general en el cual G es un grupo algebraico afín arbitrario. Notemos que la traslación por multiplicación a derecha L_x se lleva bien con los subgrupos cerrados H de G, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \Gamma(G,\mathcal{O}_G) \arrow[r, "L_x"] \arrow[d] & \Gamma(G,\mathcal{O}_G) \arrow[d] \\ \Gamma(H,\mathcal{O}_H) \arrow[r, "L_x"] & \Gamma(H,\mathcal{O}_H) \end{tikzcd}$$

Similarmente, si $\varphi : G \to G'$ es un epimorfismo de grupos algebraicos, es decir φ^* identifica $\Gamma(G',\mathcal{O}_{G'})$ con un subanillo de $\Gamma(G,\mathcal{O}_G)$, luego si $x \in G$, claramente $L_{\varphi(x)}$ se puede identificar con la restricción de L_x a este subanillo.

Teorema 10.7. *Sea G un grupo algebraico. Entonces:*

*(a) Si $x \in G$, luego existen elementos únicos $s, u \in G$ tales que $x = su$, tales que s y u conmutan entre sí, L_s es semisimple y L_u es unipotente. (Luego llamamos a s la **parte semisimple** de x y escribimos $x_s := s$, y a u la **parte unipotente**, notada x_u).*

(b) Si $\varphi : G \to G'$ es un morfismo de grupos algebraicos, entonces $\varphi(x)_s = \varphi(x_s)$ y $\varphi(x)_u = \varphi(x_u)$ para todo $x \in G$.

Demostración. Ver la Sección 15.3 de [Hum12]. □

Este teorema nos muestra que dado cualquier grupo algebraico G, los subconjuntos $G_s := \{ x \in G \mid x = x_s \}$ y $G_u = \{ x \in G \mid x = x_u \}$ se pueden definir de manera intrínseca y su intersección es $\{1\}$. El ítem (b) garantiza que los morfismos de grupos algebraicos preservan estos conjuntos. Más aún, G_u es cerrado: el conjunto de todas las matrices unipotentes en $\mathrm{GL}_n(k)$ es cerrado, pues es el conjunto de ceros de los polinomios $(x-1)^n = 0$. Sin embargo, G_s no tiene por qué ser cerrado en G (ni siquiera un subgrupo): por ejemplo $G = T_n(k)$ cuando $n > 1$.

11. Grupos diagonalizables

11.1. Caracteres y d-grupos.

Definición 11.1. Un grupo algebraico afín G se dice **diagonalizable** si es isomorfo a un subgrupo cerrado del grupo de matrices diagonales $D_n(k)$ para algún n.

Observemos que un grupo diagonalizable es conmutativo y consiste de elementos semisimples. Recíprocamente, si G cumple ambas propiedades luego (15.4) implica que G es conjugado en $\mathrm{GL}_n(k)$ a un subgrupo de $\mathrm{D}_n(k)$.

Observación 11.2. Subgrupos cerrados e imágenes bajo homomorfismos de grupos diagonalizables son nuevamente diagonalizables, pues ser un grupo conmutativo y semisimple se preserva.

Definición 11.3. Decimos que un grupo algebraico G es un **toro**, si es isomorfo a algún $D_n(k)$.

Tenemos el siguiente resultado útil:

Proposición 11.4. *Sea G un subgrupo diagonalizable de un grupo algebraico G'. Entonces*

$$N_{G'}(G)^\circ = C_{G'}(G)^\circ.$$

Demostración. Ver [Hum12, Corolario 16.3]. □

Ejemplo 11.5. El normalizador de $D_n(k)$ en $\mathrm{GL}_n(k)$ es el grupo de matrices *monomiales* (matrices donde cada fila y columna tienen una única entrada no nula); el centralizador de $D_n(k)$ es si mismo; el cociente es interesante[6], este es isomorfo al grupo simétrico $\mathbb{S}_n$. Por otro lado, el normalizador de $D_n(k)$ es si mismo en el grupo $T_n(k)$.

[6]En el contexto de grupos algebraicos este grupo es importante y se conoce como el **grupo de Weyl**.

12. Grupos solubles y nilpotentes

Un lema útil de teoría de grupos es el siguiente:

Lema 12.1. *Sean A, B subgrupos normales de un grupo G, y supongamos que el conjunto $S = \{[x, y] | x \in A, y \in B\}$ es finito. Entonces $[A, B]$ es finito. En particular, si $[G : Z(G)] < \infty$, luego $[G, G]$ es finito.*

Demostración. La primera afirmación es el Lema B y la segunda el Lema A de [Hum12, §17.1]. □

Ahora bien, queremos estudiar cómo se comporta el subgrupo conmutador $[A, B]$ de G, dados subgrupos cerrados arbitrarios A y B. Sin embargo, $[A, B]$ no tiene por qué ser cerrado! Esta situación mejora cuando A o B son subgrupos algebraicos conexos, o cuando ambos son normales en G:

Proposición 12.2. *Sean A, B subgrupos cerrados de un grupo algebraico G. Entonces*

(a) Si A es un subgrupo algebraico conexo, entonces $[A, B]$ es cerrado y conexo.
(b) Si A y B son normales en G, entonces $[A, B]$ es cerrado (y normal en G). En particular, $[G, G]$ siempre es cerrado.

Demostración. (a) Asociado a cada $b \in B$ tenemos el morfismo $\psi_b : A \to G$ definido por $\psi_b(a) = [a, b]$. Como A es conexo, y $\psi_b(1) = 1$, por la Proposición [Hum12, 7.5], el grupo generado por todos los $\psi_b(A)$, $b \in B$ es cerrado y conexo; pero este grupo es $[A, B]$.

(b) Por el ítem anterior $[A^\circ, B]$ y $[A, B^\circ]$ son cerrados, conexos (y normales) en G, luego el producto, digamos C, también es cerrado, conexo (y normal) en G: lo primero es por el Corolario 7.4, lo segundo es porque el producto de variedades irreducibles es irreducible (ver [Mon23, Proposición 2.8.5]), y si X, Y son subgrupos algebraicos de G tales que XY es un subgrupo, entonces $X \times Y \to XY$ es un isomorfismo algebraico. Con lo cual, para probar que $[A, B]$ es cerrado, basta ver que C tiene índice finito en $[A, B]$; esta es una afirmación sobre grupos abstractos: en el grupo abstracto G/C, la imagen de A° (respectivamente B°) centraliza la imagen de B (respectivamente A). Como $[A : A^\circ]$ y $[B : B^\circ]$ son finitos, esto implica que existen finitos conmutadores en G/C construidos a partir de las imágenes de A y B. Así, el Lema 12.1 garantiza que $[A, B]/C$ es finito, i.e., C tiene índice finito en $[A, B]$ como queríamos.

□

12.1. Grupos solubles.

Recordemos que un grupo abstracto G es **soluble** si su **serie derivada** eventualmente termina en $\{1\}$, es decir, la serie definida inductivamente por

$$\mathcal{D}^0 G := G, \quad \mathcal{D}^{i+1} G = [\mathcal{D}^i G, \mathcal{D}^i G]$$

cumple que para i lo suficientemente grande $\mathcal{D}^i G = \{1\}$ (notar que $\mathcal{D}^i G \trianglerighteq \mathcal{D}^{i+1} G$).

Cuando G es un grupo algebraico, $\mathcal{D}^1 G := [G, G]$ es un subgrupo cerrado normal de G, y más aún, si G es conexo, luego $\mathcal{D}^1 G$ también lo es por la Proposición 12.2. Así, por inducción en i, se sigue que esto sigue valiendo para los $\mathcal{D}^i G$. Con lo cual, en el contexto de grupos algebraicos tiene sentido hablar de serie derivada, pues $\mathcal{D}^i G$ eventualmente es constante (no necesariamente $\{1\}$). Al igual que en el caso de grupos abstractos, no es difícil ver que un grupo algebraico G es soluble si y solo si existe una cadena

$$G =: G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_r = \{1\}$$

de subgrupos cerrados tales que $[G_i, G_i] \subset G_{i+1}$.

Observación 12.3. Notemos que si G es un grupo algebraico conexo soluble de dimensión positiva, entonces

$$\dim[G, G] < \dim G.$$

En efecto, de lo contrario, como G es irreducible y $[G, G] \subset G$ es cerrado, se tendría que $G = [G, G]$; en particular no es soluble.

Esta observación es útil, pues nos permitirá realizar argumentos inductivos en la dimensión de G.

Las siguientes hechos de grupos abstractos son buenos de tener presentes:

Lema 12.4. *(a) Subgrupos e imágenes de homomorfismos de grupos abstractos solubles son solubles.*
(b) Si N es normal soluble en G y G/N es soluble, entonces G es soluble.
(c) Si A, B son subgrupos normales solubles de G, entonces AB también.

Ejemplo 12.5. El grupo de las matrices triangulares superiores $T_n(k) =: T$ es soluble. Es claro que $[T, T]$ está contenido en $U_n(k) =: U$. Escribamos $U_{ij} := \{1 + a_{e_{ij}|a \in k}\}$ si $i < j$, cada uno cerrado y conexo, pues es isomorfo a $\mathbb{G}_a$. Por lo tanto, el ítem (a) de la Proposición 12.2 dice que $[D, U_{ij}] \subset U_{ij}$ es cerrado conexo, donde $D := D_n(k)$, y claramente este grupo es no trivial. Consecuentemente, $U_{ij} = [D, U_{ij}] \subset [T, T]$ para cada $i < j$, forzando a que $[T, T] = U$.

Ahora, consideremos $[U, U]$. Escribamos $\mathfrak{I}$ para el conjunto de matrices triangulares, visto como una subálgebra asociativa de $M_n(k)$ (el producto es el producto de matrices usual). Evidentemente, el subconjunto $\mathfrak{R}$ de matrices con 0 en la diagonal es un ideal bilátero de $\mathfrak{I}$. Por lo tanto, los productos de ideales $\mathfrak{R}^h$ con $h \geq 1$, consistiendo de sumas de productos de h matrices en $\mathfrak{R}$, son nuevamente un ideales biláteros. Pero $\mathfrak{R}^h$ está generado linealmente por los E_{ij} con $j - i \geq h$ (matrices con 1 en (i, j) y 0 en el resto). Ahora, $U = 1 + \mathfrak{R}$, con lo cual $U_h := 1 + \mathfrak{R}^h$ es un subgrupo cerrado normal de U, que además cumple $[U_h, U_l] \subset U_{h+l}$. En particular, U es soluble, y luego T también.

De hecho, es interesante mencionar que al igual que el caso de grupos abstractos, intentar describir todos los grupos algebraicos solubles es una tarea formidable, sin embargo, veremos que los grupos algebraicos conexos solubles son isomorfos a un subgrupo cerrado de algún $T_n(k)$.

12.2. Subgrupos nilpotentes. Recordemos que un grupo abstracto G es **nilpotente** si su **serie central** eventualmente termina en $\{1\}$, es decir, la serie definida inductivamente por

$$\mathcal{C}^0 G := G, \quad \mathcal{C}^{i+1} G = [G, \mathcal{C}^i G]$$

cumple que para i lo suficientemente grande $\mathcal{C}^i G = \{1\}$ (notar que $\mathcal{C}^i G \trianglerighteq \mathcal{C}^{i+1} G$).

Cuando G es un grupo algebraico, $\mathcal{C}^1 G := [G, G]$ es un subgrupo cerrado normal de G, y más aún, si G es conexo, luego $\mathcal{C}^1 G$ también lo es por la Proposición 12.2. Así, por inducción en i, se sigue que esto sigue valiendo para los $\mathcal{C}^i G$. Con lo cual, en el contexto de grupos algebraicos tiene sentido hablar de serie central, pues $\mathcal{C}^i G$ eventualmente es constante (no necesariamente $\{1\}$). Por ejemplo, los grupos conmutativos son nilpotentes: $\mathcal{C}^1 G = \{1\}$. Por otro lado, ser nilpotente implica ser soluble, pues $\mathcal{D}^i G \subset \mathcal{C}^i G$ para todo i.

Las siguientes hechos de grupos abstractos son buenos de tener presentes:

Lema 12.6. *(a) Subgrupos e imágenes de homomorfismos de grupos abstractos nilpotentes son nilpotentes.*
(b) Si $G/Z(G)$ es nilpotente, entonces G es nilpotente.[7]
(c) Sea G nilpotente. Si r es el índice mas grande tal que $\mathcal{C}^r G \neq \{1\}$, entonces $\mathcal{C}^r G \subset \mathbb{Z}Z(G)$. En particular, $Z(G) \neq \{1\}$ si G es no trivial.
(d) Sea G nilpotente y H un subgrupo propio de G. Entonces H está incluido propiamente en $N_G(H)$.

Para grupos algebraicos podemos decir un poco más:

Proposición 12.7. *Sea G un grupo algebraico conexo nilpotente con* $\dim G > 0$. *Entonces:*
(a) $\dim(Z(G)) > 0$.
(b) Si H es un subgrupo propio cerrado de G, entonces $\dim(H) < dim N_G(H)$. *En particular, si* $\operatorname{codim} H = 1$, *entonces H es normal en G.*

Demostración. (a) Como los $\mathcal{C}^i G$ son conexo, el ítem (c) del lema anterior implica que $Z(G)^\circ \neq \{1\}$, y por lo tanto, la dimensión de la componente de la identidad de $Z(G)$ es positiva, i.e., $Z(G)$ tiene dimensión positiva.

(b) Haremos inducción en $\dim G$. Si $Z = Z(G)^\circ$ está contenido en H, entonces cambiamos G por el grupo algebraico conexo nilpotente G/Z de menor dimensión que G por el ítem (d) de la Proposición 7.5. Por inducción, la imagen de H en G/Z tiene menor dimensión que su normalizador pues H es un subgrupo propio de G/Z; luego vale lo mismo para H gracias a que $Z \subset H$ y el último ítem de . Por otro lado, si Z no está contenido en H, entonces ZH es un subgrupo de $N_G(H)$ de mayor dimensión que H, pues en este caso ZH es isomorfo como grupo algebraico al producto semidirecto de grupos algebraicos $Z \rtimes H$, cuya estructura de variedad subyacente es la variedad producto $Z \times H$, y su dimensión es $\dim Z + \dim H > \dim H$ por el ítem anterior.

□

[7]Sin embargo, no necesariamente si N es un subgrupo normal nilpotente de G y G/N es nilpotente, se puede concluir que G es nilpotente. Por ejemplo, se tiene que el grupo simétrico $\mathbb{S}_3$ no es nilpotente pues $[\mathbb{S}_3, \mathbb{S}_3] = \mathbb{A}_3$ (el subgrupo normal de permutaciones pares), y $\mathbb{S}_3/\mathbb{A}_3 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ es abeliano, luego nilpotente, y $\mathbb{A}_3$ también es nilpotente, pues es isomorfo a un grupo dihedral

Ejemplo 12.8. Inspeccionando el segundo párrafo del Ejemplo 12.5, podemos ver que de hecho $U_n(k)$ es nilpotente, sin embargo $T_n(k)$ no para todo $n \geq 2$. En efecto, utilizando la misma notación, por un lado vimos que $[T,T] = U$, con lo cual, $[T,[T,T]] = [T,U] \subset [T,T] = U$, y por otro lado, U está generado por los U_{ij}, $i < j$, los cuales cumplen que $U_{ij} = [D,U_{ij}] \subset [T,U] = [T,[T,T]]$, con lo cual, $\mathcal{C}^i T = U \neq \{1\}$ para todo $i \geq 2$. Que U es nilpotente se deduce de la identidad probada dicho ejemplo: $[U,U_h] = [U_1,U_h] \subset U_{h+1}$ para todo $h \geq 1$.

Estos dos resultados no los probaremos, pero nos serán de utilidad:

Proposición 12.9. *Sea G un grupo algebraico soluble conexo. Entonces G es nilpotente si y solo si G_s es un subgrupo, en cuyo caso G_s es cerrado y $G = G_s \times G_u$.*

Demostración. Ver [Hum12, §19.2]. □

Teorema 12.10. *Sea G un grupo algebraico conexo soluble. Entonces:*

(a) G_u es un subgrupo cerrado conexo normal de G que contiene a $[G,G]$, y G_u contiene una cadena de subgrupos cerrados conexos $G_i \supset G_{i+1}$, cada uno normal en G y G_{i+1} de codimensión 1 en G_i.

(b) Los toros maximales de G son conjugados bajo $\bigcap_i \mathcal{C}^i G$, y si T es un toro maximal, entonces $G = T \ltimes G_u$.

Demostración. Ver [Hum12, §19.3]. □

13. Resumen de variedades completas

Definición 13.1. Decimos que una variedad algebraica (o simplemente variedad) X es **completa**, si para toda variedad algebraica Y, la proyección a la segunda coordenada

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_Y : X \times Y &\longrightarrow Y \\ (x,y) &\longmapsto y \end{aligned}$$

es una función *cerrada*.

Proposición 13.2. *(a) Una subvariedad cerrada de una variedad completa (respectivamente proyectiva) es completa (respectivamente proyectiva).*

(b) Si $\varphi : X \to Y$ es un morfismo (regular) de variedades algebraicas, y X es completo, entonces la imagen es cerrada en Y, y es completa.

(c) Las variedades afines completas tienen dimensión 0.

(d) Las variedades proyectivas son completas; las variedades quasi-proyectivas completas son proyectivas.

(e) La variedad bandera de un espacio vectorial V de dimensión finita es proyectiva, y en particular el ítem (d) dice que es completa.

Demostración. (a) Se deduce inmediatamente de la definición de subvariedad cerrada.

(b) Es exactamente la misma demostración que el Corolario 2.7.10. de [Mon23]; notar que usamos que la variedad algebraica Y es *separada*.

(c) En efecto, como X es afín, podemos suponer sin pérdida de generalidad que es un cerrado de $\mathbb{A}^m$ para algún $m \geq 1$, luego basta ver que la imagen de cada proyección a la i-ésima coordenada es finita, digamos $f_i : X \to \mathbb{A}^1$, ahora, considerando la incrustación $\mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^1$, $x \mapsto [x,1]$, tenemos que por el ítem anterior que la composición $X \to \mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^1$ tiene imagen cerrada, y como no es sobreyectiva, debe ser finita, i.e., la imagen de f_i es finita como queríamos probar.

(d) Que las *variedades proyectivas* son completas ya lo vimos en [Mon23, Teorema *2.7.9*]. Más generalmente, si X es quasi-proyectiva, es decir, isomorfa a un abierto Zariski U de una variedad algebraica proyectiva Y, entonces el morfismo inclusión $U \hookrightarrow Y$ tiene imagen cerrada por el ítem (b), y por lo tanto es una subvariedad cerrada de una variedad proyectiva, y concluimos utilizando el ítem (a).

(e) Una demostración de que las variedades banderas son proyectivas se puede encontrar en [Gec13, Teorema 3.3.11].

□

Además de estos hechos, necesitamos un lema:

Lema 13.3. *Supongamos que G actúa transitivamente sobre dos variedades algebraicas irreducibles X,Y, y sea $\varphi : X \to Y$ un morfismo regular biyectivo, G-equivariante. Si Y es completo, entonces X también.*

Demostración. Ver [Hum12, Lema §21.1]. □

14. Teorema del punto fijo de Borel

En esta sección probaremos el teorema principal de este artículo:

Teorema 14.1 (Teorema del punto fijo de Borel)**.** *Sea G un grupo algebraico conexo soluble, y sea X una variedad completa (no vacía) donde actúa G. Entonces G tiene un punto fijo en X.*

Demostración. Si $\dim G = 0$, entonces $G = \{1\}$ y no hay nada que probar. Luego procedemos por inducción en la dimensión de G. Sea $H := [G, G]$, es conexo (ver la Proposición 12.2), soluble, y de menor dimensión que G (pues G es soluble), con lo cual, por hipótesis inductiva, el conjunto Y de puntos fijos de H en X es no vacío. Y es cerrado (ver la Proposición 8.2), con lo cual es completo por el ítem (a) de la Proposición 13.2. Como G deja estable a Y, ya que H es normal en G, basta ver que G tiene un punto fijo en Y, así, reemplacemos X por Y.

Estamos entonces en el siguiente caso: $H \subset G_x$ para todo $x \in X$. En particular, todos los *grupos de isotropía* son normales en G, por lo tanto G/G_x es una variedad *afín*. Que los grupos de isotropía son normales se deducen de lo siguiente, esto equivale a probar que para todo $g \in G$, $G_x \subset gG_xg^{-1}$, luego sea $z \in G_x$, i.e., $z \cdot x = x$, tenemos que $g^{-1}zgz^{-1} \in H \subset G_{z \cdot x}$, consecuentemente $x = z \cdot x = g^{-1}zgz^{-1}(z \cdot x) = g^{-1}zg \cdot x$, i.e. $g^{-1}zg \in G_x$, o sea, $z \in gG_xg^{-1}$, como z era arbitrario se prueba la inclusión deseada.

Tomemos $x \in X$ cuya órbita $G \cdot x$ sea cerrada, y por lo tanto nuevamente completo: esto se puede hacer, por la Proposición 8.4. Ahora el morfismo canónico $G/G_x \to G \cdot X$ es biyectivo, con el lado izquierdo afín y el derecho completo. El Lema 13.3 implica que G/G_x es completo. Pero el ítem (c) de 13.2 implica que G/G_x es un grupo algebraico 0-dimensional, i.e. trivial, es decir, $G_x = G$, y por lo tanto x es un punto fijo. □

15. Consecuencias

En esta sección probaremos varias consecuencias el Teorema del punto fijo de Borel. Sea G un grupo conexo arbitrario.

El siguiente teorema es un análogo del Teorema de Lie[8]; esto vale en característica arbitraria, sin embargo el teorema para álgebras de Lie no[9].

Teorema 15.1 (Teorema de Lie-Kolchin)**.** *Sea G un subgrupo algebraico conexo soluble de $\mathrm{GL}(V)$ para un espacio vectorial de dimensión finita no trivial. Entonces existe una bandera $V = V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_n = 0$ de subespacios G-invariantes con $\operatorname{codim} V_i = i$. En particular, V_{n-1} es 1-dimensional, y por lo tanto contiene un vector v que es autovector simultáneo de cada g para todo $g \in G$.*

Demostración. Sea G un subgrupo cerrado conexo soluble de $\mathrm{GL}(V)$. Entonces G actúa en la variedad bandera de V, la cual es completa por el ítem (e) de la Proposición 13.2, con lo cual el Teorema 14.1 implica que la acción de G deja fija una bandera

$$V = V_n \supset \cdots V_1 \supset V_0 = 0.$$

Es decir, vale el enunciado del teorema. □

15.1. Subgrupos de Borel y Toros maximales.

Definición 15.2. Un **subgrupo de Borel** de G es un subgrupo cerrado conexo soluble maximal.

Como los subgrupos de Borel de G y G° coinciden, supondremos a partir de lo que sigue que G es conexo. Un subgrupo conexo soluble de dimensión máxima en G es claramente un subgrupo de Borel; pero no es obvio que todo subgrupo de Borel tenga la misma dimensión, sin embargo, esto es cierto:

Teorema 15.3. *Sea B un subgrupo de Borel de G. Entonces G/B es una variedad proyectiva, y todos los otros subgrupos de Borel son conjugados a B. En particular, son todos isomorfos entre sí y tienen la misma dimensión.*

Demostración. Sea S un subgrupo de Borel de dimensión máxima. Representemos a G en $\mathrm{GL}(V)$ con un subespacio 1-dimensional V_1 cuyo estabilizador en G es precisamente S (ver [Hum12, Teorema 11.2]). La acción inducida de S en V/V_1 es *trigonalizable* por el Teorema 15.1, co lo cual existe una bandera *completa* $0 \subset V_1 \subset$

---

[8] Este teorema dice que sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, si $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ es una representación de dimensión finita de una álgebra de Lie *soluble* $\mathfrak{g}$, entonces existe una *bandera* $V = V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_n = 0$ de subespacios $\mathfrak{g}$-invariantes con $\operatorname{codim} V_i = i$. En particular, V_{n-1} es 1-dimensional, y por lo tanto contiene un vector v que es autovector simultáneo de cada $\pi(g)$ para todo $g \in \mathfrak{g}$.

[9] En característica $p > 0$, el Teorema de Lie vale para representaciones de dimensión menor que p, sin embargo, puede fallar en dimensión p: ver [Wik].

$\cdots \subset V$ estabilizada por S, llamemoslá f. De hecho, S es el grupo de isotropía de f en G, por cómo elegimos V_1. Con lo cual el morfismo inducido de G/S sobre la órbita de f en la variedad bandera de V es biyectiva. Por otro lado, el estabilizador de toda variedad bandera es soluble y por lo tanto tiene dimensión no mayor a $\dim S$. Consecuentemente, la órbita de f tiene la dimensión más chica posible, por lo tanto es cerrado (ver la Proposición 8.4). Así, la órbita es completa por los ítems (a) y (e) de la Proposición 13.2. Esto fuerza a que G/S sea completo por el Lema 13.3, o sea, es proyectivo por el ítem (d) de 13.2.

Ahora tomemos un subgrupo de Borel B, este actúa por multiplicación a izquierda en la variedad completa G/S. Luego el Teorema 14.1 implica que deja fijo un punto xS, es decir, $BxS = xS$, equivalentemente, $x^{-1}Bx \subset S$. Como ambos son subgrupos de Borel, concluimos que $x^{-1}Bx = S$ por maximalidad. Esto concluye ambas afirmaciones del teorema. ☐

Corolario 15.4. *Los toros maximales (respectivamente los subgrupos conexos unipotentes maximales) de G son los de los subgrupos de Borel de G, y son todos conjugados. En particular tienen la misma dimensión.*

Demostración. Sea T un toro maximal de G, U un subgrupo conexo unipotente maximal. Evidentemente T está incluido en algún subgrupo de Borel B, entonces es un toro maximal de B, y por lo tanto todos los demás toros maximales de B son conjugados a T en B (ver el Teorema 12.10). Similarmente, U yace contenido en algún subgrupo de Borel B', con $U = B'_u$ por maximalidad. Como todos los subgrupos de Borel de G son conjugados, el corolario se sigue. ☐

Definición 15.5. A la dimensión de cualquier toro maximal de G se le dice el **rango** de G.

Ejemplo 15.6. El rango de $\mathrm{SL}_n(k)$ es $n-1$.

Definición 15.7. Decimos que un subgrupo cerrado P de G es **parabólico**, si el *espacio homogéneo* G/P es proyectivo (equivalentemente completo por el ítem (d) de 13.2).

Corolario 15.8. *Un subgrupo cerrado P de G es parabólico si y solo si contiene un subgrupo de Borel. En particular, todo subgrupo conexo H de G es un subgrupo de Borel si y solo si H es soluble y G/H es proyectivo.*

Demostración. Si H es un subgrupo cerrado de G tal que G/H es proyectivo, entonces B deja fijo un punto por el Teorema 14.1, y por lo tanto tiene un conjugado en H, esto fuerza a que $\dim G/H \leq \dim G/B$. Recíprocamente, si H es un subgrupo cerrado incluyendo un subgrupo de Borel B de G, entonces $G/B \to G/H$ es un morfismo sobreyectivo con dominio una variedad completa, forzando a G/H a ser completo (ítem (b) de la Proposición 13.2). Pero G/H es proyectivo (ítem (d) de la Proposición 13.2), ya que todos los espacios homogéneos son quasi-proyectivos por construcción (ver [Hum12, §11.3]). Esto prueba el Corolario. ☐

Ejemplo 15.9. Sea $G = \mathrm{GL}_n(k)$ y $B = \mathrm{T}_n(k)$ las matrices triangulares superiores de G. El Teorema de Lie-Kolchin 15.1 dice que B es un subgrupo de Borel de G. En efecto, G/B es justamente la órbita en la variedad bandera de $V = k^n$ de la *bandera standard*. Calculemos los subgrupos parabólicos de G que contienen a B. Si $(e_1, \dots, e_n)$ es la base canónica de k^n, entonces para cada bandera parcial $(e_1, \dots, e_{i(1)}) \subset (e_1, \dots, e_{i(2)}) \subset \cdots$, el estabilizador de G es evidentemente un subgrupo cerrado incluyendo a B.

Más concretamente, si $G = \mathrm{GL}_3(k)$, entonces existen solamente dos subgrupos parabólicos propios distintos de B: los dos grupos de matrices de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

Corolario 15.10. *Sea $\varphi : G \to G'$ un epimorfismo de grupos algebraicos conexos. Sea H un subgrupo de Borel (respectivamente un subgrupo parabólico, un toro maximal, o un subgrupo conexo unipotente maximal) de G. Entonces $\varphi(H)$ es un subgrupo de Borel (respectivamente un subgrupo parabólico, un toro maximal, o un subgrupo conexo unipotente maximal) de G' y todos los subgrupos de este tipo en G' se obtienen de esta manera.*

Demostración. Debido a los Corolarios 15.4, 15.8, basta ver que esto vale en el caso $H = B$ subgrupo de Borel de G. Claramente $B' := \varphi(B)$ es conexo y soluble. Pero el mapa natural $G \to G' \to G'/B'$ induce un morfismo sobreyectivo $G/B \to G'/B'$, y por lo tanto G'/B' es completo por el ítem (b) de la Proposición 13.2, es decir, B' es un subgrupo parabólico de G'. El Corolario 15.8 implica luego que es un subgrupo de Borel de G'. Como algún subgrupo de Borel de G' tiene que ser de la forma $\varphi(B)$, se sigue del Teorema 15.3 aplicado a G' que son todos conjugados a $\varphi(B)$, consecuentemente, por sobreyectividad de φ, deben ser de esta forma. ☐

15.2. Más consecuencias. En esta subsección supongamos que G es un grupo algebraico conexo.

Proposición 15.11. *Si σ es un automorfismo de G que deja fijo todos los elementos de un subgrupo de Borel B, entonces debe ser la identidad.*

Demostración. El morfismo

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto \sigma(x)x^{-1}, \end{aligned}$$

envía B en 1, y por lo tanto se factoriza por la proyección a través del cociente $G \to G/B$. Por el Teorema 15.3 y el ítem (b) de la Proposición 13.2, $\varphi(G)$ es cerrado (y por lo tanto afín) y completo. Así, es un grupo algebraico 0-dimensional, i.e. $\varphi(G) = \{1\}$. □

Corolario 15.12.

$$Z(G)^\circ \subset Z(B) \subset C_G(B) = Z(G).$$

Demostración. $Z(G)^\circ$ es conexo y soluble, por lo tanto está contenido en algún subgrupo de Borel de G, el cual podemos conjugar (sin afectar a $Z(G)^\circ$) para convertirlo en B gracias al Teorema 15.3, con lo cual la primera inclusión vale. La segunda inclusión es obvia; también lo es $Z(G) \subset C_G(B)$. Finalmente, si $x \in C_G(B)$, entonces el autormofismo $\sigma : g \mapsto xgx^{-1}$ cumple las hipótesis de la proposición anterior, con lo cual es trivial, i.e., $x \in Z(G)$. □

Observación 15.13. De hecho, se puede probar que $Z(G) = Z(B)$ (ver [Hum12, Corolario B §22.2]).

Proposición 15.14. *(1) Si un subgrupo de Borel B es nilpotente (en particular, si $B = B_s$ o $B = B_u$), entonces $G = B$.*
(2) G es nilpotente si y solo si G tiene un único toro maximal.

Demostración. (1) Observemos primero que si $B = B_s$ o $B = B_u$, entonces B es un toro o un grupo unipotente (ver el Teorema 12.10), y por lo tanto nilpotente en cualquier caso. Siempre que B sea nilpotente, de dimensión positiva, su centro también tiene dimensión positiva (ítem (a) del Lema 12.6). Sin embargo, el corolario anterior dice que $Z(G)^\circ \subset Z(B) \subset Z(G)$. Con lo cual, podemos pasar a un grupo de menor dimensión $G/Z(G)^\circ$, en donde $B/Z(G)^\circ$ es un subgrupo nilpotente de Borel. Por hipótesis inductiva, estos grupos son iguales, con lo cual $G = B$ (el caso base $\dim G = 0$ es trivial).
(2) Sabemos por la Proposición 12.9 que un grupo nilpotente tiene un único toro maximal. Recíprocamente, si T es el único toro maximal de G y B es algún subgrupo de Borel conteniéndolo, debe ser que B es nilpotente (12.9, 12.10), con lo cual $B = G$ por el ítem (1).

□

Corolario 15.15. *Sea T un toro maximal de G, $C := C_G(T)^\circ$. Entonces C es nilpotente y $C = N_G(C)^\circ$.*

Demostración. T es el único toro maximal de C, gracias al Corolario 15.4, entonces C es nilpotente por la proposición que acabamos de probar. Claramente T es normal en $N_G(C)^\circ$, y por lo tanto también central (ver la Proposición 11.4). □

Definición 15.16. Sea T un toro maximal de G, y $C := C_G(T)^\circ$. El grupo C se lo suele llamar **subgrupo de Cartan**[10].

Observación 15.17. De hecho, los subgrupos de Cartan son conexos (ver el Teorema [Hum12, §22.3]). En particular, como todos los toros maximales son conjugados entre sí, los subgrupos de Cartán también lo son.

15.2.1. El Teorema del Normalizador. Nuevamente G es un grupo algebraico conexo.
Primero probamos un lema:

Lema 15.18. *Sea B un subgrupo de Borel de G, sea $N := N_G(B)$. Entonces $B = N^\circ$.*

Demostración. Claramente B es un subgrupo de Borel de N°. Gracias al Teorema 15.3 y al hecho que B es normal en N°, B es el único subgrupo de Borel de N°. Finalmente, [Hum12, Teorema de Densidad §22.2] fuerza a que B sea igual a N°. □

Teorema 15.19 (Teorema del Normalizador)**.** *Sea B un subgrupo de Borel de G. Entonces $B = N_G(B)$.*

[10]En analogía con las subálgebras de Cartan en Teoría de Álgebras de Lie.

Demostración. Escribamos $N := N_G(B)$. Por el lema anterior tenemos que $B = N^\circ$. Para probar que $N = B$, procederemos por inducción en $\dim G$. Claramente $R(G)$ yace dentro de todos los subgrupos de Borel de G, así que supongamos que sin pérdida de generalidad que G es de dimensión positiva y *semisimple*: si no, aplicamos hipótesis inductiva a $G/R(G)$.

Sea $x \in N$, y sea T un toro maximal de G contenido en B. Entonces xTx^{-1} es otro toro maximal de G contenido en B, así que existe $y \in B$ tal que $y(xTx^{-1})y^{-1} = T$ (Corolario 15.4). Claramente x pertenece a B si y solo si yx lo es, por lo que podemos asumir también que $x \in N_G(T)$. Tomemos $S := C_T(x)^\circ$, un subtoro T. Hay dos posibilidades:

Caso 1: $S \neq \{1\}$. Luego $C := C_G(S)$ tiene radical no trivial, con lo cual C es un subgrupo propio de G. Se tiene que $B' := B \cap C$ es un subgrupo de Borel de C (ver [Hum12, §22.4]). Más aún, C es conexo (ver [Hum12, Teorema 22.3]). Por hipótesis inductiva, se sigue que $N_C(B') = B'$. Pero x pertenece a C y normaliza B, así que $x \in N_C(B') = B' \subset B$.

Caso 2: $S = \{1\}$. Como x normaliza T, y T es conmutativo, es fácil de ver que el morfismo conmutador

$$\begin{aligned} \gamma_x : T &\longrightarrow T \\ t &\longmapsto txt^{-1}x^{-1} \end{aligned}$$

es de hecho un morfismo de grupos con núcleo $C_T(x)$. Este es finito, ya que $S = \{1\}$, así que γ_x debe ser sobreyectivo por un argumento de dimensión (ver la Proposición 7.5). Consecuentemente, T yace dentro de $[M, M]$, donde M es el subgrupo de N generado por x y B. Así, $B = TB_u$ yace contenido en el subgrupo de M generado por B_u y $[M, M]$.

Ahora, tomemos una representación racional $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, donde V contiene una recta D cuyo grupo de isotropía en G es precisamente M (ver [Hum12, Teorema 11.2]). Sea $\chi : M \to \mathbb{G}_m$ su caracter asociado. Entonces χ es trivial en $[M, M]$ y en grupo unipotente B_u; ergo, χ es trivial en B. Si $0 \neq v \in V$ genera D, se tiene que ρ induce un morfismo $G/B \to Y =$ la órbita de v bajo la acción de $\rho(G)$. Como G/B es completo, su imagen Y es cerrada en V (y por lo tanto afín) y también completa gracias al ítem (b) de la Proposición 13.2. Pero esto implica que Y es un punto por el ítem (c) de la Proposición 13.2. Entonces $G = M$. Como G es conexo y $[M : B] < \infty$ (lema anterior), no queda otra alternativa que G sea igual a B, lo cual es imposible.

$\square$

Corolario 15.20. *B es maximal en la colección de subgrupos solubles (no necesariamente conexos o cerrados) de G.*

Demostración. Si S es un subgrupo soluble maximal de G, entonces evidentemente S es cerrado. Si $S \supset B$, entonces $S^\circ = B$ por definición de subgrupo de Borel, consecuentemente $S \subset N_G(B) = B$. $\square$

Corolario 15.21. *Sea P un subgrupo parabólico de G. Entonces $P = N_G(P)$. En particular, P es conexo.*

Demostración. Por definición, P contiene algún subgrupo de Borel B de G. Sea $x \in N_G(P)$. Entonces tanto B como xBx^{-1} son subgrupos de Borel de P°, y por lo tanto son conjugados por algún elemento $y \in P^\circ$ (Teorema 15.3). Por lo tanto $xy \in N_G(B) = B$ (gracias al Teorema del Normalizador 15.19). Sin embargo, $xy, y \in P^\circ$ fuerza a que $x \in P^\circ$, es decir, $P^\circ = P = N_G(P)$. $\square$

Corolario 15.22. *Sean P, Q subgrupos parabólicos de G, ambos conteniendo un subgrupo de Borel B. Si P y Q son conjugados en G, entonces $P = Q$.*

Demostración. Supongamos que $Q = x^{-1}Px$. Entonces B y $x^{-1}Bx$ son ambos subgrupos de Borel del grupo conexo Q (corolario anterior), así existe $y \in Q$ tal que $B = y^{-1}(x^{-1}Bx)y$ (Teorema 15.3). Con lo cual, $xy \in N_G(B) = B$ fuerza que $x \in Q$, y luego $P = Q$. $\square$

En otras palabras, el corolario anterior dice que la cantidad de clases de conjugación de subgrupos parabólicos de G es precisamente la cantidad de subgrupos parabólicos conteniendo un subgrupo de Borel B de G dado.

Corolario 15.23. *Sea B un subgrupo de Borel de G, y $U = B_u$. Entonces $B = N_G(U)$.*

Demostración. Sea $N := N_G(U)$. Como U es un subgrupo conexo unipotente maximal de N°, contiene un conjugado de cada elemento unipotente de N° (ver [Hum12, Teorema 22.2]). Pero U es normal en N°, o sea que N°/U consiste de elementos semisimples y por ende es un toro. En particular, N° es soluble. Como $B \subset N^\circ$, tenemos que $B = N^\circ$. Sin embargo, $B = N_G(B)$ por el Teorema 15.19, así que $N^\circ = N$. $\square$

Referencias

[Car89] Roger W Carter, *Simple groups of lie type*, vol. 22, John Wiley & Sons, 1989.

[Die56] Jean Dieudonné, *Groupes de lie et hyperalgèbres de lie sur un corps de caractéristique* $p > 0$., Bulletin de la Société Mathématique de France **84** (1956), 207–239.

[Gec13] Meinolf Geck, *An introduction to algebraic geometry and algebraic groups*, Oxford University Press, 2013.

[Hum12] James E Humphreys, *Linear algebraic groups*, vol. 21, Springer Science & Business Media, 2012.

[Mon23] Pedro Montero, *Notas de curvas algebraicas (mat426)*, http://pmontero.mat.utfsm.cl/mat426_2023_2.html, 2023, Accedido el 6 de noviembre de 2023.

[Wik] Wikipedia contributors, *Lie's Theorem*, https://en.wikipedia.org/wiki/Lie%27s_theorem, Accedido el 6 de noviembre de 2023.