TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BOREL

ENZO GIANNOTTA

Resumen. En este artículo probaremos el Teorema del punto fijo de Borel, el cual dice que todo grupo algebraico afín y soluble actuando en una variedad algebraica proyectiva admite un punto fijo.

Índice

> I feel that what mathematics needs least are pundits who issue prescriptions or guidelines for presumably less enlightened mortals.
>
> *Armand Borel*

1. Introducción

La verdadera geometría algebraica comienza al considerar ecuaciones polinomiales cúbicas. Todo aquello de grado menor, tales como aplicaciones lineales o formas cuadráticas, puede ser pensado utilizando métodos de álgebra lineal. Una gran cantidad de trabajo, desde los comienzos de la geometría algebraica hasta nuestros días, ha sido dedicado al estudio de ecuaciones cúbicas. Por ejemplo, las hipersuperficies cúbicas de dimensión 1 son llamadas *curvas elípticas* y ocupan un lugar central en geometría algebraica y aritmética.

El propósito de este artículo es estudiar superficies cúbicas, es decir, superficies $S \subseteq \mathbb{P}^3(k)$ dadas por un polinomio homogéneo $f(x_0, x_1, x_2, x_3)$ de grado 3. Más precisamente, probaremos el siguiente resultado descubierto originalmente por Cayley y Salmon en 1849.

Teorema A. *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Entonces, toda superficie cúbica suave $S \subseteq \mathbb{P}^3(k)$ posee exactamente 27 rectas.*

Recordemos que una variedad algebraica X es *racional* si posee un abierto de Zariski no-vacío $U \subseteq X$ isomorfo a un abierto no-vacío V del espacio afín $\mathbb{A}^n(k)$. Como aplicación del teorema anterior, probaremos que toda superficie cúbica suave es racional. Más precisamente, probaremos el siguiente resultado.

Teorema B. *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Entonces, toda superficie cúbica suave $S \subseteq \mathbb{P}^3(k)$ es isomorfa al blow-up del plano proyectivo $\mathbb{P}^2(k)$ en 6 puntos.*

Estructura del artículo. La Sección 2 recopila notaciones, convenciones y hechos conocidos que serán usados a lo largo del artículo. También estableceremos algunos hechos preliminares. En particular, discutimos el hecho que el espacio de parámetros de superficies cúbicas en $\mathbb{P}^3$ es isomorfo a $\mathbb{P}^{19}$, y que las superficies singulares forman un divisor irreducible (i.e., una hipersuperficie de dimensión 18 dentro de dicho $\mathbb{P}^{19}$). La Sección 3 está dedicada a probar el Teorema A. Finalmente, en la Sección 4 recordamos el concepto de racionalidad y probamos el Teorema B.

Agradecimientos. Agradezco al profesor Pedro por sugerir este tema para el artículo, y por hacer disponible el material bibliográfico necesario para prepararlo.

2. Notación, convenciones y hechos preliminares

2.1. Convención. Durante todo el artículo, todas las variedades y morfismos estarán definidos sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado.

2.2. Notación. Denotamos por $\mathbb{P}^n$ (resp. $\mathbb{A}^n$) al espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(k)$ (resp. espacio afín $\mathbb{A}^n(k)$) de dimensión n sobre el cuerpo k.

Dada una variedad X, denotamos por X_{sing} al sub-conjunto de puntos singulares de X. En particular, X es una variedad suave si y sólo si $X_{\text{sing}} = \emptyset$.

2.3. Hechos preliminares. Comencemos por definir qué entenderemos por una superficie cúbica.

Definición 2.1. Sea $f(x_0, x_1, x_2, x_3) \in k[x_0, x_1, x_2, x_3]$ un polinomio homogéneo de grado 3 no-nulo. Diremos que la variedad proyectiva

$$S = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{P}^3 \mid f(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0\} \subseteq \mathbb{P}^3$$

es una **superficie cúbica**.

A continuación recordamos la definición de una recta en un espacio proyectivo.

Definición 2.2. Sea $\mathbb{P}^n$ el espacio proyectivo asociado al k-espacio vectorial $V = k^{n+1}$. Por definición, una **recta** ℓ en $\mathbb{P}^n$ es un sub-espacio proyectivo $\ell \cong \mathbb{P}^1$ de $\mathbb{P}^n$ asociado a un sub-espacio vectorial $W \cong k^2$.

Ejemplo 2.3. Sea $k = \mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos. La superficie cúbica de Fermat en $\mathbb{P}^3$ dada por la ecuación

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$$

posee exactamente 27 rectas, cada una de la forma

$$\ell_{(i,j,k)} := \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{P}^3 \mid x_0 + \omega x_i = x_j + \omega' x_k = 0\} \cong \mathbb{P}^1,$$

donde $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, $j < k$, y donde ω y ω' son raíces cúbicas de la unidad (eventualmente la misma).

En efecto, (...).

Lema 2.4. *Sea $\mathcal{S}$ el espacio de parámetros de superficies cúbicas en $\mathbb{P}^3$. Entonces, $\mathcal{S} \cong \mathbb{P}^{19}$.*

Demostración. El espacio vectorial de polinomios homogéneos cúbicos en 4 variables puede ser identificado con el espacio de secciones globales $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3))$. Más aún, tenemos que

$$\dim_k \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = \binom{n+d}{d},$$

por lo que en nuestro caso $\dim_k \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)) = \binom{6}{3} = 20$. Finalmente, notamos que dos polinomios proporcionales definen la misma superficie cúbica y que, por definición, no debemos considerar el polinomio nulo. En otras palabras, el espacio de parámetros $\mathcal{S}$ está dado por la proyectivización $\mathcal{S} = \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3))) \cong \mathbb{P}^{19}$. □

El siguiente hecho será utilizado directamente sin demostración (ver [**?**, §7.1] para más detalles) en el caso donde el cuerpo k es de característica nula[1].

Hecho 2.5. Supongamos que $\mathrm{car}(k) = 0$. Entonces, el conjunto de superficies cúbicas singulares corresponde a una hipersuperficie irreducible $\mathscr{D}$ dentro del espacio de parámetros $\mathcal{S}$, llamada usualmente el **divisor discriminante**.

3. Teorema del punto fijo de Borel

En esta sección probaremos el teorema principal de este artículo:

Teorema 3.1 (Teorema del punto fijo de Borel)**.** *Sea G un grupo algebraico conexo soluble, y sea X una variedad completa (no vacía) donde actúa G. Entonces G tiene un punto fijo en X.*

[1] La demostración pasa por el teorema de Bertini, que sólo es válido en $\mathrm{car}(k) = 0$.

4. Consecuencias

En esta sección probaremos varias consecuencias el Teorema del punto fijo de Borel. Sea G un grupo conexo arbitrario.

Proposición 4.1. *Si σ es un automorfismo de G que deja fijo todos los elementos de un subgrupo de Borel B, enntonces debe ser la identidad.*

Demostración. El morfismo

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto \sigma(x)x^{-1}, \end{aligned}$$

envía B en 1, y por lo tanto se factoriza por la proyección al cociente $G \to G/B$.... ... . $\square$

Referencias