Teorema de Chevalley sobre la imagen de un conjunto constructible

Enzo Giannotta

2 de octubre de 2024

Índice

1. Introducción

En las notas [Mus17, Capítulo 3, última sección] hay una exposición bastante clara sobre conjuntos constructibles y el Teorema de Chevalley 5.1 de donde se basaron estas notas. Por otro lado, el Ejercicio 4.1 es un ejercicio sacado del libro [Har13, Ejercicio 1.10], de donde también expongo la definición de dimensión de un espacio topológico X Finalmente, el Teorema de Chevalley es una consecuencia de un lema técnico que se prueba en [Spr98, Proposición 1.9.4.], y que he decidido modificar levemente para que sea más clara su aplicación (cf. Proposición 3.2).

2. Un lema técnico

El objetivo de esta sección es probar un lema técnico y utilizarlo para probar el Teorema de Chevalley 5.1 en una versión más débil.

Definición 2.1. — Decimos que un anillo B es **de tipo finito** sobre un subanillo A si existen elementos $b_1,\dots,b_r$ en B tales que $B = A[b_1,\dots,b_r]$. Recordemos también que B se dice **reducido**, si no tiene **elementos nilpotentes** no nulos, es decir elementos $b \in B$ tales que $b^n = 0$ para algún $n \geqslant 1$.

Sea B un anillo reducido de tipo finito sobre un subanillo $A \hookrightarrow B$. Supongamos que B está generado solamente por un elemento, i.e., existe $b \in B$ tal que $B = A[b]$.

Notar que $B \cong A[T]/I$, donde $A[T]$ es el anillo de polinomios en la variable T y coeficientes en A, e I es el ideal dado por el núcleo del homomorfismo

$$\begin{aligned} A[T] &\longrightarrow B, \\ 1_A &\longmapsto 1_B, \\ T &\longmapsto b. \end{aligned}$$

Notar que el ideal I es el conjunto de todos los polinomios $f \in A[T]$ tales que $f(b) = 0$; notar que I no contiene polinomios constantes no nulos.

Notación 2.2. — Denotamos por $\mathbf{cp}(I)$ como el conjunto de todos los coeficientes principales de los polinomios no nulos de I junto con el cero. Notar que $\mathbf{cp}(I)$ es un ideal de A.

Lema 2.3. — *Sea B un anillo reducido tal que $B = A[b]$ con $A \hookrightarrow B$ un subanillo. Sean k un cuerpo algebraicamente cerrado y $\phi : A \to k$ un homomorfismo tal que $\phi(\boldsymbol{cp}(I)) \neq \{0\}$. Entonces ϕ puede extenderse a un homomorfismo $\overline{\phi} : B \to k$.*

Demostración. Primero extendamos ϕ a un homomorfismo $\phi : A[T] \to k[T]$ de la manera obvia: $T \mapsto T$ y $a \mapsto \phi(a)$. Ahora, si vale la siguiente condición:

$$\textit{el ideal } \phi(I) \subset k[T] \textit{ no contiene polinomios constantes no nulos,} \tag{C}$$

entonces al ser $k[T]$ un dominio de ideales principales, está generado por un polinomio no constante, el cual tiene al menos un cero en k por ser algebraicamente cerrado, digamos z. Ahora bien, $\overline{\phi} : B \to k$ dado por $b \mapsto z$ es un homomorfismo que extiende a ϕ.

Acabamos de probar que si vale (C), entonces vale el enunciado. Notar que el conjunto de los $m \geqslant 1$ tales que existe un polinomio $h(T) = a_0 + a_1T + \cdots + a_mT^m \in I$ de tal suerte que $\phi(a_m) \neq 0$ es no vacío, pues por hipótesis $\phi(\mathbf{cp}(I)) \neq 0$. Sea $m_0 \geqslant 1$ el mínimo de estos m para A, B y ϕ fijos. Supongamos por el absurdo que no vale (C), luego también existe un mínimo $m_0 = m_0(A,B,\phi) \geqslant 1$ tal que la condición no vale y que depende de la tripleta (A,B,ϕ). Escribamos $h(T) = a_0 + a_1T + \cdots + a_{m_0}T^{m_0}$.

Sea $s(T) = s_0 + s_1T + \cdots + c_nT^n \in I$ un polinomio no constante arbitrario de I tal que $\phi(s) \not\equiv 0$. Como estamos suponiendo que (C) no vale, se tiene que $\phi(s)$ es un polinomio constante no nulo, i.e., $\phi(s_i) = 0$ para todo $i \geqslant 1$ y $\phi(s_0) \in k \setminus \{0\}$. Apliquemos el algoritmo de la división en el anillo $A[T]$ de $s(T)$ dividido $h(T)$: existen polinomios $q, r \in A[T]$ y un entero $d \geqslant 0$ tales que

$$a_{m_0}^d s = qh + r,$$

con $\deg r < \deg h = m_0$ o $r = 0$. Evaluando a ambos lados por ϕ, nos queda

$$\phi(a_{m_0})^d \phi(s_0) = \phi(q)\phi(h) + \phi(r) \quad \text{en } k[T].$$

Donde el lado izquierdo es una constante no nula, i.e., polinomio de grado 0. Inspeccionando con más cuidado el grado del polinomio de la derecha, concluimos que $\phi(q) \equiv 0$ y por lo tanto $\phi(r)$ es una constante no nula. Reemplazando s por el polinomio $r \in I$, vemos que $n < m_0$ y que $m_0 > 1$.

Ahora, consideremos la siguiente operación en $A[T]$: dado $h \in A[T]$ de la forma $h(T) = h_0 + h_1T + \cdots + h_mT^m$, podemos considerar el polinomio $\widetilde{h}(T) := T^m h(T^{-1}) =$

$h_m + h_{m-1}T + \cdots + h_0 T^m$ que se define como 0 si $h \equiv 0$. Notar que si $h_0 = \cdots = h_l = 0$, entonces $\widetilde{h}(T)$ tiene grado $m - (l+1)$, luego

$$\widetilde{\widetilde{h}} = h/T^{l+1}. \tag{1}$$

También tenemos que $\widetilde{I}$ es un ideal de $A[T]$ si I es un ideal de $A[T]$. En general, en álgebra conmutativa dados un ideal I de un anillo R y un subconjunto multiplicativamente cerrado o singleton $S \subset R$, se puede definir el ideal

$$(I:S) := \{r \in R |\text{ existe } s \in S \text{ de tal suerte que } rs \in I\}.$$

Resulta que a partir de (1), se deduce que para todo $r \in \widetilde{\widetilde{I}}$, existe $d \geqslant 1$ tal que $(Tr)^d \in I$. Como $B \cong A[T]/I$ es reducido, $(Tr)^d \in I$ si y solo si es Tr es nilpotente en $A[T]/I$, i.e., $Tr \in I$. Esto prueba que $\widetilde{\widetilde{I}} = (I : \{T\})$.

Estudiemos los polinomios constantes de $A[T]$ que pertenecen a $\widetilde{I}$, i.e., $J := A \cap \widetilde{I}$. Si $a \in A \cap \widetilde{I}$, notemos que al ser constante, $a = \widetilde{a} \in \widetilde{\widetilde{I}} \cap A = (I : \{T\}) \cap A$ es el ideal $\{a \in A | aT \in I\}$ de A. Debe ser que $\phi(J) = 0$, de lo contrario $s(T) := aT$ tendría grado 1 y ϕ evaluado en su coeficiente principal no sería nulo, i.e., $m_0 = 1$. Entonces podemos ahora considerar los anillos $\widetilde{B} := A[T]/\widetilde{I}$, $\widetilde{A} := A/J$, y el homomorfismo $A/J \hookrightarrow \widetilde{B}$. Antes de seguir, fijémonos que $\widetilde{B}$ sea reducido: si $s \in \widetilde{B}$ es nilpotente, entonces existe $d \geqslant 1$ tal que $s^d \in \widetilde{I}$. Luego $(\widetilde{s})^d = \widetilde{s^d} \in \widetilde{\widetilde{I}} = (I : \{T\})$, con lo cual $T(\widetilde{s})^d \in I$, en particular $(T\widetilde{s})^d \in I$. Argumentando como más arriba, la reducibilidad de $B \cong A[T]/I$ implica que $T\widetilde{s} \in I$. Consecuentemente, $\widetilde{\widetilde{s}} = \widetilde{T\widetilde{s}} \in \widetilde{I}$, y como s es un múltiplo de este por (1), se sigue que al ser $\widetilde{I}$ un ideal, $s \in \widetilde{I}$. Probando que $\widetilde{B}$ es reducido.

Finalmente, notemos que ϕ induce un homomorfismo $\widetilde{\phi} : \widetilde{A} \to k$, y además, $\widetilde{I}$ contiene a $\widetilde{s}$ que tiene grado $n < m_0$ y que cumple la hipótesis $\widetilde{\phi}(\mathbf{cp}(\widetilde{I})) \neq \{0\}$. Por minimalidad de m_0, debe ser que la condición (C) se cumple y por lo tanto obtenemos una extensión $\overline{\widetilde{\phi}} : \widetilde{B} \to k$. Sea $\widetilde{b}$ tal que $\widetilde{B} = \widetilde{A}[\widetilde{b}]$, entonces $\widetilde{\phi}(\widetilde{b}) = 0$, pues $\widetilde{\phi}(\widetilde{b})$ es la única raíz del polinomio $\widetilde{\phi}(\widetilde{s}) = \phi(s_0)T^n \in k[T]$. Por otro lado, $\widetilde{I}$ contiene a $\widetilde{h}$ y $\widetilde{\phi}(\widetilde{h}) \neq 0$, llevando a una contradicción ya que $\widetilde{\phi}(\widetilde{b}) = 0$ debería también ser una raíz del polinomio constante $\widetilde{\phi}(\widetilde{h})$. Con esto se concluye la demostración.

□

Lema 2.4. (Lema técnico) — *Sea B un dominio íntegro y sea $g : A \hookrightarrow B$ un homomorfismo de anillos tal que B es de tipo finito sobre $g(A)$. Entonces dado $b \in B \setminus \{0\}$, existe $a \neq 0$ en A de tal suerte que si $\phi : A \to k$ es un homomorfismo donde k es un cuerpo algebraicamente cerrado y $\phi(a) \neq 0$, luego ϕ se puede extender a un homomorfismo $\overline{\phi} : B \to k$ tal que $\phi(b) \neq 0$, i.e., $\phi = \overline{\phi} \circ g$.*

Demostración. Nuevamente, se deja como ejercicio demostrar que si probamos el caso $A \subset B$ y g dada por la inclusión de anillos, entonces se puede probar el caso general.

Notar que podemos hacer una reducción extra y suponer que B está solamente generado por un solo elemento: $B = A[b'] \cong A[T]/I$. El caso $I = 0$ se deja de ejercicio, así que supongamos que $I \neq 0$. Tomemos $h \in I$ de grado mínimo $m \geqslant 0$, con coeficiente principal $h_m \in A \setminus \{0\}$. Dado $s \in A[T]$, se tiene que por el algoritmo de la división en $A[T]$ aplicado a s dividido h, se sigue que $s \in I$ si y solo si existe $d \geqslant 0$ tal que $h_m^d s$ es divisible por h. Sea $p \in A[T]$ un polinomio tal que $b = p(b')$, tenemos que $p \notin I$, de lo contrario existiría $d \geqslant 0$ tal que $h_m^d b = 0$, pero estamos en un dominio íntegro. Sea L el cuerpo de fracciones de A, tenemos que h es irreducible en $L[T]$ y que es coprimo con p. La identidad de bezout nos dice que existen polinomios $\alpha, \beta \in L[T]$ tales que $\alpha h + \beta p = 1$, multiplicando por los denominadores de los coeficientes de α y β, vemos existen polinomios α' y β' en $A[T]$ tales que

$$\alpha' h + \beta' p = c \in A \setminus \{0\}.$$

Tomemos $a := c p_m \in A \setminus \{0\}$. Ahora, si $\phi : A \to k$ es un homomorfismo tal que $\phi(a) \neq 0$, lo podemos extender por el pre-lema anterior a un homomorfismo $\phi : B \to k$. En particular, $\phi(p_m) \neq 0 \neq \phi(c)$. Evaluando la identidad de arriba en b' y luego tomando ϕ, vemos que existe una constante $e \in k$ tal que $e\phi(b) = \phi(c) \neq 0$, luego $\phi(b) \neq 0$. □

Teorema 2.5. (Teorema de Chevalley *débil*) — *Sean X e Y dos variedades afines, X irreducible y $f : X \to Y$ un morfismo de variedades algebraicas dominante. Entonces $f(X)$ contiene un abierto denso de Y.*

Demostración. Consideremos el morfismo de k-álgebras $f^* : k[Y] \hookrightarrow k[X]$, el cual es inyectivo porque f es dominante. (Recordar que un morfismo f se dice **dominante** si su imagen es densa en su co-dominio). Como $k[X]$ es un dominio íntegro porque X es una variedad afín irreducible, y es de tipo finito sobre $k \subset k[Y]$, es en particular de tipo finito sobre $k[Y]$. Como estamos bajo las hipótesis del Lema técnico, podemos tomar $b := 1$. Sabemos que existe $a \neq 0$ en $k[Y]$ tal que todo homomorfismo $\phi : k[Y] \to k$ que no se anula en a, se extiende a $k[X]$, en el siguiente sentido: $\phi = \overline{\phi} \circ f^*$ para un homomorfismo $\overline{\phi} : k[X] \to k$ no nulo.

Ahora bien, los puntos de una variedad afín Y corresponden biyectivamente con los homomorfismos $k[Y] \to k$ de k-álgebras, los puntos del abierto principal $D_Y(a)$ de Y corresponden con los homomorfismos $k[Y] \to k$ que no se anulan en a, y a su vez, los puntos de Y correspondientes a $f(X)$ son los homomorfismos $k[Y] \to k$ que se extienden a $k[X] \to k$ vía f^*. Esto prueba que $f(X)$ contiene el abierto $D_Y(a)$ de Y. □

3. Conjuntos constructibles

Sea X un espacio topológico. Recordemos que un conjunto $A \subset X$ se dice **localmente cerrado** si $A = U \cap F$ con $U \subset X$ abierto y $F \subset X$ cerrado. Equivalentemente, A es abierto en $\overline{A}$. Por ejemplo, los abiertos y los cerrados de un espacio topológico son localmente cerrados porque se pueden escribir como $U = U \cap X$ y $F = F \cap X$, con X tanto cerrado como abierto.

Definición 3.1. — Sea A un subconjunto de un espacio topológico X. Diremos que A es **constructible** si se puede escribir como la unión de finitos subconjuntos localmente cerrados de X.

Proposición 3.2. — *1. La familia $\mathscr{C}$ de conjuntos constructibles en un espacio topológico X es la menor familia que contiene los conjuntos abiertos de X y es cerrada por finitas uniones, finitas intersecciones, y complementos.*

2. *(Transitividad) Sea X un espacio topológico con $Y \subset X$ subespacio. Si Y' es un subconjunto constructible de Y (topología subespacio), además, Y es constructible en X, entonces Y' es constructible en X.*

Demostración. Primero veamos que la familia $\mathscr{C}$ es cerrada para las operaciones recién mencionadas. Sean A y B constructibles, es decir,

$$A = A_1 \cup \cdots \cup A_s \quad \text{y} \quad B = B_1 \cup \cdots \cup B_r,$$

donde los A_i y B_j son localmente cerrados de X. Tenemos que $\mathscr{C}$ es:

1. *Cerrada por finitas uniones.* Inmediato.

2. *Cerrada por finitas intersecciones.*

$$A \cap B = \bigcup_{i,j} A_i \cap B_j,$$

como la intersección de dos localmente cerrados es localmente cerrado, la expresión de arriba es una unión de finitos localmente cerrados, ergo es constructible. En general, para finitas intersecciones de constructibles procedemos por inducción el número de intersecciones.

3. *Cerrado por complementos.*

$$A^c = \bigcap_i A_i^c,$$

donde en el lado derecho hay una intersección de finitos conjuntos de la forma A_i^c, los cuales son constructibles porque el complemento de un localmente cerrado es constructible. En efecto, si $A_i = U_i \cap F_i$ con U_i abierto de X y F_i cerrado, entonces $A_i^c = U_i^c \cup F_i^c$. Así, A^c es constructible por el ítem anterior.

Finalmente, que $\mathscr{C}$ es minimal con estas operaciones se deduce de que si $\mathscr{C}'$ es otra familia de subconjuntos de X que contiene a los abiertos y es cerrado para las operaciones, entonces tomando complemento vemos que contiene a los cerrados, y tomando intersección contiene a los localmente cerrados; por último, contiene a los constructibles tomando finitas uniones.

Veamos el segundo ítem. Supongamos que $Y' = \bigcup_{i=1}^n U_i' \cap V_i'$ tal que U_i' es abierto de Y y V_i' es cerrado de Y. Con lo cual, $U_i' = U_i \cap Y$ y $V_i' = V_i \cap Y$ para U_i abierto de X y V_i cerrado de X. Por lo tanto, podemos escribir:

$$Y' = \bigcup_{i=1}^n U_i \cap V_i \cap Y.$$

Así, Y' es la unión finita de conjuntos constructibles en X: U_i es abierto (en particular constructible), V_i es cerrado (en particular constructible) e Y constructible, con lo cual la intersección $U_i \cap V_i \cap Y$ es constructible en X. Por el ítem anterior, la unión e intersección de finitos conjuntos constructibles es constructible, consecuentemente Y' es constructible en X. □

Lema 3.3. — *Sea X un espacio topológico, y $A \subset X$ un subconjunto constructible, entonces contiene un V que abierto y denso en $\overline{A}$. (En particular, V es localmente cerrado en A).*

Demostración. Como los subconjuntos constructibles son uniones finitas de localmente cerrados, basta probar que vale para A localmente cerrado y luego para uniones finitas.

1. *Localmente cerrado.* Si A es localmente cerrado, se escribe como $A = U \cap F$, donde $U \subset X$ es abierto y $F \subset X$ es cerrado. Ahora, podemos tomar $V := A \subset A$ si es que vemos que A es abierto denso de $\overline{A}$. Por un lado, es abierto pues

$$A = U \cap F = U \cap U \cap F = U \cap A = U \cap A \cap \overline{A} = U \cap \overline{A};$$

por otro lado, por definición es denso en su clausura.

2. *Uniones finitas.* Si A y B, contienen, respectivamente a V y W abiertos densos de $\overline{A}$ y $\overline{B}$, entonces $A \cup B$ contiene a $V \cup W$ que es abierto denso de $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. En general, para más de dos uniones procedemos por inducción.

□

4. Recuerdo de dimensión

1. Recordar que en un espacio topológico X, decimos que un subespacio Y es **irreducible** si no se puede escribir como la unión de dos cerrados propios no vacíos de Y. Por ejemplo los singletons $\{x\}$, $x \in X$ son siempre irreducibles.

2. Recordar que si X es un espacio topológico, definimos la **dimensión** como el supremos de todos los $n \geqslant 0$ tales que existe una secuencia de inclusiones

$$X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n$$

con X_i cerrado irreducible de X.

3. La dimensión de la recta afín $\mathbb{A}^1$ es 1. En efecto, sus únicos cerrados irreducibles son $\mathbb{A}^1$, y los singletons $\{x\}$, $x \in \mathbb{A}^1$.

4. Una prevariedad de dimensión 0 es la unión de finitos puntos.

Ejercicio 4.1. — Probar que si X es un espacio topológico de dimensión finita e Y es un subespacio de X, entonces $\dim Y \leqslant \dim X$. Probar que además, si X es irreducible e Y es cerrado, luego $X = Y$ si y solo si $\dim X = \dim Y$.

5. Teorema de Chevalley

Teorema 5.1. (Chevalley) — *Sea $f : X \to Y$ un morfismo de variedades algebraicas. Entonces si A es un subconjunto constructible de X, luego $f(A)$ es constructible de Y. En particular, $f(X)$ es constructible en Y.*

Demostración. La demostración se basa en una serie de reducciones hasta que lleguemos a un caso donde podamos aplicar el teorema en su versión débil 2.5:

Paso 1: Reducción al caso particular $A = X$. Como A es constructible, $A = A_1 \cup \cdots \cup A_r$ con A_i localmente cerrado, así, $f(A) = f(A_1) \cup \cdots \cup f(A_r)$. Con lo cual, considerando el morfismo $A_i \hookrightarrow X \xrightarrow{f} Y$ con la estructura de subvariedad localmente cerrada A_i de X, basta probar el caso $A = X$.

<u>*Paso 2: Reducción al caso Y afín.*</u> Recordemos que las variedades algebraicas se construyen "pegando" abiertos que tienen estructura de variedad afín como espacio anillado. Con lo cual, Y es la unión de abiertos afines; se puede tomar una unión finita pues Y es un espacio topológico Noetheriano por definición, ergo cuasi-compacto; digamos $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_m$. Ahora bien, $X = f^{-1}(Y_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(Y_m)$ es una descomposición en abiertos. Así, basta probar que las imágenes de los morfismos $f^{-1}(Y_j) \hookrightarrow X \xrightarrow{f} Y_j$ son constructibles, pues $f(X)$ es la unión de estas finitas imágenes que son constructibles en su respectivo Y_j y luego por transitividad son constructibles en Y también, entonces la Proposición 3.2 nos garantiza que $f(X)$ es constructible en Y.

<u>*Paso 3: Reducción al caso X afín.*</u> Como venimos haciendo en los pasos anteriores, escribiendo $X = U_1 \cup \cdots \cup U_n$ como unión finita de abiertos afines y considerando los morfismos $U_i \hookrightarrow X \xrightarrow{f} Y$, basta probar el caso X variedad afín y $f(X)$ constructible en Y.

<u>*Paso 4: Reducción al caso X irreducible.*</u> Sabemos que $X = X_1 \cup \cdots \cup X_l$ es su descomposición en componentes irreducibles. De la misma forma que hicimos en el anterior paso, podemos suponer que $X = X_i$ es irreducible.

<u>*Paso 5: Reducción al caso f dominante.*</u> Considerando $Y = \overline{f(X)}$, basta probar que f es dominante. En efecto, si $f(X)$ es constructible en $\overline{f(X)}$, como este último es cerrado en Y, es en particular constructible, y por transitividad $f(X)$ también debe serlo en Y.

Finalmente, todas estas reducciones nos llevan a tener que probar que si X, Y son variedades afines, X irreducible, y $f : X \to Y$ un morfismo dominante, entonces $f(X)$ es constructible. Pero por la versión débil del teorema 2.5, $f(X)$ contiene un abierto de Y, digamos U, y podemos escribir

$$f(X) = U \cup f(X \setminus f^{-1}(U)).$$

Como $X \setminus f^{-1}(U)$ es un cerrado propio de X, debe ser vacío o tener dimensión estrictamente menor que X, pues para que tengan la misma dimensión deben ser iguales (ver el Ejercicio 4.1). Por inducción en la dimensión de X tenemos que $f(X)$ es unión de dos constructibles, ergo es constructible. Notar que el caso base es $\dim X = 0$, con lo cual X es finito y por lo tanto $f(X)$ también; los puntos son cerrados en la variedad Y, así que la unión de finitos puntos en Y también es constructible, probando el caso base. □

Corolario 5.2. — *Si $f : X \to Y$ es un morfismo de variedades algebraicas, entonces $f(X)$ contiene un abierto denso de $\overline{f(X)}$.*

<u>*Demostración.*</u> Por el Lema 3.3 y el caso particular del teorema. □

Ejemplo 5.3. — La imagen del morfismo regular $f : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$, $(x, y) \mapsto (x, xy)$ es constructible, ya que se puede escribir como la unión de los conjuntos A_1, A_2 dados por:

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{(0,0)\} \\ A_2 &:= \mathbb{A}^2 \setminus V(X) = D_{\mathbb{A}^2}(X), \end{aligned}$$

donde $V(X)$ denota la variedad dada por los ceros del polinomio $p(X,Y) = X$ y $D_{\mathbb{A}^2}(X)$ es el abierto principal de $\mathbb{A}^2$ dado por los puntos (x,y) donde p no se anula. Aquí A_1 es Zariski cerrado y A_2 es Zariski abierto (de hecho un abierto principal), en particular son constructibles en $\mathbb{A}^2$.

Referencias

[Har13] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer Science & Business Media, 2013.

[Mus17] Mircea Mustata. Math 631 - algebraic geometry - fall 2012 - notes, 2017.

[Spr98] Tonny Albert Springer. Linear algebraic groups. In *Algebraic Geometry IV: Linear Algebraic Groups Invariant Theory*, pages 1–121. Springer, 1998.