# Apuntes - Tópicos en matemática discreta

Enzo Giannotta

19 de octubre de 2023

# Índice general

# Capítulo 1

# Teoría extremal de grafos

En este curso trabajaremos con grafos simples, usualmente denotados: $G = (V,E)$.

## 1.1. Teoría extremal de grafos

¿Cuál es la máxima cantidad de aristas que puede tener un grafo de $n$ vértices sin que aparezca una cierta estructura?

¿Cómo lucen estos grafos maximales?

**Ejemplo 1.1.1.**

1. Cuando la estructura es un ciclo, la cantidad de aristas es $n-1$ y los grafos maximales son los árboles.
2. Cuando la estructura es un ciclo impar. ¿Cómo lucen los grafos sin ciclos impares y que tienen una cantidad máxima de aristas? Son los completos balanceados $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. En efecto, para que un grafo bipartito con $n$ vértices tenga una cantidad máxima de aristas, tiene dos partes $|X|, |Y|$ con $|X|+|Y| = n$ y si maximiza la cantidad de aristas es un grafo $K_{|X|,|Y|}$. Es decir, tiene $|X| \cdot |Y|$ aristas y si maximizamos, hay que maximizar la función $f(y) = (n-y)y$ con $1 \leqslant y \leqslant n-1$ e $y$ entero; esto sucede sii $y = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ o $y = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

**Definición 1.1.2.** Sean $G$ y $H$ dos grafos. Decimos que $G$ es **H**-libre (o **libre de** $H$) si $H \not\subset G$. El **número extremal** de $H$ es la cantidad

$$\mathrm{ex}(n,H) = \max\{e(G) | G \text{ es un grafo de } n \text{ vértices } H\text{-libre}\},$$

donde $e(G)$ siempre denotará el número de aristas de $G$.

Si $G$ es $H$-libre y $||G|| = \mathrm{ex}(n,H)$, decimos que $G$ es **extremal** respecto de $n$ y $H$.

**Teorema 1.1.3** (Mantel, 1907). *Sea $n \in \mathbb{N}$, $G$ un grafo $K_3$-libre con $n$ vértices. Entonces, $e(G) \leqslant \lceil \frac{n}{2} \rceil \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Además, $e(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \Leftrightarrow G = K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$*[1].

*Demostración.* Por inducción en $n$. Los casos $n = 1, n = 2$ son un vértice, un 1-camino respectivamente. Luego vale para $n = 1,2$. Ahora, supongamos que $n \geqslant 3$. Sea $G$ un grafo $K_3$-libre con $n$ vértices, y $uv \in E(G)$ (si $G$ no tuviera aristas, podríamos agregar una arista y seguiría siendo $K_3$-libre); consideremos $G' = G \setminus \{u,v\}$.

[1] Cuando $n = 1,2$ tenemos que $G$ es el completo $K_n$

Tenemos que $G'$ también es $K_3$-libre y tiene $n-2$ vértices. Por inducción, $G'$ satisface

$$e(G') \leqslant \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor.$$

Más aún, como $G$ es $K_3$-libre, no existen vértices $w \in G'$ tal que sea adyacente a $u$ y $v$ al mismo tiempo. Luego existen a lo más $n-2$ aristas en $E(G) \backslash E(G')$ sin contar la arista $uv$. Es decir,

$$e(G) \leqslant e(G') + n - 1 \leqslant \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

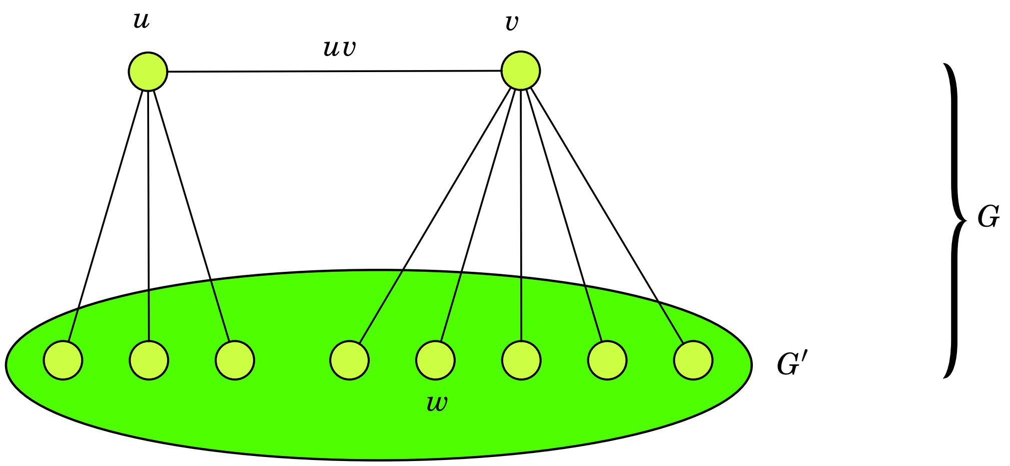



Figura 1.1.1: Ilustración

Para la segunda parte, $e(G) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \Leftrightarrow G = K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Es claro que si $G = K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ luego $e(G) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Veamos la recíproca. Sea $G$ con $n$ vértices y cantidad máxima de aristas tal que es $K_3$-libre. Los casos $n = 1,2$ son triviales, luego podemos suponer que $|G| \geqslant 3$. Como $G$ es $K_3$-libre, existen una aristas $uv \in E(G)$ por maximalidad. Por inducción, $G' := G \backslash \{u,v\}$ es un $K_{\lceil \frac{n-2}{2} \rceil, \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor}$, digamos con partición $X', Y' \subset V(G')$ de sus vértices. Como $G$ es $K_3$-libre, ni $u$ ni $v$ pueden tener vecinos en $G'$ que estén en ambas particiones $X', Y'$, además, no puede haber una partición que no tenga a $u$ y $v$ como vecinos en $G$ pues podríamos agregar aristas entre vértices de esa particiones: contradiciendo maximalidad. Sin pérdida de generalidad, los vecinos de $u$ en $G'$ están en $X$ y los de $v$ en $Y$. Más aún, por maximalidad, todos los vértices de $X$ son vecinos con $u$ y todos los de $Y$ con $v$. Así, $G$ es un $X,Y$ bigrafo tomando $X := X' \cup \{v\}$ e $Y := Y' \cup \{u\}$. Notar que esto prueba que $G$ es un $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

□

**Definición 1.1.4.** El **grafo de Turán** $T_k(n)$ es el grafo $k$-partito completo con la mayor cantidad de aristas, es decir, los cardinales de las particiones difieren a lo más en 1 entre sí (por maximalidad). Notamos

$$t_k(n) := e(T_k(n)).$$

**Observación 1.1.5.** Podemos calcular $t_k(n)$. Sea $\alpha \in \mathbb{N}$ el cardinal más grande de una partición de $T_k(n)$. Entonces las demás particiones tienen cardinal $\alpha$ o $\alpha - 1$. Sea $r$ la cantidad de particiones con cardinal $\alpha - 1$ y $k - r$ de cardinal $\alpha$. Tenemos que sumando los cardinales de todas las particiones:

$$\alpha k - r = n.$$

Como $0 \leqslant r < k$, $r$ es el resto de la división de $n$ por $k$ y $\alpha$ es el cociente. Despejando obtenemos que $\alpha = \frac{n+r}{k}$ es decir, $\alpha = \lceil \frac{n}{k} \rceil$. En particular $\alpha - 1 = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$. Juntado todo, tenemos que la cantidad total de aristas es:

$$\alpha^2 \binom{k-r}{2} + \alpha(\alpha-1)(k-r)r + (\alpha-1)^2 \binom{r}{2},$$

i.e.,

$$\boxed{t_k(n) = \lceil \frac{n}{k} \rceil^2 \binom{k-r}{2} + \lceil \frac{n}{k} \rceil \lfloor \frac{n}{k} \rfloor (k-r)r + \lfloor \frac{n}{k} \rfloor^2 \binom{r}{2}.}$$

**Teorema 1.1.6** (Turán, 1941)**.** *Sean $n, k \in \mathbb{N}$, $G$ un grafo $K_{k+1}$-libre con $n$ vértice. Entonces*

$$e(G) \leqslant t_k(n).$$

*Además,* $e(G) = t_k(n) \Leftrightarrow G = T_k(n)$[2].

*Demostración.* Hagamos inducción en $n$. Para $n \leqslant k$ es trivial. Sea ahora $G$ con $n \geqslant k+1$ que a su vez es $K_{k+1}$-libre y arista maximal. Esto implica que agregar cualquier arista hace aparecer un $K_{k+1}$ como subgrafo. Entonces $G$ contiene un $K_k$. Sea $A$ el conjunto de vértices de un subgrafo $K_k$ en $G$. Consideremos luego $G' = G \backslash A$. El grafo $G'$ es $K_{k+1}$-libre y tiene $n-k$ vértices. Cada $x \in V(G')$ tiene a lo más $k-1$ vecinos en $A$ dentro del grafo $G$, pues $G$ es $K_{k+1}$-libre. Luego por hipótesis inductiva:

$$e(G') \leqslant t_k(n-k).$$

Si juntamos esto con la hipotesis inductiva, tenemos que

$$e(G) \leqslant e(G') + (n-k)(k-1) + \binom{k}{2} \leqslant t_k(n-k) + (n-k) \cdot (k-1) + \binom{k}{2} = t_k(n),$$

donde el segundo término es la cantidad de aristas entre $A$ y $V(G')$.

Veamos ahora la segunda afirmación. Por definición, $G = T_k(n)$ tiene $t_k(n)$ aristas. Recíprocamente, supongamos que $G$ con $n$ vértices y cantidad máxima de aristas $e(G)$ tal que es $K_{k+1}$-libre. Los casos $n \leqslant k$ son triviales, luego supongamos que $n \geqslant k+1$. Por maximalidad, $G$ contiene un $K_k$ como subgrafo; llamemos $A$ a su conjunto de vértices en $G$ y consideremos $G' := G \backslash A$. Notar que

$$e(G') \geqslant e(G) - \left( (n-k)(k-1) + \binom{k}{2} \right) = t_k(n) - (n-k)(k-1) - \binom{k}{2} = t_k(n-k),$$

pues cada vértice de $G'$ tiene a lo más $k-1$ vecinos en $A$. Como $G'$ es $K_{k+1}$-libre, en realidad vale la igualdad: $e(G') = t_k(n-k)$, por la primera parte que ya demostramos. Llamemos $X_1, X_2, \ldots, X_k$ a las particiones de $G'$. Como vale la igualdad arriba, tenemos que cada vértice de $G'$ tiene exactamente $k-1$ vecinos en $A$. Para cada $x' \in G'$ llamemos $\alpha(x')$ al único vértice de $A$ que no es adyacente a $x'$ en $G$. Más formalmente, $\alpha : V(G') \to A$ es una función; afirmamos que:

[2]Cuando $n = 1, 2, \ldots, k-1$ tenemos que $G$ es el completo $K_n$

(I) $\alpha$ es sobreyectiva.

(II) Si $x'_i \in X_i$ y $x'_j \in X_j$ para $i \neq j$, entonces $\alpha(x'_i) \neq \alpha(x'_j)$.

Antes de probar la afirmación, notemos que esta prueba que $\alpha\big|_{X_i}$ es constante para cada $i = 1, \dots, k$ (y por lo tanto tiene sentido el abuso de notación $\alpha(X_i)$ para denotar al único vértice de $A$ que no es adyacente a ningún vértice $x' \in X_i$). Veamos entonces la afirmación:

(I) Supongamos que $\alpha$ no es sobreyectiva: existe un $a_0 \in A$ tal que para todo $i = 1, \dots, k$ existe $x'_i \in X_i$ adyacente a $a_0$ en $G$. Pero esto implica entonces que los vértices $x'_1, \dots, x'_k, a_0$ forman un $K_{k+1}$ en $G$, absurdo.

(II) En efecto, si $\alpha(x'_i) = a_0 = \alpha(x'_j)$, entonces $x_i, x_j$ y los vértices de $A \setminus \{a_0\}$ juntos forman un $K_{k+1}$ en $G$, absurdo.

Así, podemos extender la partición de $G'$ a todo $G$: definimos $\tilde{X}_i := X_i \cup \{\alpha(X_i)\}$. Es claro que de esta manera $G$ es un grafo $k$-partito completo. Como $G$ es maximal en su cantidad de aristas, entonces $G = T_k(n)$. □

**Teorema 1.1.7** (Erdös - segunda demostración del teorema)**.** *Sean $n, k \in \mathbb{N}$ y $G$ un grafo $K_{k+1}$-libre con $n$ vértices. Entonces existe un grafo $H$ que es $k$-partito con $V(H) = V(G)$ tal que:*

$$d_H(v) \geqslant d_G(v), \quad \forall v \in V(G).$$

*Erdös.* Haremos inducción en $k$. Para $k = 1$ no hay que hacer nada. Sea ahora $k \geqslant 2$. Sea $v \in V(G)$ con $d_G(v) = \Delta(G)$. La vecindad de $v$, $G' := G[N_G(v)]$ debe ser $K_k$-libre. Sea $A := G \setminus N_G(v)$. Notar que

$$d_G(u) \leqslant d_{G'}(u) + |A|.$$

Por hipótesis inductiva existe un grafo $H'$ que es $(k-1)$-partito con $V(H') = V(G')$ y

$$d_{H'}(u) \geqslant d_{G'}(u), \quad \forall u \in V(G').$$

Sea $H$ el grafo obtenido a paratir de $H'$ añadiendo los vértices de $A$ y conectando todos los vértices entre $A$ y $V(H')$. Observar que $H$ es $k+1$-partito y como $v$ tiene grado máximo en $G$, tenemos que para cada $u \in A$:

$$d_G(u) \leqslant d_G(v) = |V(H')| = d_H(u)$$

y para $u \in V(H')$ sabemos que:

$$d_G(u) \leqslant d_{G'}(u) + |A| \underset{H.I.}{\leqslant} d_{H'}(u) + |A| = d_H(u).$$

□

**Ejercicio 1.1.8.** A partir de la demostración deducir que el grafo $K_{k+1}$-extremal es $T_k(n)$ y es único.

*Solución.* Sea $G$ un grafo $K_{k+1}$-extremal y $H$ el grafo $r$-partito obtenido por el Teorema anterior. Así, $V(H) = V(G)$ y $d_H(v) \geqslant d_G(v)$ para todo vértice $v$. Esta desigualdad implica que

$$e(H) \geqslant e(G),$$

y por lo tanto, $H$ también es $K_{r+1}$-extremal. Pero por definición, $t_k(n) \geqslant e(H)$. Pero ya vimos que los grafos $K_{r+1}$ extremales tienen $\geqslant t_k(n)$ aritas. Con lo cual, en realidad $e(G) = e(H)$ y más aún, $d_H(v) = d_G(v)$ para todo $v$.

Esto nos indica que inspeccionando la demostración más detalladamanete, se tiene que $G'$ es un $T_{k-1}(\Delta)$ (con $\Delta := \delta(G)$) y que $G$ es luego $T_k(n)$. □

**Observación 1.1.9.** Sea $H$ un grafo con $\chi(H) \geqslant 3$, es decir no bipartito, entonces

$$\mathrm{ex}(n,H) = \Theta(n^2).$$

*Demostración.* En primer lugar, si $G$ es un grafo que contiene a $H$, luego no puede ser bipartito. En particular, si $G = K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, entonces es $H$-libre al ser bipartito; de hecho tiene $n$ vértices y $e(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Consecuentemente

$$(n-1)^2/4 \leqslant \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leqslant \mathrm{ex}(n,H).$$

Por otro lado, la cantidad de aristas maxima de $G$ es $\binom{n}{2}$ (en general para cualquier grafo con $n$ vértices) y por lo tanto $\mathrm{ex}(n,H) = \Theta(n^2)$. □

## 1.2. Números extremales en grafos bipartitos

**Recuerdo 1.2.1** (Desigualdad de Jensen)**.** *Vamos a usar la desigualdad de Jensen: si $\varphi$ es una función convexa entonces:*

$$\boxed{\varphi(\mathbb{E}(X)) \leqslant \mathbb{E}(\varphi(X)).}$$

**Ejercicio 1.2.2.** Probar las siguientes dos desigualdades elementales para el binomio de Newton:

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \overset{\text{Cota 1}}{\leqslant} \binom{n}{k} \overset{\text{Cota 2}}{\leqslant} \left(\frac{n \cdot e}{k}\right)^k.$$

*Solución.*

Cota 1: Notar que

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdots \frac{n-k+1}{1} \geqslant \left(\frac{n}{k}\right)^k,$$

pues $\frac{n}{k} \leqslant \frac{n-j}{k-j}$ para todo $j = 0, \ldots, k$.

Cota 2: Notar que se tiene una mejor cota:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \leqslant \frac{n^k}{k!}.$$

Por lo tanto, como $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, se sigue que $e^k \geqslant \frac{k^k}{k!}$, y luego

$$\frac{n^k}{k!} \leqslant \frac{n^k e^k}{k^k},$$

como queríamos.

□

**Teorema 1.2.3** (Erdös, 1938)**.** *Para todo* $n \in \mathbb{N}$

$$\text{ex}(n, C_4) \leqslant n^{\frac{3}{2}}.$$

**Definición 1.2.4.** Una **cereza** es un 2-camino $x_0x_1x_2$. Llamaremos a $x_1$ el **centro** y a $x_0, x_2$ las **hojas**.

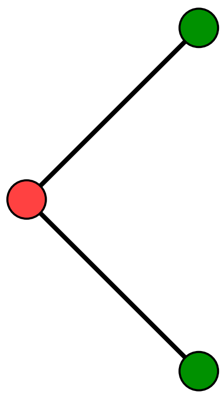



Figura 1.2.2: Dibujo de cereza.

*Demostración.* Sea $G$ un grafo $C_4$-libre con $n$ vértices. Contaremos cereza en $G$ para acotar el número de aristas $e(G)$.

Para cada vértice $v \in V(G)$ hay exactamente

$$\binom{d_G(v)}{2} \text{ cerezas con centro en } v.$$

Por lo tanto, en $G$ hay

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{2} \text{ cerezas en } G.$$

Por la desigualdad de Jensen la sumatoria se minimiza cuando todos los grados son iguales:

$$\begin{aligned}\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{2} &\geqslant n \cdot \binom{2e(g)/n}{2} \\ &\overset{Cota1}{\geqslant} n \cdot \left(\frac{e(G)}{n}\right)^2 = \frac{e(G)^2}{n}.\end{aligned}$$

Por otro lado, dado un par $\{u, v\}$ de hojas de cerezas distintas, entonces tendríamos un subgrafo $C_4$ en $G$, absurdo; por lo tanto hay a lo más

$$\binom{n}{2} \text{ cerezas en } G.$$

Juntando todo:

$$\frac{e(G)^2}{n} \leqslant \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

consecuentemente $e(G)^2 \leqslant n^3$, i.e., $e(G) \leqslant n^{\frac{3}{2}}$. $\square$

**Teorema 1.2.5** (Kövani, Sós, Turán). *Sean $s,t \in \mathbb{N}$, $s \leqslant t$. Entonces existe una constante $c = c(s,t) > 0$ tal que*

$$\operatorname{ex}(n, K_{s,t}) \leqslant c \cdot n^{2-\frac{1}{s}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Definición 1.2.6.** Una **$s$-cereza** es un $K_{1,s}$. Similarmente tenemos la noción de **centro** y **hojas** (las cuales son $s$).

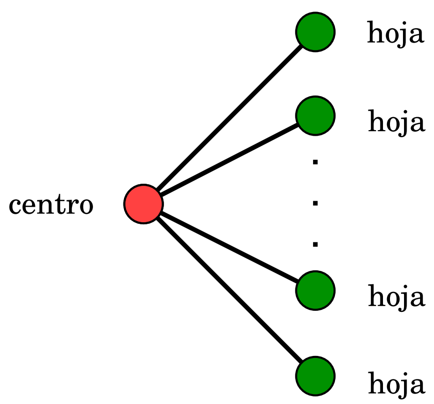



Figura 1.2.3: Dibujo de $s$-cereza.

*Demostración.* Sea $G$ un grafo $K_{s,t}$-libre en $n$ vértices. Para cada $v \in V(G)$ hay $\binom{d_G(v)}{s}$ $s$-cerezas. Por lo tanto en $G$ hay

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{s} \quad s\text{-cerezas},$$

con lo cual

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{s} \overset{\text{Cota 1}}{\geqslant} \sum_{v \in V(G)} \frac{d_G(v)^s}{s^s} \overset{\text{Jensen}}{\geqslant} \frac{n}{s^s}\left(\frac{2e(G)}{n}\right)^s.$$

Procediendo de manera análoga a la demostración del teorema anterior, tenemos que un conjunto de $s$ vértices del grafo puede ser conjunto de hojas de a lo más $(t-1)$ cerezas, pues de lo contrario habría una copia de $K_{s,t}$. Por lo tanto, hay en total a lo más

$$(t-1) \cdot \binom{n}{s} \quad s\text{-cerezas}.$$

Juntando todo:

$$n\left(\frac{2e(G)}{sn}\right)^s \leqslant (t-1)\cdot\binom{n}{s} \overset{\text{Cota 2}}{\leqslant} (t-1)\cdot\left(\frac{ne}{s}\right)^s,$$

luego

$$\frac{2e(G)}{sn} \leqslant \frac{(t-1)^{\frac{1}{s}}}{n^{\frac{1}{s}}}\cdot\frac{ne}{s},$$

equivalentemente,

$$e(G) \leqslant \frac{(t-1)^{\frac{1}{s}}se}{2s}\cdot n^{2-\frac{1}{s}} = c(s,t)\cdot n^{2-\frac{1}{s}}.$$

□

**Ejercicio 1.2.7.** Demostrar que

$$\mathrm{ex}(n,H) = o(n^2) \quad \Leftrightarrow \quad H \text{ es bipartito.}$$

*Solución.* Como $H$ es bipartito, existen $s,t \in \mathbb{N}$, digamos $s \leqslant t$, tales $H \subset K_{s,t}$. Así, por el Teorema de 1.2.5,

$$\mathrm{ex}(n,H) \leqslant c(s,t)\cdot n^{2-\frac{1}{s}},$$

pues si $G$ no contiene a $H$, tampoco contiene a $K_{s,t}$. Así, obtenemos que $\mathrm{ex}(n,H) = o(n^2)$.

Recíprocamente, supongamos que $H$ no es bipartito, luego por la Observación 1.1.9, $\mathrm{ex}(n,H) = \Theta(n^2)$. Con lo cual, si $\mathrm{ex}(n,H) = o(n^2)$, necesariamente $H$ es bipartito. □

## 1.3. Números extremales para árboles

**Teorema 1.3.1.** *Sean $n,k \in \mathbb{N}$ y $T$ un árbol con $k+1$ vértices. Entonces,*

$$\mathrm{ex}(n,T) \leqslant (k-1)\cdot n.$$

**Lema 1.3.2.** *Sean $k \in \mathbb{N}$ y $T$ un árbol con $k+1$ vértices. Entonces si $G$ es un grafo con $\delta(G) \geqslant k$, luego contiene a $T$ como subgrafo.*

*Demostración.* Haremos inducción en $k$. Para $k = 1$ es claro, pues existe un vértice con al menos un vecino. En general, supongamos que $k \geqslant 2$. Sea $h$ una hoja de $T$ y consideremos el árbol $T' = T\backslash\{h\}$. Por hipótesis inductiva, $T' \subset G$. Sea $p$ el único vecino de $h$ en $T$, i.e. $p \in T'$. Como $T$ tiene $k+1$ vértices, $p$ tiene a lo más $k-1$ vecinos en $T'$, luego $p$ tiene un vecino en $G$ que no está en $T'$ pues $\delta_G(p) \geqslant k$. Entonces podemos incrustar $T$ en $G$ considerando $h$ como este vértice. □

**Lema 1.3.3.** *Todo grafo $G$ contiene un subgrafo $H$ con $\delta(H) > \varepsilon(H) \geqslant \frac{e(G)}{n}$, donde $n = |G|$.*

*Demostración.* Construiremos una secuencia de subgrafos de $G$:

$$G =: G_0 \supset G_1 \supset \cdots$$

de la siguiente manera, si $v_i \in G_i$ es un vértice con $d_{G_i}(v_i) \leqslant \varepsilon(G_i) := \frac{e(G_i)}{|G_i|}$, entonces definimos $G_{i+1} := G_i \backslash \{v_i\}$. Eventualmente esta secuencia termina, digamos en $H := G_{j_0}$.

Notar que $\varepsilon(G_{i+1}) \geqslant \varepsilon(G_i)$, y por lo tanto $\varepsilon(H) \geqslant \varepsilon(G)$. En efecto,

$$\varepsilon(G_{i+1}) = \frac{e(G_{i+1})}{|G_{i+1}|} = \frac{e(G_i) - d_{G_i}(v_i)}{|G_i| - 1},$$

que es mayor o igual que $\frac{e(G_i)}{|G_i|}$ si y solo si

$$(e(G_i) - d_{G_i}(v_i))\,|G_i| \geqslant e(G_i)(|G_i| - 1),$$

equivalentemente,

$$e(G_i) \geqslant |G_i|\, d_{G_i}(v_i),$$

i.e.,

$$\frac{e(G_i)}{|G_i|} \geqslant d_{G_i}(v_i),$$

que es cierto por construcción. Por otro lado, por minimalidad de $H$, se sigue que $\delta(H) > \varepsilon(H)$. □

*Demostración del teorema.* Sea $G$ un grafo con $\geqslant (k-1)\cdot n + 1$ aristas. Por el segundo lema, $G$ contiene $H$ con

$$\delta(H) \geqslant \frac{e(G)}{n} > \frac{(k-1)n}{n},$$

y por el primer lema $T \subset H \subset G$. □

**Conjetura 1.3.4** (Erdös, Sós, 1963). *Se conjetura que en el teorema anterior se tiene una mejor cota:*

$$\mathrm{ex}(n, T) \leqslant \frac{1}{2}(k-1)n.$$

*Notar que de ser verdadera la conjetura, entonces esta cota es tight cuando $n$ es un múltiplo de $k$: Sea $G$ el grafo obtenido al unir $\frac{n}{k}$ copias de $K_k$, así $e(G) = \frac{n}{k}\binom{k}{2} = \frac{n}{2}(k-1)$.*

*Esta conjetura es verdadera en el caso <u>T un camino</u>:*

**Teorema 1.3.5** (Erdös & Gallai, 1959). *Sean $n, k \in \mathbb{N}$. Entonces,*

$$\mathrm{ex}(n, P_k) \leqslant \frac{(k-1)\cdot n}{2}$$

**Ejercicio 1.3.6.** A partir de la demostración de este teorema, obtenga que los grafos extremales son únicos.

**Lema 1.3.7.** *Todo grafo conexo $G$ con $n$ vértices contiene un camino de largo*

$$k := \min\{2\delta(G), n-1\}.$$

*Demostración.* Tomemos $P := v_0, \ldots, v_l$ camino de largo máximo. Sabemos que $N_G(v_0), N_G(v_l) \subset V(P)$ por maximalidad de $P$. Si $V(P) = V(G)$ ganamos. Así que supongamos que no; supongamos también que $l < k \leqslant 2\delta(G)$. Demostraremos que existe un ciclo de longitud $l$ contenido en $G[V(P)]$, así llegaremos a una contradicción pues al existir un vértice $x$ fuera de $G[V(P)]$ en $G$, podríamos extender el ciclo a un camino de longitud al menos $k+1$ en $G$ conectándolo con $x$.

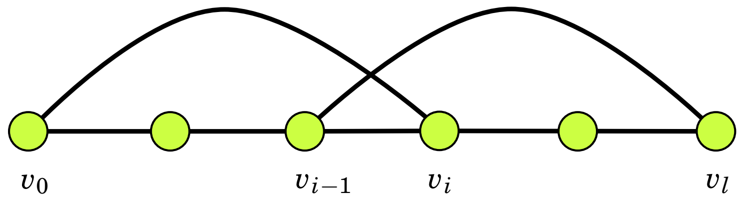


Figura 1.3.4: Notar que en este caso $v_0 P v_{i-1} v_l P v_i v_0$ es un ciclo de longitud $|P|$ en $G[V(P)]$.

En efecto, supongamos que no existe tal ciclo, luego para cada $i \in \{1,\ldots,l-1\}$ se tiene que $v_{i-1}v_l \notin E(G)$ o $v_0 v_i \notin E(G)$. Entonces

$$2\delta(G) \leqslant d_G(v_0) + d_G(v_l) \leqslant l < 2\delta(G),$$

absurdo. □

*Demostración del teorema.* Haremos inducción en $n$. Afirmamos que $G$ es $P_k$-libre en $n$ vérties, entonces

$$e(G) \leqslant \frac{(k-1)\cdot n}{2}.$$

El caso base es $n \leqslant k$, luego $e(G) \leqslant \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \leqslant \frac{n(k-1)}{2}$. Luego supongamos que $n \geqslant k+1$. Si $G$ no es conexo: sean $G_1,\ldots,G_r$ las componentes conexas, por hipótesis

$$e(G_i) \leqslant \frac{|G_i|(k-1)}{2},$$

entonces

$$e(G) = \sum_{i=1}^{r} e(G_i) \leqslant \frac{k-1}{2} \sum_{i=1}^{r} |G_i| = \frac{n(k-1)}{2}.$$

Ahora, supongamos que $G$ es conexo. Si $n-1 \leqslant 2\delta(G)$, entonces por el Lema 1.3.7, $G$ contiene un camino de largo $n-1 \geqslant k$, absurdo. Con lo cual, podemos asumir que $2\delta(G) \leqslant n-1$, y por el Lema, $G$ contiene un camino de largo $2\delta(G)$ que debe cumplir

$$2\delta(G) < k \quad \Leftrightarrow \quad \delta(G) \leqslant \frac{k-1}{2}.$$

Sea $v$ un vértice de grado $\leqslant \frac{k-1}{2}$, consideremos $G' := G \setminus \{v\}$. Por hipótesis inductiva

$$e(G') \leqslant \frac{(n-1)(k-1)}{2},$$

con lo cual,

$$e(G) \leqslant e(G') + \frac{k-1}{2} \leqslant \frac{(n-1)(k-1)}{2} + \frac{k-1}{2} = \frac{n(k-1)}{2}.$$

□

## 1.4. Estabilidad y supersaturación

**Teorema 1.4.1** (Füredi, 2015)**.** *Sean $n, t \in \mathbb{N}$, y $G$ con $n$ vértices. Si $G$ está $t$-**lejos** de ser bipartito*[3]*, entonces hay al menos*

$$\frac{n}{6}\left(e(G) - \frac{n^2}{4} + t\right)$$

*triángulos en $G$.*

*Demostración.* Para cada $u \in V(G)$, definimos

$$B_u := N_G(u) \quad \text{y} \quad A_u := V(G) \backslash B_u.$$

Luego la cantidad de tríangulos de $G$ es:

$$k_3(G) = \frac{1}{3} \sum_{u \in V(G)} e(B_u).$$

Para cada $u \in V(G)$, si borro las aristas de $G[B_u]$ y las de $G[A_u]$, obtengo un subgrafo bipartito de $G$: el $(A_u, B_u)$-bigrafo; luego tuvimos que haber quitado al menos $t$ aristas porque $G$ está $t$-lejos de ser bipartito, es decir:

$$e(B_u) + e(A_u) \geqslant t.$$

Además, para cada $u \in V(G)$

$$\sum_{v \in A_u} d_G(v) = e(B_u, A_u) + 2e(A_u).$$

Como

$$e(G) = e(A_u) + e(A_u, B_u) + e(B_u),$$

se sigue que $e(A_u) = e(B_u) - e(G) + \sum_{v \in A_u} d_G(v)$ (juntando ambas ecuaciones). Ahora, por la desigualdad $e(B_u) + e(A_u) \geqslant t$, se tiene que

$$e(B_u) \geqslant t - e(A_u) = t + e(G) - e(B_u) - \sum_{v \in A_u} d_G(v)$$

y por lo tanto

$$2e(B_u) \geqslant t + e(G) - \sum_{v \in A_u} d_G(v).$$

[3] Esto significa que si $H$ es un subgrafo bipartito de $G$, entonces $e(H) \leqslant e(G) - t$.

Sumando sobre todos los $u \in V(G)$ y utilizando que $k_3(G) = \frac{1}{3}\sum_{u\in V(G)} e(B_u)$, concluimos:

$$k_3(G) \geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}(nt + ne(G) - \sum_{u\in V(G)} \sum_{v\in A_u} d_G(v));$$

sin embargo, afirmamos que vale la siguiente igualdad:

$$\sum_{u\in V(G)} \sum_{v\in A_u} d_G(v) = \sum_{x\in V(G)} d_G(x)(n - d_G(x));$$

ya que cada término de la sumatoria se acota inferiormente por $\frac{n}{2} \cdot (n - \frac{n}{2}) = \frac{n^2}{2}$, concluimos el resultado.

Veamos la afirmación: notar que para cada $x \in V(G)$, su cantidad de aristas $d_G(x)$ es contada exactamente $|A_x| = n - d_G(x)$ veces del lado izquierdo de la sumatoria. □

Como corolario, se prueban los siguientes dos teoremas:

**Teorema 1.4.2** (Estabilidad). *Sean $n, t \in \mathbb{N}$, y $G$ es $K_3$-libre con $n$ vértices. Si $e(G) \geqslant \frac{n^2}{4} - t$, entonces $G$ contiene un grafo bipartito con al menos $e(G) - t$ aristas.*

*Demostración.* Si $G$ no tuviera un grafo bipartito con al menos $e(G) - t$ aristas, entonces $G$ estaría $(t+1)$-lejos de ser bipartito. Por el Teorema 1.4.1 tiene al menos

$$\frac{n}{6}\left(e(G) - \frac{n^2}{4} + (t+1)\right) \geqslant \frac{n}{6}$$

triángulos, i.e., al menos uno, lo cual es absurdo. □

**Teorema 1.4.3** (Supersaturación). *Sean $n, t \in \mathbb{N}$, y $G$ un grafo con $n$ vértices. Si $e(G) \geqslant \frac{n^2}{4} + t$, entonces $G$ contiene al menos $t \cdot n/3$ triángulos.*

*Demostración.* Notar que $G$ está $t$-lejos de ser bipartito, en efecto, un grafo bipartito de orden $m \leqslant n$ tiene a lo más $\frac{m^2}{4} \leqslant \frac{n^2}{4}$ aristas, pero $G$ tiene al menos $\frac{n^2}{4} + t \geqslant \frac{m^2}{4} + t$ aristas. Luego por el Teorema 1.4.1, $G$ tiene

$$\frac{n}{6}\left(e(G) - \frac{n^2}{4} + (t+1)\right) \geqslant \frac{n}{3}t$$

triángulos. □

**Teorema 1.4.4** (Füredi, 2015 – Estabilidad). *Sean $n, k \in \mathbb{N}$, $t \geqslant 0$ y $G$ un grafo $K_{k+1}$-libre en $n$-vértices. Si $e(G) \geqslant t_k(n) - t$, entonces $G$ contiene un subgrafo generador $k$-partito con al menos $e(G) - t$ aristas.*

*Demostración.* Haremos inducción en $k$. El caso $k = 1$ tenemos que $t_k(n) = 0$ y siempre se cumple. Entonces supongamos que $k \geqslant 2$. Tomemos $u \in V(G)$ con $d_G(u) = \Delta(G)$. Definamos $G' := G[B]$ con $B = N_G(u)$. Sea $A = V(G) \backslash B$. El grafo $G'$ es $K_k$-libre porque $G$ es $K_{k+1}$-libre, luego por el Teorema de Turán 1.1.6, $e(G') \leqslant t_{k-1}(d)$ con $d := |B|$ y entonces podemos definir $t' := t_{k-1}(d) - e(G') \geqslant 0$ y aplicar hipótesis inductiva al grafo $G'$. Así, $G'$ contiene un subgrafo $H'$ generador $(k-1)$-partito con al menos $e(G')-t' = 2e(G')-t_{k-1}(d)$ aristas.

Probemos que

$$H := \Big(V(H') \cup A, E(H') \cup E(A,B)\Big)$$

tiene al menos $e(G)-t$ aristas, y así $H$ es un subgrafo $k$-partito generador de $G$ con al menos $e(G)-t$ aristas. En efecto, queremos probar que

$$e(H') + e(A,B) \geqslant e(G) - t;$$

como $e(G) = e(A,B) + e(G') + e(A)$, la desigualdad de arriba es equivalente a

$$e(H') \geqslant e(G') + e(A) - t \quad \Leftrightarrow \quad e(H') - e(G') + t \geqslant e(A).$$

Ya que $e(H') \geqslant e(G') - t'$, nos queda que la última desigualdad es cierta si $e(A) \leqslant t - t'$.

Sabemos que

$$2e(A) + e(A,B) = \sum_{v \in A} d_G(v) \leqslant d \cdot (n-d),$$

donde la desigualdad sale de que la sumatoria tiene $(n-d)$ términos y cada grado $d_G(v) \leqslant \Delta(G) = d_G(u) = |B| = d$; y reemplacemos $e(A,B) = e(G) - e(A) - e(G')$ y nos queda

$$e(A) + e(G) - e(G') \leqslant d \cdot (n-d).$$

Ahora, notar que

$$t_k(n) \geqslant t_{k-1}(d) + d \cdot (n-d),$$

pues el lado izquierdo es la cantidad de aristas de un grafo de Turán (la cual es máxima) y el lado derecho es la cantidad de aristas de un grafo $k$-partito en $n$-vértices: el obtenido a patir del grafo de turán $T_{k-1}(d)$ agregando $n-d$ vértices y conectándolos a las $k-1$ particiones de $T_{k-1}(d)$. Juntando todo,

$$e(A) \leqslant d \cdot (n-d) - \overbrace{e(G)}^{\geqslant t_k(n)-t} + \overbrace{e(G')}^{=t_{k-1}(d)-t'} \leqslant d \cdot (n-d) - t_k(n) + t + t_{k-1}(d) - t' \leqslant t - t'$$

como queríamos probar. □

## 1.5. Teorema de Erdös-Stone

**Notación 1.5.1.** Notaremos por $K_s(t)$ al grafo de Turán $T_s(t \cdot s)$.

**Teorema 1.5.2** (Erdös-Stone, 1946)**.** *Sea $H$ un grafo con $e(H) \geqslant 1$. Entonces*

$$\operatorname{ex}(n,H) \leqslant \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + o(1)\right) \cdot \frac{n^2}{2} \quad (n \to \infty).$$

**Observación 1.5.3.** Sea $H$ un grafo con $e(H) \geqslant 1$. Entonces

$$t_{\chi(H)-1}(n) \leqslant \operatorname{ex}(n,H),$$

pues todo grafo $G$ necesita de al menos $\chi(H)$ colores para tener a $H$ incrustado, por lo tanto $T_{\chi(H)-1}(n)$ es $H$-libre.

**Observación 1.5.4.**
$$t_{\chi(H)-1}(n) \sim \left(1-\frac{1}{\chi(H)-1}\right)\frac{n^2}{2}.$$
Con lo cual, la desigualdad de Erdös-Stone es asintóticamente justa.

*Demostración.* En efecto, esto equivale a probar que
$$t_k(n) \sim \left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{n^2}{2} \quad (n\to\infty),$$
para $k \geqslant 2$ fijo. Escribiendo $n = qk + r$ con $0 \leqslant r < k$, tenemos que
$$t_k(qk) \leqslant t_k(n) \leqslant t_k((q+1)k),$$
pero para cualquier $q \in \mathbb{N}$ es fácil de calcular el número de aristas del grafo de Turán $T_k(qk)$:
$$t_k(qk) = \left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{(qk)^2}{2},$$
con lo cual $t_k(qk), t_k((q+1)k) \sim \left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{n^2}{2}$ y por lo tanto $t_k(n)$ también. □

**Lema 1.5.5.** *Sea $c \in (0,1)$ y sea $\varepsilon > 0$. Si $G$ es un grafo con $n$ vértices, con $n$ lo suficientemente grande tal que*
$$e(G) \geqslant c\frac{n^2}{2},$$
*entonces existe un subgrafo $G' \subset G$ con*
$$|G'| \geqslant \varepsilon n \quad y \quad \delta(G') \geqslant (c-\varepsilon)\,|G'|.$$

*Demostración.* Sea $G_n, G_{n-1}, G_{n-2}, \ldots, G_t$ la secuencia de subgrafos de $G$ obtenida de la siguiente manera: $G_n := G$ y el grafo $G_{n-(i+1)}$ se obtiene a partir de $G_{n-i}$ borrando un vértice $v \in V(G_{n-i})$ con $d_{G_{n-i}}(v) < (c-\varepsilon)\cdot|G_{n-i}|$; además, $G_t$ es el último grafo de la secuencia. Notar que $|G_{n-i}| = n-i$.

Afirmamos que $t \geqslant \varepsilon n$ para $n$ lo suficientemente grande, y por ende, $G_t$ será el subgrafo que buscabamos: por construcción $\delta(G_t) \geqslant (c-\varepsilon)\,|G_t|$. Para eso, calculamos la cantidad total de aristas borradas para la obtención de $G_t$:
$$\sum_{i=0}^{n-(t+1)} d_{G_{n-i}}(v_i) < (c-\varepsilon)\sum_{i=0}^{n-(t+1)} n-i = (c-\varepsilon)(n-t)(n+t+1)/2,$$
y como $G_t$ tiene a lo más $\binom{t}{2}$ aristas, tenemos que
$$e(G) \leqslant (c-\varepsilon)(n-t)(n+t+1)/2 + \binom{t}{2}.$$

Supongamos por el absurdo que $t \leqslant \varepsilon n$. Nuestro objetivo es acotar el lado derecho:
$$\begin{aligned}
e(G) \leqslant (c-\varepsilon)(n-t)(n+t+1)/2 + \binom{t}{2} &= (c-\varepsilon)\frac{(n^2+n-(t^2+t))}{2} + \frac{t(t-1)}{2}\\
&\leqslant (c-\varepsilon)\frac{n^2+n}{2} + \frac{\varepsilon n(\varepsilon n-1)}{2}\\
&= (c-\varepsilon+\varepsilon^2)\frac{n^2}{2} + (c-2\varepsilon)\frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

Notar que el lado derecho es un polinomio cuadrático en la variable $n$ con coeficiente principal $\frac{c-\varepsilon+\varepsilon^2}{2} < \frac{c}{2}$ y por lo tanto para $n$ lo suficientemente grande, se contradice la desigualdad $c\frac{n^2}{2} \leqslant e(G)$. Así, $t \geqslant \varepsilon n$. $\square$

**Lema 1.5.6.** *Para todo $r,t \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $G$ es un grafo con $n \geqslant n_0$ vértices y*

$$\delta(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) n$$

*luego $K_{r+1}(t) \subset G$.*

*Demostración.* Procedemos por inducción en $r$. Para $r = 1$, tenemos que $K_2(t) = K_{t,t}$ y sabemos que en este caso $\mathrm{ex}(n, K_{t,t}) = o(n^2)$. Como $n$ es lo suficientemente grande, $K_{t,t} \subset G$. En efecto, se tendrá que

$$e(G) = \frac{1}{2}\sum_{v\in G} d_G(v) \geqslant \frac{\delta(G)n}{2} \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right)\frac{n^2}{2}.$$

Ahora, supongamos que $r \geqslant 2$. Primero, encontraremos por hipótesis inductiva, una copia de $K_r(q)$ con $q \geqslant t/\varepsilon$; escribamos $A := \bigcup_{i=1}^r A_i$ a la partición de los vértices de $K_r(q)$.

Luego, definimos $X \subset B := V(G)\backslash A$, el conjunto de todos los vértices que tienen al menos $t$ vecinos en cada $A_i$. Mostramos que $|X| \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Para esto, acotamos $e(A,B)$ por abajo:

$$\begin{aligned} e(A,B) &= \sum_{v\in A} d_G(v) - 2e(A) \\ &\geqslant qr\left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) n - 2\frac{(qr)^2}{2}. \end{aligned}$$

Y acotamos por arriba:

$$e(A,B) \leqslant |X|qr + (|B| - |X|)(q(r-1) + t - 1).$$

Juntando ambas desigualdades, tenemos:

$$n\underbrace{(qr\varepsilon - t + 1)}_{>0} + q^2(-r^2 + r - 1) - q(t-1) \leqslant |X|\underbrace{(q - t + 1)}_{>0}$$

Por lo tanto, se sigue lo que queremos cuando $n \to \infty$.

Finalmente, demostramos que existen conjuntos

$$B_i \subset A_i \text{ con } |B_i| = t \text{ y } t \text{ vértices } x \in X \text{ que satisfacen } N_G(x) \supset B_i,$$

de donde concluiremos que $K_{r+1}(t) \subset G$. Sea $x \in X$, existen a lo más $\binom{q}{t}$ formas de elegir $B_i^x$ en $A_i$, donde $B_i^x$ satisface $\left|B_i^x\right| = t$ y $N_G(x) \subset B_i^x$. Si $|X| > \binom{q}{t}^r \cdot (t-1)$, entonces por el principio del palomar tenemos lo que queremos. $\square$

*Demostración del Teorema.* Observemos que $H$ está contenido en el grafo $\chi(H)$-partito, completo y con partes de tamaño $|H|$, es decir, en $K_{\chi(H)}(|H|)$. Con lo cual, basta probar el teorema para $H' := K_r(t)$ con $r := \chi(H)$ y $t := |H|$. De hecho, probaremos que para cualquier $r \geqslant 2$, $t \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\mathrm{ex}(n, K_r(t)) \leqslant \left(1 - \frac{1}{r-1} + \varepsilon\right) \frac{n^2}{2} \quad (n \geqslant n_0).$$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño. Sea $n$ lo suficientemente grande, y $G$ con $n$ vértices tal que

$$e(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{r-1} + \varepsilon\right) \frac{n^2}{2}.$$

Aplicamos el primer lema 1.5.5 con $c = 1 - \frac{1}{r-1} + \varepsilon$ y $\frac{\varepsilon}{2}$. Así, obtenemos un subgrafo $G' \subset G$ con

$$|G'| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} n \quad \text{y} \quad \delta(G') \geqslant \left(1 - \frac{1}{r-1} + \frac{\varepsilon}{2}\right) |G'|.$$

Como $n$ es lo suficientemente grande: $\frac{\varepsilon}{2} n \geqslant n_0$, y por el segundo lema 1.5.6, $G'$ contiene a $K_r(t)$, y por lo tanto $G$ también. El resultado se sigue. $\square$

**Definición 1.5.7.** $G$ está **$t$-cerca** de ser $r$-partito si existe un subgrafo $r$-partito de $G$ con al menos $e(G) - t$ aristas.

**Teorema 1.5.8** (Teorema de Estabilidad de Erdös-simonovits)**.** *Para todo grafo $H$ con $e(H) \geqslant 1$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que: si $G$ es $H$-libre en $n$-vertices y*

$$e(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} - \delta\right) \binom{n}{2}.$$

*Entonces $G$ está $(\varepsilon n^2)$-cerca de ser $(\chi(H) - 1)$-partito.*

Haremos la demostración con $H = K_{r+1}$ y para $H$ general lo haremos con el Lema de Regularidad 1.7.5.

> Para todo $\varepsilon > 0$ lo suficientemente chico, existe $\delta > 0$ tal que: si $G$ es $K_{r+1}$-libre en $n$-vértices y
>
> $$e(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right) \overbrace{\binom{n}{2}}^{\sim \frac{n^2}{2}},$$
>
> entonces $G$ está $(\varepsilon n^2)$-cerca de ser $r$-partito.

Requerimos probar dos lemas previos:

**Lema 1.5.9.** *Sea $r \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ y $n$ suficientemente grande. Si $G$ es $K_{r+1}$-libre con $n$ vértices y*

$$e(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} - \delta^2\right) \frac{n^2}{2},$$

*entonces existe $G' \subset G$ con $|G'| \geqslant (1 - \delta)n$ y*

$$\delta(G') \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right) |G'|.$$

*Demostración.* De la demostración del Lema 1.5.5 se deduce un enunciado más fuerte:

> Dados $r \in \mathbb{N}$ y $c \in (0,1)$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo grafo $G$ con $n \geqslant n_0$ vértices y
> $$e(G) \geqslant c\frac{n^2}{2},$$
> existe un subgrafo $G_t \subset G$ con $|G_t| = t \geqslant \varepsilon n$ y $\delta(G_t) \geqslant (c-\varepsilon)|G_t|$; más aún,
> $$e(G) \leqslant e(G_t) + (c-\varepsilon)(n-t)(n+t+1)/2.$$

Ahora, dado $\delta > 0$, el cual sin pérdida de generalidad lo podemos asumir $\delta < \frac{1}{2}$, tomamos $c := \left(1 - \frac{1}{r} - \delta^2\right) > 0$ y $\varepsilon = \delta - \delta^2 > 0$. Supongamos que $G$ es un grafo con $n$ vértices $K_{r+1}$-libre, y
$$e(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} - \delta^2\right)\frac{n^2}{2} = c\frac{n^2}{2},$$
luego existe un subgrafo $G_t \subset G$ con $t \geqslant (\delta - \delta^2)n$ vértices. Como en la demostración de la Observación 1.5.4 se ve que $t_r(t) \sim \left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{t^2}{2}$ $(t \to \infty)$, podemos suponer que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$, entonces $t_r(t) \leqslant \left(1 - \frac{1}{r} + \gamma\right)\frac{t^2}{2}$, para $\gamma := \frac{\delta^2}{2}$.

Ahora, como $G$ es $K_{r+1}$-libre, entonces $G_t$ también y se tiene que
$$e(G_t) \leqslant \operatorname{ex}(t, K_{r+1}) \leqslant t_r(t) \leqslant \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\delta^2}{2}\right)\frac{t^2}{2},$$
por el Teorema de Turán 1.1.6. Juntando esto con lo mencionado al principio, tenemos que
$$\begin{aligned} c\frac{n^2}{2} &\leqslant e(G) \leqslant e(G_t) + (c-\varepsilon)(n-t)(n+t+1)/2 \\ &\leqslant \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\delta^2}{2}\right)\frac{t^2}{2} + (c-\varepsilon)(n-t)(n+t+1)/2 \\ &= \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\delta^2}{2}\right)\frac{t^2}{2} + (c-\varepsilon)\frac{(n^2+n-t^2-t)}{2}, \end{aligned}$$
esto implica que para $n$ lo suficientemente grande de tal suerte que $\frac{(c-\varepsilon)}{2}n \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\frac{n^2}{2}$,
$$\varepsilon\frac{n^2}{4} \leqslant (\delta + \frac{\delta^2}{2})\frac{t^2}{2}.$$
Reemplazando $\varepsilon = \delta - \delta^2$ en la última desigualdad, y despejando $t$:
$$\sqrt{\frac{\delta - \delta^2}{2\delta + \delta^2}}n \leqslant t.$$
Como la expresión de la izquierda es más grande que $(1-\delta)$ cuando $\delta < \frac{1}{2}$, se sigue que para todo $n$ lo suficientemente grande,
$$|G_t| = t \geqslant (1-\delta)n.$$
Es decir, $G_t$ es el subgrafo $G'$ de $G$ que cumple las propiedades deseadas del enunciado. $\square$

**Lema 1.5.10.** *Para todo $r \in \mathbb{N}$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $G$ es $K_{r+1}$-libre con $n$ vértices y*

$$\delta(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right) n,$$

*entonces existe una partición $V(G) = A_0 \coprod A_1 \coprod \cdots \coprod A_r$ tal que $|A_0| \leqslant \varepsilon n$ y $A_i$ son conjuntos independientes para todo $i \geqslant 1$.*

*Demostración.* Si tomamos $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño, entonces $G$ contiene una copia de $K_r$ por el Teorema de Turán 1.1.6 (esto ocurre si $e(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{r-1}\right)\frac{n^2}{2}$; tomar $\delta < \frac{1}{r-1} - \frac{1}{r}$ y notar que en la demostración de la Observación 1.5.4 se ve que $t_r(t) \sim \left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{t^2}{2}$ $(t \to \infty)$).

Sea $A$ un conjunto de vértices que induce un $K_r$ en $G$. Sean $B := V(G) \backslash A$ y $X := \{v \in V(G) \mid |N_G(v) \cap A| \leqslant r - 2\}$, vamos a mostrar que $X$ es pequeño.

$$\left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right) nr - r(r-1) \leqslant e(A,B) \qquad \left(2e(A) + e(A,B) = \sum_{v \in A} d_G(v) \geqslant r\left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right) n\right)$$
$$\leqslant (r-1)((n-r) - |X|) + (r-2)|X| = (r-1)(n-r) - |X|,$$

manipulando la desigualdad, obtenemos:

$$|X| \leqslant \delta n r.$$

Tomando $\delta < \text{mín}\{\frac{\varepsilon}{r}, \frac{1}{r-1} - \frac{1}{r}\}$, el $A_0$ será $X$ y los consjuntos independientes son:

$$A_u = \{u\} \cup \{v \in B \backslash X | vu \notin E(G)\}$$

para cada $u \in A$. □

Ahora estamos en condiciones de demostrar el Teorema de Estabilidad de Erdos-Simonovits para $H = K_{r+1}$ 1.5:

*Demostración del Teorema de Estabilidad de Erdos-Simonovits para $H = K_{r+1}$ 1.5.* Sea $\varepsilon > 0$ chico, tomemos $\delta = (\delta')^2$ donde $\delta'$ se obtiene del Lema 1.5.10 con $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2}$. Notar que de la demostración podemos suponer que si $\varepsilon > 0$ es chico, luego $\delta' < \frac{\varepsilon'}{2}$ también. Por hipótesis

$$e(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} - (\delta')^2\right)\frac{n^2}{2},$$

entonces por el Lema 1.5.9: existe $G' \subset G$ con $n' := |G'| \geqslant (1-\delta')n$ y $\delta(G') \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} - \delta'\right)|G'| = n'$. Por el Lema 1.5.10: para $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2}$ se tiene que existe $A_0, A_1, \ldots, A_r$ partición de $G'$ con $|A_0| < \varepsilon' n' \leqslant \varepsilon' n$ y $A_i$ conjuntos independientes para todo $i \geqslant 1$. Así el subgrafo generado por los $A_i$ con $i \geqslant 1$ es $r$-partito. Además, para obtener este subgrafo, hay que quitar a lo más

$$\varepsilon' n^2 + \varepsilon' n^2 < \varepsilon n^2 \qquad (\delta, \delta' \ll 1)$$

aristas de $G$, es decir, $G$ está $\varepsilon n^2$-cerca de ser $r$-partito. En efecto, las aristas de $G[V(G) \backslash V(G')]$ junto con $E_G(V(G'), V(G) \backslash V(G'))$ aportan $\leqslant \binom{\delta' n}{2} + n' \cdot (n - n') \leqslant \delta' n^2 + \delta' n^2 \leqslant \varepsilon' n^2$, y las de $G[V(A_0)]$ junto con $E_G(V(A_0), V(G) \backslash V(A_0))$ aportan

$$\leqslant \binom{\varepsilon' n}{2} + (\varepsilon' n) \cdot (\delta') n \leqslant \varepsilon' n^2.$$

□

## 1.6. Ejercicios

**Ejercicio 1.6.1.** Puebe el teorema de Mantel de manera alternativa. Considere un conjunto independiente $B$ de tamaño máximo en un grafo $K_3$-libre y la suma de los grados de los vértices que no están en $B$.

*Solución.* Sea $G$ un grafo $K_3$-libre con orden $n$ y $B$ un conjunto independiente de $G$ de tamaño máximo; consideremos $A := V(G)\backslash B$. Inspeccionemos la sumatoria

$$\sum_{v\in A} d_G(v);$$

notar que $d_G(v) = |N_G(v)|$ y que $N_G(v)$ es un conjunto de vértices aislados en $G$: si $x, y$ son dos vecinos de $v$ entonces $xy \notin E(G)$ porque de lo contrario $G$ tendría un triángulo $xyv$. Así, como $|B|$ es máximo, se sigue que $|N_G(v)| \leqslant |B|$. Esto implica que

$$\sum_{v\in A} d_G(v) \leqslant |A|\,|B|.$$

Más aún, como $A, B$ particionan $V(G)$: $|A|+|B| = n$. Luego $|A|\cdot|B|$ se maximiza cuando $|A|\,|B| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil = t_2(n)$. Así,

$$e(G) = e(A,B) + e(A) \leqslant e(A,B) + 2e(A) = \sum_{v\in A} d_G(v) \leqslant t_2(n),$$

como queríamos probar. □

**Comentario 1.6.2.** Que $|A|\cdot|B|$ con $|A|+|B| = n$ se maximiza cuando $|A|\cdot|B| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil$ se deduce de que reemplazando $|B| = n - |A|$, el problema equivale a maximizar $|A|\cdot(n-|A|)$. Más formalmente, el problema equivale a maximizar $f(x) = x(n-x)$ con $x$ número natural en el intervalo $[0,n]$. Simplemente notemos que $f'(x) = n-2x$, luego $f$ es creciente en $[0, \frac{n}{2}]$ y decreciente en $[\frac{n}{2}, n]$, pero como $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ es el mayor número entero $\leqslant \frac{n}{2}$, $f$ alcanza máximo en $[0, \frac{n}{2}]$ cuando $x = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, similarmente, $f$ alcanza máximo en $[\frac{n}{2}, n]$ cuando $x = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Como $f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) = f(\lceil \frac{n}{2} \rceil)$, se sigue que $f$ se maximiza en $x = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y $x = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, es decir, el valor máximo de $f$ es $f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

**Ejercicio 1.6.3.** Demuestre que si $G$ es un grafo con $n = 2k+1$ vértices, entonces $G$ contiene un camino de largo $k$, digamos $P_k$, o el complemento de $G$ tiene un triángulo.

*Solución.* Supongamos por el absurdo que ninguna de las dos situaciones pasa. Por un lado, si el complemento $\overline{G}$ de $G$ no contiene triángulos, el Teorema de Mantel nos dice que

$$e(\overline{G}) \leqslant \mathrm{ex}(n, K_3) \leqslant k(k+1).$$

Como $(2k+1)k = \binom{n}{2} = e(G) + e(\overline{G})$, deducimos que

$$k^2 \leqslant e(G).$$

Por otro lado, si $G$ no contiene $P_k$-caminos, el Teorema de Erdös & Gallai dice que

$$e(G) \leqslant \mathrm{ex}(n, P_k) \leqslant \frac{(k-1)n}{2} = \frac{(k-1)(2k+1)}{2}.$$

Juntando ambas desigualdades, llegamos al absurdo:

$$k^2 \overset{!!!}{\leqslant} \frac{(k-1)(2k+1)}{2}.$$

Por lo tanto, $G$ contiene un $P_k$-camino o $\overline{G}$ un triángulo. □

**Ejercicio 1.6.4.** Demuestre que si $T$ es un árbol con $k$ vértices, entonces $T \subseteq G$ o el complemento de $G$ contiene un triángulo si $n := |G| = 2k-1$.

*Solución.* Supongamos por el absurdo que $G$ es un grafo con $n = 2k-1$ vértices que no contiene a un árbol $T$ con $k$ vértices, y que $\overline{G}$, su complemento, no contiene triángulos. En particular, la primera suposición implica que $\delta(G) \leqslant k-2$ por el siguiente lema, cuya demostración vimos en clase:

> *Sean $t \in \mathbb{N}$ y $T$ un árbol con $t+1$ vértices. Entonces si $G$ es un grafo con $\delta(G) \geqslant t$, luego contiene a $T$ como subgrafo.*

Mientras que la segunda suposición ($\overline{G}$ no tiene triángulos), implica que dado un vértice $w \in V(G)$, entonces para cada par de vértices $w', w''$ no adyacentes a $w$ se tiene que $w'w'' \in E(G)$. En otras palabras, para todo $w \in V(G)$, el subgrafo $G[A_w]$ inducido por el conjunto $A_w := V(G) \backslash \{N_G(w) \cup \{w\}\}$ es completo; notar que como $|A_w| = n - (d_G(w)+1)$, este grafo es isomorfo a $K_{n-d_G(w)-1}$.

Finalmente, para llegar al absurdo, consideremos $v \in V(G)$ un vértice con grado $d_G(v) = \delta(G) \leqslant k-2$, entonces $G[A_v]$ es un subgrafo de $G$ isomorfo a $K_{n-\delta(G)-1}$, i.e. un completo con al menos

$$n - \delta(G) - 1 = (2k-1) - \delta(G) - 1 \geqslant (2k-1) - (k-2) - 1 = k$$

vértices, luego contiene una copia de $T$, con lo cual $G$ también: absurdo. Consecuentemente, $G$ contiene una copia de $T$ o $\overline{G}$ tiene triángulo(s). □

*Solución.* [Segunda solución] Otra manera de resolver el ejercicio es haciendo inducción $k \geqslant 1$: supongamos que $G$ es un grafo de orden $2k-1$ con $\overline{G}$ libre de triángulos, probaremos que $T \subset G$ para cualquier árbol $T$ de orden $k$. El caso $k = 1$ es trivial.

En general, supongamos que $k \geqslant 2$ y tomemos una hoja $h$ de $T$, consideremos $T' := T \backslash \{h\}$ y escribamos $p \in T'$ para el padre de $h$ en $T$. Ahora, si $G$ es completo ya ganamos, pues $K_{2k-1} \supset T$, con lo cual podemos suponer que existen $v, w \in V(G)$ tales que $vw \notin G$, y consideremos $G' := G \backslash \{v, w\}$. Notar que $\overline{G}'$ es $K_3$-libre y $G'$ tiene orden $2(k-1)-1$, luego por hipótesis inductiva $G'$ contiene a $T'$. Por otro lado, $p \in T'$ tiene que ser vecino de $w$ o de $v$ en $G$, de lo contrario $\overline{G}$ tendría un triángulo! Esto prueba que $T \subset G$. □

**Ejercicio 1.6.5.** Pruebe que si $e(G) > n^2/4$, entonces $G$ contiene al menos $\lfloor n/2 \rfloor$ triángulos.

*Solución.* El Teorema de Füredi (2015) dice:

> *Sean $n, t \in \mathbb{N}$, y $G$ con $n$ vértices. Si $G$ está $t$-lejos de ser bipartito, entonces hay al menos*
> $$\frac{n}{6}\left(e(G) - \frac{n^2}{4} + t\right)$$
> *triángulos en $G$.*

Sea $H \subset G$ el subgrafo bipartito con cantidad de aristas $e(H)$ máxima de $G$. Como $e(H) \leqslant \frac{n^2}{2} < e(G)$, tenemos que $H \subsetneq G$; y podemos escribir $t := e(G) - e(H) \geqslant 1$. En particular, como $e(H)$ es máximo, tenemos que $G$ está $t$-lejos de ser bipartito. Con lo cual, el Teorema de Füredi implica que $G$ contiene al menos

$$\frac{n}{6}\left(e(G) - \frac{n^2}{4} + t\right)$$

triángulos; en particular, si $e(G) - \frac{n^2}{4} + t \geqslant 3$ ganamos, pues en este caso habrían al menos $\frac{n}{2} \geqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ triángulos. Por otro lado, esta cantidad es menor que 3 si y solo si $t = 1$ y $H = T_2(n)$. En este caso, $H = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$. Tomemos una aristas $f \in E(G) \backslash E(H)$, con lo cual $f$ tiene sus extremos en una de las dos particiones de $H$; en el peor de los casos está en la partición más grande, es decir, para todo vértice $v$ de la partición de $H$ con menor cantidad de vértices: $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, se forma un triángulo distinto con vértices $v$ y los extremos de $f$. En particular, $G$ contiene en este caso al menos $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ triángulos. $\square$

**Ejercicio 1.6.6.** Sean $G$ y $H$ grafos. Demuestre que si $G$ tiene $n$ vértices y al menos $2 \cdot \mathrm{ex}(n, H)$ aristas, entonces $G$ contiene al menos $\mathrm{ex}(n, H)$ copias de $H$.

*Solución.* Supongamos que $G$ no contiene $e := \mathrm{ex}(n, H)$ copias de $H$, luego quitando una arista por cada copia de $H$ en $G$ obtenemos un grafo $H$-libre con al menos $e(G) - (e-1) \geqslant 2e - (e-1) = e+1$ aristas. Sin embargo, por definición de $e$, se sigue que este grafo tiene a lo más $e$ aristas, absurdo. Esto prueba que $G$ tiene al menos $e$ copias de $H$. $\square$

**Ejercicio 1.6.7.** Sea $k \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Demuestre que todo grafo $G$ con $n$ vértices y al menos $n^2/4$ aristas contiene un grafo $H$ con al menos $k$ vértices y $\delta(H) \geqslant \frac{|H|}{2}$.

*Solución.* Probaremos un enunciado más fuerte:

> *Sea $k \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Entonces todo grafo $G$ con $n$ vértices y al menos $\frac{n^2}{4}$ aristas contiene a $H := K_{k,k}$.*

Esto prueba el ejercicio pues el grafo $H := K_{k,k}$ tiene $2k \geqslant k$ vértices y $\delta(H) = k = \frac{v(H)}{2}$.

Ahora probemos este enunciado más fuerte. Para eso utilizaremos el Teorema de Kövani, Sós, y Turán (abreviado "KST"):

> *Sean $s, t \in \mathbb{N}$, $s \leqslant t$. Entonces existe una constante $c = c(s,t) > 0$ tal que*
>
> $$\mathrm{ex}(n, K_{s,t}) \leqslant c \cdot n^{2-\frac{1}{s}}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$
>
> lo aplicamos al caso $s = t = k$.

Así, el Teorema de KST dice que

$$\mathrm{ex}(n, H) \leqslant c \cdot n^{2-\frac{1}{k}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

con $c > 0$ una constante que depende solo de $k$. Tomando $n_0 \in \mathbb{N}$ para que $\frac{n^2}{4} > cn^{2-\frac{1}{k}}$ valga para todo $n \geqslant n_0$, se sigue que $G$ siempre debe tener a $H$ como subgrafo: de lo contraría se llegaría al absurdo:

$$\frac{n^2}{4} \leqslant e(G) \leqslant \mathrm{ex}(n,H) \leqslant cn^{2-\frac{1}{k}}.$$

□

*Solución.* [Segunda solución] Por el Lema 1.3.3, $G$ contiene un subgrafo $H'$ tal que

$$\delta(H') > \varepsilon(H') \geqslant \varepsilon(G).$$

Como $\varepsilon(G) = \frac{e(G)}{|G|} \geqslant \frac{n}{4}$, se tiene que para $n$ lo suficientemente grande, $H'$ contiene a $K_{1,k}$, y por lo tanto $H := K_{1,k}$ sirve. En efecto,

$$\delta(H) = k \geqslant \frac{k+1}{2} = \frac{|H|}{2}.$$

□

## 1.7. Regularidad

**Definición 1.7.1.** Dada una partición de los vértices de un grafo $G$, digamos $V(G) = X \coprod Y$, definimos la **densidad** del par $(X,Y)$ como la cantidad

$$d(X,Y) := \frac{e(X,Y)}{|X||Y|}.$$

**Definición 1.7.2.** Dado $\varepsilon > 0$. Sean $A, B \subset V(G)$ con $G$ un grafo. Diremos que el par $(A,B)$ es $\varepsilon$-**regular** si para todo $X \subset A$, $Y \subset B$ con

$$|X| \geqslant \varepsilon|A| \quad \text{e} \quad |Y| \geqslant \varepsilon|B|$$

tenemos

$$|d(X,Y) - d(A,B)| \leqslant \varepsilon.$$

**Definición 1.7.3.** Sea $G$ un grafo. Una partición $V(G) = V_0 \coprod V_1 \coprod \cdots \coprod V_k$, se dice **equipartición**, si

$$|V_0| \leqslant |V_1| = |V_2| = \cdots = |V_k|.$$

Al conjunto $V_0$ lo llamamos **conjunto excepcional**.

**Definición 1.7.4.** Sea $G$ un grafo con $n$ vértices y $\varepsilon > 0$. Diremos que una partición $V(G) = V_0 \coprod V_1 \coprod \cdots \coprod V_k$ es $\varepsilon$-**regular**, si $|V_0| \leqslant \varepsilon n$ y a lo más $\varepsilon k^2$ pares $(V_i, V_j)$ con $1 \leqslant i, j \leqslant k$ no son $\varepsilon$-regulares.

**Teorema 1.7.5** (Lema de Regularidad de Szemerédi)**.** *Para todo $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$, existe $M = M(\varepsilon, m) \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier grafo $G$ con $|G| \geqslant M$, existe una equipartición $\varepsilon$-regular*

$$V(G) = V_0 \coprod V_1 \coprod \cdots \coprod V_k$$

*con $m \leqslant k \leqslant M$.*

*Demostración.*

**Definición 1.7.6.** Dado un grafo $G$ con $n$ vértices y partición de sus vértices $\mathscr{P} = \{V_1,\ldots,V_k\}$, definimos la **media cuadrática** del par $(V_i,V_j)$ para cada $i \neq j$ como

$$d_2(V_i,V_j) := \frac{e(V_i,V_j)^2}{|V_i|\,|V_j|\,n^2},$$

y la **media cuadrática** de la partición $\mathscr{P}$ como

$$d_2(\mathscr{P}) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} d_2(V_i,V_j) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} \frac{|V_i|\,|V_j|}{n^2} d(V_i,V_j)^2 \leqslant 1.$$

**Definición 1.7.7.** Una partición $\mathscr{P}'$ de $G$ se dice que **refina** a una partición $\mathscr{P}$ (o que es un **refinamiento** de $\mathscr{P}$) si cada parte de $\mathscr{P}$ es una unión de algunas partes de $\mathscr{P}'$.

**Lema 1.7.8.** *Si $\mathscr{P}'$ es un refinamiento de $\mathscr{P}$, entonces*

$$d_2(\mathscr{P}') \geqslant d_2(\mathscr{P}).$$

**Lema 1.7.9.** *Sea $G$ un grafo y $\mathscr{P}$ una partición de $V(G)$. Si $(X,Y)$ es un par no $\varepsilon$-regular en $\mathscr{P}$. Entonces, existen particiones $\{X_1,X_2\}$ de $X$ y particiones $\{Y_1,Y_2\}$ de $Y$ tales que*

$$\sum_{1\leqslant r,s\leqslant 2} \frac{|X_r|\,|Y_s|}{n^2} \cdot d(X_r,Y_s)^2 \geqslant d(X,Y)^2 + \varepsilon^4.$$

**Lema 1.7.10.** *Sea $G$ un grafo con $n$ vértices y $\mathscr{P}$ partición de $G$ que no es $\varepsilon$-regular. Entonces existe un refinamiento $\mathscr{P}'$ de $\mathscr{P}$ tal que:*

(I) $d_2(\mathscr{P}') \geqslant d_2(\mathscr{P}) + \varepsilon^5$.

(II) $\#\mathscr{P}' \leqslant k \cdot 2^{k-1}$.

Ahora, veamos la demostración del teorema. Sea $\mathscr{P}_0 = \{V_0,V_1,\ldots,V_m\}$ una partición de $G$ con $\underbrace{|V_0|}_{1\leqslant|V_0|\leqslant m-1} = n - n\left\lfloor\frac{n}{m}\right\rfloor$ y $|V_i| = \left\lfloor\frac{n}{m}\right\rfloor$ para todo $i = 1,\ldots,m$. Si $\mathscr{P}_0$ no es $\varepsilon$-regular, existe $\mathscr{P}_1$ refinamiento de $\mathscr{P}_0$ tal que $d_2(\mathscr{P}_1) \geqslant d_2(\mathscr{P}_0) + \varepsilon^5$ y

$$|\mathscr{P}_1| \leqslant m \cdot 2^m.$$

Ahora, obtenemos una equipartición de $\mathscr{P}_1'$ a partir de $\mathscr{P}_1$: particionando cada parte de $\mathscr{P}_1$ en conjuntos de tamaño

$$\frac{\frac{\varepsilon^6}{2}n}{\#\mathscr{P}_1},$$

y un conjunto despreciable de tamaño $< \frac{\frac{\varepsilon^6}{2}n}{\#\mathscr{P}_1}$. En total, el conjunto de los vértices despreciados lo agregamos al *conjunto excepcional* $V_0$, es decir, agregamos $< \frac{\varepsilon^6}{2}n$ vértices. Afirmamos que $\mathscr{P}_1'$ está acotado por arriba por algo que depende de $\varepsilon$ y $m$:

$$\#\mathscr{P}_1' \leqslant \frac{n}{\frac{\varepsilon^6 n}{2}} \Big/ \#\mathscr{P}_1 = \frac{2\#\mathscr{P}_1}{\varepsilon^6} \leqslant \frac{m2^{m+1}}{\varepsilon^6}.$$

Por el primer lema, $d_2(\mathscr{P}_1') \geqslant d_2(\mathscr{P}_1) \geqslant d_2(\mathscr{P}_0) + \varepsilon^5$.

Si no obtenemos una partición $\varepsilon$-regular, entonces continuamos refinando, para así obtener una secuencia de equiparticiones:

$$\mathscr{P}_0, \mathscr{P}_1', \mathscr{P}_2', \ldots, \mathscr{P}_k'.$$

Como $d_(\mathscr{Q}) \leqslant 1$ para cualquier partición $\mathscr{Q}$ de $G$, y $d_2(\mathscr{P}_{i+1}) \geqslant d_2(\mathscr{P}_i') + \varepsilon^5$, tenemos que $k \leqslant \varepsilon^{-5}$. Entonces, luego de a lo más $\varepsilon^{-5}$ iteraciones, habremos encontrado una partición $\varepsilon$-regular con una cantidad de partes acotada por $M$ que solamente depende de $m$ y $\varepsilon$. Por último, el conjunto excepcional de dicha partición es

$$\leqslant (m-1) + \frac{\varepsilon^6 n}{2}\varepsilon^{-5} < \varepsilon n.$$

□

**Corolario 1.7.11.** *Se puede probar el Teorema de Erdös-Stone 1.5.2:*

> *Dado un grafo $H$, para todo $\delta > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $G$ es un grafo con $n \geqslant n_0$ vértices y*
>
> $$e(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} + \delta\right)\frac{n^2}{2},$$
>
> *entonces $H \subset G$, donde $r = \chi(H) - 1$.*

La idea de la demostración del corolario será la siguiente:

Tomemos $\delta > 0$ arbitrariamente pequeño, aplicamos el Lema de Regularidad de Szemeredi con $\varepsilon$ lo suficientemente pequeño y $m > \frac{1}{\varepsilon}$. Así existe $M \in \mathbb{N}$, y obtenemos una equipartición $\varepsilon$-regular

$$V(G) = V_0 \coprod V_1 \coprod \cdots \coprod V_k,$$

con $M \geqslant k \geqslant m > \frac{1}{\varepsilon}$, de cualquier grafo $G$ con $|G| \geqslant M$.

Borramos de $G$ todas las aristas sobre las que "no hay control":

(a) Las que ven a $V_0$.

(b) Aristas dentro de las partes $V_i$ con $i \geqslant 1$.

(c) Las aristas entre pares no $\varepsilon$-regulares.

(d) Aristas entre pares no densos, i.e., "tenemos menos que $\delta/2$ densidad".

Después, obtenemos el gafo reducido $R$: dado por contraer cada $V_i$ a un vértice $w_i$ con $i \geqslant 1$, y borrar aristas múltiples. Así, $R$ tiene conjunto de vértices $w_1, \ldots, w_r$ donde $w_i w_j \in E(R)$ sii $(V_i, V_j)$ es $\varepsilon$-regular y denso.

Aplicamos lemas de inmersión en "aristas" de grafo - grafo reducido:

$$\text{Si } H \subset R \quad \Rightarrow \quad H \subset G.$$

**Lema 1.7.12.** *Sea $V_0 \coprod V_1 \coprod \cdots \coprod V_k$ una partición $\varepsilon$-regular de un grafo $G$ de $n$ vértices, con $k \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$. Entonces, hay un máximo de:*

*(a)* $\varepsilon n^2$ *aristas con un extremo en* $V_0$.

*(b)* $\varepsilon n^2$ *aristas dentro de una parte* $V_i$ *con* $i \geqslant 1$.

*(c)* $\varepsilon n^2$ *aristas entre pares (con* $i,j \neq 0$*) que no son* $\varepsilon$*-regulares.*

*(d)* $\delta n^2$ *aristas entre pares (con* $i,j \neq 0$*) de densidad* $< \delta$.

*Demostración.* (a) Como $|V_0| \leqslant \varepsilon n$ entonces hay a lo más

$$\varepsilon n(1-\varepsilon)n + \binom{\varepsilon n}{2} < \varepsilon n^2 \text{ aristas en (a).}$$

(b) Cada $V_i$ tiene $\leqslant \frac{n}{k}$ vértices (pues estamos en una equipartición), y entonces hay a lo más $k \cdot \binom{\frac{n}{k}}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} n^2$ aristas para (b).

(c) Hay a lo más $\varepsilon k^2$ pares que no son $\varepsilon$-regulares y cada par tiene a lo más $\left(\frac{n}{k}\right)^2$ aristas entre sí. Consecuentemente, aportan a lo más $\varepsilon k^2 \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^2 = \varepsilon n^2$ aristas en (c).

(d) En el peor caso, los $\binom{k}{2}$ pares son poco densos. En este caso, por definiciónde densidad:

$$e(V_i,V_j) \leqslant \delta \left(\frac{n}{k}\right)^2, \quad \forall 1 \leqslant i,j \leqslant k,$$

y entonces, hay a lo más $\delta \left(\frac{n}{k}\right)^2 \binom{k}{2} \leqslant \delta n^2$ aristas en pares “poco densos”, i.e., en (d).

□

**Lema 1.7.13.** *Sea* $\varepsilon > 0$*, y sea* $(A,B)$ *un par* $\varepsilon$*-regular de un grafo* $G$*. Entonces,*

$$\big(d(A,B)-\varepsilon\big)|B| \leqslant |N_G(v) \cap B| \leqslant \big(d(A,B)+\varepsilon\big)|B|$$

*para todo* $v \in A$*, salvo a lo más* $2\varepsilon|A|$.

*Demostración.* Consideremos el conjunto $X \subset A$ de los vértices que no cumplen alguna de las dos desigualdades. Probaremos que $|X| < 2\varepsilon|A|$ por el absurdo. Si este no fuera el caso, tendríamos que $|X| \geqslant 2\varepsilon|A|$ y por lo tanto hay al menos $\varepsilon|A|$ vértices que no cumplen la primera desigualdad o la segunda. Supongamos que estamos en el perimer caso, el segundo caso es análogo. Es decir, supongamos que existe un conjunto $X' \subset A$ con $|X'| \geqslant \varepsilon|A|$ tal que para todo $v \in X'$,

$$\big(d(A,B)-\varepsilon\big)|B| > |N_G(v) \cap |B||.$$

Sumando en la desigualdad anterior sobre todos los $v \in X'$, tenemos que

$$\big(d(A,B)-\varepsilon\big)|B||A| > e(X',B),$$

por lo tanto $\big(d(A,B)-\varepsilon\big) > d(X',B)$, i.e.,

$$|d(A,B)-d(X',B)| > \varepsilon.$$

Consideremos ahora $Y' = B$, en particular $|Y'| \geqslant \varepsilon|B|$ si $\varepsilon > 0$ es chico. Luego por $\varepsilon$-regularidad del par $(A,B)$, tenemos que

$$|d(A,B)-d(X',B)| \leqslant \varepsilon,$$

absurdo. □

**Lema 1.7.14** (Slicing)**.** *Sea $\alpha \geqslant \varepsilon > 0$, y sea $(A,B)$ un par $\varepsilon$-regular en un grafo $G$. Para cualquier $X \subset A, Y \subset B$ con*

$$|X| \geqslant \alpha|A| \quad y \quad |Y| \geqslant \alpha|B|$$

*se tiene que el par $(X,Y)$ es $\text{máx}\{\frac{\varepsilon}{\alpha}, 2\epsilon\}$-regular. Además, por $\varepsilon$-regularidad del par $(A,B)$, se tiene que*

$$|d(X,Y) - d(A,B)| \leqslant \varepsilon.$$

*Demostración.* La última afirmación es clara. Veamos la primera, para eso consideremos $\varepsilon' = \text{máx}\{\frac{\varepsilon}{\alpha}, 2\varepsilon\}$. Sean $Z \subset X$ y $W \subset Y$ tales que $|Z| \geqslant \varepsilon'|X|$ y $|W| \geqslant \varepsilon'|Y|$, entonces $|Z| \geqslant \varepsilon|A|$ y $|W| \geqslant \varepsilon|B|$. Luego por $\varepsilon$-regularidad del par (A,B), se tiene que

$$|d(Z,W) - d(A,B)| \leqslant \varepsilon.$$

Además, por $\varepsilon$-regularidad del par $(A,B)$, se tiene que

$$|d(X,Y) - d(A,B)| \leqslant \varepsilon.$$

Juntando ambas desigualdades tenemos que:

$$\begin{aligned}|d(Z,W) - d(X,Y)| &\leqslant |d(Z,W) - d(A,B)| + |d(X,Y) - d(A,B)| \\ &\leqslant \varepsilon + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon \leqslant \varepsilon'.\end{aligned}$$

□

**Definición 1.7.15** (Reducido)**.** Dado un grafo $H$, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon, \delta > 0$, definimos

$$\mathscr{G}(H,n,\varepsilon,\delta)$$

como la familia de grafos $G$, tales que existe una equipartición $V(G) = A_1 \coprod \cdots \coprod A_l$ con $A_i$ de cardinal $n$ e independiente, y un etiquetamiento de los vértices $V(H) = \{w_1, \ldots, w_l\}$ tal que para cada $w_i w_j \in E(G)$, el par $(A_i, A_j)$ es un par $\varepsilon$-regular y además $d(A_i, A_j) \geqslant \delta$.

**Lema 1.7.16** (Lema de inmersión general)**.** *Para todo grafo $H$ y todo $\delta > 0$, existen $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que*

$$G \in \mathscr{G}(H,n,\varepsilon,\delta), n \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad H \subset G.$$

*Demostración.* Haremos inducción en $|H|$. Cuando $|H| = 1$ es trivial. Supongamos entonces que $|H| \geqslant 2$. Escribamos $V(H) = \{w_1, \ldots, w_l\}$ y sea $V(G) = A_1 \coprod \cdots \coprod A_l$ una partición de acuerdo a la definición de $\mathscr{G}(H,n,\varepsilon,\delta)$: $(A_i, A_j)$ $\varepsilon$-regular y $d(A_i, A_j) \geqslant \delta$ para cada $i \leqslant l-1$ tal que $w_i w_l \in E(H)$.

Elijamos $\varepsilon$ lo suficientemente pequeño y apliquemos el Lema 1.7.13 a cada $(A_i, A_l)$ con $w_i w_l \in E(H)$: todos, excepto a lo más $2\varepsilon|A_l|$ vértices $v \in A_l$ satisfaciendo:

$$|N_G(v) \cap A_i| \geqslant (\delta - \varepsilon) \cdot |A_i|$$

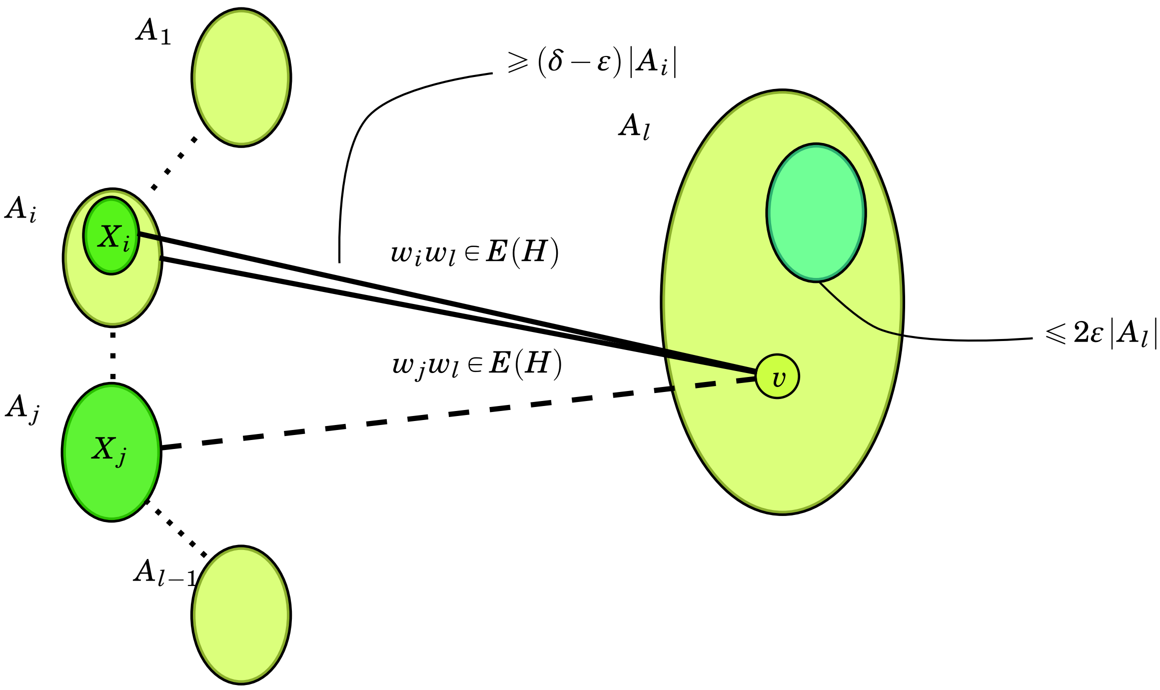



Figura 1.7.5

Como $2\varepsilon|A_l|(l-1) < n$, existe $v \in A_l$ tal que

$$|N_G(v) \cap A_i| \geqslant (\delta-\varepsilon)|A_i|, \quad \forall i \leqslant l-1$$

con $w_iw_l \in E(H)$. Definimos

$$\tilde{X}_i = \begin{cases} A_i \cap N_G(v) & \text{si } w_i \in N_H(w_l) \\ A_i & \text{si no,} \end{cases}$$

y por cada $\tilde{X}_i$ construimos un subgrafo $X_i$, de manera que todos los $X_i$ tengan el mismo cardinal.

Ahora, tomando $\alpha = \delta - \varepsilon \geqslant \varepsilon > 0$, podemos aplicar el Lema de Slicing 1.7.14 en $X_i, X_j$ cuando $w_iw_j \in E(H)$ para asegurar que son pares $\max\{\frac{\varepsilon}{\delta-\varepsilon}, 2\varepsilon\}$-regulares y densidad al menos $\delta-\varepsilon$. Luego queremos usar la hipótesis inductiva: sea $H' := H\backslash\{w_l\}$ y $G' := G[\bigcup_{i=1}^{l-1} X_i]$. Así, existen $\varepsilon' > 0$ y $n_0' \in \mathbb{N}$ tales que

$$G' \in \mathcal{G}(H', n', \varepsilon', \delta-\varepsilon), n' \geqslant n_0' \quad \Rightarrow \quad H' \subset G'$$

Con lo cual, si escogemos $\varepsilon$ tal que $\max\{\frac{2\varepsilon}{\delta-\varepsilon}, 2\varepsilon\} < \varepsilon'$ y $n_0$ lo suficientemente grande, de tal suerte que $(\delta-\varepsilon)n_0 \geqslant n_0'$, tenemos por hipótesis inductiva que $H' \subset G'$. Por lo tanto, $H \subset G$. $\square$

**Lema 1.7.17** (Lema de inmersión aplicable). *Sea $H$ un grafo y $\delta > 0$. Defina $r = \chi(H)$. Entonces, existen $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que*

$$G \in \mathcal{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta), n \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad H \subset G.$$

*Demostración.* El Lema 1.7.16 garantiza que para todo $\delta' > 0$ existen $\varepsilon', n_0'$ tales que

$$G \in \mathcal{G}(K_r(t), n', \varepsilon', \delta'), n' \geqslant n_0' \quad \Rightarrow \quad K_r(t) \subset G,$$

donde $t := |H|$. Como $H \subset K_r(t)$, se tiene que en este caso $H \subset G$.

Concluimos gracias al siguiente ejercicio:

**Ejercicio 1.7.18.**

(1) Demostrar que para todo $\delta > 0$, $n' \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon' > 0$, existen $\varepsilon$ y $\delta'$ tales que

$$\mathcal{G}(K_r, n't, \varepsilon, \delta) \subset \mathcal{G}(K_r(t), n', \varepsilon', \delta').$$

(2) Demostrar que para todo $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ y $n' \in \mathbb{N}$ es lo suficientemente grande, se tiene que si

$$G \in \mathcal{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta) \quad \text{con } n't \leqslant n < (n'+1)t,$$

entonces existe un subgrafo $G' \subset G$ tal que $G' \in \mathcal{G}(K_r, n't, 2\varepsilon, \delta - \varepsilon)$.

*Solución.*

(1) Tomemos $n = n't$. Fijemos un etiquetamiento $K_r = \{w_1, \ldots, w_r\}$ tal que $K_r(t) = \{w_i^j\}_{1 \leqslant i \leqslant r}^{1 \leqslant j \leqslant t}$ con $w_i^j w_{i'}^{j'} \in E(K_r(t))$ si y solo si $w_i w_{i'} \in E(K_r)$. Entonces si $G \in \mathcal{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta)$, con equipartición $V(G) = \coprod_{i=1}^r V_i$. Se sigue que podemos subdividir la partición: cada $V_i = \coprod_{j=1}^t V_i^j$ en otra equipartición con partes de cardinal $n'$.

Ahora busquemos $\varepsilon$ y $\delta'$ tales que $G \in \mathcal{G}(K_r(t), n', \varepsilon', \delta')$. Pero si $w_i^j w_{i'}^{j'} \in E(K_r(t))$, entonces $w_i w_{i'} \in E(K_r)$, y por lo tanto el par $(V_i, V_{i'})$ es $\varepsilon$ regular y como $\left|V_i^j\right| = \frac{1}{t}|V_i|$ para todo $1 \leqslant j \leqslant t$, el Lema de Slicing 1.7.14 garantiza que los pares $(V_i^j, V_{i'}^{j'})$ para $1 \leqslant j, j' \leqslant t$ son $\max\{t\varepsilon, 2\varepsilon\}$-regularaes si $\varepsilon$ es lo suficientemente pequeño, i.e. $\frac{1}{t} > \varepsilon$. En cuanto a la densidad, nuevamente el Lema de Slicing garantiza que

$$d(A_i^j, A_{i'}^{j'}) \geqslant d(A_i, A_{i'}) - \varepsilon \geqslant \delta - \varepsilon.$$

Por lo tanto, tomamos $\varepsilon < \text{mín}\{\varepsilon'/2, \frac{1}{t}\varepsilon', \frac{1}{t}, \delta/2\}$ y $\delta' = \delta/2$ y funciona.

(2) Sea $G \in \mathcal{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta)$. Luego $V(G) = V_1 \coprod \cdots \coprod V_k$ es una equipartición de $G$ con $|V_i| = n$. Consiederemos cualquier subgrafo $G'$ de $G$ dado por quitar a cada conjunto $V_i$ los suficientes elementos tales que los vértices de $G'$ se equiparticionan en partes de tamaño $n't \geqslant \frac{n'}{n'+1} n = (1 - \frac{1}{n'+1})n = \left(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{t} \rceil}\right) n = \alpha n$, con $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$ para $n'$ lo suficientemente grande ($t$ está fijo). Luego por el Lema de Slicing 1.7.14,

$$G' \in \mathcal{G}(K_r, n't, 2\varepsilon, \delta - \varepsilon).$$

□

En efecto, para todo $\delta > 0$, el primer ítem dice que

$$\mathcal{G}(K_r, n't, \varepsilon, \delta'),$$

para algún $\varepsilon$ y todo $n' \geqslant n'_0$. Luego, por el segundo ítem, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ lo sufientemente grande tal que si

$$G \in \mathcal{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta),$$

entonces existe un subgrafo $G' \subset G$ tal que $G' \in \mathcal{G}(K_r, n't, 2\varepsilon, \delta - \varepsilon)$. Juntando ambas cosas obtenemos que

$$G \in \mathcal{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta), n \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad H \subset G.$$

□

**Teorema 1.7.19** (Regularidad de Erdös-Stone)**.** *Para todo grafo $H$ con $e(H) \geqslant 1$ y cada $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que para todo grafo $G$ con $n \geqslant n_0$ vértices y*

$$e(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + 4\delta\right)\frac{n^2}{2},$$

*entonces $H \subset G$.*

**Comentario 1.7.20.** Como $\delta > 0$ es arbitrario, podríamos reemplazar $4\delta$ por $\delta' > 0$ arbitrario en el enunciado.

*Demostración.* Tomamos $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño dado por el Lema de inmersión aplicable 1.7.17, y aplicamos Regularidad 1.7.5 para el caso $m \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$ al grafo $G$ con $r = \chi(H) - 1$ satisfaciendo la hipótesis del enunciado. Obtenemos una partición $V(G) = V_0 \coprod V_1 \coprod \cdots \coprod V_k$ con $m \leqslant k \leqslant M$ una equipartición $\varepsilon$-regular. Sea $G'$ el grafo obtenido a partir de $G$ borrando todas "las aristas sobre las que no hay control" con parámetro $\varepsilon$ (regularidad) y $\delta$ (densidad). Así, tenemos que $G'$ tiene al menos $e(G) - (3\varepsilon + \delta)n^2$ aristas por el Lema 1.7.12. Sea $R$ el "grafo reducido", se tiene

$$G' \in \mathcal{G}(R, n', \varepsilon, \delta)$$

con $n' := \frac{n-|V_0|}{k}$. Por lo tanto, si $K_{r+1} \subset R$, entonces por el lema de inmersión aplicable 1.7.17 tendríamos que $H \subset G'$. En efecto, quitando algunas particiones de $V(G')$, obtenemos un subgrafo $G'' \subset G'$ tal que $G'' \in \mathcal{G}(K_{r+1}, n', \varepsilon, \delta)$.

Supongamos ahora que $K_{r+1} \not\subset R$. Luego por el Teorema de Turán 1.1.6:

$$e(R) \leqslant t_r(k) \sim \left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{k^2}{2} \quad (k \to \infty),$$

es decir, achicando $\varepsilon$ de ser necesario para que $k$ sea grande y $t_r(k) \leqslant \left(1 - \frac{1}{r} + \delta\right)\frac{k^2}{2}$. Se tiene que

$$e(G') \leqslant \left(1 - \frac{1}{r} + \delta\right)\frac{k^2}{2} \cdot \frac{n^2}{k^2} = \left(1 - \frac{1}{r} + \delta\right)\frac{n^2}{2}.$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} e(G) &\leqslant \left(1 - \frac{1}{r} + \delta\right)\frac{n^2}{2} + 2(3\varepsilon + \delta)\frac{n^2}{2} \\ &= \left(1 - \frac{1}{r} + 6\varepsilon + 3\delta\right)\frac{n^2}{2} \\ &< \left(1 - \frac{1}{r} + 4\delta\right)\frac{n^2}{2}, \end{aligned}$$

absurdo. □

Segunda aplicación del Lema de Regularidad de Székeredi 1.7.5:

**Teorema 1.7.21** (Erdös-Simonovits)**.** *Para todo grafo $H$, y para todo $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $G$ es un grafo $H$-libre con $n \geqslant n_0$ vértices y*

$$e(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} - \delta\right)\frac{n^2}{2},$$

*entonces $G$ está $(5\delta n^2)$-cerca de ser $(\chi(H)-1)$-partito.*

**Comentario 1.7.22.** Notar que este enunciado es equivalente al enunciado que vimos antes: 1.5.8.

*Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño (que depende de $H$ y $\delta$). Aplicamos el Lema de Regularidad de Szémeredi 1.7.5 para $\varepsilon$ y $m \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$; obtenemos la equipartición $\varepsilon$-regular $V(G) = V_0 \coprod V_1 \coprod \cdots \coprod V_k$ con $m \leqslant k \leqslant M$ para todo grafo con $|G| \geqslant M$.

Luego consideramos el "grafo reducido" $R$ con parámetros $\varepsilon$ y $\delta$, y vértices $w_1, \ldots, w_k$. Sea $r = \chi(H) - 1$. Si $K_{r+1} \subset R$, entonces $H \subset G$ por el Lema de Inmersión aplicable 1.7.17, lo cual nos lleva a una contradicción. Es decir, $R$ es $K_{r+1}$-libre.

Elijamos $t = 3\delta k^2$. Si $e(R) < t_r(k) - t$, entonces por el Lema 1.7.12, tenemos:

$$\begin{aligned}
e(G) &\leqslant (\delta + 3\varepsilon)n^2 + e(R) \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^2 \\
&< (\delta + 3\varepsilon)n^2 + \left((1 - \frac{1}{r})\frac{k^2}{2} - 3\delta k^2\right)\frac{n^2}{k^2} \\
&= (1 - \frac{1}{r})\frac{n^2}{2} + \underbrace{(3\varepsilon - 2\delta)}_{< -\frac{\delta}{2}} n^2 \\
&< (1 - \frac{1}{r})\frac{n^2}{2} - \frac{\delta}{2}n^2,
\end{aligned}$$

contradicción.

Con lo cual, el Teorema de Estabilidad de Füredi 1.4.4 nos permite suponer que $R$ está $t$-cerca de ser $r$-partito. Es decir, hay una $r$-partición

$$V(R) = A_1 \coprod \cdots \coprod A_r$$

con a lo más $t$ aristas dentro de las partes. Utilizando nuevamente el Lema 1.7.12 para acotar las aristas despeciables de la partición de $G$, y acotando las aristas dentro de las partes de la partición de $R$, concluimos que es posible borrar a lo más

$$\underbrace{t \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^2}_{\leqslant 3\delta n^2} + \underbrace{(\delta + 3\varepsilon)n^2}_{\leqslant 2\delta n^2} \leqslant 5\delta n^2$$

aristas para obtener una $r$-partición de $G$. $\square$

**Lema 1.7.23** (Lema de conteo general)**.** *Para todo grafo $H$, y todo $\delta > 0$, existen $\varepsilon > 0$ y $M \in \mathbb{N}$ tales que si*

$$G \in \mathcal{G}(H, n, \varepsilon, \delta)$$

*para algún $n \geqslant M$, entonces $G$ contiene al menos*

$$\frac{\delta^{e(H)} \cdot n^{|H|}}{2}$$

*copias de $H$.*

*Demostración.* Haremos inducción en $|H|$, y de hecho nuestra hipótesis inductiva será más fuerte:

> Para todo grafo $H$, y todo $\delta > 0$, existen $\varepsilon > 0$ y $M \in \mathbb{N}$, tales que si
>
> $$G \in \mathcal{G}(H, n, \varepsilon, \delta)$$
>
> para algún $n \geqslant M$, y más aún, dada una equipartición $G = V_1 \coprod \cdots \coprod V_l$ indexada según $H = \{w_1, \dots, w_l\}$ con $(V_i, V_j)$ $\varepsilon$-regular y $d(v_i, V_j) \geqslant \delta$ siempre y cuando que $w_i w_j \in E(H)$, se tiene que hay al menos
>
> $$\frac{\delta^{e(H)} \cdot n^{|H|}}{2}$$
>
> copias de $H$, de tal forma que los vértices $x_j$ correspondientes a un $w_j$ vía un isomorfismo con $H$ pertenezcan a $V_j$ para todo $j = 1, \dots, l$.

Si $|H| = 1$, la afirmación es inmediata. Si $|H| = 2$ y no tiene aristas también es fácil. Si $|H| = 2$ y $e(H) = 1$, luego basta probar que existen al menos $\delta \frac{n^2}{2}$ aristas en $E(V_0, V_1)$. Pero tomando $\varepsilon < \text{mín}\{\delta/4, 1/8\}$, la $\varepsilon$-regularidad del par $(V_0, V_1)$ junto con $d(V_0, V_1)$ implican que existen vértices $v \in V_1$ tales que

$$(\delta - \varepsilon)n \leqslant |N_G(v) \cap V_0|$$

salvo $2\varepsilon n$ vértices por el Lema 1.7.13. Es decir, $E(V_0, V_1)$ tiene al menos

$$(\delta - \varepsilon)(1 - 2\varepsilon)n^2 \geqslant (\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4})\delta n^2 \geqslant \frac{1}{2}\delta n^2$$

aristas, como queríamos.

En general, supongamos que $|H| \geqslant 3$. Si $G \in \mathcal{G}(H, n, \varepsilon, \delta)$ para $n \geqslant M$, entonces $G = V_1 \coprod \cdots \coprod V_l$ con $V_i$ todos de cardinal $n$ y para la escritura $H = \{w_1, \dots, w_l\}$, $w_i w_j \in E(H)$ si y solo si $(V_i, V_j)$ es $\varepsilon$-regular y $d(V_i, V_j) \geqslant \delta$.

Consideremos $H' = H \backslash \{w_l\}$ y $G' := G \backslash V_l$, entonces $G' \in \mathcal{G}(H', n, \varepsilon, \delta)$ y por hipótesis inductiva existe $M'$ tal que si $n \geqslant M'$, entonces $G'$ contiene al menos

$$\frac{\delta^{e(H')} \cdot n^{|H'|}}{2}$$

copias de $H'$, donde cada copia tiene su vértice correspondiente a $w_j$ en la parte $V_j$ para cada $j < l$. Ahora, por el Lema 1.7.13, para todo $v \in V_l$, salvo $2\varepsilon n$ vértices, se tiene que

$$(\delta - \varepsilon)n \leqslant |N_G(v) \cap V_j|, \quad \forall j < l.$$

Por lo tanto, tenemos al menos $(1 - 2\varepsilon(l-1))n$ vértices en $V_l$, cada uno con al menos $(\delta - \varepsilon)n$ vecinos en cada $V_j$ con $j < l$, y por lo tanto, $(\delta - \varepsilon)n(l-1)$ vecinos en $G$.

En el peor de los casos, todos los vértices que no son vecinos de $v$ en $V_j$ pertenecen a una de estas copias de $H'$ para cada $j < l$, luego este $v$ forma al menos $\frac{\delta^{e(H')} \cdot n^{l-1}}{2} - (1 - (\delta - \varepsilon))n(l-1)$ copias de $H$ en $G$. Es decir, $G$ tiene al menos

$$\left( \frac{\delta^{e(H')} \cdot n^{l-1}}{2} - (1 - (\delta - \varepsilon))n(l-1) \right)(1 - 2\varepsilon(l-1))n$$

copias de $H$, donde cada copia tiene su vértice correspondiente a $w_j$ en la parte $V_j$ para cada $1 \leqslant j \leqslant l$. Así, basta probar que tomando $M \gg M'$ y $\varepsilon > 0$ lo suficientemente chico, esta cantidad es $\geqslant \frac{\delta^{e(H)} \cdot n^l}{2}$.

En efecto, esto equivale a que

$$\left( \frac{\delta^{e(H')} \cdot n^{l-1}}{2} - (1-(\delta-\varepsilon))n(l-1) \right)(1-2\varepsilon(l-1)) \geqslant \frac{\delta^{e(H)} \cdot n^{l-1}}{2}$$

si y solo si,

$$\frac{\delta^{e(H')} \cdot n^{l-1}(1-2\varepsilon(l-1))}{2} - \frac{\delta^{e(H)} \cdot n^{l-1}}{2} \geqslant (1-(\delta-\varepsilon))(l-1)(1-2\varepsilon(l-1))n.$$

Es decir, hay que probar

$$\left( \delta^{e(H')}(1-2\varepsilon(l-1)) - \delta^{e(H)} \right) \frac{n^{l-2}}{2} \geqslant (1-(\delta-\varepsilon))(l-1)(1-2\varepsilon(l-1)).$$

Pero como $l \geqslant 3$, se sigue que si $\varepsilon > 0$ es lo suficientemente chico (por ejemplo $\varepsilon < \frac{1-\delta^{e(H)-e(H')}}{2(l-1)}$), existe $M$ con $M \geqslant M'$ lo suficientemente grande, tal que si $n \geqslant M$, el lado izquierdo ess más grande que el lado derecho (que no depende de $n$) pues

$$\left( \delta^{e(H')}(1-2\varepsilon(l-1)) - \delta^{e(H)} \right) > 0.$$

□

Apliación 3 del Lema de Regularidad de Szemeredi 1.7.5:

**Teorema 1.7.24** (Teorema de Roth). *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$ y $A \subset \{1, \ldots, n\}$ con $|A| > \varepsilon n$, entonces $A$ contiene una 3-progresión aritmética*[4].

**Lema 1.7.25** (Lema de remoción de triángulos). *Para todo $\alpha > 0$, existe $\beta > 0$ tal que todo grafo $G$ con $n$ vértices y a lo más $\beta n^3$ triángulos, puede ser $K_3$-libre borrando a lo más $\alpha n^2$ aristas*

*Demostración.* Tomemos $0 < \delta < \frac{\alpha}{3}$ y $\varepsilon < \frac{\delta}{9}$ lo suficientemente chico. Aplicamos el Lema de Regularidad de Szémeredi 1.7.5 con parámetros $\varepsilon$ y $m \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$, obteniendo una partición de un grafo $G$ con $|G| \geqslant M \geqslant k \geqslant m$,

$$V(G) = V_0 \coprod V_1 \coprod \cdots \coprod V_k.$$

Consideremos el grafo reducido $R$ con parámetros $\varepsilon$ y $\delta$. Notar que el subgrafo $G' := G \backslash V_0 \subset G$ cumple que $G' \in \mathscr{G}(R, n', \varepsilon, \delta)$ con $n' \geqslant \frac{(1-\varepsilon)n}{k} \geqslant \frac{1-\varepsilon}{M} n$.

Supongamos que $R$ tiene al menos un triángulo $K_3$. Entonces $G'$ tiene un subgrafo $G''$ dado por quedarnos solamente con las partes $V_i, V_j, V_k$ correspondientes a vértices $w_i, w_j, w_k$ que forman un triángulo en $R$; en particular, $G'' \in \mathscr{G}(K_3, n', \varepsilon, \delta)$. Aplicando el Lema de conteo general 1.7.23 para $H = K_3$ y el subgrafo $G'' \in \mathscr{G}(H, n', \varepsilon, \delta)$, tenemos que $G''$, y por lo tanto $G$, tiene al menos:

$$\delta^3 \cdot \left( \frac{(1-\varepsilon)n}{k} \right)^3 > \frac{\delta^3}{2} \frac{(1-\varepsilon)^3}{M^3} \cdot n^3 > \beta n^3$$

[4]En general, una **$k$-progresión aritmética** es una secuencia de enteros $a, a+d, a+2d, \ldots, a+(k-1)d$.

triángulos para $n$ lo suficientemente grande, donde $\beta < \frac{\delta^3}{2}\frac{(1-\varepsilon)^3}{M^3}$. Achicando $\beta$ de ser necesario, podemos asumir que $n$ es arbitrario.

Con lo cual, si $G$ tiene a lo más $\beta n^3$ triángulos, el párrafo anterior nos dice que $R$ no tiene triángulos. Así, al remover $\leqslant (\delta+3\varepsilon)n^2 < \alpha n^2$ aristas de $G$ (ver Lema 1.7.12), nos quedamos sin triángulos. □

**Teorema 1.7.26** (Teorema de Roth)**.** *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$ y $A \subset \{1,\ldots,n\}$ con $|A| > \varepsilon n$, entonces $A$ contiene una 3-progresión aritmética.*

*Demostración.* Vamos a probar que si $A$ no contiene una 3-progresión aritmética, entonces $|A| = o(n)$.

Sea $\varepsilon > 0$, y $n$ lo suficientemente grande, supongamos que $|A| \geqslant \varepsilon n$ y que no contiene 3-progresiones aritméticas. Definimos un grafo $G$ con $V(G) = X\coprod Y \coprod Z$, disjuntos y $|X| = |Y| = |Z| = 3n$ cada conjunto $X, Y, Z$ es una copia de $\{1,\ldots,3n\}$.

$$E(X,Y) = \{xy \mid x \in X, y \in Y, y = x+a \text{ para algún } a \in A\}.$$
$$E(Y,Z) = \{yz \mid y \in Y, z \in Z, z = y+a \text{ para algún } a \in A\}.$$
$$E(X,Z) = \{xz \mid x \in X, z \in Z, z = x+2a \text{ para algún } a \in A\}.$$

Si $xyz$ es un triángulo en $G$, entonces existen $a, a', a'' \in A$ tales que

$$\begin{cases} y = x+a, & a \in A \\ z = y+a', & a' \in A \\ z = x+2a'', & a'' \in A, \end{cases}$$

y esto es una 3-progresión aritmética $a, a'' = a+(a'-a''), a' = a+2(a'-a'')$ si $a, a', a''$ son distintos. Como $A$ no tiene 3-progresiones aritméticas, entonces cada triángulo en $G$ es de la forma $xyz$ con $y = x+a$, $z = x+2a$. Lo cual implica que cada triángulo queda completamente determinado por $x$ y $a$. Consecuentemente $G$ tiene a lo más

$$3n|A| \leqslant 3n^2 = o(n^3)$$

triángulos.

Por el Lema de Remoción de Triángulos 1.7.25, es posible borrar $o(n^2)$ aristas de $G$ para obtener un grafo libre de triángulos. Ahora, vamos a obtener una cota por abajo de la cantidad de triángulos arista disjunto que tiene $G$: consideremos el conjunto de tripletas de la forma $(x, x+a, x+2a)$, con $x \in X, a \in A$. Observar que cada tripleta corresponde con un triángulo de $G$ y todos son arista-disjuntos entre sí, por lo tanto $G$ contiene al menos $3n|A| > 3\varepsilon n^2$ triángulos disjuntos y por lo tanto si o si deben ser quitados para que $G$ sea libre de triángulos. Contradiciendo el Lema de Remoción de Triángulos. □

# Capítulo 2

# Teoría de Ramsey

**Notación 2.0.1.** Cuando nos refiramos a una $r$-**coloración** de un grafo $G$, será una función $c : E(G) \to \{1,\dots,r\}$ que a cada arista $e \in E(G)$, le asigna un **color** $c(e)$ (No necesariamente la coloración es *propia*, es decir, pueden existir aristas adyacentes con el mismo color).

**Notación 2.0.2.** Sea $G$ un grafo con una coloración $c$. Entonces dado un vértice $v \in V(G)$, podemos considerar los vecinos $w$ de $v$ tales que $c(vw) = i$. Notaremos a este subconjunto de vecinos de $v$ como $N_G^i(v)$, o simplemente $N^i(v)$ cuando el contexto sea claro.

La teoría de Ramsey se motiva mediante el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 2.0.3.** Toda 2-coloración de $K_6$ genera un triángulo monocromático.

*Demostración.* Sea $v \in V(K_6)$. Hay al menos 3 aristas incidentes a $v$ que tienen el mismo color, digamos rojo, por el principio del palomar. Si en $N^{\text{rojo}}(v)$ hay aristas rojas, entonces hay un triángulo rojo. Si no, todas las aristas entre vértices de $N^{\text{rojo}}(v)$ son azules. Como, $\left|N^{\text{rojo}}(v)\right| \geqslant 3$, entonces hay un triángulo azul en $K_6[N^{\text{rojo}}(v)]$, y por lo tanto había un triángulo azul en $K_6$. $\square$

**Teorema 2.0.4** (Teorema de Ramsey (1930))**.** *Para todo $k, r \in \mathbb{N}$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que toda $r$-coloración de $K_n$ genera un $K_k$ monocromático.*

*Demostración.* Sea $v_1 \in V(K_n)$. Existe algún color $c_1 \in \{1,\dots,r\}$ tal que las aristas incidentes a $v_1$ de color $c_1$ son al menos

$$\frac{n-1}{r},$$

escribamos $A_1 := N_{K_n}^{c_1}(v_1)$. Similarmente, sea $v_2 \in K_n[A_1]$, existe un color $c_2 \in \{1,\dots,r\}$ tal que las aristas incidentes a $v_2$ en $K_n[A_1]$ son de color $c_2$ y por lo menos hay

$$\frac{|A_1|-1}{r},$$

escribamos $A_2 := N_{K_n[A_1]}^{c_2}(v_2)$. Continuando este procedimiento, para $n$ lo suficientemente grande, obtenemos una secuencia

$$v_1, c_1, v_2, c_2, v_3, c_3, \dots, v_t, c_t,$$

en donde si $t \geqslant rk$, se sigue que existe un color que se repite al menos $k$ veces en esta secuencia, y por lo tanto, sus vértices $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$ correspondientes forman un $K_k$ monocromático de se color. $\square$

**Ejercicio 2.0.5.** Calcular una cota inferior para $n$.

*Solución.* Escribamo $a_1, a_2, \dots$ para la secuencia de cardinales de los conjuntos $A_1, A_2, \dots$. Inspeccionando la demostración anterior, vemos que $a_1 \geqslant \frac{n-1}{r}$ y que recursivamente $a_{t+1} \geqslant \frac{a_t - 1}{r}$, $t \geqslant 1$. Por lo tanto, tenemos que inductivamente:

$$a_{t+1} \geqslant \frac{n}{r^{t+1}} - \sum_{i=1}^{t+1} \frac{1}{r^i} = \frac{n}{r^{t+1}} - \frac{1}{r}\frac{1-r^{t+1}}{1-r}, \quad t \geqslant 0.$$

Con lo cual, si $t \geqslant rk$ como en la demostración de arriba, se sigue que

$$n \geqslant a_{rk} \geqslant \frac{n}{r^{rk}} - \frac{1}{r}\frac{1-r^{rk}}{1-r},$$

y consecuentemente,

$$\boxed{n \geqslant \frac{r^{rk-1}}{1-r}.}$$

□

## 2.1. Números de Ramsey

**Definición 2.1.1.** El número de Ramsey $R(k)$, es el mínimo $n$ tal que cualquier 2-coloración de $K_n$ contiene una copia monocromática de $K_k$.

**Ejemplo 2.1.2.** En el Ejemplo 2.0.3 vimos que $R(3) \leqslant 6$. Pero de hecho, es fácil encontrar una 2-coloración de $K_5$ que no contiene triángulos monocromáticos, y por lo tanto, $R(3) = 6$:

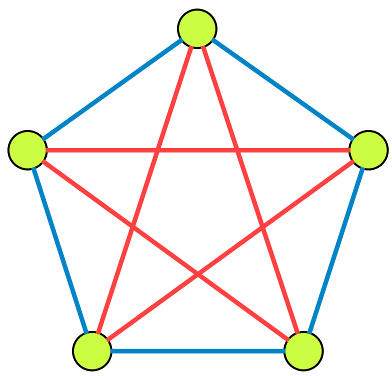


Figura 2.1.1: 2-coloración de $K_5$ libre de triángulos monocromáticos.

**Definición 2.1.3.** Sean $G$, $H_1$ y $H_2$ grafos, escribimos $G \to (H_1, H_2)$ si toda 2-coloración de $G$ con rojo-azul de E(G) contiene una copia de $H_1$ rojo o una copia de $H_2$ azul.

Para $s,t \in \mathbb{N}$ definimos

$$R(s,t) := \min\{n \in \mathbb{N} | K_n \to (K_s, K_t)\}.$$

(En particular, $R(k) = R(k,k)$).

**Teorema 2.1.4** (Erdös-Szekeres (1935))**.** *Para todo $k \geqslant 1$, se tiene que*

$$R(k) \leqslant \binom{2k-2}{k-1} \leqslant \frac{4^{k-1}}{\sqrt{\pi(k-1)}}.$$

*Demostración.* La segunda desigualdad se deduce de una aplicación inmediata de las desigualdades probadas en [Rob55]. Concentrémonos en la primera desigualdad, y de hecho, probaremos una versión un poco más general:

$$R(s,t) \leqslant \binom{s+t-2}{s-1}.$$

Notar que tomando $s = t = k$ se prueba la primera desigualdad del teorema.

Para eso, necesitamos un lema previo:

**Lema 2.1.5.** *Para todo $s,t \geqslant 2$, se tiene*

$$R(s,t) \leqslant R(s-1,t) + R(s,t-1).$$

*Demostración.* En efecto, sea $c$ una coloración de $E(K_n)$ con $n = R(s-1,t) + R(s,t-1)$. Queremos probar que hay una copia roja de $K_s$ o una copia azul de $K_t$. Sea $v \in K_n$, entones hay dos casos:

**Caso 1:** Existen al menos $R(s-1,t)$ aristas rojas incidentes a $v$, o

**Caso 2:** Existen al menos $R(s,t-1)$ aristas azules incidentes a $v$.

En cualquier caso extendemos completos monocromáticos en el vecindario de $v$ a un $K_s$ rojo o un $K_t$ azul, respectivamente. □

Ahora, probemos la desigualdad por inducción en $s+t$, el caso base es $R(1,t) = R(s,1) = 1$. En general, si $\min\{s,t\} \geqslant 2$, tenemos que por el lema de arriba

$$\begin{aligned} R(s,t) &\leqslant R(s-1,t) + R(s,t-1) \\ &\leqslant \binom{s+t-3}{s-2} + \binom{s+t-3}{s-1} = \binom{s+t-2}{s-1}. \end{aligned}$$

□

**Observación 2.1.6.** Existe una cota inferior muy mala, para valores de $k$ grandes, del número de Ramsey:

$$R(k) \geqslant 2(k-1), \quad k \geqslant 2.$$

*Demostración.* Supongamos $k > 3$, pues el caso $k = 2$ es trivial.

En efecto, sea $n = 2(k-1)$, entonces particionando los vértices de $K_n$ en dos conjuntos $A_1, A_2$ de tamaño $k-1$, y pintando las aristas de $K_n[A_1]$ y $K_n[A_2]$ de azul, pero las aristas entre $A_1$ y $A_2$ de rojo, obtenemos una coloración libre de $K_k$ monocromáticos. En efecto, si existiera un $K_k$ monocromático, entonces no puede ser azul porque cada $A_i$ tiene $k-1$ vértices; por otro lado no puede ser rojo porque en una partición hay almenos un vértice y en otra almenos 2 (estamos en el caso $k > 3$), digamos en $A_1$ y $A_2$ respectivamente, entonces en $K_n[A_2]$ debería haber una arista color rojo, absurdo. □

El siguiente teorema confirma que la cota anterior es *muy poco óptima*.

**Teorema 2.1.7** (Erdös (1947))**.**

$$R(k) \geqslant 2^{k/2}, \quad \forall k \geqslant 2.$$

*Demostración.* Consideremos $K_n$ con $n = \lceil 2^{k/2} \rceil$ y supongamos que $k \geqslant 6$, notar que los casos $k = 2, \ldots, 5$ valen por la cota de la Observación anterior 2.1.6 (que es mejor para $k$ chico).

Tenemos exactamente

$$2^{\binom{n}{2}}$$

2-coloraciónes de $E(K_n)$. Vamos a mostrar que la cantidad de 2-coloraciones de $E(K_n)$ que contienen a $K_k$ monocromático es $< 2^{\binom{m}{2}}$. Para eso, notar que en este caso tenemos $\binom{n}{k}$ formas de elegir una copia de $K_k$ y luego $2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}+1}$ formas de colorear el resto de las aristas. Por lo tanto, la cantidad de 2-coloraciones que contienen un $K_k$ monocromático es menor o igual que

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}+1} &\leqslant \left(\frac{en}{k}\right)^k 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}+1} \\ &\leqslant \left(\frac{e(2^{k/2}+1)}{k}\right)^k 2^{-\frac{k(k-1)}{2}} 2 \cdot 2^{\binom{n}{2}},\end{aligned}$$

pero notar que si $k \geqslant 6$, entonces

$$\left(\frac{e(2^{k/2}+1)}{k}\right)^k 2^{\frac{k(k-1)}{2}} \cdot 2 \leqslant \left(\frac{2^{k/2}+1}{2}\right)^k 2^{-\frac{k(k-1)}{2}} \cdot 2 < 1,$$

de donde se sigue lo que queríamos. En efecto, se puede realizar un estudio cualitativo de la función para $k \in \mathbb{R}_{\geqslant 6}$ utilizando cálculo elemental. □

**Definición 2.1.8.** En general, el **número de Ramsey con $r$ colores** $R_r(k)$ es el mínimo $n$ tal que todo $r$-coloreo de $K_n$ tiene un $K_r$ monocromático.

**Teorema 2.1.9.** *Para todo $r \geqslant 2$, se tiene que*

$$2^r \leqslant R_r(3) \leqslant 3 \cdot r!.$$

*Demostración.* Primero veamos la cota inferior, para eso consideremos $n := 2^r$ y encontraremos una $r$-coloración de $K_n$ sin triángulos monocromáticos. Haremos inducción en $r$, si $r = 2$ vale, pues podemos considerar la siguiente coloración:

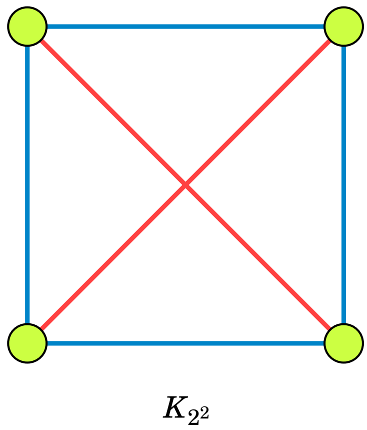



Figura 2.1.2

Para el paso inductivo, consideremos una partición en dos partes de $2^{r-1}$ vértices, donde el conjunto $A$ y el $B$ tienen $(r-1)$-coloraciones sin triángulos monocromáticos, por hipótesis inductiva, y luego pintamos las aristas entre $A$ y $B$ de color $r$ que nunca fue utilizado.

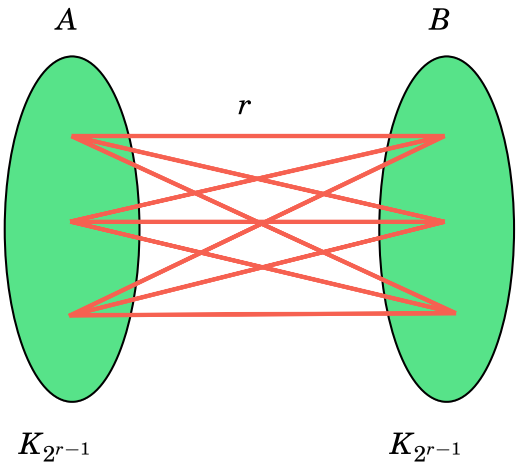



Figura 2.1.3

Ahora veamos la cota superior. En el Ejemplo 2.0.3 vimos que $R_2(3) \leqslant 6 = 3 \cdot 2!$, así vale el caso $r = 2$. Supongamos ahora que $r \geqslant 3$, y que $n = 3 \cdot r!$, sea $v_0 \in K_n$ fijo, y $c$ una $r$-coloración de $K_n$. Entonces existe un color $i \in \{1, \ldots, r\}$ tal que

$$E_i^0 = |\{\, uv_0 \in K_n \mid c(uv) = i \,\}| \geqslant \frac{3 \cdot r!}{r} = 3 \cdot (r-1)!$$

y sea $A := N_{K_n}^i(v_0)$. Pueden ocurrir dos casos:

**Caso 1:** El color $i$ aparece en una arista de $K_n[A]$, luego tenemos un triángulo de color $i$.

**Caso 2:** En $K_n[A]$ no aparece el color $i$, entonces la coloración $c$ inducida en $K_n[A]$ es una $(r-1)$-coloración, con lo cual por hipótesis inductiva existe un triángulo monocromático en $K_n[A]$, en particular en $K_n$.

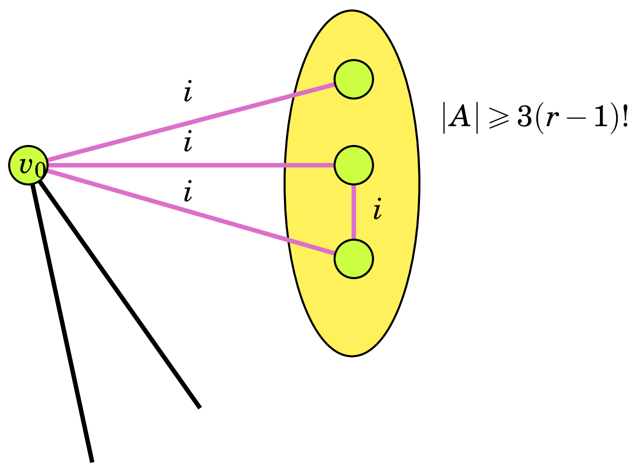



Figura 2.1.4: Ilustración del Caso 1.

$\square$

**Definición 2.1.10.** El **número de Ramsey de** $H_1$ **versus** $H_2$ está definido por:

$$r(H_1,H_2) = \text{mín}\{n|K_n \to (H_1,H_2)\}.$$

En particular, escribimos $r(H) := r(H,H)$.

**Teorema 2.1.11.**

$$r(K_3,P_k) = 2k+1.$$

*Demostración.* Primero acotaremos por abajo: sea $n = 2k$, consideramos la siguiente coloración de $K_n$:

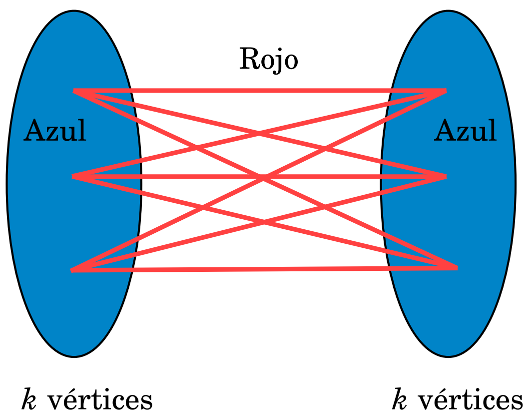


Figura 2.1.5

Particionamos $K_n$ en dos partes de $k$ vértices cada uno y pintamos las aristas de color azúl, y las aristas entre ambas particiones las pintamos de rojo. Claramente no hay caminos de longitud $k$ de color azul porque las particiones tienen $k$ vértices y no hay triángulos rojos porque las aristas rojas inducen un grafo bipartito.

Para la cota superior, consideremos $K_n$ con $n = 2k+1$. Sea $P$ un camino maximal de color azul; supongamos que $|V(P)| \leqslant k$ y entonces $B := V(K_n) \setminus V(P)$ tiene al menos $k+1$ vértices. Sea $v_0$ un extremo de $P$, por maximalidad $v_0$ está conectado a cada vértice de $B$ por aristas rojas. Tenemos dos casos:

**Caso 1:** Si en $K_n[B]$ hay aristas rojas entonces hay un triángulo de color rojo (con un vértice $v_0$).

**Caso 2:** Si en $K_n[B]$ no hay aristas rojas, entonces todas las aristas son azules y por lo tanto hay una copia de $K_{k+1}$ azul, y por lo tanto contiene a $P_k$ de color azul.

□

**Teorema 2.1.12.** *Sea $T_k$ un árbol con $k$ aristas (i.e., $k+1$ vértices). Entonces*

$$r(K_3, T_k) = 2k+1.$$

*Demostración.* Para la primera desigualdad se puede aplicar un razonamieneto similar a la demostración del teorema anterior. Veamos entonces solo la cota superior.

Sea $n = 2k+1$ y consideremos $K_n$ con una coloración. Supongamos entonces que existe un vértice $v$ de grado rojo al menos $k+1$. Entonces la vecindad $N^{\text{rojo}}(v)$ induce un $K_{k+1}$ que si tiene alguna arista roja entonces existe un triángulo rojo en $K_n$, y si no, $K_n$ contiene un $K_{k+1}$ con aristas azules y en particular contiene un $T_k$ azul.

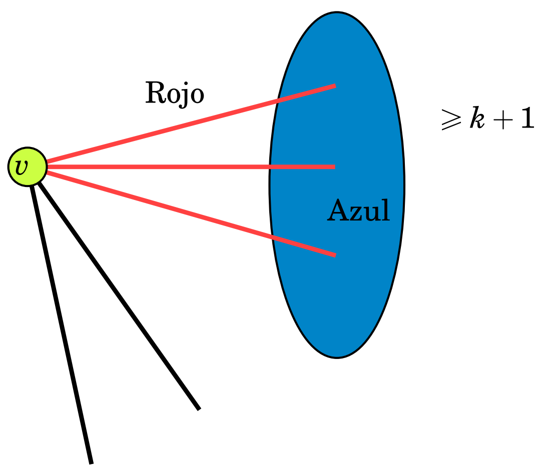



Figura 2.1.6

Ahora, supongamos que todo vértice tiene grado rojo $\leqslant k$. Esto implica que el grado mínimo del subgrafo azul inducido es $\geqslant k$, y por lo tanto el Lema 1.3.2 nos permite encontrar una copia de $T_k$ en el subgrafo azul inducido, en particular $K_n$ tiene una copia azul de $T_k$. □

**Teorema 2.1.13** (Chvátal (1977))**.** *Sea $T_k$ un árbol con $k$ aristas, y sea $s \geqslant 2$. Entonces*

$$r(K_{s+1}, T_k) = s \cdot k + 1.$$

*Demostración.* Primero veamos la cota inferior: sea $n = s \cdot k$, consideremos la siguiente coloración de $K_n$: el grafo azul consiste de $s$ copias de $K_k$ y las aristas rojas son las aristas entre los vértices de las copias de $K_k$.

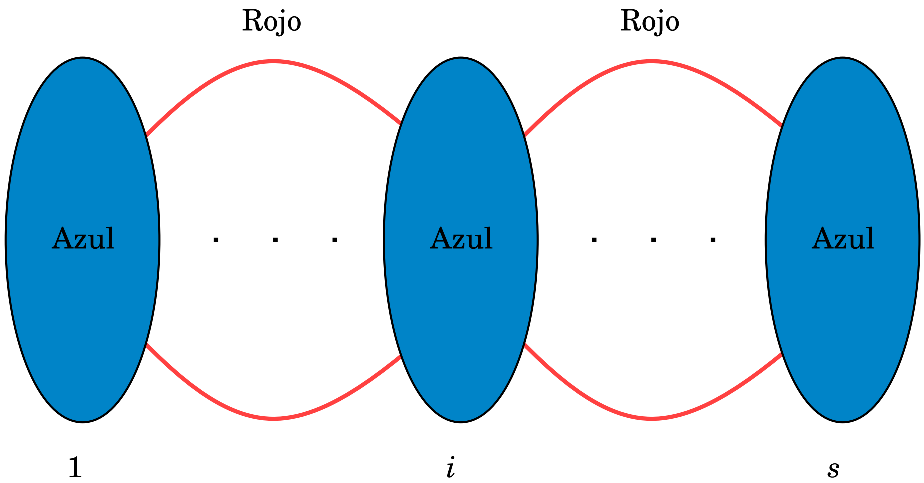



Figura 2.1.7

Para la cota superior, haremos inducción en $s \geqslant 2$. Si $s = 2$, tenemos que $r(K_3, T_k) \leqslant 2k+1$ por el teorema anterior. Supongamos ahora que $s \geqslant 3$. Sea $n = s \cdot k + 1$. Sea $v$ un vértice con grado rojo $\geqslant (s-1)k+1$, y sea $A$ la vecindad roja de $v$. Por hipótesis inductiba en $K_n[A]$, hay una copia de $K_s$ rojo, o una copia de $T_k$ azul y ganamos. Así, podemos asumir que el grado rojo de cada vértice es $\leqslant (s-1)k$. Esto implica que el grafo azul tendrá grado mínimo $\geqslant (s \cdot k + 1) - 1 - (s+1)k \geqslant k$. Con lo cual contiene una copia de $T_k$ por el Lema 1.3.2. □

**Teorema 2.1.14.** *Para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que*

$$\boxed{r(P_k) = \left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil}.$$

*Demostración.* Veamos primero la cota inferior. Sea $n := \left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil - 1$. Consideremos un $K_k$ azul en $K_n$ y escribamos $A$ al conjunto de sus vértices; el resto de las aristas las pintamos de rojo. Notar que $B := V(K_n) \backslash V(K_k)$ cumple

$$|B| < \frac{k}{2}.$$

Así, $K_n$ no tiene un $P_k$ azul. Veamos que tampoco tiene un rojo:

Tomemos un camino rojo $P$, luego no puede tener dos vértices adyacentes de $A$ (pues $K_n[A]$ es un completo azul). Por lo tanto en el peor de los casos $P$ tiene $|B|$

vértices de $B$ tales que entre cada par consecutivos de estos hay un vértice de $A$. O sea,

$$|P| \leqslant 2|B| + 1 < k + 1.$$

Es decir, tampoco tiene un $P_k$ rojo.

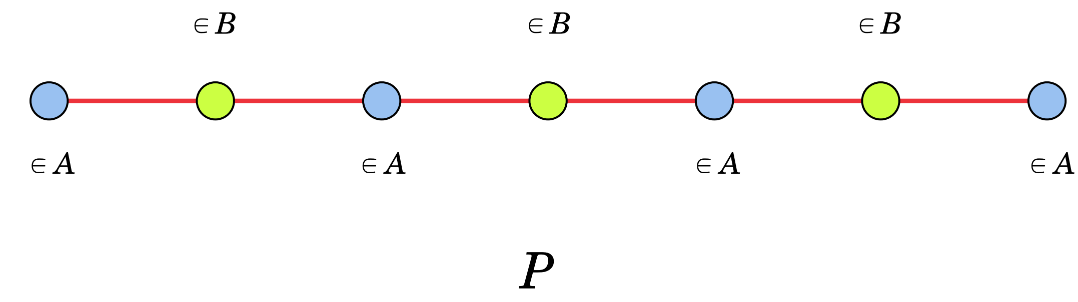



Figura 2.1.8: Ilustración de esta situación.

Veamos ahora la cota superior. Vamos a probar un resultado un poco más general haciendo inducción en $k$:

Sea $k \geqslant l \geqslant 1$ y sea $n = k + \left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil$, entonces

$$K_n \longrightarrow (P_k, P_l)$$

Notar que el caso $k = l$ implica la cota superior.

Consideremos una coloración de $K_n$. Sea $P$ un camino rojo maximal y supongamos que $|P| \leqslant k$. Por maximalidad, cada extremo forma aristas azules con cada vértice de $V(G) \setminus V(P)$.

Nuestro caso base es $1 \leqslant l \leqslant k \leqslant 3$, donde vale la afirmación:

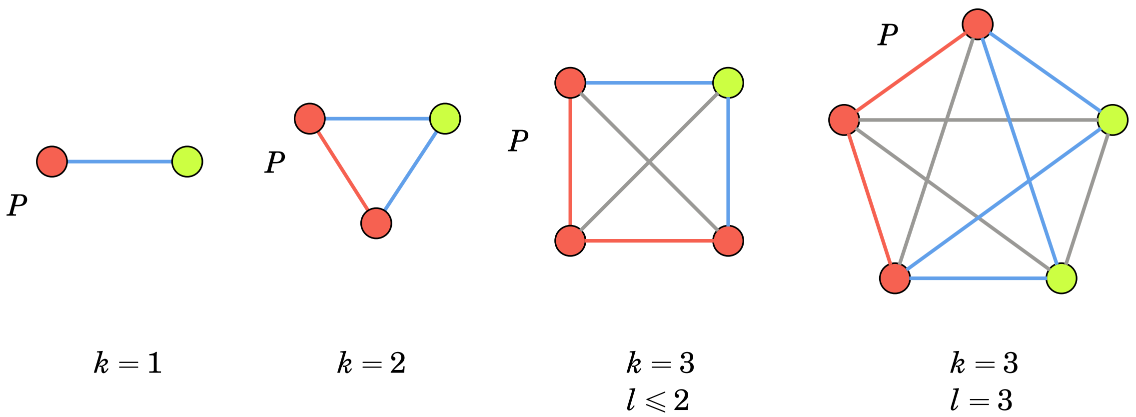



Figura 2.1.9

Ahora veamos el paso inductivo. Supongamos que $4 \leqslant l < k$. Por hipótesis inductiva, tenemos que $K_n \longrightarrow (P_{k-1}, P_l)$ y por lo tanto sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe un $(k-1)$-camino rojo en $K_n$, digamos $P = v_1 v_2 \cdots v_k$. Escribamos $U := V(K_n) \backslash V(P)$; sabemos que $|U| = \lceil \frac{l}{2} \rceil$. Notemos lo siguiente:

(I) Las aristas entre $v_1, v_k$ y $U$ son azules.

(II) Para cada par de vértices consecutivos $v_i v_{i+1}$ en $P$ y cada $u \in U$, existe una arista azul en $\{v_i u, v_{i+1} u\}$, pues de lo contrario habríamos encontrado un $P_k$ rojo.

Sean $Q_1$ y $Q_2$ caminos azules vértice-disjuntos de longitud impar (i.e., cantidad par de vértices) que alternan vértices de $v_2, \ldots, v_k$ y $U$. Tomemos $Q_1$ maximal, y sujeto a esto, tomemos $Q_2$ maximal. Por paridad de la longitud de $Q_1$ y $Q_2$, ambos tienen exactamente un extremo en $U$, digamos $x$ e $y$, respectivamente. Tenemos dos casos:

**Caso 1:** $Q_1$ y $Q_2$ cubren $U$, es decir, $U \subset Q_1 \cup Q_2$. Con lo cual, podemos construir un $l$-camino rojo considerando $Q_1 x v_1 y Q_2$. Luego supongamos que estamos en:

**Caso 2:** Existe $z \in U \backslash (Q_1 \cup Q_2)$.

Observemos que $v_k \in Q_1$, de lo contrario podríamos extender $Q_1$ con las aristas azules $v_k z$ y $v_k x$. Notemos que $Q_1 \cup Q_2$ contiene a lo más $|U|-1$ vértices de $P$, y

$$|U| - 1 < \frac{k-1}{2}.$$

Con lo cual, en $\{v_2, \ldots, v_{k-1}\}$ hay $\frac{k-1}{2} - 2 < \lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor$ vértices de $Q_1 \cup Q_2$. Así, existe un par de vértices consecutivos $v_i, v_{i+1}$ con $2 \leqslant i \leqslant k-2$ tales que $v_i, v_{i+1} \notin Q_1 \cup Q_2$. Sin embargo, por el ítem (ii), existen existen dos aristas azules entre $v_i$ o $v_{i+1}$ y alguno de los siguientes conjuntos: $\{x, y\}$; $\{y, z\}$; o $\{x, z\}$. Esto contradice la maximalidad de $Q_1$ y $Q_2$, ya que podríamos extender algunos de estos caminos, y por ende el caso 2 no puede ocurrir.

Finalmente veamos el caso $k = l \geqslant 4$. Por hipótesis inductiva, tenemos que $K_n \longrightarrow (P_k, P_{k-1})$ y y por simetría se tiene $K_n \longrightarrow (P_{k-1}, P_k)$. Con lo cual, existe un $(k-1)$-camino rojo, digamos $P_r = v_1 \cdots v_k$, y un $(k-1)$-camino azul, digamos $P_a = w_1 \cdots w_k$. Si alguno de estos caminos se pudiera extender monocromáticamente habríamos terminado, con lo cual supongamos que son maximales monocromáticos. Notar que por maximalidad, debe ser que $\{v_1, v_k\} = \{w_1, w_k\}$, de lo contrario podríamos extender monocromáticamente alguno de los dos caminos; digamos que $v_1 = w_1$ y $v_k = w_k$.

Ahora bien, tenemos que

$$n = k + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \geqslant |V(P_r) \cup V(P_a)| = |V(P_r)| + |V(P_a)| - |V(P_r) \cap V(P_a)| = 2k - |V(P_r) \cap V(P_a)|.$$

Consecuentemente, $|V(P_r) \cap V(P_a)| \geqslant \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. Hay dos opciones:

**Opción 1:** $|V(P_r) \cap V(P_a)| > \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. En este caso existe $z \in V(K_n) \backslash (V(P_r) \cup V(P_a))$, y por lo tanto $z v_1 = z w_1$ es una arista de color rojo o azul, y en cualquier caso podemos extender $P_r$ o $P_a$ monocromáticamente, contradiciendo la maximalidad de los caminos.

**Opción 2:** $|V(P_r) \cap V(P_a)| = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. En este caso $P_r \cup P_a = K_n$ y de hecho, deben existir dos vértices interiores consecutivos de $P_r$, digamos $v_i v_{i+1}$ con $1 < i < k$, tales que no son vértices de $P_a$; similarmente, existen dos vértices interiores consecutivos de $P_a$, digamos $w_j w_{j+1}$ con $1 < j < k$, tales que no son vértices de $P_r$.

Más aún, la arista $v_1 v_k = w_1 w_k$ es de color rojo o azul, digamos rojo (el otro caso es análogo). Con lo cual, tenemos un ciclo rojo $C_r := v_1 P_r v_k v_1$ de longitud $k$, y por lo tanto, podemos suponer que todas las aristas incidentes a $C_r$ tienen que ser azules, si no habríamos encontrado un $k$-camino rojo. Pero luego las aristas $w_j v_i$ y $w_{j+1} v_i$ son azules, y podemos alargar $P_a$ a un $k$-camino azul:

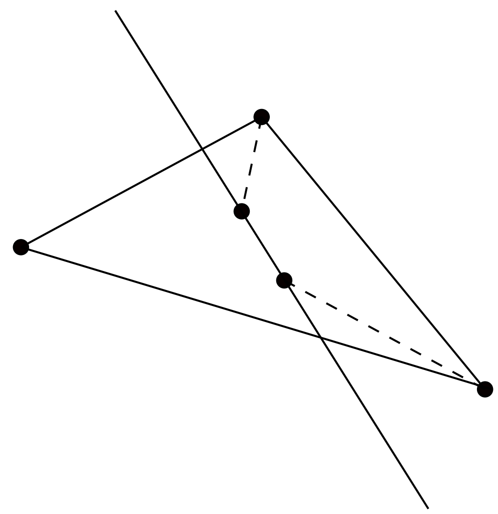
$$w_1 \cdots w_j v_i w_{j+1} \cdots w_k,$$

contradiciendo la maximalidad de $P_a$. Como hemos agotado todos los casos, se concluye la demostración. □

## 2.2. El problema con un final feliz

**Proposición 2.2.1** (El problema de E. Klein (1930))**.** *Para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $n = n(k) \in \mathbb{N}$ tal que dados $n$ puntos en posición general del plano (i.e. no hay 3 puntos colineales). Entonces el conjunto de puntos contiene $k$ puntos en posición convexa.*

*Demostración del caso $k = 4$ y $n = 5$.* Ella probó este caso[1]. Consideramos la cápsula convexa de los 5 puntos, si los vértices son 4 o 5 de estos puntos ya ganamos, si no, existen dos puntos que están contenidos en el interior del triángulo convexo (formado por 3 de estos puntos como vértices). Luego simplemente consideramos la recta que une a estos dos puntos interiores, la cual interseca a dos lados distintos del triángulo, y por lo tanto hay 4 puntos en posición convexa:



□

El caso general se resolvió utilizando el *Teorema de Ramsey Generalizado*, que enunciamos luego de algunas definiciones:

[1]El cual fue bautizado como “El problema con un final feliz” por Paul Erdős, debido a que llevó al casamiento de George Szekeres y Esther Klein.

**Notación 2.2.2.** Dado $n \in \mathbb{N}$, notamos al conjunto $[n] := \{1, \ldots, n\}$.

**Notación 2.2.3.** Sea $A$ un conjunto arbitrario, y $s \in \mathbb{N}$, notamos al conjunto:

$$\binom{A}{s} := \{ S \subset A \mid |S| = s \}.$$

**Definición 2.2.4.** Una $r$**-coloración de subconjuntos** de $[n]$ de tamaño $s$, es una función

$$c : \binom{[n]}{s} \longrightarrow \{1, \ldots, r\}.$$

Diremos que $A \in \binom{[n]}{s}$ es **monocromático** (respecto de $c$), si $c(S) = c(S')$ para todo $S \in \binom{A}{s}$.

**Teorema 2.2.5** (Teorema de Ramsey Generalizado)**.** *Para todo $k, r, s \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que toda $r$-coloración de $\binom{[n]}{s}$ contiene un conjunto monocromático de tamaño $k$.*

**Comentario 2.2.6.** Nosotros probamos el caso $K_n$ en lugar de $\binom{[n]}{s}$ con $s = 2$ y $K_k$ monocromático.

*Continuación de la demostración del problema de E. Klein.* Falta probar el caso $k \geqslant 5$. Tomemos una coloración rojo-azul $c$ del conjunto $\binom{[n]}{4}$. Y coloreemos $c(S)$ de rojo si y solo si los puntos de $S$ están en posición convexa. Por el Teorema de Ramsey Generalizado 2.2.5, existe $n$ tal que $B \subset [n]$ es monocromático y $|B| = k$. Hay dos casos:

**Caso 1:** $B$ es rojo, y por lo tanto todos los subconjuntos de tamaño 4 de $B$ tienen color rojo, i.e., están en posición convexa. Ahora, los puntos de $B$ están en posición convexa, de lo contrario, podríamos encontrar un punto de $B$ en el interior de un triángulo con vértices de $B$ (notar que esto vale por no-colinealidad: trazamos las diagonales entre vértices del polígono convexo; el punto no puede estar en ninguna de estas rectas, i.e., está dentro de un triángulo), absurdo.

**Caso 2:** $B$ es azul, como $k \geqslant 5$, por el resultado preliminar de Klein, existen 4 puntos en posición convexa, absurdo.

□

# Bibliografía

[Rob55] Herbert Robbins. A remark on stirling's formula. *The American Mathematical Monthly*, 62(1):26–29, 1955.