

Apuntes - Tópicos en matemática discreta

Enzo Giannotta

24 de noviembre de 2023

Índice general

1. Teoría extremal de grafos	2
1.1. Teoría extremal de grafos	2
1.2. Números extremales en grafos bipartitos	6
1.3. Números extremales para árboles	9
1.4. Estabilidad y supersaturación	12
1.5. Teorema de Erdős-Stone	14
1.6. Ejercicios	20
1.7. Regularidad	23
2. Teoría de Ramsey	35
2.1. Números de Ramsey	36
2.2. El problema con un final feliz	45
3. El método probabilístico	49
3.1. Fundamentos	49
3.2. Esperanza	53
3.3. Método del primer momento	55
3.4. Erdős-Rényi	57
3.4.1. Método de alteración	58
3.5. Método del segundo momento	61
3.6. Método de concentración	65

Capítulo 1

Teoría extremal de grafos

En este curso trabajaremos con grafos simples, usualmente denotados: $G = (V, E)$.

1.1. Teoría extremal de grafos

¿Cuál es la máxima cantidad de aristas que puede tener un grafo de n vértices sin que aparezca una cierta estructura?

¿Cómo lucen estos grafos maximales?

Ejemplo 1.1.1. 1. Cuando la estructura es un ciclo, la cantidad de aristas es $n - 1$ y los grafos maximales son los árboles.

2. Cuando la estructura es un ciclo impar. ¿Cómo lucen los grafos sin ciclos impares y que tienen una cantidad máxima de aristas? Son los completos balanceados $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. En efecto, para que un grafo bipartito con n vértices tenga una cantidad máxima de aristas, tiene dos partes $|X|, |Y|$ con $|X| + |Y| = n$ y si maximiza la cantidad de aristas es un grafo $K_{|X|, |Y|}$. Es decir, tiene $|X| \cdot |Y|$ aristas y si maximizamos, hay que maximizar la función $f(y) = (n - y)y$ con $1 \leq y \leq n - 1$ e y entero; esto sucede si $y = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ o $y = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Definición 1.1.2. Sean G y H dos grafos. Decimos que G es **H-libre** (o **libre de H**) si $H \not\subseteq G$. El **número extremal** de H es la cantidad

$$\text{ex}(n, H) = \max\{e(G) \mid G \text{ es un grafo de } n \text{ vértices } H\text{-libre}\},$$

donde $e(G)$ siempre denotará el número de aristas de G .

Si G es H -libre y $|G| = \text{ex}(n, H)$, decimos que G es **extremal** respecto de n y H .

Teorema 1.1.3 (Mantel, 1907). Sea $n \in \mathbb{N}$, G un grafo K_3 -libre con n vértices. Entonces, $e(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Además, $e(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \Leftrightarrow G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ ¹.

Demostración. Por inducción en n . Los casos $n = 1, n = 2$ son un vértice, un 1-camino respectivamente. Luego vale para $n = 1, 2$. Ahora, supongamos que $n \geq 3$. Sea G un grafo K_3 -libre con n vértices, y $uv \in E(G)$ (si G no tuviera aristas, podríamos agregar una arista y seguiría siendo K_3 -libre); consideremos $G' = G \setminus \{u, v\}$.

¹Cuando $n = 1, 2$ tenemos que G es el completo K_n

Tenemos que G' también es K_3 -libre y tiene $n - 2$ vértices. Por inducción, G' satisface

$$e(G') \leq \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor.$$

Más aún, como G es K_3 -libre, no existen vértices $w \in G'$ tal que sea adyacente a u y v al mismo tiempo. Luego existen a lo más $n - 2$ aristas en $E(G) \setminus E(G')$ sin contar la arista uv . Es decir,

$$e(G) \leq e(G') + n - 1 \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$



Figura 1.1.1: Ilustración

Para la segunda parte, $e(G) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \Leftrightarrow G = K_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$. Es claro que si $G = K_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$ luego $e(G) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Veamos la recíproca. Sea G con n vértices y cantidad máxima de aristas tal que es K_3 -libre. Los casos $n = 1, 2$ son triviales, luego podemos suponer que $|G| \geq 3$. Como G es K_3 -libre, existen una aristas $uv \in E(G)$ por maximalidad. Por inducción, $G' := G \setminus \{u, v\}$ es un $K_{\left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor}$, digamos con partición $X', Y' \subset V(G')$ de sus vértices. Como G es K_3 -libre, ni u ni v pueden tener vecinos en G' que estén en ambas particiones X', Y' , además, no puede haber una partición que no tenga a u y v como vecinos en G pues podríamos agregar aristas entre vértices de esa particiones: contradiciendo maximalidad. Sin pérdida de generalidad, los vecinos de u en G' están en X y los de v en Y . Más aún, por maximalidad, todos los vértices de X son vecinos con u y todos los de Y con v . Así, G es un X, Y bigrafo tomando $X := X' \cup \{u\}$ e $Y := Y' \cup \{v\}$. Notar que esto prueba que G es un $K_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$. □

Definición 1.1.4. El **grafo de Turán** $T_k(n)$ es el grafo k -partito completo con la mayor cantidad de aristas, es decir, los cardinales de las particiones difieren a lo más en 1 entre sí (por maximalidad). Notamos

$$t_k(n) := e(T_k(n)).$$

Observación 1.1.5. Podemos calcular $t_k(n)$. Sea $\alpha \in \mathbb{N}$ el cardinal más grande de una partición de $T_k(n)$. Entonces las demás particiones tienen cardinal α o $\alpha - 1$. Sea r la cantidad de particiones con cardinal $\alpha - 1$ y $k - r$ de cardinal α . Tenemos que sumando los cardinales de todas las particiones:

$$\alpha k - r = n.$$

Como $0 \leq r < k$, r es el resto de la división de n por k y α es el cociente. Despejando obtenemos que $\alpha = \frac{n+r}{k}$ es decir, $\alpha = \lceil \frac{n}{k} \rceil$. En particular $\alpha - 1 = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$. Juntado todo, tenemos que la cantidad total de aristas es:

$$\alpha^2 \binom{k-r}{2} + \alpha(\alpha-1)(k-r)r + (\alpha-1)^2 \binom{r}{2},$$

i.e.,

$$t_k(n) = \lceil \frac{n}{k} \rceil^2 \binom{k-r}{2} + \lceil \frac{n}{k} \rceil \lfloor \frac{n}{k} \rfloor (k-r)r + \lfloor \frac{n}{k} \rfloor^2 \binom{r}{2}.$$

Teorema 1.1.6 (Turán, 1941). Sean $n, k \in \mathbb{N}$, G un grafo K_{k+1} -libre con n vértice. Entonces

$$e(G) \leq t_k(n).$$

Además, $e(G) = t_k(n) \Leftrightarrow G = T_k(n)$ ².

Demostración. Hagamos inducción en n . Para $n \leq k$ es trivial. Sea ahora G con $n \geq k+1$ que a su vez es K_{k+1} -libre y arista maximal. Esto implica que agregar cualquier arista hace aparecer un K_{k+1} como subgrafo. Entonces G contiene un K_k . Sea A el conjunto de vértices de un subgrafo K_k en G . Consideremos luego $G' = G \setminus A$. El grafo G' es K_{k+1} -libre y tiene $n - k$ vértices. Cada $x \in V(G')$ tiene a lo más $k-1$ vecinos en A dentro del grafo G , pues G es K_{k+1} -libre. Luego por hipótesis inductiva:

$$e(G') \leq t_k(n-k).$$

Si juntamos esto con la hipótesis inductiva, tenemos que

$$e(G) \leq e(G') + (n-k)(k-1) + \binom{k}{2} \leq t_k(n-k) + (n-k) \cdot (k-1) + \binom{k}{2} = t_k(n),$$

donde el segundo término es la cantidad de aristas entre A y $V(G')$.

Veamos ahora la segunda afirmación. Por definición, $G = T_k(n)$ tiene $t_k(n)$ aristas. Recíprocamente, supongamos que G con n vértices y cantidad máxima de aristas $e(G)$ tal que es K_{k+1} -libre. Los casos $n \leq k$ son triviales, luego supongamos que $n \geq k+1$. Por maximalidad, G contiene un K_k como subgrafo; llamemos A a su conjunto de vértices en G y consideremos $G' := G \setminus A$. Notar que

$$e(G') \geq e(G) - \left((n-k)(k-1) + \binom{k}{2} \right) = t_k(n) - (n-k)(k-1) - \binom{k}{2} = t_k(n-k),$$

pues cada vértice de G' tiene a lo más $k-1$ vecinos en A . Como G' es K_{k+1} -libre, en realidad vale la igualdad: $e(G') = t_k(n-k)$, por la primera parte que ya demostramos. Llamemos X_1, X_2, \dots, X_k a las particiones de G' . Como vale la igualdad arriba, tenemos que cada vértice de G' tiene exactamente $k-1$ vecinos en A . Para cada $x' \in G'$ llamemos $\alpha(x')$ al único vértice de A que no es adyacente a x' en G . Más formalmente, $\alpha : V(G') \rightarrow A$ es una función; afirmamos que:

²Cuando $n = 1, 2, \dots, k-1$ tenemos que G es el completo K_n

(I) α es sobreyectiva.

(II) Si $x'_i \in X_i$ y $x'_j \in X_j$ para $i \neq j$, entonces $\alpha(x'_i) \neq \alpha(x'_j)$.

Antes de probar la afirmación, notemos que esta prueba que $\alpha|_{X_i}$ es constante para cada $i = 1, \dots, k$ (y por lo tanto tiene sentido el abuso de notación $\alpha(X_i)$ para denotar al único vértice de A que no es adyacente a ningún vértice $x' \in X_i$). Veamos entonces la afirmación:

(I) Supongamos que α no es sobreyectiva: existe un $a_0 \in A$ tal que para todo $i = 1, \dots, k$ existe $x'_i \in X_i$ adyacente a a_0 en G . Pero esto implica entonces que los vértices x'_1, \dots, x'_k, a_0 forman un K_{k+1} en G , absurdo.

(II) En efecto, si $\alpha(x'_i) = a_0 = \alpha(x'_j)$, entonces x_i, x_j y los vértices de $A \setminus \{a_0\}$ juntos forman un K_{k+1} en G , absurdo.

Así, podemos extender la partición de G' a todo G : definimos $\tilde{X}_i := X_i \cup \{\alpha(X_i)\}$. Es claro que de esta manera G es un grafo k -partito completo. Como G es maximal en su cantidad de aristas, entonces $G = T_k(n)$. \square

Teorema 1.1.7 (Erdős - segunda demostración del teorema). Sean $n, k \in \mathbb{N}$ y G un grafo K_{k+1} -libre con n vértices. Entonces existe un grafo H que es k -partito con $V(H) = V(G)$ tal que:

$$d_H(v) \geq d_G(v), \quad \forall v \in V(G).$$

Erdős. Haremos inducción en k . Para $k = 1$ no hay que hacer nada. Sea ahora $k \geq 2$. Sea $v \in V(G)$ con $d_G(v) = \Delta(G)$. La vecindad de v , $G' := G[N_G(v)]$ debe ser K_k -libre. Sea $A := G \setminus N_G(v)$. Notar que

$$d_G(u) \leq d_{G'}(u) + |A|.$$

Por hipótesis inductiva existe un grafo H' que es $(k-1)$ -partito con $V(H') = V(G')$ y

$$d_{H'}(u) \geq d_{G'}(u), \quad \forall u \in V(G').$$

Sea H el grafo obtenido a partir de H' añadiendo los vértices de A y conectando todos los vértices entre A y $V(H')$. Observar que H es $k+1$ -partito y como v tiene grado máximo en G , tenemos que para cada $u \in A$:

$$d_G(u) \leq d_G(v) = |V(H')| = d_H(u)$$

y para $u \in V(H')$ sabemos que:

$$d_G(u) \leq d_{G'}(u) + |A| \underset{H.I.}{\leq} d_{H'}(u) + |A| = d_H(u).$$

\square

Ejercicio 1.1.8. A partir de la demostración deducir que el grafo K_{k+1} -extremal es $T_k(n)$ y es único.

Solución. Sea G un grafo K_{k+1} -extremal y H el grafo r -partito obtenido por el Teorema anterior. Así, $V(H) = V(G)$ y $d_H(v) \geq d_G(v)$ para todo vértice v . Esta desigualdad implica que

$$e(H) \geq e(G),$$

y por lo tanto, H también es K_{r+1} -extremal. Pero por definición, $t_k(n) \geq e(H)$. Pero ya vimos que los grafos K_{r+1} extremales tienen $\geq t_k(n)$ aristas. Con lo cual, en realidad $e(G) = e(H)$ y más aún, $d_H(v) = d_G(v)$ para todo v .

Esto nos indica que inspeccionando la demostración más detalladamanete, se tiene que G' es un $T_{k-1}(\Delta)$ (con $\Delta := \delta(G)$) y que G es luego $T_k(n)$. \square

Observación 1.1.9. Sea H un grafo con $\chi(H) \geq 3$, es decir no bipartito, entonces

$$\text{ex}(n, H) = \Theta(n^2).$$

Demostración. En primer lugar, si G es un grafo que contiene a H , luego no puede ser bipartito. En particular, si $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, entonces es H -libre al ser bipartito; de hecho tiene n vértices y $e(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Consecuentemente

$$(n-1)^2/4 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \text{ex}(n, H).$$

Por otro lado, la cantidad de aristas maxima de G es $\binom{n}{2}$ (en general para cualquier grafo con n vértices) y por lo tanto $\text{ex}(n, H) = \Theta(n^2)$. \square

1.2. Números extremales en grafos bipartitos

Recuerdo 1.2.1 (Desigualdad de Jensen). *Vamos a usar la desigualdad de Jensen: si φ es una función convexa entonces:*

$$\varphi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(\varphi(X)).$$

Ejercicio 1.2.2. Probar las siguientes dos desigualdades elementales para el binomio de Newton:

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \stackrel{\text{Cota 1}}{\leq} \binom{n}{k} \stackrel{\text{Cota 2}}{\leq} \left(\frac{n \cdot e}{k}\right)^k.$$

Solución.

Cota 1: Notar que

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdots \frac{n-k+1}{1} \geq \left(\frac{n}{k}\right)^k,$$

pues $\frac{n}{k} \leq \frac{n-j}{k-j}$ para todo $j = 0, \dots, k$.

Cota 2: Notar que se tiene una mejor cota:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \leq \frac{n^k}{k!}.$$

Por lo tanto, como $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, se sigue que $e^k \geq \frac{k^k}{k!}$, y luego

$$\frac{n^k}{k!} \leq \frac{n^k e^k}{k^k},$$

como queríamos. \square

Teorema 1.2.3 (Erdős, 1938). *Para todo $n \in \mathbb{N}$*

$$\text{ex}(n, C_4) \leq n^{\frac{3}{2}}.$$

Definición 1.2.4. Una **cereza** es un 2-camino $x_0x_1x_2$. Llamaremos a x_1 el **centro** y a x_0, x_2 las **hojas**.



Figura 1.2.2: Dibujo de cereza.

Demostración. Sea G un grafo C_4 -libre con n vértices. Contaremos cereza en G para acotar el número de aristas $e(G)$.

Para cada vértice $v \in V(G)$ hay exactamente

$$\binom{d_G(v)}{2} \text{ cerezas con centro en } v.$$

Por lo tanto, en G hay

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{2} \text{ cerezas en } G.$$

Por la desigualdad de Jensen la sumatoria se minimiza cuando todos los grados son iguales:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{2} &\geq n \cdot \binom{2e(G)/n}{2} \\ &\stackrel{\text{Cota 1}}{\geq} n \cdot \left(\frac{e(G)}{n} \right)^2 = \frac{e(G)^2}{n}. \end{aligned}$$

Por otro lado, dado un par $\{u, v\}$ de hojas de cerezas distintas, entonces tendríamos un subgrafo C_4 en G , absurdo; por lo tanto hay a lo más

$$\binom{n}{2} \text{ cerezas en } G.$$

Juntando todo:

$$\frac{e(G)^2}{n} \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

consecuentemente $e(G)^2 \leq n^3$, i.e., $e(G) \leq n^{\frac{3}{2}}$. \square

Teorema 1.2.5 (Kövari, Sós, Turán). Sean $s, t \in \mathbb{N}$, $s \leq t$. Entonces existe una constante $c = c(s, t) > 0$ tal que

$$\text{ex}(n, K_{s,t}) \leq c \cdot n^{2 - \frac{1}{s}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definición 1.2.6. Una s -cereza es un $K_{1,s}$. Similarmente tenemos la noción de **centro** y **hojas** (las cuales son s).



Figura 1.2.3: Dibujo de s -cereza.

Demostración. Sea G un grafo $K_{s,t}$ -libre en n vértices. Para cada $v \in V(G)$ hay $\binom{d_G(v)}{s}$ s -cerezas. Por lo tanto en G hay

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{s} \quad s\text{-cerezas},$$

con lo cual

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{s} \stackrel{\text{Cota 1}}{\geq} \sum_{v \in V(G)} \frac{d_G(v)^s}{s^s} \stackrel{\text{Jensen}}{\geq} \frac{n}{s^s} \left(\frac{2e(G)}{n} \right)^s.$$

Procediendo de manera análoga a la demostración del teorema anterior, tenemos que un conjunto de s vértices del grafo puede ser conjunto de hojas de a lo más $(t-1)$ cerezas, pues de lo contrario habría una copia de $K_{s,t}$. Por lo tanto, hay en total a lo más

$$(t-1) \cdot \binom{n}{s} \quad s\text{-cerezas}.$$

Juntando todo:

$$n \left(\frac{2e(G)}{sn} \right)^s \leq (t-1) \cdot \binom{n}{s} \stackrel{\text{Cota 2}}{\leq} (t-1) \cdot \left(\frac{ne}{s} \right)^s,$$

luego

$$\frac{2e(G)}{sn} \leq \frac{(t-1)^{\frac{1}{s}}}{n^{\frac{1}{s}}} \cdot \frac{ne}{s},$$

equivalentemente,

$$e(G) \leq \frac{(t-1)^{\frac{1}{s}} se}{2s} \cdot n^{2-\frac{1}{s}} = c(s, t) \cdot n^{2-\frac{1}{s}}.$$

□

Ejercicio 1.2.7. Demostrar que

$$\text{ex}(n, H) = o(n^2) \Leftrightarrow H \text{ es bipartito.}$$

Solución. Como H es bipartito, existen $s, t \in \mathbb{N}$, digamos $s \leq t$, tales $H \subset K_{s,t}$. Así, por el Teorema de 1.2.5,

$$\text{ex}(n, H) \leq c(s, t) \cdot n^{2-\frac{1}{s}},$$

pues si G no contiene a H , tampoco contiene a $K_{s,t}$. Así, obtenemos que $\text{ex}(n, H) = o(n^2)$.

Recíprocamente, supongamos que H no es bipartito, luego por la Observación 1.1.9, $\text{ex}(n, H) = \Theta(n^2)$. Con lo cual, si $\text{ex}(n, H) = o(n^2)$, necesariamente H es bipartito. □

1.3. Números extremales para árboles

Teorema 1.3.1. Sean $n, k \in \mathbb{N}$ y T un árbol con $k+1$ vértices. Entonces,

$$\text{ex}(n, T) \leq (k-1) \cdot n.$$

Lema 1.3.2. Sean $k \in \mathbb{N}$ y T un árbol con $k+1$ vértices. Entonces si G es un grafo con $\delta(G) \geq k$, luego contiene a T como subgrafo.

Demostración. Haremos inducción en k . Para $k=1$ es claro, pues existe un vértice con al menos un vecino. En general, supongamos que $k \geq 2$. Sea h una hoja de T y consideremos el árbol $T' = T \setminus \{h\}$. Por hipótesis inductiva, $T' \subset G$. Sea p el único vecino de h en T , i.e. $p \in T'$. Como T tiene $k+1$ vértices, p tiene a lo más $k-1$ vecinos en T' , luego p tiene un vecino en G que no está en T' pues $\delta_G(p) \geq k$. Entonces podemos incrustar T en G considerando h como este vértice. □

Lema 1.3.3. Todo grafo G contiene un subgrafo H con $\delta(H) > \varepsilon(H) \geq \frac{e(G)}{n}$, donde $n = |G|$.

Demostración. Construiremos una secuencia de subgrafos de G :

$$G =: G_0 \supset G_1 \supset \dots$$

de la siguiente manera, si $v_i \in G_i$ es un vértice con $d_{G_i}(v_i) \leq \varepsilon(G_i) := \frac{e(G_i)}{|G_i|}$, entonces definimos $G_{i+1} := G_i \setminus \{v_i\}$. Eventualmente esta secuencia termina, digamos en $H := G_{j_0}$.

Notar que $\varepsilon(G_{i+1}) \geq \varepsilon(G_i)$, y por lo tanto $\varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$. En efecto,

$$\varepsilon(G_{i+1}) = \frac{e(G_{i+1})}{|G_{i+1}|} = \frac{e(G_i) - d_{G_i}(v_i)}{|G_i| - 1},$$

que es mayor o igual que $\frac{e(G_i)}{|G_i|}$ si y solo si

$$(e(G_i) - d_{G_i}(v_i))|G_i| \geq e(G_i)(|G_i| - 1),$$

equivalentemente,

$$e(G_i) \geq |G_i|d_{G_i}(v_i),$$

i.e.,

$$\frac{e(G_i)}{|G_i|} \geq d_{G_i}(v_i),$$

que es cierto por construcción. Por otro lado, por minimalidad de H , se sigue que $\delta(H) > \varepsilon(H)$. \square

Demostración del teorema. Sea G un grafo con $\geq (k-1) \cdot n + 1$ aristas. Por el segundo lema, G contiene H con

$$\delta(H) \geq \frac{e(G)}{n} > \frac{(k-1)n}{n},$$

y por el primer lema $T \subset H \subset G$. \square

Conjetura 1.3.4 (Erd s, S s, 1963). *Se conjetura que en el teorema anterior se tiene una mejor cota:*

$$\text{ex}(n, T) \leq \frac{1}{2}(k-1)n.$$

Notar que de ser verdadera la conjetura, entonces esta cota es tight cuando n es un múltiplo de k : Sea G el grafo obtenido al unir $\frac{n}{k}$ copias de K_k , así $e(G) = \frac{n}{k} \binom{k}{2} = \frac{n}{2}(k-1)$.

Esta conjetura es verdadera en el caso T un camino:

Teorema 1.3.5 (Erd s & Gallai, 1959). *Sean $n, k \in \mathbb{N}$. Entonces,*

$$\text{ex}(n, P_k) \leq \frac{(k-1) \cdot n}{2}$$

Ejercicio 1.3.6. A partir de la demostración de este teorema, obtenga que los grafos extremales son únicos.

Lema 1.3.7. *Todo grafo conexo G con n vértices contiene un camino de largo*

$$k := \min\{2\delta(G), n-1\}.$$

Demostración. Tomemos $P := v_0, \dots, v_l$ camino de largo máximo. Sabemos que $N_G(v_0), N_G(v_l) \subset V(P)$ por maximalidad de P . Si $V(P) = V(G)$ ganamos. Así que supongamos que no; supongamos también que $l < k \leq 2\delta(G)$. Demostraremos que existe un ciclo de longitud l contenido en $G[V(P)]$, así llegaremos a una contradicción pues al existir un vértice x fuera de $G[V(P)]$ en G , podríamos extender el ciclo a un camino de longitud al menos $k+1$ en G conectándolo con x .



Figura 1.3.4: Notar que en este caso $v_0 P v_{i-1} v_l P v_i v_0$ es un ciclo de longitud $|P|$ en $G[V(P)]$.

En efecto, supongamos que no existe tal ciclo, luego para cada $i \in \{1, \dots, l-1\}$ se tiene que $v_{i-1} v_l \notin E(G)$ o $v_0 v_i \notin E(G)$. Entonces

$$2\delta(G) \leq d_G(v_0) + d_G(v_l) \leq l < 2\delta(G),$$

absurdo. □

Demostración del teorema. Haremos inducción en n . Afirmamos que G es P_k -libre en n vértices, entonces

$$e(G) \leq \frac{(k-1) \cdot n}{2}.$$

El caso base es $n \leq k$, luego $e(G) \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{n(k-1)}{2}$. Luego supongamos que $n \geq k+1$. Si G no es conexo: sean G_1, \dots, G_r las componentes conexas, por hipótesis

$$e(G_i) \leq \frac{|G_i|(k-1)}{2},$$

entonces

$$e(G) = \sum_{i=1}^r e(G_i) \leq \frac{k-1}{2} \sum_{i=1}^r |G_i| = \frac{n(k-1)}{2}.$$

Ahora, supongamos que G es conexo. Si $n-1 \leq 2\delta(G)$, entonces por el Lema 1.3.7, G contiene un camino de largo $n-1 \geq k$, absurdo. Con lo cual, podemos asumir que $2\delta(G) \leq n-1$, y por el Lema, G contiene un camino de largo $2\delta(G)$ que debe cumplir

$$2\delta(G) < k \quad \Leftrightarrow \quad \delta(G) \leq \frac{k-1}{2}.$$

Sea v un vértice de grado $\leq \frac{k-1}{2}$, consideremos $G' := G \setminus \{v\}$. Por hipótesis inductiva

$$e(G') \leq \frac{(n-1)(k-1)}{2},$$

con lo cual,

$$e(G) \leq e(G') + \frac{k-1}{2} \leq \frac{(n-1)(k-1)}{2} + \frac{k-1}{2} = \frac{n(k-1)}{2}.$$

□

1.4. Estabilidad y supersaturación

Teorema 1.4.1 (Füredi, 2015). Sean $n, t \in \mathbb{N}$, y G con n vértices. Si G está t -lejos de ser bipartito³, entonces hay al menos

$$\frac{n}{6} \left(e(G) - \frac{n^2}{4} + t \right)$$

triángulos en G .

Demostración. Para cada $u \in V(G)$, definimos

$$B_u := N_G(u) \quad \text{y} \quad A_u := V(G) \setminus B_u.$$

Luego la cantidad de triángulos de G es:

$$k_3(G) = \frac{1}{3} \sum_{u \in V(G)} e(B_u).$$

Para cada $u \in V(G)$, si borro las aristas de $G[B_u]$ y las de $G[A_u]$, obtengo un subgrafo bipartito de G : el (A_u, B_u) -bigrafo; luego tuvimos que haber quitado al menos t aristas porque G está t -lejos de ser bipartito, es decir:

$$e(B_u) + e(A_u) \geq t.$$

Además, para cada $u \in V(G)$

$$\sum_{v \in A_u} d_G(v) = e(B_u, A_u) + 2e(A_u).$$

Como

$$e(G) = e(A_u) + e(A_u, B_u) + e(B_u),$$

se sigue que $e(A_u) = e(B_u) - e(G) + \sum_{v \in A_u} d_G(v)$ (juntando ambas ecuaciones). Ahora, por la desigualdad $e(B_u) + e(A_u) \geq t$, se tiene que

$$e(B_u) \geq t - e(A_u) = t + e(G) - e(B_u) - \sum_{v \in A_u} d_G(v)$$

y por lo tanto

$$2e(B_u) \geq t + e(G) - \sum_{v \in A_u} d_G(v).$$

³Esto significa que si H es un subgrafo bipartito de G , entonces $e(H) \leq e(G) - t$.

Sumando sobre todos los $u \in V(G)$ y utilizando que $k_3(G) = \frac{1}{3} \sum_{u \in V(G)} e(B_u)$, concluimos:

$$k_3(G) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} (nt + ne(G) - \sum_{u \in V(G)} \sum_{v \in A_u} d_G(v));$$

sin embargo, afirmamos que vale la siguiente igualdad:

$$\sum_{u \in V(G)} \sum_{v \in A_u} d_G(v) = \sum_{x \in V(G)} d_G(x)(n - d_G(x));$$

ya que cada término de la sumatoria se acota inferiormente por $\frac{n}{2} \cdot (n - \frac{n}{2}) = \frac{n^2}{2}$, concluimos el resultado.

Veamos la afirmación: notar que para cada $x \in V(G)$, su cantidad de aristas $d_G(x)$ es contada exactamente $|A_x| = n - d_G(x)$ veces del lado izquierdo de la sumatoria. \square

Como corolario, se prueban los siguientes dos teoremas:

Teorema 1.4.2 (Estabilidad). *Sean $n, t \in \mathbb{N}$, y G es K_3 -libre con n vértices. Si $e(G) \geq \frac{n^2}{4} - t$, entonces G contiene un grafo bipartito con al menos $e(G) - t$ aristas.*

Demostración. Si G no tuviera un grafo bipartito con al menos $e(G) - t$ aristas, entonces G estaría $(t+1)$ -lejos de ser bipartito. Por el Teorema 1.4.1 tiene al menos

$$\frac{n}{6} \left(e(G) - \frac{n^2}{4} + (t+1) \right) \geq \frac{n}{6}$$

triángulos, i.e., al menos uno, lo cual es absurdo. \square

Teorema 1.4.3 (Supersaturación). *Sean $n, t \in \mathbb{N}$, y G un grafo con n vértices. Si $e(G) \geq \frac{n^2}{4} + t$, entonces G contiene al menos $t \cdot n/3$ triángulos.*

Demostración. Notar que G está t -lejos de ser bipartito, en efecto, un grafo bipartito de orden $m \leq n$ tiene a lo más $\frac{m^2}{4} \leq \frac{n^2}{4}$ aristas, pero G tiene al menos $\frac{n^2}{4} + t \geq \frac{m^2}{4} + t$ aristas. Luego por el Teorema 1.4.1, G tiene

$$\frac{n}{6} \left(e(G) - \frac{n^2}{4} + (t+1) \right) \geq \frac{n}{3}t$$

triángulos. \square

Teorema 1.4.4 (Füredi, 2015 – Estabilidad). *Sean $n, k \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$ y G un grafo K_{k+1} -libre en n -vértices. Si $e(G) \geq t_k(n) - t$, entonces G contiene un subgrafo generador k -partito con al menos $e(G) - t$ aristas.*

Demostración. Haremos inducción en k . El caso $k = 1$ tenemos que $t_k(n) = 0$ y siempre se cumple. Entonces supongamos que $k \geq 2$. Tomemos $u \in V(G)$ con $d_G(u) = \Delta(G)$. Definamos $G' := G[B]$ con $B = N_G(u)$. Sea $A = V(G) \setminus B$. El grafo G' es K_k -libre porque G es K_{k+1} -libre, luego por el Teorema de Turán 1.1.6, $e(G') \leq t_{k-1}(d)$ con $d := |B|$ y entonces podemos definir $t' := t_{k-1}(d) - e(G') \geq 0$ y aplicar hipótesis

inductiva al grafo G' . Así, G' contiene un subgrafo H' generador $(k-1)$ -partito con al menos $e(G') - t' = 2e(G') - t_{k-1}(d)$ aristas.

Probemos que

$$H := (V(H') \cup A, E(H') \cup E(A, B))$$

tiene al menos $e(G) - t$ aristas, y así H es un subgrafo k -partito generador de G con al menos $e(G) - t$ aristas. En efecto, queremos probar que

$$e(H') + e(A, B) \geq e(G) - t;$$

como $e(G) = e(A, B) + e(G') + e(A)$, la desigualdad de arriba es equivalente a

$$e(H') \geq e(G') + e(A) - t \Leftrightarrow e(H') - e(G') + t \geq e(A).$$

Ya que $e(H') \geq e(G') - t'$, nos queda que la última desigualdad es cierta si $e(A) \leq t - t'$.

Sabemos que

$$2e(A) + e(A, B) = \sum_{v \in A} d_G(v) \leq d \cdot (n - d),$$

donde la desigualdad sale de que la sumatoria tiene $(n - d)$ términos y cada grado $d_G(v) \leq \Delta(G) = d_G(u) = |B| = d$; y reemplacemos $e(A, B) = e(G) - e(A) - e(G')$ y nos queda

$$e(A) + e(G) - e(G') \leq d \cdot (n - d).$$

Ahora, notar que

$$t_k(n) \geq t_{k-1}(d) + d \cdot (n - d),$$

pues el lado izquierdo es la cantidad de aristas de un grafo de Turán (la cual es máxima) y el lado derecho es la cantidad de aristas de un grafo k -partito en n -vértices: el obtenido a partir del grafo de Turán $T_{k-1}(d)$ agregando $n - d$ vértices y conectándolos a las $k - 1$ particiones de $T_{k-1}(d)$. Juntando todo,

$$e(A) \leq d \cdot (n - d) - \underbrace{e(G)}_{\geq t_k(n) - t} + \underbrace{e(G')}_{= t_{k-1}(d) - t'} \leq d \cdot (n - d) - t_k(n) + t + t_{k-1}(d) - t' \leq t - t'$$

como queríamos probar. \square

1.5. Teorema de Erdős-Stone

Notación 1.5.1. Notaremos por $K_s(t)$ al grafo de Turán $T_s(t \cdot s)$.

Teorema 1.5.2 (Erdős-Stone, 1946). *Sea H un grafo con $e(H) \geq 1$. Entonces*

$$\text{ex}(n, H) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + o(1)\right) \cdot \frac{n^2}{2} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Observación 1.5.3. Sea H un grafo con $e(H) \geq 1$. Entonces

$$t_{\chi(H)-1}(n) \leq \text{ex}(n, H),$$

pues todo grafo G necesita de al menos $\chi(H)$ colores para tener a H incrustado, por lo tanto $T_{\chi(H)-1}(n)$ es H -libre.

Observación 1.5.4.

$$t_{\chi(H)-1}(n) \sim \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1}\right) \frac{n^2}{2}.$$

Con lo cual, la desigualdad de Erdős-Stone es asintóticamente justa.

Demostración. En efecto, esto equivale a probar que

$$t_k(n) \sim \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2}{2} \quad (n \rightarrow \infty),$$

para $k \geq 2$ fijo. Escribiendo $n = qk + r$ con $0 \leq r < k$, tenemos que

$$t_k(qk) \leq t_k(n) \leq t_k((q+1)k),$$

pero para cualquier $q \in \mathbb{N}$ es fácil de calcular el número de aristas del grafo de Turán $T_k(qk)$:

$$t_k(qk) = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{(qk)^2}{2},$$

con lo cual $t_k(qk), t_k((q+1)k) \sim \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2}{2}$ y por lo tanto $t_k(n)$ también. \square

Lema 1.5.5. Sea $c \in (0, 1)$ y sea $\varepsilon > 0$. Si G es un grafo con n vértices, con n lo suficientemente grande tal que

$$e(G) \geq c \frac{n^2}{2},$$

entonces existe un subgrafo $G' \subset G$ con

$$|G'| \geq \varepsilon n \quad y \quad \delta(G') \geq (c - \varepsilon) |G'|.$$

Demostración. Sea $G_n, G_{n-1}, G_{n-2}, \dots, G_t$ la secuencia de subgrafos de G obtenida de la siguiente manera: $G_n := G$ y el grafo $G_{n-(i+1)}$ se obtiene a partir de G_{n-i} borrando un vértice $v \in V(G_{n-i})$ con $d_{G_{n-i}}(v) < (c - \varepsilon) \cdot |G_{n-i}|$; además, G_t es el último grafo de la secuencia. Notar que $|G_{n-i}| = n - i$.

Afirmamos que $t \geq \varepsilon n$ para n lo suficientemente grande, y por ende, G_t será el subgrafo que buscábamos: por construcción $\delta(G_t) \geq (c - \varepsilon) |G_t|$. Para eso, calculamos la cantidad total de aristas borradas para la obtención de G_t :

$$\sum_{i=0}^{n-(t+1)} d_{G_{n-i}}(v_i) < (c - \varepsilon) \sum_{i=0}^{n-(t+1)} (n - i) = (c - \varepsilon)(n - t)(n + t + 1)/2,$$

y como G_t tiene a lo más $\binom{t}{2}$ aristas, tenemos que

$$e(G) \leq (c - \varepsilon)(n - t)(n + t + 1)/2 + \binom{t}{2}.$$

Supongamos por el absurdo que $t \leq \varepsilon n$. Nuestro objetivo es acotar el lado derecho:

$$\begin{aligned} e(G) &\leq (c - \varepsilon)(n - t)(n + t + 1)/2 + \binom{t}{2} = (c - \varepsilon) \frac{(n^2 + n - (t^2 + t))}{2} + \frac{t(t-1)}{2} \\ &\leq (c - \varepsilon) \frac{n^2 + n}{2} + \frac{\varepsilon n(\varepsilon n - 1)}{2} \\ &= (c - \varepsilon + \varepsilon^2) \frac{n^2}{2} + (c - 2\varepsilon) \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Notar que el lado derecho es un polinomio cuadrático en la variable n con coeficiente principal $\frac{c-\varepsilon+\varepsilon^2}{2} < \frac{c}{2}$ y por lo tanto para n lo suficientemente grande, se contradice la desigualdad $c\frac{n^2}{2} \leq e(G)$. Así, $t \geq \varepsilon n$. \square

Lema 1.5.6. Para todo $r, t \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si G es un grafo con $n \geq n_0$ vértices y

$$\delta(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right)n$$

luego $K_{r+1}(t) \subset G$.

Demostración. Procedemos por inducción en r . Para $r = 1$, tenemos que $K_2(t) = K_{t,t}$ y sabemos que en este caso $\text{ex}(n, K_{t,t}) = o(n^2)$. Como n es lo suficientemente grande, $K_{t,t} \subset G$. En efecto, se tendrá que

$$e(G) = \frac{1}{2} \sum_{v \in G} d_G(v) \geq \frac{\delta(G)n}{2} \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) \frac{n^2}{2}.$$

Ahora, supongamos que $r \geq 2$. Primero, encontraremos por hipótesis inductiva, una copia de $K_r(q)$ con $q \geq t/\varepsilon$; escribamos $A := \bigcup_{i=1}^r A_i$ a la partición de los vértices de $K_r(q)$.

Luego, definimos $X \subset B := V(G) \setminus A$, el conjunto de todos los vértices que tienen al menos t vecinos en cada A_i . Mostramos que $|X| \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. Para esto, acotamos $e(A, B)$ por abajo:

$$\begin{aligned} e(A, B) &= \sum_{v \in A} d_G(v) - 2e(A) \\ &\geq qr \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right)n - 2 \frac{(qr)^2}{2}. \end{aligned}$$

Y acotamos por arriba:

$$e(A, B) \leq |X|qr + (|B| - |X|)(q(r-1) + t - 1).$$

Juntando ambas desigualdades, tenemos:

$$\underbrace{n(qr\varepsilon - t + 1)}_{>0} + \underbrace{q^2(-r^2 + r - 1) - q(t - 1)}_{>0} \leq |X| \underbrace{(q - t + 1)}_{>0}$$

Por lo tanto, se sigue lo que queremos cuando $n \rightarrow \infty$.

Finalmente, demostramos que existen conjuntos

$$B_i \subset A_i \text{ con } |B_i| = t \text{ y } t \text{ vértices } x \in X \text{ que satisfacen } N_G(x) \supset B_i,$$

de donde concluiremos que $K_{r+1}(t) \subset G$. Sea $x \in X$, existen a lo más $\binom{q}{t}$ formas de elegir B_i^x en A_i , donde B_i^x satisface $|B_i^x| = t$ y $N_G(x) \subset B_i^x$. Si $|X| > \binom{q}{t}^r \cdot (t - 1)$, entonces por el principio del palomar tenemos lo que queremos. \square

Demostración del Teorema. Observemos que H está contenido en el grafo $\chi(H)$ -partito, completo y con partes de tamaño $|H|$, es decir, en $K_{\chi(H)}(|H|)$. Con lo cual,

basta probar el teorema para $H' := K_r(t)$ con $r := \chi(H)$ y $t := |H|$. De hecho, probaremos que para cualquier $r \geq 2$, $t \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\text{ex}(n, K_r(t)) \leq \left(1 - \frac{1}{r-1} + \varepsilon\right) \frac{n^2}{2} \quad (n \geq n_0).$$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño. Sea n lo suficientemente grande, y G con n vértices tal que

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r-1} + \varepsilon\right) \frac{n^2}{2}.$$

Aplicamos el primer lema 1.5.5 con $c = 1 - \frac{1}{r-1} + \varepsilon$ y $\frac{\varepsilon}{2}$. Así, obtenemos un subgrafo $G' \subset G$ con

$$|G'| \geq \frac{\varepsilon}{2}n \quad \text{y} \quad \delta(G') \geq \left(1 - \frac{1}{r-1} + \varepsilon\right) |G'|.$$

Como n es lo suficientemente grande: $\frac{\varepsilon}{2}n \geq n_0$, y por el segundo lema 1.5.6, G' contiene a $K_r(t)$, y por lo tanto G también. El resultado se sigue. \square

Definición 1.5.7. G está t -cerca de ser r -partito si existe un subgrafo r -partito de G con al menos $e(G) - t$ aristas.

Teorema 1.5.8 (Teorema de Estabilidad de Erdős-simonovits). *Para todo grafo H con $e(H) \geq 1$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que: si G es H -libre en n -vértices y*

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} - \delta\right) \binom{n}{2}.$$

Entonces G está (εn^2) -cerca de ser $(\chi(H) - 1)$ -partito.

Haremos la demostración con $H = K_{r+1}$ y para H general lo haremos con el Lema de Regularidad 1.7.5.

Para todo $\varepsilon > 0$ lo suficientemente chico, existe $\delta > 0$ tal que: si G es K_{r+1} -libre en n -vértices y

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right) \binom{n}{2},$$

entonces G está (εn^2) -cerca de ser r -partito.

Requerimos probar dos lemas previos:

Lema 1.5.9. *Sea $r \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ y n suficientemente grande. Si G es K_{r+1} -libre con n vértices y*

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} - \delta^2\right) \frac{n^2}{2},$$

entonces existe $G' \subset G$ con $|G'| \geq (1 - \delta)n$ y

$$\delta(G') \geq \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right) |G'|.$$

Demostración. De la demostración del Lema 1.5.5 se deduce un enunciado más fuerte:

Dados $r \in \mathbb{N}$ y $c \in (0, 1)$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo grafo G con $n \geq n_0$ vértices y

$$e(G) \geq c \frac{n^2}{2},$$

existe un subgrafo $G_t \subset G$ con $|G_t| = t \geq \varepsilon n$ y $\delta(G_t) \geq (c - \varepsilon)|G_t|$; más aún,

$$e(G) \leq e(G_t) + (c - \varepsilon)(n - t)(n + t + 1)/2.$$

Ahora, dado $\delta > 0$, el cual sin pérdida de generalidad lo podemos asumir $\delta < \frac{1}{2}$, tomamos $c := (1 - \frac{1}{r} - \delta^2) > 0$ y $\varepsilon = \delta - \delta^2 > 0$. Supongamos que G es un grafo con n vértices K_{r+1} -libre, y

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} - \delta^2\right) \frac{n^2}{2} = c \frac{n^2}{2},$$

luego existe un subgrafo $G_t \subset G$ con $t \geq (\delta - \delta^2)n$ vértices. Como en la demostración de la Observación 1.5.4 se ve que $t_r(t) \sim (1 - \frac{1}{r}) \frac{t^2}{2}$ ($t \rightarrow \infty$), podemos suponer que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $t_r(t) \leq (1 - \frac{1}{r} + \gamma) \frac{t^2}{2}$, para $\gamma := \frac{\delta^2}{2}$.

Ahora, como G es K_{r+1} -libre, entonces G_t también y se tiene que

$$e(G_t) \leq \text{ex}(t, K_{r+1}) \leq t_r(t) \leq \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\delta^2}{2}\right) \frac{t^2}{2},$$

por el Teorema de Turán 1.1.6. Juntando esto con lo mencionado al principio, tenemos que

$$\begin{aligned} c \frac{n^2}{2} &\leq e(G) \leq e(G_t) + (c - \varepsilon)(n - t)(n + t + 1)/2 \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\delta^2}{2}\right) \frac{t^2}{2} + (c - \varepsilon)(n - t)(n + t + 1)/2 \\ &= \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\delta^2}{2}\right) \frac{t^2}{2} + (c - \varepsilon) \frac{(n^2 + n - t^2 - t)}{2}, \end{aligned}$$

esto implica que para n lo suficientemente grande de tal suerte que $\frac{(c - \varepsilon)}{2}n \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{n^2}{2}$,

$$\varepsilon \frac{n^2}{4} \leq (\delta + \frac{\delta^2}{2}) \frac{t^2}{2}.$$

Reemplazando $\varepsilon = \delta - \delta^2$ en la última desigualdad, y despejando t :

$$\sqrt{\frac{\delta - \delta^2}{2\delta + \delta^2}} n \leq t.$$

Como la expresión de la izquierda es más grande que $(1 - \delta)$ cuando $\delta < \frac{1}{2}$, se sigue que para todo n lo suficientemente grande,

$$|G_t| = t \geq (1 - \delta)n.$$

Es decir, G_t es el subgrafo G' de G que cumple las propiedades deseadas del enunciado. \square

Lema 1.5.10. Para todo $r \in \mathbb{N}$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si G es K_{r+1} -libre con n vértices y

$$\delta(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right)n,$$

entonces existe una partición $V(G) = A_0 \sqcup A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_r$ tal que $|A_0| \leq \varepsilon n$ y A_i son conjuntos independientes para todo $i \geq 1$.

Demostración. Si tomamos $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño, entonces G contiene una copia de K_r por el Teorema de Turán 1.1.6 (esto ocurre si $e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r-1}\right) \frac{n^2}{2}$; tomar $\delta < \frac{1}{r-1} - \frac{1}{r}$ y notar que en la demostración de la Observación 1.5.4 se ve que $t_r(t) \sim \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{t^2}{2}$ ($t \rightarrow \infty$)).

Sea A un conjunto de vértices que induce un K_r en G . Sean $B := V(G) \setminus A$ y $X := \{v \in V(G) \mid |N_G(v) \cap A| \leq r-2\}$, vamos a mostrar que X es pequeño.

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right)nr - r(r-1) &\leq e(A, B) & \left(2e(A) + e(A, B) = \sum_{v \in A} d_G(v) \geq r \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right)n\right) \\ &\leq (r-1)((n-r) - |X|) + (r-2)|X| = (r-1)(n-r) - |X|, \end{aligned}$$

manipulando la desigualdad, obtenemos:

$$|X| \leq \delta nr.$$

Tomando $\delta < \min\{\frac{\varepsilon}{r}, \frac{1}{r-1} - \frac{1}{r}\}$, el A_0 será X y los conjuntos independientes son:

$$A_u = \{u\} \cup \{v \in B \setminus X \mid uv \notin E(G)\}$$

para cada $u \in A$. □

Ahora estamos en condiciones de demostrar el Teorema de Estabilidad de Erdos-Simonovits para $H = K_{r+1}$ 1.5:

Demostración del Teorema de Estabilidad de Erdos-Simonovits para $H = K_{r+1}$ 1.5. Sea $\varepsilon > 0$ chico, tomemos $\delta = (\delta')^2$ donde δ' se obtiene del Lema 1.5.10 con $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2}$. Notar que de la demostración podemos suponer que si $\varepsilon > 0$ es chico, luego $\delta' < \frac{\varepsilon'}{2}$ también. Por hipótesis

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} - (\delta')^2\right) \frac{n^2}{2},$$

entonces por el Lema 1.5.9: existe $G' \subset G$ con $n' := |G'| \geq (1 - \delta')n$ y $\delta(G') \geq \left(1 - \frac{1}{r} - \delta'\right)|G'| = n'$. Por el Lema 1.5.10: para $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2}$ se tiene que existe A_0, A_1, \dots, A_r partición de G' con $|A_0| < \varepsilon'n' \leq \varepsilon'n$ y A_i conjuntos independientes para todo $i \geq 1$. Así el subgrafo generado por los A_i con $i \geq 1$ es r -partito. Además, para obtener este subgrafo, hay que quitar a lo más

$$\varepsilon'n^2 + \varepsilon'n^2 < \varepsilon n^2 \quad (\delta, \delta' \ll 1)$$

aristas de G , es decir, G está εn^2 -cerca de ser r -partito. En efecto, las aristas de $G[V(G) \setminus V(G')]$ junto con $E_G(V(G'), V(G) \setminus V(G'))$ aportan $\leq \binom{\delta'n}{2} + n' \cdot (n - n') \leq \delta'n^2 + \delta'n^2 \leq \varepsilon'n^2$, y las de $G[V(A_0)]$ junto con $E_G(V(A_0), V(G) \setminus V(A_0))$ aportan

$$\leq \binom{\varepsilon'n}{2} + (\varepsilon'n) \cdot (\delta')n \leq \varepsilon'n^2.$$

□

1.6. Ejercicios

Ejercicio 1.6.1. Púebel el teorema de Mantel de manera alternativa. Considere un conjunto independiente B de tamaño máximo en un grafo K_3 -libre y la suma de los grados de los vértices que no están en B .

Solución. Sea G un grafo K_3 -libre con orden n y B un conjunto independiente de G de tamaño máximo; consideremos $A := V(G) \setminus B$. Inspeccionemos la sumatoria

$$\sum_{v \in A} d_G(v);$$

notar que $d_G(v) = |N_G(v)|$ y que $N_G(v)$ es un conjunto de vértices aislados en G : si x, y son dos vecinos de v entonces $xy \notin E(G)$ porque de lo contrario G tendría un triángulo xyv . Así, como $|B|$ es máximo, se sigue que $|N_G(v)| \leq |B|$. Esto implica que

$$\sum_{v \in A} d_G(v) \leq |A| |B|.$$

Más aún, como A, B particionan $V(G)$: $|A| + |B| = n$. Luego $|A| \cdot |B|$ se maximiza cuando $|A| |B| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil = t_2(n)$. Así,

$$e(G) = e(A, B) + e(A) \leq e(A, B) + 2e(A) = \sum_{v \in A} d_G(v) \leq t_2(n),$$

como queríamos probar. □

Comentario 1.6.2. Que $|A| \cdot |B|$ con $|A| + |B| = n$ se maximiza cuando $|A| \cdot |B| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil$ se deduce de que reemplazando $|B| = n - |A|$, el problema equivale a maximizar $|A| \cdot (n - |A|)$. Más formalmente, el problema equivale a maximizar $f(x) = x(n - x)$ con x número natural en el intervalo $[0, n]$. Simplemente notemos que $f'(x) = n - 2x$, luego f es creciente en $[0, \frac{n}{2}]$ y decreciente en $[\frac{n}{2}, n]$, pero como $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ es el mayor número entero $\leq \frac{n}{2}$, f alcanza máximo en $[0, \frac{n}{2}]$ cuando $x = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, similarmente, f alcanza máximo en $[\frac{n}{2}, n]$ cuando $x = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Como $f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) = f(\lceil \frac{n}{2} \rceil)$, se sigue que f se maximiza en $x = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y $x = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, es decir, el valor máximo de f es $f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Ejercicio 1.6.3. Demuestre que si G es un grafo con $n = 2k + 1$ vértices, entonces G contiene un camino de largo k , digamos P_k , o el complemento de G tiene un triángulo.

Solución. Supongamos por el absurdo que ninguna de las dos situaciones pasa. Por un lado, si el complemento \overline{G} de G no contiene triángulos, el Teorema de Mantel nos dice que

$$e(\overline{G}) \leq \text{ex}(n, K_3) \leq k(k + 1).$$

Como $(2k + 1)k = \binom{n}{2} = e(G) + e(\overline{G})$, deducimos que

$$k^2 \leq e(G).$$

Por otro lado, si G no contiene P_k -caminos, el Teorema de Erdős & Gallai dice que

$$e(G) \leq \text{ex}(n, P_k) \leq \frac{(k - 1)n}{2} = \frac{(k - 1)(2k + 1)}{2}.$$

Juntando ambas desigualdades, llegamos al absurdo:

$$k^2 \not\leq \frac{(k-1)(2k+1)}{2}.$$

Por lo tanto, G contiene un P_k -camino o \overline{G} un triángulo. \square

Ejercicio 1.6.4. Demuestre que si T es un árbol con k vértices, entonces $T \subseteq G$ o el complemento de G contiene un triángulo si $n := |G| = 2k - 1$.

Solución. Supongamos por el absurdo que G es un grafo con $n = 2k - 1$ vértices que no contiene a un árbol T con k vértices, y que \overline{G} , su complemento, no contiene triángulos. En particular, la primera suposición implica que $\delta(G) \leq k - 2$ por el siguiente lema, cuya demostración vimos en clase:

Sean $t \in \mathbb{N}$ y T un árbol con $t + 1$ vértices. Entonces si G es un grafo con $\delta(G) \geq t$, luego contiene a T como subgrafo.

Mientras que la segunda suposición (\overline{G} no tiene triángulos), implica que dado un vértice $w \in V(G)$, entonces para cada par de vértices w', w'' no adyacentes a w se tiene que $w'w'' \in E(G)$. En otras palabras, para todo $w \in V(G)$, el subgrafo $G[A_w]$ inducido por el conjunto $A_w := V(G) \setminus \{N_G(w) \cup \{w\}\}$ es completo; notar que como $|A_w| = n - (d_G(w) + 1)$, este grafo es isomorfo a $K_{n-d_G(w)-1}$.

Finalmente, para llegar al absurdo, consideremos $v \in V(G)$ un vértice con grado $d_G(v) = \delta(G) \leq k - 2$, entonces $G[A_v]$ es un subgrafo de G isomorfo a $K_{n-\delta(G)-1}$, i.e. un completo con al menos

$$n - \delta(G) - 1 = (2k - 1) - \delta(G) - 1 \geq (2k - 1) - (k - 2) - 1 = k$$

vértices, luego contiene una copia de T , con lo cual G también: absurdo. Consecuentemente, G contiene una copia de T o \overline{G} tiene triángulo(s). \square

Solución. [Segunda solución] Otra manera de resolver el ejercicio es haciendo inducción $k \geq 1$: supongamos que G es un grafo de orden $2k - 1$ con \overline{G} libre de triángulos, probaremos que $T \subset G$ para cualquier árbol T de orden k . El caso $k = 1$ es trivial.

En general, supongamos que $k \geq 2$ y tomemos una hoja h de T , consideremos $T' := T \setminus \{h\}$ y escribamos $p \in T'$ para el padre de h en T . Ahora, si G es completo ya ganamos, pues $K_{2k-1} \supset T$, con lo cual podemos suponer que existen $v, w \in V(G)$ tales que $vw \notin G$, y consideremos $G' := G \setminus \{v, w\}$. Notar que $\overline{G'}$ es K_3 -libre y G' tiene orden $2(k-1) - 1$, luego por hipótesis inductiva G' contiene a T' . Por otro lado, $p \in T'$ tiene que ser vecino de w o de v en G , de lo contrario \overline{G} tendría un triángulo! Esto prueba que $T \subset G$. \square

Ejercicio 1.6.5. Pruebe que si $e(G) > n^2/4$, entonces G contiene al menos $\lfloor n/2 \rfloor$ triángulos.

Solución. El Teorema de Füredi (2015) dice:

Sean $n, t \in \mathbb{N}$, y G con n vértices. Si G está t -lejos de ser bipartito, entonces hay al menos

$$\frac{n}{6} \left(e(G) - \frac{n^2}{4} + t \right)$$

triángulos en G .

Sea $H \subset G$ el subgrafo bipartito con cantidad de aristas $e(H)$ máxima de G . Como $e(H) \leq \frac{n^2}{2} < e(G)$, tenemos que $H \subsetneq G$; y podemos escribir $t := e(G) - e(H) \geq 1$. En particular, como $e(H)$ es máximo, tenemos que G está t -lejos de ser bipartito. Con lo cual, el Teorema de Füredi implica que G contiene al menos

$$\frac{n}{6} \left(e(G) - \frac{n^2}{4} + t \right)$$

triángulos; en particular, si $e(G) - \frac{n^2}{4} + t \geq 3$ ganamos, pues en este caso habrían al menos $\frac{n}{2} \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ triángulos. Por otro lado, esta cantidad es menor que 3 si y solo si $t = 1$ y $H = T_2(n)$. En este caso, $H = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Tomemos una arista $f \in E(G) \setminus E(H)$, con lo cual f tiene sus extremos en una de las dos particiones de H ; en el peor de los casos está en la partición más grande, es decir, para todo vértice v de la partición de H con menor cantidad de vértices: $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, se forma un triángulo distinto con vértices v y los extremos de f . En particular, G contiene en este caso al menos $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ triángulos. \square

Ejercicio 1.6.6. Sean G y H grafos. Demuestre que si G tiene n vértices y al menos $2 \cdot \text{ex}(n, H)$ aristas, entonces G contiene al menos $\text{ex}(n, H)$ copias de H .

Solución. Supongamos que G no contiene $e := \text{ex}(n, H)$ copias de H , luego quitando una arista por cada copia de H en G obtenemos un grafo H -libre con al menos $e(G) - (e - 1) \geq 2e - (e - 1) = e + 1$ aristas. Sin embargo, por definición de e , se sigue que este grafo tiene a lo más e aristas, absurdo. Esto prueba que G tiene al menos e copias de H . \square

Ejercicio 1.6.7. Sea $k \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Demuestre que todo grafo G con n vértices y al menos $n^2/4$ aristas contiene un grafo H con al menos k vértices y $\delta(H) \geq \frac{|H|}{2}$.

Solución. Probaremos un enunciado más fuerte:

Sea $k \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Entonces todo grafo G con n vértices y al menos $\frac{n^2}{4}$ aristas contiene a $H := K_{k,k}$.

Esto prueba el ejercicio pues el grafo $H := K_{k,k}$ tiene $2k \geq k$ vértices y $\delta(H) = k = \frac{v(H)}{2}$.

Ahora probemos este enunciado más fuerte. Para eso utilizaremos el Teorema de Kövani, Sós, y Turán (abreviado “KST”):

Sean $s, t \in \mathbb{N}$, $s \leq t$. Entonces existe una constante $c = c(s, t) > 0$ tal que

$$\text{ex}(n, K_{s,t}) \leq c \cdot n^{2-\frac{1}{s}}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

lo aplicamos al caso $s = t = k$.

Así, el Teorema de KST dice que

$$\text{ex}(n, H) \leq c \cdot n^{2-\frac{1}{k}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

con $c > 0$ una constante que depende solo de k . Tomando $n_0 \in \mathbb{N}$ para que $\frac{n^2}{4} > cn^{2-\frac{1}{k}}$ valga para todo $n \geq n_0$, se sigue que G siempre debe tener a H como subgrafo: de lo contrario se llegaría al absurdo:

$$\frac{n^2}{4} \leq e(G) \leq \text{ex}(n, H) \leq cn^{2-\frac{1}{k}}.$$

□

Solución. [Segunda solución] Por el Lema 1.3.3, G contiene un subgrafo H' tal que

$$\delta(H') > \varepsilon(H') \geq \varepsilon(G).$$

Como $\varepsilon(G) = \frac{e(G)}{|G|} \geq \frac{n}{4}$, se tiene que para n lo suficientemente grande, H' contiene a $K_{1,k}$, y por lo tanto $H := K_{1,k}$ sirve. En efecto,

$$\delta(H) = k \geq \frac{k+1}{2} = \frac{|H|}{2}.$$

□

1.7. Regularidad

Definición 1.7.1. Dada una partición de los vértices de un grafo G , digamos $V(G) = X \sqcup Y$, definimos la **densidad** del par (X, Y) como la cantidad

$$d(X, Y) := \frac{e(X, Y)}{|X||Y|}.$$

Definición 1.7.2. Dado $\varepsilon > 0$. Sean $A, B \subset V(G)$ con G un grafo. Diremos que el par (A, B) es ε -**regular** si para todo $X \subset A, Y \subset B$ con

$$|X| \geq \varepsilon |A| \quad \text{e} \quad |Y| \geq \varepsilon |B|$$

tenemos

$$|d(X, Y) - d(A, B)| \leq \varepsilon.$$

Definición 1.7.3. Sea G un grafo. Una partición $V(G) = V_0 \sqcup V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_k$, se dice **equipartición**, si

$$|V_0| \leq |V_1| = |V_2| = \cdots = |V_k|.$$

Al conjunto V_0 lo llamamos **conjunto excepcional**.

Definición 1.7.4. Sea G un grafo con n vértices y $\varepsilon > 0$. Diremos que una partición $V(G) = V_0 \sqcup V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_k$ es ε -**regular**, si $|V_0| \leq \varepsilon n$ y a lo más εk^2 pares (V_i, V_j) con $1 \leq i, j \leq k$ no son ε -regulares.

Teorema 1.7.5 (Lema de Regularidad de Szemerédi). *Para todo $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$, existe $M = M(\varepsilon, m) \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier grafo G con $|G| \geq M$, existe una equipartición ε -regular*

$$V(G) = V_0 \sqcup V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_k$$

con $m \leq k \leq M$.

Demostración.

Definición 1.7.6. Dado un grafo G con n vértices y partición de sus vértices $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$, definimos la **media cuadrática** del par (V_i, V_j) para cada $i \neq j$ como

$$d_2(V_i, V_j) := \frac{e(V_i, V_j)^2}{|V_i||V_j|n^2},$$

y la **media cuadrática** de la partición \mathcal{P} como

$$d_2(\mathcal{P}) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} d_2(V_i, V_j) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \frac{|V_i||V_j|}{n^2} d(V_i, V_j)^2 \leq 1.$$

Definición 1.7.7. Una partición \mathcal{P}' de G se dice que **refina** a una partición \mathcal{P} (o que es un **refinamiento** de \mathcal{P}) si cada parte de \mathcal{P} es una unión de algunas partes de \mathcal{P}' .

Lema 1.7.8. Si \mathcal{P}' es un refinamiento de \mathcal{P} , entonces

$$d_2(\mathcal{P}') \geq d_2(\mathcal{P}).$$

Lema 1.7.9. Sea G un grafo y \mathcal{P} una partición de $V(G)$. Si (X, Y) es un par no ε -regular en \mathcal{P} . Entonces, existen particiones $\{X_1, X_2\}$ de X y particiones $\{Y_1, Y_2\}$ de Y tales que

$$\sum_{1 \leq r, s \leq 2} \frac{|X_r||Y_s|}{n^2} \cdot d(X_r, Y_s)^2 \geq d(X, Y)^2 + \varepsilon^4.$$

Lema 1.7.10. Sea G un grafo con n vértices y \mathcal{P} partición de G que no es ε -regular. Entonces existe un refinamiento \mathcal{P}' de \mathcal{P} tal que:

$$(I) \quad d_2(\mathcal{P}') \geq d_2(\mathcal{P}) + \varepsilon^5.$$

$$(II) \quad \#\mathcal{P}' \leq k \cdot 2^{k-1}.$$

Ahora, veamos la demostración del teorema. Sea $\mathcal{P}_0 = \{V_0, V_1, \dots, V_m\}$ una partición de G con $\underbrace{|V_0|}_{1 \leq |V_0| \leq m-1} = n - n \lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ y $|V_i| = \lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ para todo $i = 1, \dots, m$. Si \mathcal{P}_0 no

es ε -regular, existe \mathcal{P}_1 refinamiento de \mathcal{P}_0 tal que $d_2(\mathcal{P}_1) \geq d_2(\mathcal{P}_0) + \varepsilon^5$ y

$$|\mathcal{P}_1| \leq m \cdot 2^m.$$

Ahora, obtenemos una equipartición de \mathcal{P}'_1 a partir de \mathcal{P}_1 : particionando cada parte de \mathcal{P}_1 en conjuntos de tamaño

$$\frac{\frac{\varepsilon^6}{2}n}{\#\mathcal{P}_1},$$

y un conjunto despreciable de tamaño $< \frac{\varepsilon^6}{2}n$. En total, el conjunto de los vértices despreciados lo agregamos al *conjunto excepcional* V_0 , es decir, agregamos $< \frac{\varepsilon^6}{2}n$ vértices. Afirmamos que \mathcal{P}'_1 está acotado por arriba por algo que depende de ε y m :

$$\#\mathcal{P}'_1 \leq \frac{n}{\frac{\varepsilon^6}{2}} / \#\mathcal{P}_1 = \frac{2\#\mathcal{P}_1}{\varepsilon^6} \leq \frac{m2^{m+1}}{\varepsilon^6}.$$

Por el primer lema, $d_2(\mathcal{P}'_1) \geq d_2(\mathcal{P}_1) \geq d_2(\mathcal{P}_0) + \varepsilon^5$.

Si no obtenemos una partición ε -regular, entonces continuamos refinando, para así obtener una secuencia de equiparticiones:

$$\mathcal{P}_0, \mathcal{P}'_1, \mathcal{P}'_2, \dots, \mathcal{P}'_k.$$

Como $d(\mathcal{Q}) \leq 1$ para cualquier partición \mathcal{Q} de G , y $d_2(\mathcal{P}_{i+1}) \geq d_2(\mathcal{P}'_i) + \varepsilon^5$, tenemos que $k \leq \varepsilon^{-5}$. Entonces, luego de a lo más ε^{-5} iteraciones, habremos encontrado una partición ε -regular con una cantidad de partes acotada por M que solamente depende de m y ε . Por último, el conjunto excepcional de dicha partición es

$$\leq (m-1) + \frac{\varepsilon^6 n}{2} \varepsilon^{-5} < \varepsilon n.$$

□

Corolario 1.7.11. *Se puede probar el Teorema de Erdős-Stone 1.5.2:*

Dado un grafo H , para todo $\delta > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si G es un grafo con $n \geq n_0$ vértices y

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \delta\right) \frac{n^2}{2},$$

entonces $H \subset G$, donde $r = \chi(H) - 1$.

La idea de la demostración del corolario será la siguiente:

Tomemos $\delta > 0$ arbitrariamente pequeño, aplicamos el Lema de Regularidad de Szemerédi con ε lo suficientemente pequeño y $m > \frac{1}{\varepsilon}$. Así existe $M \in \mathbb{N}$, y obtenemos una equipartición ε -regular

$$V(G) = V_0 \sqcup V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k,$$

con $M \geq k \geq m > \frac{1}{\varepsilon}$, de cualquier grafo G con $|G| \geq M$.

Borramos de G todas las aristas sobre las que “no hay control”:

- (a) Las que ven a V_0 .
- (b) Aristas dentro de las partes V_i con $i \geq 1$.
- (c) Las aristas entre pares no ε -regulares.
- (d) Aristas entre pares no densos, i.e., “tenemos menos que $\delta/2$ densidad”.

Después, obtenemos el grafo reducido R : dado por contraer cada V_i a un vértice w_i con $i \geq 1$, y borrar aristas múltiples. Así, R tiene conjunto de vértices w_1, \dots, w_r donde $w_i w_j \in E(R)$ sii (V_i, V_j) es ε -regular y denso.

Aplicamos lemas de inmersión en “aristas” de grafo - grafo reducido:

$$\text{Si } H \subset R \quad \Rightarrow \quad H \subset G.$$

Lema 1.7.12. *Sea $V_0 \sqcup V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k$ una partición ε -regular de un grafo G de n vértices, con $k \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Entonces, hay un máximo de:*

- (a) εn^2 aristas con un extremo en V_0 .
- (b) εn^2 aristas dentro de una parte V_i con $i \geq 1$.
- (c) εn^2 aristas entre pares (con $i, j \neq 0$) que no son ε -regulares.
- (d) δn^2 aristas entre pares (con $i, j \neq 0$) de densidad $< \delta$.

Demostración. (a) Como $|V_0| \leq \varepsilon n$ entonces hay a lo más

$$\varepsilon n(1 - \varepsilon)n + \binom{\varepsilon n}{2} < \varepsilon n^2 \text{ aristas en (a).}$$

(b) Cada V_i tiene $\leq \frac{n}{k}$ vértices (pues estamos en una equipartición), y entonces hay a lo más $k \cdot \binom{\frac{n}{k}}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} n^2$ aristas para (b).

(c) Hay a lo más εk^2 pares que no son ε -regulares y cada par tiene a lo más $\left(\frac{n}{k}\right)^2$ aristas entre sí. Consecuentemente, aportan a lo más $\varepsilon k^2 \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^2 = \varepsilon n^2$ aristas en (c).

(d) En el peor caso, los $\binom{k}{2}$ pares son poco densos. En este caso, por definición de densidad:

$$e(V_i, V_j) \leq \delta \left(\frac{n}{k}\right)^2, \quad \forall 1 \leq i, j \leq k,$$

y entonces, hay a lo más $\delta \left(\frac{n}{k}\right)^2 \binom{k}{2} \leq \delta n^2$ aristas en pares “poco densos”, i.e., en (d). □

Lema 1.7.13. Sea $\varepsilon > 0$, y sea (A, B) un par ε -regular de un grafo G . Entonces,

$$(d(A, B) - \varepsilon) |B| \leq |N_G(v) \cap B| \leq (d(A, B) + \varepsilon) |B|$$

para todo $v \in A$, salvo a lo más $2\varepsilon |A|$.

Demostración. Consideremos el conjunto $X \subset A$ de los vértices que no cumplen alguna de las dos desigualdades. Probaremos que $|X| < 2\varepsilon |A|$ por el absurdo. Si este no fuera el caso, tendríamos que $|X| \geq 2\varepsilon |A|$ y por lo tanto hay al menos $\varepsilon |A|$ vértices que no cumplen la primera desigualdad o la segunda. Supongamos que estamos en el primer caso, el segundo caso es análogo. Es decir, supongamos que existe un conjunto $X' \subset A$ con $|X'| \geq \varepsilon |A|$ tal que para todo $v \in X'$,

$$(d(A, B) - \varepsilon) |B| > |N_G(v) \cap B|.$$

Sumando en la desigualdad anterior sobre todos los $v \in X'$, tenemos que

$$(d(A, B) - \varepsilon) |B| |A| > e(X', B),$$

por lo tanto $(d(A, B) - \varepsilon) > d(X', B)$, i.e.,

$$|d(A, B) - d(X', B)| > \varepsilon.$$

Consideremos ahora $Y' = B$, en particular $|Y'| \geq \varepsilon |B|$ si $\varepsilon > 0$ es chico. Luego por ε -regularidad del par (A, B) , tenemos que

$$|d(A, B) - d(X', B)| \leq \varepsilon,$$

absurdo. □

Lema 1.7.14 (Slicing). Sea $\alpha \geq \varepsilon > 0$, y sea (A, B) un par ε -regular en un grafo G . Para cualquier $X \subset A, Y \subset B$ con

$$|X| \geq \alpha |A| \quad \text{y} \quad |Y| \geq \alpha |B|$$

se tiene que el par (X, Y) es $\max\{\frac{\varepsilon}{\alpha}, 2\varepsilon\}$ -regular. Además, por ε -regularidad del par (A, B) , se tiene que

$$|d(X, Y) - d(A, B)| \leq \varepsilon.$$

Demostración. La última afirmación es clara. Veamos la primera, para eso consideremos $\varepsilon' = \max\{\frac{\varepsilon}{\alpha}, 2\varepsilon\}$. Sean $Z \subset X$ y $W \subset Y$ tales que $|Z| \geq \varepsilon' |X|$ y $|W| \geq \varepsilon' |Y|$, entonces $|Z| \geq \varepsilon |A|$ y $|W| \geq \varepsilon |B|$. Luego por ε -regularidad del par (A, B) , se tiene que

$$|d(Z, W) - d(A, B)| \leq \varepsilon.$$

Además, por ε -regularidad del par (A, B) , se tiene que

$$|d(X, Y) - d(A, B)| \leq \varepsilon.$$

Juntando ambas desigualdades tenemos que:

$$\begin{aligned} |d(Z, W) - d(X, Y)| &\leq |d(Z, W) - d(A, B)| + |d(X, Y) - d(A, B)| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon \leq 2\varepsilon \leq \varepsilon'. \end{aligned}$$

□

Definición 1.7.15 (Reducido). Dado un grafo H , $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon, \delta > 0$, definimos

$$\mathcal{G}(H, n, \varepsilon, \delta)$$

como la familia de grafos G , tales que existe una equipartición $V(G) = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_l$ con A_i de cardinal n e independiente, y un etiquetamiento de los vértices $V(H) = \{w_1, \dots, w_l\}$ tal que para cada $w_i w_j \in E(G)$, el par (A_i, A_j) es un par ε -regular y además $d(A_i, A_j) \geq \delta$.

Lema 1.7.16 (Lema de inmersión general). Para todo grafo H y todo $\delta > 0$, existen $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$G \in \mathcal{G}(H, n, \varepsilon, \delta), n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad H \subset G.$$

Demostración. Haremos inducción en $|H|$. Cuando $|H| = 1$ es trivial. Supongamos entonces que $|H| \geq 2$. Escribamos $V(H) = \{w_1, \dots, w_l\}$ y sea $V(G) = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_l$ una partición de acuerdo a la definición de $\mathcal{G}(H, n, \varepsilon, \delta)$: (A_i, A_j) ε -regular y $d(A_i, A_j) \geq \delta$ para cada $i \leq l - 1$ tal que $w_i w_l \in E(H)$.

Elijamos ε lo suficientemente pequeño y apliquemos el Lema 1.7.13 a cada (A_i, A_l) con $w_i w_l \in E(H)$: todos, excepto a lo más $2\varepsilon |A_l|$ vértices $v \in A_l$ satisfaciendo:

$$|N_G(v) \cap A_i| \geq (\delta - \varepsilon) \cdot |A_i|$$



Figura 1.7.5

Como $2\epsilon |A_l| (l-1) < n$, existe $v \in A_l$ tal que

$$|N_G(v) \cap A_i| \geq (\delta - \epsilon) |A_i|, \quad \forall i \leq l-1$$

con $w_i w_l \in E(H)$. Definimos

$$\tilde{X}_i = \begin{cases} A_i \cap N_G(v) & \text{si } w_i \in N_H(w_l) \\ A_i & \text{si no,} \end{cases}$$

y por cada \tilde{X}_i construimos un subgrafo X_i , de manera que todos los X_i tengan el mismo cardinal.

Ahora, tomando $\alpha = \delta - \epsilon \geq \epsilon > 0$, podemos aplicar el Lema de Slicing 1.7.14 en X_i, X_j cuando $w_i w_j \in E(H)$ para asegurar que son pares $\max\{\frac{\epsilon}{\delta - \epsilon}, 2\epsilon\}$ -regulares y densidad al menos $\delta - \epsilon$. Luego queremos usar la hipótesis inductiva: sea $H' := H \setminus \{w_l\}$ y $G' := G[\bigcup_{i=1}^{l-1} X_i]$. Así, existen $\epsilon' > 0$ y $n'_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$G' \in \mathcal{G}(H', n', \epsilon', \delta - \epsilon), n' \geq n'_0 \Rightarrow H' \subset G'$$

Con lo cual, si escogemos ϵ tal que $\max\{\frac{2\epsilon}{\delta - \epsilon}, 2\epsilon\} < \epsilon'$ y n_0 lo suficientemente grande, de tal suerte que $(\delta - \epsilon)n_0 \geq n'_0$, tenemos por hipótesis inductiva que $H' \subset G'$. Por lo tanto, $H \subset G$. \square

Lema 1.7.17 (Lema de inmersión aplicable). Sea H un grafo y $\delta > 0$. Defina $r = \chi(H)$. Entonces, existen $\epsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$G \in \mathcal{G}(K_r, n, \epsilon, \delta), n \geq n_0 \Rightarrow H \subset G.$$

Demostración. El Lema 1.7.16 garantiza que para todo $\delta' > 0$ existen ϵ', n'_0 tales que

$$G \in \mathcal{G}(K_r(t), n', \epsilon', \delta'), n' \geq n'_0 \Rightarrow K_r(t) \subset G,$$

donde $t := |H|$. Como $H \subset K_r(t)$, se tiene que en este caso $H \subset G$.

Concluimos gracias al siguiente ejercicio:

Ejercicio 1.7.18.

- (1) Demostrar que para todo $\delta > 0$, $n' \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon' > 0$, existen ε y δ' tales que

$$\mathcal{G}(K_r, n't, \varepsilon, \delta) \subset \mathcal{G}(K_r(t), n', \varepsilon', \delta').$$

- (2) Demostrar que para todo $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ y $n' \in \mathbb{N}$ es lo suficientemente grande, se tiene que si

$$G \in \mathcal{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta) \quad \text{con } n't \leq n < (n' + 1)t,$$

entonces existe un subgrafo $G' \subset G$ tal que $G' \in \mathcal{G}(K_r, n't, 2\varepsilon, \delta - \varepsilon)$.

Solución.

- (1) Tomemos $n = n't$. Fijemos un etiquetamiento $K_r = \{w_1, \dots, w_r\}$ tal que $K_r(t) = \{w_i^j\}_{1 \leq j \leq t}^{1 \leq i \leq r}$ con $w_i^j w_{i'}^{j'} \in E(K_r(t))$ si y solo si $w_i w_{i'} \in E(K_r)$. Entonces si $G \in \mathcal{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta)$, con equipartición $V(G) = \coprod_{i=1}^r V_i$. Se sigue que podemos sub-dividir la partición: cada $V_i = \coprod_{j=1}^t V_i^j$ en otra equipartición con partes de cardinal n' .

Ahora busquemos ε y δ' tales que $G \in \mathcal{G}(K_r(t), n', \varepsilon', \delta')$. Pero si $w_i^j w_{i'}^{j'} \in E(K_r(t))$, entonces $w_i w_{i'} \in E(K_r)$, y por lo tanto el par $(V_i, V_{i'})$ es ε regular y como $|V_i^j| = \frac{1}{t} |V_i|$ para todo $1 \leq j \leq t$, el Lema de Slicing 1.7.14 garantiza que los pares $(V_i^j, V_{i'}^{j'})$ para $1 \leq j, j' \leq t$ son $\max\{t\varepsilon, 2\varepsilon\}$ -regulares si ε es lo suficientemente pequeño, i.e. $\frac{1}{t} > \varepsilon$. En cuanto a la densidad, nuevamente el Lema de Slicing garantiza que

$$d(A_i^j, A_{i'}^{j'}) \geq d(A_i, A_{i'}) - \varepsilon \geq \delta - \varepsilon.$$

Por lo tanto, tomamos $\varepsilon < \min\{\varepsilon'/2, \frac{1}{t}\varepsilon', \frac{1}{t}, \delta/2\}$ y $\delta' = \delta/2$ y funciona.

- (2) Sea $G \in \mathcal{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta)$. Luego $V(G) = V_1 \coprod \dots \coprod V_k$ es una equipartición de G con $|V_i| = n$. Consideremos cualquier subgrafo G' de G dado por quitar a cada conjunto V_i los suficientes elementos tales que los vértices de G' se equiparticionan en partes de tamaño $n't \geq \frac{n'}{n'+1}n = (1 - \frac{1}{n'+1})n = \left(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{t} \rceil}\right)n = \alpha n$, con $\alpha \geq \frac{1}{2}$ para n' lo suficientemente grande (t está fijo). Luego por el Lema de Slicing 1.7.14,

$$G' \in \mathcal{G}(K_r, n't, 2\varepsilon, \delta - \varepsilon).$$

□

En efecto, para todo $\delta > 0$, el primer ítem dice que

$$\mathcal{G}(K_r, n't, \varepsilon, \delta'),$$

para algún ε y todo $n' \geq n'_0$. Luego, por el segundo ítem, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande tal que si

$$G \in \mathcal{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta),$$

entonces existe un subgrafo $G' \subset G$ tal que $G' \in \mathcal{G}(K_r, n't, 2\varepsilon, \delta - \varepsilon)$. Juntando ambas cosas obtenemos que

$$G \in \mathcal{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta), n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad H \subset G.$$

□

Teorema 1.7.19 (Regularidad de Erdős-Stone). *Para todo grafo H con $e(H) \geq 1$ y cada $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que para todo grafo G con $n \geq n_0$ vértices y*

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + 4\delta\right) \frac{n^2}{2},$$

entonces $H \subset G$.

Comentario 1.7.20. Como $\delta > 0$ es arbitrario, podríamos reemplazar 4δ por $\delta' > 0$ arbitrario en el enunciado.

Demostración. Tomamos $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño dado por el Lema de inmersión aplicable 1.7.17, y aplicamos Regularidad 1.7.5 para el caso $m \geq \frac{1}{\varepsilon}$ al grafo G con $r = \chi(H) - 1$ satisfaciendo la hipótesis del enunciado. Obtenemos una partición $V(G) = V_0 \sqcup V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k$ con $m \leq k \leq M$ una equipartición ε -regular. Sea G' el grafo obtenido a partir de G borrando todas “las aristas sobre las que no hay control” con parámetro ε (regularidad) y δ (densidad). Así, tenemos que G' tiene al menos $e(G) - (3\varepsilon + \delta)n^2$ aristas por el Lema 1.7.12. Sea R el “grafo reducido”, se tiene

$$G' \in \mathcal{G}(R, n', \varepsilon, \delta)$$

con $n' := \frac{n - |V_0|}{k}$. Por lo tanto, si $K_{r+1} \subset R$, entonces por el lema de inmersión aplicable 1.7.17 tendríamos que $H \subset G'$. En efecto, quitando algunas particiones de $V(G')$, obtenemos un subgrafo $G'' \subset G'$ tal que $G'' \in \mathcal{G}(K_{r+1}, n', \varepsilon, \delta)$.

Supongamos ahora que $K_{r+1} \not\subset R$. Luego por el Teorema de Turán 1.1.6:

$$e(R) \leq t_r(k) \sim \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{k^2}{2} \quad (k \rightarrow \infty),$$

es decir, achicando ε de ser necesario para que k sea grande y $t_r(k) \leq \left(1 - \frac{1}{r} + \delta\right) \frac{k^2}{2}$. Se tiene que

$$e(G') \leq \left(1 - \frac{1}{r} + \delta\right) \frac{k^2}{2} \cdot \frac{n^2}{k^2} = \left(1 - \frac{1}{r} + \delta\right) \frac{n^2}{2}.$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} e(G) &\leq \left(1 - \frac{1}{r} + \delta\right) \frac{n^2}{2} + 2(3\varepsilon + \delta) \frac{n^2}{2} \\ &= \left(1 - \frac{1}{r} + 6\varepsilon + 3\delta\right) \frac{n^2}{2} \\ &< \left(1 - \frac{1}{r} + 4\delta\right) \frac{n^2}{2}, \end{aligned}$$

absurdo. □

Segunda aplicación del Lema de Regularidad de Szémeredi 1.7.5:

Teorema 1.7.21 (Erdős-Simonovits). *Para todo grafo H , y para todo $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que G es un grafo H -libre con $n \geq n_0$ vértices y*

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} - \delta\right) \frac{n^2}{2},$$

entonces G está $(5\delta n^2)$ -cerca de ser $(\chi(H) - 1)$ -partito.

Comentario 1.7.22. Notar que este enunciado es equivalente al enunciado que vimos antes: 1.5.8.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño (que depende de H y δ). Aplicamos el Lema de Regularidad de Szémeredi 1.7.5 para ε y $m \geq \frac{1}{\varepsilon}$; obtenemos la equipartición ε -regular $V(G) = V_0 \sqcup V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_k$ con $m \leq k \leq M$ para todo grafo con $|G| \geq M$.

Luego consideramos el “grafo reducido” R con parámetros ε y δ , y vértices w_1, \dots, w_k . Sea $r = \chi(H) - 1$. Si $K_{r+1} \subset R$, entonces $H \subset G$ por el Lema de Inmersión aplicable 1.7.17, lo cual nos lleva a una contradicción. Es decir, R es K_{r+1} -libre.

Elijamos $t = 3\delta k^2$. Si $e(R) < t_r(k) - t$, entonces por el Lema 1.7.12, tenemos:

$$\begin{aligned} e(G) &\leq (\delta + 3\varepsilon)n^2 + e(R) \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^2 \\ &< (\delta + 3\varepsilon)n^2 + \left(\left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{k^2}{2} - 3\delta k^2\right) \frac{n^2}{k^2} \\ &= \left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2} + \underbrace{(3\varepsilon - 2\delta)}_{< -\frac{\delta}{2}} n^2 \\ &< \left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2} - \frac{\delta}{2}n^2, \end{aligned}$$

contradicción.

Con lo cual, el Teorema de Estabilidad de Füredi 1.4.4 nos permite suponer que R está t -cerca de ser r -partito. Es decir, hay una r -partición

$$V(R) = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_r$$

con a lo más t aristas dentro de las partes. Utilizando nuevamente el Lema 1.7.12 para acotar las aristas despreciables de la partición de G , y acotando las aristas dentro de las partes de la partición de R , concluimos que es posible borrar a lo más

$$\underbrace{t \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^2}_{\leq 3\delta n^2} + \underbrace{(\delta + 3\varepsilon)n^2}_{\leq 2\delta n^2} \leq 5\delta n^2$$

aristas para obtener una r -partición de G . □

Lema 1.7.23 (Lema de conteo general). *Para todo grafo H , y todo $\delta > 0$, existen $\varepsilon > 0$ y $M \in \mathbb{N}$ tales que si*

$$G \in \mathcal{G}(H, n, \varepsilon, \delta)$$

para algún $n \geq M$, entonces G contiene al menos

$$\frac{\delta^{e(H)} \cdot n^{|H|}}{2}$$

copias de H .

Demostración. Haremos inducción en $|H|$, y de hecho nuestra hipótesis inductiva será más fuerte:

Para todo grafo H , y todo $\delta > 0$, existen $\varepsilon > 0$ y $M \in \mathbb{N}$, tales que si

$$G \in \mathcal{G}(H, n, \varepsilon, \delta)$$

para algún $n \geq M$, y más aún, dada una equipartición $G = V_1 \coprod \cdots \coprod V_l$ indexada según $H = \{w_1, \dots, w_l\}$ con (V_i, V_j) ε -regular y $d(v_i, V_j) \geq \delta$ siempre y cuando que $w_i w_j \in E(H)$, se tiene que hay al menos

$$\frac{\delta^{e(H)} \cdot n^{|H|}}{2}$$

copias de H , de tal forma que los vértices x_j correspondientes a un w_j vía un isomorfismo con H pertenezcan a V_j para todo $j = 1, \dots, l$.

Si $|H| = 1$, la afirmación es inmediata. Si $|H| = 2$ y no tiene aristas también es fácil. Si $|H| = 2$ y $e(H) = 1$, luego basta probar que existen al menos $\delta \frac{n^2}{2}$ aristas en $E(V_0, V_1)$. Pero tomando $\varepsilon < \min\{\delta/4, 1/8\}$, la ε -regularidad del par (V_0, V_1) junto con $d(V_0, V_1)$ implican que existen vértices $v \in V_1$ tales que

$$(\delta - \varepsilon)n \leq |N_G(v) \cap V_0|$$

salvo $2\varepsilon n$ vértices por el Lema 1.7.13. Es decir, $E(V_0, V_1)$ tiene al menos

$$(\delta - \varepsilon)(1 - 2\varepsilon)n^2 \geq \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}\right)\delta n^2 \geq \frac{1}{2}\delta n^2$$

aristas, como queríamos.

En general, supongamos que $|H| \geq 3$. Si $G \in \mathcal{G}(H, n, \varepsilon, \delta)$ para $n \geq M$, entonces $G = V_1 \coprod \cdots \coprod V_l$ con V_i todos de cardinal n y para la escritura $H = \{w_1, \dots, w_l\}$, $w_i w_j \in E(H)$ si y solo si (V_i, V_j) es ε -regular y $d(V_i, V_j) \geq \delta$.

Consideremos $H' = H \setminus \{w_l\}$ y $G' := G \setminus V_l$, entonces $G' \in \mathcal{G}(H', n, \varepsilon, \delta)$ y por hipótesis inductiva existe M' tal que si $n \geq M'$, entonces G' contiene al menos

$$\frac{\delta^{e(H')} \cdot n^{|H'|}}{2}$$

copias de H' , donde cada copia tiene su vértice correspondiente a w_j en la parte V_j para cada $j < l$. Ahora, por el Lema 1.7.13, para todo $v \in V_l$, salvo $2\varepsilon n$ vértices, se tiene que

$$(\delta - \varepsilon)n \leq |N_G(v) \cap V_j|, \quad \forall j < l.$$

Por lo tanto, tenemos al menos $(1 - 2\varepsilon(l - 1))n$ vértices en V_l , cada uno con al menos $(\delta - \varepsilon)n$ vecinos en cada V_j con $j < l$, y por lo tanto, $(\delta - \varepsilon)n(l - 1)$ vecinos en G .

En el peor de los casos, todos los vértices que no son vecinos de v en V_j pertenecen a una de estas copias de H' para cada $j < l$, luego este v forma al menos $\frac{\delta^{e(H')} \cdot n^{l-1}}{2} - (1 - (\delta - \varepsilon))n(l - 1)$ copias de H en G . Es decir, G tiene al menos

$$\left(\frac{\delta^{e(H')} \cdot n^{l-1}}{2} - (1 - (\delta - \varepsilon))n(l - 1) \right) (1 - 2\varepsilon(l - 1))n$$

copias de H , donde cada copia tiene su vértice correspondiente a w_j en la parte V_j para cada $1 \leq j \leq l$. Así, basta probar que tomando $M \gg M'$ y $\varepsilon > 0$ lo suficientemente chico, esta cantidad es $\geq \frac{\delta^{e(H)} \cdot n^l}{2}$.

En efecto, esto equivale a que

$$\left(\frac{\delta^{e(H')} \cdot n^{l-1}}{2} - (1 - (\delta - \varepsilon))n(l-1) \right) (1 - 2\varepsilon(l-1)) \geq \frac{\delta^{e(H)} \cdot n^{l-1}}{2}$$

si y solo si,

$$\frac{\delta^{e(H')} \cdot n^{l-1}(1 - 2\varepsilon(l-1))}{2} - \frac{\delta^{e(H)} \cdot n^{l-1}}{2} \geq (1 - (\delta - \varepsilon))(l-1)(1 - 2\varepsilon(l-1))n.$$

Es decir, hay que probar

$$\left(\delta^{e(H')}(1 - 2\varepsilon(l-1)) - \delta^{e(H)} \right) \frac{n^{l-2}}{2} \geq (1 - (\delta - \varepsilon))(l-1)(1 - 2\varepsilon(l-1)).$$

Pero como $l \geq 3$, se sigue que si $\varepsilon > 0$ es lo suficientemente chico (por ejemplo $\varepsilon < \frac{1 - \delta^{e(H)} - \delta^{e(H')}}{2(l-1)}$), existe M con $M \geq M'$ lo suficientemente grande, tal que si $n \geq M$, el lado izquierdo es más grande que el lado derecho (que no depende de n) pues

$$\left(\delta^{e(H')}(1 - 2\varepsilon(l-1)) - \delta^{e(H)} \right) > 0.$$

□

Apliación 3 del Lema de Regularidad de Szemerédi 1.7.5:

Teorema 1.7.24 (Teorema de Roth). *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ y $A \subset \{1, \dots, n\}$ con $|A| > \varepsilon n$, entonces A contiene una 3-progresión aritmética⁴.*

Lema 1.7.25 (Lema de remoción de triángulos). *Para todo $\alpha > 0$, existe $\beta > 0$ tal que todo grafo G con n vértices y a lo más βn^3 triángulos, puede ser K_3 -libre borrando a lo más αn^2 aristas*

Demostración. Tomemos $0 < \delta < \frac{\alpha}{3}$ y $\varepsilon < \frac{\delta}{9}$ lo suficientemente chico. Aplicamos el Lema de Regularidad de Szemerédi 1.7.5 con parámetros ε y $m \geq \frac{1}{\varepsilon}$, obteniendo una partición de un grafo G con $|G| \geq M \geq k \geq m$,

$$V(G) = V_0 \sqcup V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k.$$

Consideremos el grafo reducido R con parámetros ε y δ . Notar que el subgrafo $G' := G \setminus V_0 \subset G$ cumple que $G' \in \mathcal{G}(R, n', \varepsilon, \delta)$ con $n' \geq \frac{(1-\varepsilon)n}{k} \geq \frac{1-\varepsilon}{M}n$.

Supongamos que R tiene al menos un triángulo K_3 . Entonces G' tiene un subgrafo G'' dado por quedarnos solamente con las partes V_i, V_j, V_k correspondientes a vértices w_i, w_j, w_k que forman un triángulo en R ; en particular, $G'' \in \mathcal{G}(K_3, n', \varepsilon, \delta)$. Aplicando el Lema de conteo general 1.7.23 para $H = K_3$ y el subgrafo $G'' \in \mathcal{G}(H, n', \varepsilon, \delta)$, tenemos que G'' , y por lo tanto G , tiene al menos:

$$\delta^3 \cdot \left(\frac{(1-\varepsilon)n}{k} \right)^3 > \frac{\delta^3 (1-\varepsilon)^3}{2 M^3} \cdot n^3 > \beta n^3$$

⁴En general, una **k -progresión aritmética** es una secuencia de enteros $a, a+d, a+2d, \dots, a+(k-1)d$.

triángulos para n lo suficientemente grande, donde $\beta < \frac{\delta^3 (1-\varepsilon)^3}{2M^3}$. Achicando β de ser necesario, podemos asumir que n es arbitrario.

Con lo cual, si G tiene a lo más βn^3 triángulos, el párrafo anterior nos dice que R no tiene triángulos. Así, al remover $\leq (\delta + 3\varepsilon)n^2 < \alpha n^2$ aristas de G (ver Lema 1.7.12), nos quedamos sin triángulos. \square

Teorema 1.7.26 (Teorema de Roth). *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ y $A \subset \{1, \dots, n\}$ con $|A| > \varepsilon n$, entonces A contiene una 3-progresión aritmética.*

Demostración. Vamos a probar que si A no contiene una 3-progresión aritmética, entonces $|A| = o(n)$.

Sea $\varepsilon > 0$, y n lo suficientemente grande, supongamos que $|A| \geq \varepsilon n$ y que no contiene 3-progresiones aritméticas. Definimos un grafo G con $V(G) = X \sqcup Y \sqcup Z$, disjuntos y $|X| = |Y| = |Z| = 3n$ cada conjunto X, Y, Z es una copia de $\{1, \dots, 3n\}$.

$$E(X, Y) = \{xy \mid x \in X, y \in Y, y = x + a \text{ para algún } a \in A\}.$$

$$E(Y, Z) = \{yz \mid y \in Y, z \in Z, z = y + a \text{ para algún } a \in A\}.$$

$$E(X, Z) = \{xz \mid x \in X, z \in Z, z = x + 2a \text{ para algún } a \in A\}.$$

Si xyz es un triángulo en G , entonces existen $a, a', a'' \in A$ tales que

$$\begin{cases} y = x + a, & a \in A \\ z = y + a', & a' \in A \\ z = x + 2a'', & a'' \in A, \end{cases}$$

y esto es una 3-progresión aritmética $a, a'' = a + (a' - a''), a' = a + 2(a' - a'')$ si a, a', a'' son distintos. Como A no tiene 3-progresiones aritméticas, entonces cada triángulo en G es de la forma xyz con $y = x + a, z = x + 2a$. Lo cual implica que cada triángulo queda completamente determinado por x y a . Consecuentemente G tiene a lo más

$$3n|A| \leq 3n^2 = o(n^3)$$

triángulos.

Por el Lema de Remoción de Triángulos 1.7.25, es posible borrar $o(n^2)$ aristas de G para obtener un grafo libre de triángulos. Ahora, vamos a obtener una cota por abajo de la cantidad de triángulos arista disjunto que tiene G : consideremos el conjunto de tripletas de la forma $(x, x+a, x+2a)$, con $x \in X, a \in A$. Observar que cada tripleta corresponde con un triángulo de G y todos son arista-disjuntos entre sí, por lo tanto G contiene al menos $3n|A| > 3\varepsilon n^2$ triángulos disjuntos y por lo tanto si o si deben ser quitados para que G sea libre de triángulos. Contradiciendo el Lema de Remoción de Triángulos. \square

Capítulo 2

Teoría de Ramsey

Notación 2.0.1. Cuando nos refiramos a una r -**coloración** de un grafo G , será una función $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, r\}$ que a cada arista $e \in E(G)$, le asigna un **color** $c(e)$ (No necesariamente la coloración es *propia*, es decir, pueden existir aristas adyacentes con el mismo color).

Notación 2.0.2. Sea G un grafo con una coloración c . Entonces dado un vértice $v \in V(G)$, podemos considerar los vecinos w de v tales que $c(vw) = i$. Notaremos a este subconjunto de vecinos de v como $N_G^i(v)$, o simplemente $N^i(v)$ cuando el contexto sea claro.

La teoría de Ramsey se motiva mediante el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.0.3. Toda 2-coloración de K_6 genera un triángulo monocromático.

Demostración. Sea $v \in V(K_6)$. Hay al menos 3 aristas incidentes a v que tienen el mismo color, digamos rojo, por el principio del palomar. Si en $N^{\text{rojo}}(v)$ hay aristas rojas, entonces hay un triángulo rojo. Si no, todas las aristas entre vértices de $N^{\text{rojo}}(v)$ son azules. Como, $|N^{\text{rojo}}(v)| \geq 3$, entonces hay un triángulo azul en $K_6[N^{\text{rojo}}(v)]$, y por lo tanto había un triángulo azul en K_6 . \square

Teorema 2.0.4 (Teorema de Ramsey (1930)). *Para todo $k, r \in \mathbb{N}$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que toda r -coloración de K_n genera un K_k monocromático.*

Demostración. Sea $v_1 \in V(K_n)$. Existe algún color $c_1 \in \{1, \dots, r\}$ tal que las aristas incidentes a v_1 de color c_1 son al menos

$$\frac{n-1}{r},$$

escribamos $A_1 := N_{K_n}^{c_1}(v_1)$. Similarmente, sea $v_2 \in K_n[A_1]$, existe un color $c_2 \in \{1, \dots, r\}$ tal que las aristas incidentes a v_2 en $K_n[A_1]$ son de color c_2 y por lo menos hay

$$\frac{|A_1|-1}{r},$$

escribamos $A_2 := N_{K_n[A_1]}^{c_2}(v_2)$. Continuando este procedimiento, para n lo suficientemente grande, obtenemos una secuencia

$$v_1, c_1, v_2, c_2, v_3, c_3, \dots, v_t, c_t,$$

en donde si $t \geq rk$, se sigue que existe un color que se repite al menos k veces en esta secuencia, y por lo tanto, sus vértices v_{i_1}, \dots, v_{i_k} correspondientes forman un K_k monocromático de ese color. \square

Ejercicio 2.0.5. Calcular una cota inferior para n .

Solución. Escribamos a_1, a_2, \dots para la secuencia de cardinales de los conjuntos A_1, A_2, \dots . Inspeccionando la demostración anterior, vemos que $a_1 \geq \frac{n-1}{r}$ y que recursivamente $a_{t+1} \geq \frac{a_t-1}{r}$, $t \geq 1$. Por lo tanto, tenemos que inductivamente:

$$a_{t+1} \geq \frac{n}{r^{t+1}} - \sum_{i=1}^{t+1} \frac{1}{r^i} = \frac{n}{r^{t+1}} - \frac{1}{r} \frac{1-r^{t+1}}{1-r}, \quad t \geq 0.$$

Con lo cual, si $t \geq rk$ como en la demostración de arriba, se sigue que

$$n \geq a_{rk} \geq \frac{n}{r^{rk}} - \frac{1}{r} \frac{1-r^{rk}}{1-r},$$

y consecuentemente,

$$n \geq \frac{r^{rk}-1}{1-r}.$$

□

2.1. Números de Ramsey

Definición 2.1.1. El número de Ramsey $R(k)$, es el mínimo n tal que cualquier 2-coloración de K_n contiene una copia monocromática de K_k .

Ejemplo 2.1.2. En el Ejemplo 2.0.3 vimos que $R(3) \leq 6$. Pero de hecho, es fácil encontrar una 2-coloración de K_5 que no contiene triángulos monocromáticos, y por lo tanto, $R(3) = 6$:

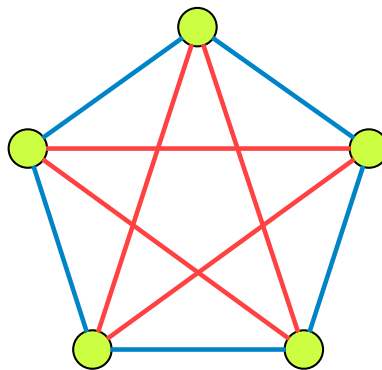


Figura 2.1.1: 2-coloración de K_5 libre de triángulos monocromáticos.

Definición 2.1.3. Sean G , H_1 y H_2 grafos, escribimos $G \rightarrow (H_1, H_2)$ si toda 2-coloración de G con rojo-azul de $E(G)$ contiene una copia de H_1 rojo o una copia de H_2 azul.

Para $s, t \in \mathbb{N}$ definimos

$$R(s, t) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid K_n \rightarrow (K_s, K_t)\}.$$

(En particular, $R(k) = R(k, k)$).

Teorema 2.1.4 (Erdős-Szekeres (1935)). *Para todo $k \geq 1$, se tiene que*

$$R(k) \leq \binom{2k-2}{k-1} \leq \frac{4^{k-1}}{\sqrt{\pi(k-1)}}.$$

Demostración. La segunda desigualdad se deduce de una aplicación inmediata de las desigualdades probadas en [Rob55]. Concentrémonos en la primera desigualdad, y de hecho, probaremos una versión un poco más general:

$$R(s, t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}.$$

Notar que tomando $s = t = k$ se prueba la primera desigualdad del teorema.

Para eso, necesitamos un lema previo:

Lema 2.1.5. *Para todo $s, t \geq 2$, se tiene*

$$R(s, t) \leq R(s-1, t) + R(s, t-1).$$

Demostración. En efecto, sea c una coloración de $E(K_n)$ con $n = R(s-1, t) + R(s, t-1)$. Queremos probar que hay una copia roja de K_s o una copia azul de K_t . Sea $v \in K_n$, entonces hay dos casos:

Caso 1: Existen al menos $R(s-1, t)$ aristas rojas incidentes a v , o

Caso 2: Existen al menos $R(s, t-1)$ aristas azules incidentes a v .

En cualquier caso extendemos completos monocromáticos en el vecindario de v a un K_s rojo o un K_t azul, respectivamente. \square

Ahora, probemos la desigualdad por inducción en $s+t$, el caso base es $R(1, t) = R(s, 1) = 1$. En general, si $\min\{s, t\} \geq 2$, tenemos que por el lema de arriba

$$\begin{aligned} R(s, t) &\leq R(s-1, t) + R(s, t-1) \\ &\leq \binom{s+t-3}{s-2} + \binom{s+t-3}{s-1} = \binom{s+t-2}{s-1}. \end{aligned}$$

\square

Observación 2.1.6. Existe una cota inferior muy mala, para valores de k grandes, del número de Ramsey:

$$R(k) \geq 2(k-1), \quad k \geq 2.$$

Demostración. Supongamos $k > 3$, pues el caso $k = 2$ es trivial.

En efecto, sea $n = 2(k-1)$, entonces particionando los vértices de K_n en dos conjuntos A_1, A_2 de tamaño $k-1$, y pintando las aristas de $K_n[A_1]$ y $K_n[A_2]$ de azul, pero las aristas entre A_1 y A_2 de rojo, obtenemos una coloración libre de K_k monocromáticos. En efecto, si existiera un K_k monocromático, entonces no puede ser azul porque cada A_i tiene $k-1$ vértices; por otro lado no puede ser rojo porque en una partición hay al menos un vértice y en otra al menos 2 (estamos en el caso $k > 3$), digamos en A_1 y A_2 respectivamente, entonces en $K_n[A_2]$ debería haber una arista color rojo, absurdo. \square

El siguiente teorema confirma que la cota anterior es *muy poco óptima*.

Teorema 2.1.7 (Erdős (1947)).

$$R(k) \geq 2^{k/2}, \quad \forall k \geq 2.$$

Demostración. Consideremos K_n con $n = \lceil 2^{k/2} \rceil$ y supongamos que $k \geq 6$, notar que los casos $k = 2, \dots, 5$ valen por la cota de la Observación anterior 2.1.6 (que es mejor para k chico).

Tenemos exactamente

$$2^{\binom{n}{2}}$$

2-coloraciones de $E(K_n)$. Vamos a mostrar que la cantidad de 2-coloraciones de $E(K_n)$ que contienen a K_k monocromático es $< 2^{\binom{n}{2}}$. Para eso, notar que en este caso tenemos $\binom{n}{k}$ formas de elegir una copia de K_k y luego $2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2} + 1}$ formas de colorear el resto de las aristas. Por lo tanto, la cantidad de 2-coloraciones que contienen un K_k monocromático es menor o igual que

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2} + 1} &\leq \left(\frac{en}{k} \right)^k 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2} + 1} \\ &\leq \left(\frac{e(2^{k/2} + 1)}{k} \right)^k 2^{-\frac{k(k-1)}{2}} 2 \cdot 2^{\binom{n}{2}}, \end{aligned}$$

pero notar que si $k \geq 6$, entonces

$$\left(\frac{e(2^{k/2} + 1)}{k} \right)^k 2^{-\frac{k(k-1)}{2}} \cdot 2 \leq \left(\frac{2^{k/2} + 1}{2} \right)^k 2^{-\frac{k(k-1)}{2}} \cdot 2 < 1,$$

de donde se sigue lo que queríamos. En efecto, se puede realizar un estudio cualitativo de la función para $k \in \mathbb{R}_{\geq 6}$ utilizando cálculo elemental. \square

Definición 2.1.8. En general, el **número de Ramsey con r colores** $R_r(k)$ es el mínimo n tal que todo r -coloreo de K_n tiene un K_k monocromático.

Teorema 2.1.9. Para todo $r \geq 2$, se tiene que

$$2^r \leq R_r(3) \leq 3 \cdot r!.$$

Demostración. Primero veamos la cota inferior, para eso consideremos $n := 2^r$ y encontraremos una r -coloración de K_n sin triángulos monocromáticos. Haremos inducción en r , si $r = 2$ vale, pues podemos considerar la siguiente coloración:

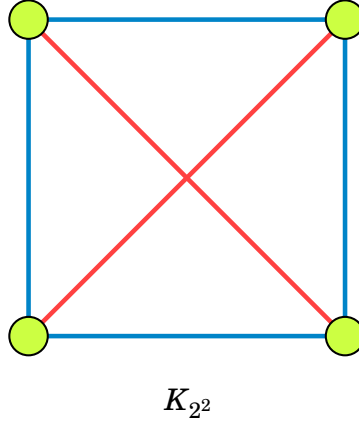


Figura 2.1.2

Para el paso inductivo, consideremos una partición en dos partes de 2^{r-1} vértices, donde el conjunto A y el B tienen $(r-1)$ -coloraciones sin triángulos monocromáticos, por hipótesis inductiva, y luego pintamos las aristas entre A y B de color r que nunca fue utilizado.

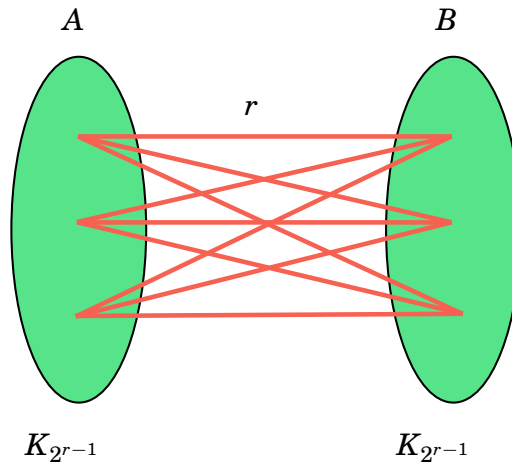


Figura 2.1.3

Ahora veamos la cota superior. En el Ejemplo 2.0.3 vimos que $R_2(3) \leq 6 = 3 \cdot 2!$, así vale el caso $r = 2$. Supongamos ahora que $r \geq 3$, y que $n = 3 \cdot r!$, sea $v_0 \in K_n$ fijo, y c una r -coloración de K_n . Entonces existe un color $i \in \{1, \dots, r\}$ tal que

$$E_i^0 = |\{uv_0 \in K_n \mid c(uv) = i\}| \geq \frac{3 \cdot r!}{r} = 3 \cdot (r-1)!$$

y sea $A := N_{K_n}^i(v_0)$. Pueden ocurrir dos casos:

Caso 1: El color i aparece en una arista de $K_n[A]$, luego tenemos un triángulo de color i .

Caso 2: En $K_n[A]$ no aparece el color i , entonces la coloración c inducida en $K_n[A]$ es una $(r-1)$ -coloración, con lo cual por hipótesis inductiva existe un triángulo monocromático en $K_n[A]$, en particular en K_n .



Figura 2.1.4: Ilustración del Caso 1.

□

Definición 2.1.10. El **número de Ramsey de H_1 versus H_2** está definido por:

$$r(H_1, H_2) = \min\{n \mid K_n \rightarrow (H_1, H_2)\}.$$

En particular, escribimos $r(H) := r(H, H)$.

Teorema 2.1.11.

$$r(K_3, P_k) = 2k + 1.$$

Demostración. Primero acotaremos por abajo: sea $n = 2k$, consideramos la siguiente coloración de K_n :



Figura 2.1.5

Particionamos K_n en dos partes de k vértices cada una y pintamos las aristas de color azul, y las aristas entre ambas particiones las pintamos de rojo. Claramente no hay caminos de longitud k de color azul porque las particiones tienen k vértices y no hay triángulos rojos porque las aristas rojas inducen un grafo bipartito.

Para la cota superior, consideremos K_n con $n = 2k + 1$. Sea P un camino maximal de color azul; supongamos que $|V(P)| \leq k$ y entonces $B := V(K_n) \setminus V(P)$ tiene al menos $k + 1$ vértices. Sea v_0 un extremo de P , por maximalidad v_0 está conectado a cada vértice de B por aristas rojas. Tenemos dos casos:

Caso 1: Si en $K_n[B]$ hay aristas rojas entonces hay un triángulo de color rojo (con un vértice v_0).

Caso 2: Si en $K_n[B]$ no hay aristas rojas, entonces todas las aristas son azules y por lo tanto hay una copia de K_{k+1} azul, y por lo tanto contiene a P_k de color azul. □

Teorema 2.1.12. Sea T_k un árbol con k aristas (i.e., $k + 1$ vértices). Entonces

$$r(K_3, T_k) = 2k + 1.$$

Demostración. Para la primera desigualdad se puede aplicar un razonamiento similar a la demostración del teorema anterior. Veamos entonces solo la cota superior.

Sea $n = 2k + 1$ y consideremos K_n con una coloración. Supongamos entonces que existe un vértice v de grado rojo al menos $k + 1$. Entonces la vecindad $N^{\text{rojo}}(v)$ induce un K_{k+1} que si tiene alguna arista roja entonces existe un triángulo rojo en K_n , y si no, K_n contiene un K_{k+1} con aristas azules y en particular contiene un T_k azul.



Figura 2.1.6

Ahora, supongamos que todo vértice tiene grado rojo $\leq k$. Esto implica que el grado mínimo del subgrafo azul inducido es $\geq k$, y por lo tanto el Lema 1.3.2 nos permite encontrar una copia de T_k en el subgrafo azul inducido, en particular K_n tiene una copia azul de T_k . □

Teorema 2.1.13 (Chvátal (1977)). Sea T_k un árbol con k aristas, y sea $s \geq 2$. Entonces

$$r(K_{s+1}, T_k) = s \cdot k + 1.$$

Demostración. Primero veamos la cota inferior: sea $n = s \cdot k$, consideremos la siguiente coloración de K_n : el grafo azul consiste de s copias de K_k y las aristas rojas son las aristas entre los vértices de las copias de K_k .



Figura 2.1.7

Para la cota superior, haremos inducción en $s \geq 2$. Si $s = 2$, tenemos que $r(K_3, T_k) \leq 2k + 1$ por el teorema anterior. Supongamos ahora que $s \geq 3$. Sea $n = s \cdot k + 1$. Sea v un vértice con grado rojo $\geq (s - 1)k + 1$, y sea A la vecindad roja de v . Por hipótesis inductiva en $K_n[A]$, hay una copia de K_s rojo, o una copia de T_k azul y ganamos. Así, podemos asumir que el grado rojo de cada vértice es $\leq (s - 1)k$. Esto implica que el grafo azul tendrá grado mínimo $\geq (s \cdot k + 1) - 1 - (s - 1)k \geq k$. Con lo cual contiene una copia de T_k por el Lema 1.3.2. \square

Teorema 2.1.14. Para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$r(P_k) = \left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil.$$

Demostración. Veamos primero la cota inferior. Sea $n := \left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil - 1$. Consideremos un K_k azul en K_n y escribamos A al conjunto de sus vértices; el resto de las aristas las pintamos de rojo. Notar que $B := V(K_n) \setminus V(K_k)$ cumple

$$|B| < \frac{k}{2}.$$

Así, K_n no tiene un P_k azul. Veamos que tampoco tiene un rojo:

Tomemos un camino rojo P , luego no puede tener dos vértices adyacentes de A (pues $K_n[A]$ es un completo azul). Por lo tanto en el peor de los casos P tiene $|B|$

vértices de B tales que entre cada par consecutivo de estos hay un vértice de A . O sea,

$$|P| \leq 2|B| + 1 < k + 1.$$

Es decir, tampoco tiene un P_k rojo.



Figura 2.1.8: Ilustración de esta situación.

Veamos ahora la cota superior. Vamos a probar un resultado un poco más general haciendo inducción en k :

Sea $k \geq l \geq 1$ y sea $n = k + \lceil \frac{l}{2} \rceil$, entonces

$$K_n \longrightarrow (P_k, P_l)$$

Notar que el caso $k = l$ implica la cota superior.

Consideremos una coloración de K_n . Sea P un camino rojo maximal y supongamos que $|P| \leq k$. Por maximalidad, cada extremo forma aristas azules con cada vértice de $V(G) \setminus V(P)$.

Nuestro caso base es $1 \leq l \leq k \leq 3$, donde vale la afirmación:



Figura 2.1.9

Ahora veamos el paso inductivo. Supongamos que $4 \leq l < k$. Por hipótesis inductiva, tenemos que $K_n \longrightarrow (P_{k-1}, P_l)$ y por lo tanto sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe un $(k-1)$ -camino rojo en K_n , digamos $P = v_1 v_2 \cdots v_k$. Escribamos $U := V(K_n) \setminus V(P)$; sabemos que $|U| = \lceil \frac{l}{2} \rceil$. Notemos lo siguiente:

(I) Las aristas entre v_1, v_k y U son azules.

(II) Para cada par de vértices consecutivos $v_i v_{i+1}$ en P y cada $u \in U$, existe una arista azul en $\{v_i u, v_{i+1} u\}$, pues de lo contrario habríamos encontrado un P_k rojo.

Sean Q_1 y Q_2 caminos azules vértice-disjuntos de longitud impar (i.e., cantidad par de vértices) que alternan vértices de v_2, \dots, v_k y U . Tomemos Q_1 maximal, y sujeto a esto, tomemos Q_2 maximal. Por paridad de la longitud de Q_1 y Q_2 , ambos tienen exactamente un extremo en U , digamos x e y , respectivamente. Tenemos dos casos:

Caso 1: Q_1 y Q_2 cubren U , es decir, $U \subset Q_1 \cup Q_2$. Con lo cual, podemos construir un l -camino azul considerando $Q_1 x v_1 y Q_2$. Luego supongamos que estamos en:

Caso 2: Existe $z \in U \setminus (Q_1 \cup Q_2)$.

Observemos que $v_k \in Q_1$, de lo contrario podríamos extender Q_1 con las aristas azules $v_k z$ y $v_k x$. Notemos que $Q_1 \cup Q_2$ contiene a lo más $|U| - 1$ vértices de P , y

$$|U| - 1 < \frac{k-1}{2}.$$

Con lo cual, en $\{v_2, \dots, v_{k-1}\}$ hay $\frac{k-1}{2} - 2 < \lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor$ vértices de $Q_1 \cup Q_2$. Así, existe un par de vértices consecutivos v_i, v_{i+1} con $2 \leq i \leq k-2$ tales que $v_i, v_{i+1} \notin Q_1 \cup Q_2$. Sin embargo, por el ítem (ii), existen existen dos aristas azules entre v_i o v_{i+1} y alguno de los siguientes conjuntos: $\{x, y\}$; $\{y, z\}$; o $\{x, z\}$. Esto contradice la maximalidad de Q_1 y Q_2 , ya que podríamos extender algunos de estos caminos, y por ende el caso 2 no puede ocurrir.

Finalmente veamos el caso $k = l \geq 4$. Por hipótesis inductiva, tenemos que $K_n \longrightarrow (P_k, P_{k-1})$ y y por simetría se tiene $K_n \longrightarrow (P_{k-1}, P_k)$. Con lo cual, existe un $(k-1)$ -camino rojo, digamos $P_r = v_1 \cdots v_k$, y un $(k-1)$ -camino azul, digamos $P_a = w_1 \cdots w_k$. Si alguno de estos caminos se pudiera extender monocromáticamente habríamos terminado, con lo cual supongamos que son maximales monocromáticos. Notar que por maximalidad, debe ser que $\{v_1, v_k\} = \{w_1, w_k\}$, de lo contrario podríamos extender monocromáticamente alguno de los dos caminos; digamos que $v_1 = w_1$ y $v_k = w_k$.

Ahora bien, tenemos que

$$n = k + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \geq |V(P_r) \cup V(P_a)| = |V(P_r)| + |V(P_a)| - |V(P_r) \cap V(P_a)| = 2k - |V(P_r) \cap V(P_a)|.$$

Consecuentemente, $|V(P_r) \cap V(P_a)| \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil$. Hay dos opciones:

Opción 1: $|V(P_r) \cap V(P_a)| > \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. En este caso existe $z \in V(K_n) \setminus (V(P_r) \cup V(P_a))$, y por lo tanto $z v_1 = z w_1$ es una arista de color rojo o azul, y en cualquier caso podemos extender P_r o P_a monocromáticamente, contradiciendo la maximalidad de los caminos.

Opción 2: $|V(P_r) \cap V(P_a)| = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. En este caso $P_r \cup P_a = K_n$ y de hecho, deben existir dos vértices interiores consecutivos de P_r , digamos $v_i v_{i+1}$ con $1 < i < k$, tales que no son vértices de P_a ; similarmente, existen dos vértices interiores consecutivos de P_a , digamos $w_j w_{j+1}$ con $1 < j < k$, tales que no son vértices de P_r .

Más aún, la arista $v_1 v_k = w_1 w_k$ es de color rojo o azul, digamos rojo (el otro caso es análogo). Con lo cual, tenemos un ciclo rojo $C_r := v_1 P_r v_k v_1$ de longitud k , y por lo tanto, podemos suponer que todas las aristas incidentes a C_r tienen que ser azules, si no habríamos encontrado un k -camino rojo. Pero luego las aristas $w_j v_i$ y $w_{j+1} v_i$ son azules, y podemos alargar P_a a un k -camino azul:

$$w_1 \cdots w_j v_i w_{j+1} \cdots w_k,$$

contradiciendo la maximalidad de P_a . Como hemos agotado todos los casos, se concluye la demostración. \square

2.2. El problema con un final feliz

Proposición 2.2.1 (El problema de E. Klein (1930)). *Para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $n = n(k) \in \mathbb{N}$ tal que dados n puntos en posición general del plano (i.e. no hay 3 puntos colineales). Entonces el conjunto de puntos contiene k puntos en posición convexa.*

Demostración del caso $k = 4$ y $n = 5$. Ella probó este caso¹. Consideramos la cápsula convexa de los 5 puntos, si los vértices son 4 o 5 de estos puntos ya ganamos, si no, existen dos puntos que están contenidos en el interior del triángulo convexo (formado por 3 de estos puntos como vértices). Luego simplemente consideramos la recta que une a estos dos puntos interiores, la cual interseca a dos lados distintos del triángulo, y por lo tanto hay 4 puntos en posición convexa:



\square

El caso general se resolvió utilizando el *Teorema de Ramsey Generalizado*, que enunciamos luego de algunas definiciones:

¹El cual fue bautizado como “El problema con un final feliz” por Paul Erdős, debido a que llevó al casamiento de George Szekeres y Esther Klein.

Notación 2.2.2. Dado $n \in \mathbb{N}$, notamos al conjunto $[n] := \{1, \dots, n\}$.

Notación 2.2.3. Sea A un conjunto arbitrario, y $s \in \mathbb{N}$, notamos al conjunto:

$$\binom{A}{s} := \{S \subset A \mid |S| = s\}.$$

Definición 2.2.4. Una r -**coloración de subconjuntos** de $[n]$ de tamaño s , es una función

$$c : \binom{[n]}{s} \longrightarrow \{1, \dots, r\}.$$

Diremos que $A \in \binom{[n]}{s}$ es **monocromático** (respecto de c), si $c(S) = c(S')$ para todo $S \in \binom{A}{s}$.

Teorema 2.2.5 (Teorema de Ramsey Generalizado). *Para todo $k, r, s \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que toda r -coloración de $\binom{[n]}{s}$ contiene un conjunto monocromático de tamaño k .*

Comentario 2.2.6. Nosotros probamos el caso K_n en lugar de $\binom{[n]}{s}$ con $s = 2$ y K_k monocromático.

Continuación de la demostración del problema de E. Klein. Falta probar el caso $k \geq 5$. Tomemos una coloración rojo-azul c del conjunto $\binom{[n]}{4}$. Y coloreemos $c(S)$ de rojo si y solo si los puntos de S están en posición convexa. Por el Teorema de Ramsey Generalizado 2.2.5, existe n tal que $B \subset [n]$ es monocromático y $|B| = k$. Hay dos casos:

Caso 1: B es rojo, y por lo tanto todos los subconjuntos de tamaño 4 de B tienen color rojo, i.e., están en posición convexa. Ahora, los puntos de B están en posición convexa, de lo contrario, podríamos encontrar un punto de B en el interior de un triángulo con vértices de B (notar que esto vale por no-colinealidad: trazamos las diagonales entre vértices del polígono convexo; el punto no puede estar en ninguna de estas rectas, i.e., está dentro de un triángulo), absurdo.

Caso 2: B es azul, como $k \geq 5$, por el resultado preliminar de Klein, existen 4 puntos en posición convexa, absurdo.

□

Teorema 2.2.7 (Seidenberg). *Toda secuencia de $k^2 + 1$ números reales contiene una subsecuencia monótona de largo $k + 1$.*

Demostración. Sea a_1, \dots, a_n una secuencia de números reales con $n = k^2 + 1$. Para cada $i \in [n]$, definimos un par:

$$(x_i, y_i),$$

donde x_i es el largo de la subsecuencia no decreciente más larga que termina en a_i ; y_i es el largo de la subsecuencia no creciente más larga que termina en a_i .

Para $i \neq j$, veamos que $(x_i, y_i) \neq (x_j, y_j)$. Para eso, sin pérdida de generalidad, supongamos que $i < j$. Tenemos dos casos:

Caso 1: $a_i \leq a_j$. Aquí se tiene que $x_i < x_j$.

Caso 2: $a_j \leq a_i$. Aquí se tiene que $y_i < y_j$.

Ahora por contradicción, si $x_i, y_i \leq k$ para todo $i \in [n]$, entonces hay a lo más k^2 pares distintos, sin embargo $n = k^2 + 1$, por lo que hay al menos un par repetido, absurdo. \square

El siguiente ejercicio dice que el teorema anterior es preciso:

Ejercicio 2.2.8. Encontrar secuencia de números reales de largo k^2 sin subsecuencias monótonas de largo $k + 1$.

Teorema 2.2.9 (Chrátal, Rödl, Szemerédi & Trotter (1983)). *Para todo $\Delta \in \mathbb{N}$, existe una constante $c = c(\Delta) > 0$ tal que todo grafo H con $\Delta(H) \leq \Delta$, satisface*

$$r(H) \leq c(\Delta) \cdot |H|.$$

En particular, para $n \geq c(\Delta) \cdot |H|$, toda 2-coloración de K_n contiene un H monocromático.

Demostración. La idea será aplicar el Lema de Regularidad de Szemerédi 1.7.5 y el siguiente lema de inmersión:

Lema 2.2.10 (Un lema de inmersión). *Dados $d \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ y $\gamma > 0$ tales que si $n \in \mathbb{N}$ y H es un grafo con $\Delta(H) \leq d$ y $|H| \leq \gamma n$, entonces*

$$G \in \mathcal{G}(K_{d+1}, n, \varepsilon, \delta) \implies H \subset G.$$

Sea $\Delta > 0$ y H con $\Delta(H) \leq \Delta$. Aplicamos este lema de inmersión con $d = \Delta$ y $\delta = \frac{1}{2}$, y obtenemos parámetros ε y γ , tales que se cumple la conclusión del enunciado. Consideremos K_n con $n \geq c(\Delta) \cdot |H|$ donde $c(\delta)$ es lo suficientemente grande.

Tomemos una coloración con rojo y azul de K_n , y sean G_r y G_a los subgrafos inducidos de color rojo y azul, respectivamente. Sea $m := r(K_{d+1})$. Aplicamos el Lema de Regularidad de Szemerédi 1.7.5 en G_r con parámetro m y ε . Obtenemos una partición ε -regular

$$V(G_r) = V_0 \sqcup V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k,$$

con $m \leq k \leq M$. Notar que esta partición también es ε -regular para G_a **TAREA**.

Sea R el grafo reducido con parámetros ε y densidad 0 (no nos interesa la densidad). Entonces,

$$e(R) \geq \binom{k}{2} - \varepsilon k^2 > t_{m-1}(k) = \left(1 - \frac{1}{m-1} + o(1)\right) \frac{k^2}{2} \quad (k \rightarrow 1),$$

y por lo tanto el Teorema de Turán 1.1.6, $R \supset K_m$. Sean ahora A_1, \dots, A_m las partes que corresponden a los vértices de K_m en R . Vamos a definir una 2-coloración f de las aristas de K_m :

$$f(ij) = \text{rojo} \iff d_{G_r}(V_i, V_j) \geq \frac{1}{2}.$$

Como $m = r(K_{d+1})$, existe un K_{d+1} rojo o azul, sin pérdida de generalidad suponemos que es rojo en K_m . Reindexando los A_i , podemos suponer que A_1, \dots, A_{d+1} corresponden a las partes de K_{d+1} de K_m . El grafo inducido

$$G' = G_r[A_1 \cup \dots \cup A_{d+1}]$$

satisface que $G' \in \mathcal{G}(K_{d+1}, n', \varepsilon, \delta)$, con

$$n' = |V_1| = \cdots, |V_k| \geq \frac{n}{M}.$$

Así, elegimos $c = c(\Delta)$ suficientemente grande (en particular, $c \geq M/\gamma$), entonces

$$|H| \leq \frac{n}{c(\Delta)} \leq \frac{\gamma n}{M} \leq \gamma n',$$

con lo cual se tiene la conclusión del teorema por el lema de inmersión de arriba. \square

Capítulo 3

El método probabilístico

En 1959, Erdős probó que *para todo entero k existe un grafo G con $g(G) > k$ y $\chi(G) > k$* . El enfoque que tomó fue definir un espacio de probabilidad en el conjunto de grafos con n vértices, y probar que para una medida de probabilidad adecuada, la probabilidad de que un grafo con n vértices cumpla ambas condiciones es positiva para n lo suficientemente grande. A esta técnica se le llama el **método probabilístico**, y será el eje central de este capítulo.

3.1. Fundamentos

Definición 3.1.1. Un **espacio probabilístico** es un par (Ω, P) , donde Ω se denomina **espacio muestral** y P la **función probabilística**, la cual cumple

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1,$$

y $P(\omega) \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$. A los subconjuntos $A \subset \Omega$, los llamamos **eventos**, y definimos la cantidad

$$P(A) := \sum_{\omega \in A} P(\omega),$$

i.e., la **probabilidad de que suceda el evento A** .

Daremos ahora las propiedades básicas de un espacio probabilístico, cuyas demostraciones se ven en cualquier curso introductorio de probabilidad:

Proposición 3.1.2. Sea (Ω, P) un espacio de probabilidad. Entonces:

(1) Para todo evento $A \subset \Omega$

$$P(A) = 1 - P(\Omega \setminus A).$$

(2) Si $A \subset B \subset \Omega$, luego $P(A) \leq P(B)$.

(3) Sean $A, B \subset \Omega$, luego tenemos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

(4) Para una familia $A_1, \dots, A_r \subset \Omega$, tenemos que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Definición 3.1.3. Una **distribución uniforme** (discreta), es un espacio probabilístico (Ω, P) tal que $P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$. Si $A \subset \Omega$, entonces $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Definición 3.1.4. Sean $A, B \subset \Omega$, decimos que A y B son **eventos independientes** o simplemente **independientes** si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Más generalmente, sean $A_1, \dots, A_n \subset \Omega$, decimos que son **independientes dos a dos**, si A_i y A_j son independientes para cada $i \neq j$. Por otro lado, decimos que A_1, \dots, A_n son **mutuamente independientes** si

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i).$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, podemos construir un espacio probabilístico $\mathcal{G} := \mathcal{G}(n, p) := (\Omega, P)$, donde Ω es el conjunto de grafos con conjunto de vértices $V := [n]$, y para cada posible arista e , la probabilidad de que e pertenezca a $E(G)$ para $G \in \Omega$ es p , y estos eventos son independientes para distintas aristas $e \neq e'$. Más precisamente, los eventos $A_e := \{G \in \Omega \mid e \text{ es arista de } G\}$ con distintos e , son mutuamente independientes. Llamaremos a G un **grafo aleatorio**. (Se puede encontrar una construcción formal en el Capítulo 11 de [?]).

Ejemplo 3.1.5. Dado un grafo fijo H con k vértices y m aristas, consideremos el evento: G contiene a H como subgrafo. La probabilidad de que este evento suceda, es

$$\prod_{e \in H} P(A_e) = p^m.$$

Similarmente, la probabilidad de que H sea un subgrafo inducido de G es $p^m(1-p)^{\binom{k}{2}-m}$, pues ahora hay que considerar que las aristas que no están en H tampoco pueden estar en G (evento independiente).

Teorema 3.1.6 (Erdős 1947). *Para todo $k \geq 3$, se tiene que $R(k) > 2^{k/2}$.*

Demostración. Sea $n = 2^{k/2}$. A cada arista uv de K_n , asignémosle la probabilidad $P(uv) = \frac{1}{2}$ de que sea color rojo, y lo mismo color azul. El objetivo es probar de que el evento de que haya un coloreo sin K_k monocromático en K_n tiene medida positiva, de aquí se seguirá la demostración. (Notar que estamos trabajando en el espacio probabilístico (Ω, P) , con espacio muestral $\prod_{uv \in E(K_n)} \{\text{rojo}, \text{azul}\}$ y los eventos con aristas distintas son independientes.)

Para cada $A \subset V(K_n)$ de tamaño k , tenemos que

$$P(A \text{ monocromático}) = 2^{-\binom{k}{2}} + 2^{-\binom{k}{2}} = 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{\binom{n}{k}} A_i\right) &\leq \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} P(A_i) \\
&= \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} \\
&\leq \frac{n^k}{k!} 2^{1-k^2/2+k/2} \\
&= \frac{2^{1+k/2}}{k!} < 1.
\end{aligned}$$

□

Definición 3.1.7. Un **hipergrafo k -uniforme** H , es una estructura compuesta por vértices y aristas, donde las aristas son conjuntos de k -vértices.

Definición 3.1.8. Decimos que un hipergrafo H es **bicolor**, si es posible colorear los vértices con dos colores, de tal manera que no hay aristas con vértices monocromáticos.



Figura 3.1.1: Bicoloración de un 3-hipergrafo H con vértices v_1, v_2, v_3, v_4 y aristas $e_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $e_2 = \{v_2, v_3, v_4\}$, $e_3 = \{v_1, v_2, v_4\}$.

Teorema 3.1.9 (Erdős 1963). Sea H un hipergrafo k -uniforme con m aristas. Si $m < 2^{k-1}$, entonces H es bicolor.

Demostración. Sea H un hipergrafo k -uniforme. Consideramos un coloreo de cada vértice vértice con color rojo o azul, de forma independiente con probabilidad $\frac{1}{2}$. Consideremos $A \in E(H)$, luego

$$P(A \text{ monocromático}) = 2^{1-k}.$$

Escribamos A_i con $i \in [m]$ para los vértices de cada una de las m aristas de H . Luego

$$P\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) \leq \sum_{i=1}^m P(A_i) = m \cdot 2^{1-k} < 1.$$

□

Definición 3.1.10. Un **torneo** T es un grafo dirigido tal que su grafo subyacente no tiene aristas paralelas.

Dado un conjunto $S \subset V(T)$ y un vértice $u \in V(T)$, escribimos $u \rightarrow S$ si $(u, v) \in E(T)$ para todo $v \in S$.

Decimos que T tiene **la propiedad** \mathcal{T}_k , si para todo $S \subset V(T)$ de tamaño k , existe un $u \in V(T) \setminus \{S\}$ tal que $u \rightarrow S$.

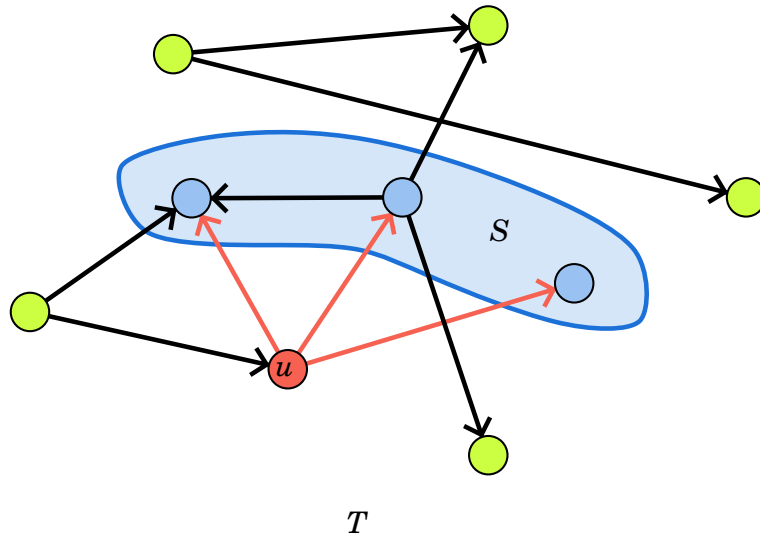


Figura 3.1.2: Ejemplo de un torneo T con conjunto $S \subset V(T)$ y $u \in V(T)$ tal que $u \rightarrow S$.

Teorema 3.1.11 (Erd s 1963). Si $n \geq k^2 2^{k+1}$, entonces existe un torneo T con n vértices con la propiedad \mathcal{T}_k .

Demostración. Consideremos un torneo aleatorio T con n vértices y para cada par u, v escogemos $uv \in E(T)$ o $vu \in E(T)$ de forma independiente con probabilidad $\frac{1}{2}$. Consideremos un conjunto $S \subset V(T)$ con tamaño k . Para todo $u \in V(T) \setminus S$

$$P(u \rightarrow S) = 2^{-k}.$$

Consideremos A_S como el evento de que todo $u \in V(T) \setminus S$ no se cumpla que $u \rightarrow S$. Luego

$$P(A_S) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n-k} \{u_i \not\rightarrow S\}\right) = \prod_{i=1}^{n-k} P(\{u_i \not\rightarrow S\}) = (1 - 2^{-k})^{n-k}$$

por independencia de eventos. Ahora

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\binom{n}{k}} A_{S_i}\right) \leq \binom{n}{k} \cdot P(A_S) = \binom{n}{k} (1 - 2^{-k})^{n-k} \leq \frac{n^k}{k!} e^{-(n-k)/2^k} \leq n^k e^{-n/2^k}.$$

donde usamos que $1 + x \leq e^x$ y que $e^{k/2^k}/k! < 1$. Finalmente, notar que se puede escribir el lado derecho como $n^k e^{-n/2^k} = e^{k \log n - n/2^k}$. Por lo tanto, basta ver que $k \log n < n/2^k$, equivalentemente

$$k2^k < n/\log n,$$

para probar que la probabilidad del lado izquierdo de la desigualdad de arriba es menor que 1. Este es el caso, pues el lado derecho es creciente en n y se cumple la desigualdad para $n = k^2 2^{k+1}$. \square

3.2. Esperanza

Definición 3.2.1. Dado un espacio probabilístico $\mathcal{G} = (\Omega, P)$, una **variable aleatoria** (en \mathcal{G}) es una función

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

La **esperanza** o **promedio** de X es la cantidad

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{G \in \Omega} P(\{G\}) \cdot X(G).$$

Notación 3.2.2. Si $X : \mathcal{G} \rightarrow [0, +\infty)$ es una variable aleatoria en un espacio probabilístico, dada una proposición lógica A , notamos

$$P(X \text{ cumple la propiedad } A) = P(\{G \in \Omega \mid X(G) \text{ cumple la propiedad } A\}).$$

En particular, $P(X \geq a) := P(X^{-1}([a, +\infty)))$, $P(X < b) := P(X^{-1}([0, b)))$, $P(X = c) := P(X^{-1}(\{c\}))$, etc.

También diremos que X cumple la propiedad A **salvo probabilidad cero**, si

$$P(G \in \Omega \mid X(G) \text{ no cumple } A) = 0.$$

Por ejemplo, $X \geq a$, $X < b$, $X = c$, salvo probabilidad cero, si respectivamente

$$P(X \geq a) = P(X < b) = P(X = c) = 0.$$

Observación 3.2.3. 1. Notar que cuando X toma valores enteros, podemos calcular la esperanza de manera alternativa:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 1} P(X \geq k) = \sum_{k \geq 1} k \cdot P(X = k).$$

2. Sea \mathcal{H} un conjunto fijo de grafos en V . Y sea X la variable aleatoria tal que $X(G)$ es la cantidad de grafos $H \in \mathcal{H}$ que son subgrafos de G . Entonces la esperanza de X tiene dos maneras distintas de calcular (observación útil para utilizar argumentos de “conte doble”):

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{G \in \mathcal{G}} \#\{H \in \mathcal{H} \mid H \subset G\} \cdot P(\{G\}) = \sum_{H \in \mathcal{H}} P(G \in \Omega \mid G \supset H).$$

Las siguientes propiedades son fáciles de demostrar:

Proposición 3.2.4. Dadas variables aleatorias $X, Y \geq 0$ de un espacio probabilístico $G = (\Omega, P)$, y sea $a \geq 0$. La esperanza cumple las siguientes propiedades:

- (I) **Positividad:** $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
- (II) **Linealidad:** $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$, y $\mathbb{E}(a \cdot X) = a\mathbb{E}(X)$.
- (III) **Monotonicidad:** Si $X \leq Y$, salvo probabilidad cero, entonces $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.
- (IV) Si $\mathbb{E}(X) = 0$, entonces el conjunto $B := \{G \in \Omega \mid X(G) \neq 0\}$ tiene probabilidad 0.
- (V) Si $X = Y$, salvo probabilidad cero, entonces $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$.

Estas propiedades nos permiten calcular la esperanza de una variable aleatoria como ilustra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.2.5. El promedio de k -ciclos en $G \in \mathcal{G}(n, p)$ es

$$\mathbb{E}(X) = \frac{p^k}{2k} \prod_{r=0}^{k-1} n - r.$$

Demostración. Consideremos la familia de k -ciclos \mathcal{C}_k en \mathcal{G} . Entonces dado $C \in \mathcal{C}_k$ podemos considerar la variable aleatoria **función indicadora**:

$$X_C : \mathcal{G}(n, p) \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$G \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } C \subset G, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Notar que

$$\mathbb{E}(X_C) = P(X_C = 1) = P(G \in \mathcal{G}(n, p) \mid G \supset C) = p^k.$$

Por otro lado, sea X la variable aleatoria tal que $X(G)$ es la cantidad de ciclos $C \in \mathcal{C}_k$ contenidos en G . Entonces

$$X = \sum_{C \in \mathcal{C}_k} X_C.$$

Por linealidad (3.2.4),

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{C \in \mathcal{C}_k} \mathbb{E}(X_C) = \sum_{C \in \mathcal{C}_k} P(G \supset C) = |\mathcal{C}_k| p^k.$$

Finalmente, como por cada elección de k distintos vértices en V hay $2k$ maneras distintas de formar un k -ciclo en \mathcal{G} , tenemos que

$$|\mathcal{C}_k| = \frac{1}{2k} \prod_{r=0}^{k-1} n - r,$$

de donde concluimos. □

Una desigualdad útil que nos dice que la probabilidad de que X valga “mucho más respecto del promedio” es baja:

Lema 3.2.6 (Desigualdad de Markov). Sea $X : \mathcal{G} \rightarrow [0, +\infty)$ una variable aleatoria y $a > 0$. Entonces

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Demostración.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{G \in \mathcal{G}} P(\{G\}) \cdot X(G) \geq \sum_{\substack{G \in \mathcal{G} \\ X(G) \geq a}} P(\{G\}) \cdot a = P(X \geq a) \cdot a.$$

□

3.3. Método del primer momento

Definición 3.3.1. Decimos que una variable aleatoria X **sigue una distribución de Bernoulli con parámetro** $p \in [0, 1]$, si $P(X = 1) = p$ y $P(X = 0) = 1 - p$. (Notar que $\mathbb{E}(X) = p$).

Definición 3.3.2. Dadas variables aleatorias $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, decimos que son **independientes**, si para cualquier $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, los eventos $\{X_i = x_i\}$ con $i = 1, \dots, n$ son mutuamente independientes.

Proposición 3.3.3. Sean X_1, X_2 variables aleatorias independientes, entonces

$$\mathbb{E}(X_1 \cdot X_2) = \mathbb{E}(X_1) \cdot \mathbb{E}(X_2)$$

Definición 3.3.4. Una variable aleatoria binomial X con parámetros n y p es la suma de n variables aleatorias mutuamente independientes de Bernoulli con parámetro p . (Notar que en este caso se tiene $\mathbb{E}(X) = np$).

Proposición 3.3.5. Sea X una variable aleatoria. Si $\mathbb{E}(X) \geq t$, entonces

$$P(X \geq t) > 0.$$

Teorema 3.3.6. Todo grafo G tiene un subgrafo bipartito $H \subset G$ tal que

$$e(H) \geq \frac{e(G)}{2}.$$

Demostración. Consideremos un conjunto aleatorio $A \subset V(G)$, obtenido escogiendo a cada vértice $v \in V(G)$ de forma aleatoria e independiente con probabilidad $\frac{1}{2}$. Sea $B = V \setminus A$ y consideremos el subgrafo H con conjunto de vértices A y B , y aristas $E(H) = \{uv \in E(G) \mid u \in A, v \in B\}$. Para $uv \in E(G)$, definamos la variable aleatoria X_{uv} tal que $X_{uv}(H) = 1$ si $uv \in E(H)$ o $X_{uv}(H) = 0$ si no. Se tiene que

$$\mathbb{E}(X_{uv}) = P(\{uv \in E(H)\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Consideremos la variable aleatoria e tal que $e(H)$ que devuelve la cantidad de aristas de H . Como $e = \sum_{uv \in E(G)} X_{uv}$, se sigue que

$$\mathbb{E}(e) = \mathbb{E}\left(\sum_{uv \in E(G)} X_{uv}\right) = \sum_{uv \in E(G)} \mathbb{E}(X_{uv}) = \frac{e(G)}{2}.$$

Finalmente, por la Proposición 3.3.5, $P(e \geq \frac{e(G)}{2}) > 0$, i.e., tiene que existir un subgrafo H de G bipartito tal que $e(H) \geq \frac{e(G)}{2}$. □

Teorema 3.3.7 (Szele). *Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un torneo T con n vértices y al menos $\frac{n!}{2^{n-1}}$ caminos dirigidos Hamiltonianos (caminos que pasan por todas los vértices).*

Demostración. Consideremos el espacio probabilístico de torneos T con vértices en $[n]$, es decir, el espacio de grafos aleatorios con vértices $[n]$ tales que si uv es una arista la orientamos de manera aleatoria en cada dirección con probabilidad $\frac{1}{2}$, de manera independiente del resto de las aristas. Tenemos la variable aleatoria X tal que $X(T)$ es el número de caminos hamiltonianos en T . Para cada permutación $\sigma : [n] \rightarrow [n]$, definimos X_σ como la variable aleatoria indicadora del evento

$$\{\sigma(1), \dots, \sigma(n) \text{ es un camino Hamiltoniano en } T\}.$$

Ahora,

$$\mathbb{E}(X_\sigma) = P(\sigma(1), \dots, \sigma(n) \text{ es un camino Hamiltoniano en } T) = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Así,

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{\sigma} X_\sigma\right) = \frac{n!}{2^{n-1}}.$$

Con lo cual la Proposición 3.3.5 concluye el teorema. \square

Dado un grupo abeliano \mathcal{A} . Diremos que $A \subset \mathcal{A}$ es *libre de suma*, si no existen tres elementos $x, y, z \in A$ tales que $x + y = z$. Por ejemplo, podemos considerar $\mathcal{A} = \mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, para un primo p .

Teorema 3.3.8 (Erdős). *Sea A un conjunto de n números enteros positivos, entonces existe $B \subset A$ libre de suma tal que $|B| > \frac{n}{3}$.*

Demostración. Tomemos un número primo $p = 3k + 1$ suficientemente grande, por ejemplo $p > 2 \max A$. Sea $\mathbb{Z}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, y consideremos $C := \{i \in \mathbb{N} | k < i \leq 2k + 1\}$. Luego $|C| = k + 1 > \frac{p-1}{3}$. Luego C es libre de suma en \mathbb{Z}_p .

Tomemos $t \in \mathbb{Z}_p^\times$ de manera aleatoria y uniforme (probabilidad $\frac{1}{p-1}$). Sea $Y = t \cdot A$ mód p , notemos que para $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ tenemos la variable aleatoria Z tal que $Z(t)$ indica si $a \in Y$ o no con 1 o 0 respectivamente. Notar que

$$P(Z) = P(a \in Y) = \frac{\#A}{p-1},$$

pues $a \in Y$ si y solo si $at^{-1} \in A$ mód p , si y solo si, $t^{-1} \in a^{-1}A$ mód p , además, A mód p es un conjunto de $\#A$ elementos y multiplicar por un elemento de \mathbb{Z}_p^\times e invertir son biyecciones. Consecuentemente,

$$\mathbb{E}(\#Y \cap C) = \sum_{a \in C} P(a \in Y) = \frac{\#A \cdot \#C}{p-1} > \frac{\#A}{3} = \frac{n}{3}.$$

Luego por la Proposición 3.3.5 existe $t_0 \in \mathbb{Z}_p^\times$, tal que $\#Y \cap C \geq \frac{n}{3}$.

Así, el conjunto $B := \{a \in A | t_0 a \text{ mód } p \in C\}$ funciona. En efecto, por cómo lo tomamos, $|B| > \frac{n}{3}$, y es libre de suma: si $a, b, c \in B$ son tales que

$$a + b = c,$$

luego

$$t_0 a + t_0 b = t_0 c \text{ mód } p,$$

pero esto es imposible pues C es libre de suma. \square

Teorema 3.3.9. *Para cada grafo G se tiene que*

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{1 + d_G(v)}.$$

Demostración. Sea $n = |G|$, identifiquemos los vértices de G con $[n]$, y consideremos el espacio probabilístico de funciones biyectivas $\sigma : [n] \rightarrow [n]$ escogidas de manera aleatoria y uniforme. Sea

$$A = \{v \in V(G) \mid \sigma(v) < \min_{w \in N_G(v)} \sigma(w)\},$$

notemos que A es un conjunto independiente. Afirmamos que $P(v \in A) = \frac{1}{1+d(v)}$ para cualquier $v \in G$. En efecto, dado $v \in G$, consideremos el conjunto $X := \{x_0, \dots, x_d\}$, donde $x_0 = v$ y x_1, \dots, x_d son los $d := d_G(v)$ vecinos de v en G , entonces tenemos la variable aleatoria Y , tal que $Y(\sigma) = \min_{0 \leq i \leq d} \{\sigma(x_i)\}$, luego notar que

$$1 = \sum_{i=0}^d P(\sigma \mid Y(\sigma) = \sigma(x_i)) = (d+1)P(\sigma \mid Y(\sigma) = \sigma(x_0)),$$

pues todas las probabilidades que aparecen son iguales: la probabilidad es uniforme y por simetría los eventos tienen todos la misma cardinalidad. Como la probabilidad del extremo derecho es justamente $P(v \in A)$, concluimos la afirmación.

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}(\#A) = \sum_{v \in V(G)} P(v \in A) = \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{1 + d_G(v)},$$

con lo cual la Proposición 3.3.5 prueba el teorema. \square

3.4. Erdős-Rényi

Definición 3.4.1. Sea $p_n \in [0, 1]$. Diremos que un evento E_n en $\mathcal{G}(n, p_n)$ tiene **probabilidad alta**, si

$$P(E_n) \longrightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Teorema 3.4.2 (Erdős-Rényi). *Sea $p_n \in (0, 1)$. Entonces el evento*

$$\alpha(G) \leq \frac{2 \log n}{p_n}, \quad G \in \mathcal{G}(n, p),$$

tiene probabilidad alta.

Demostración. Sea $G \in \mathcal{G}(n, p_n)$. Dado $S \subset V(G)$ de tamaño k . Entonces

$$P(e(G[S]) = 0) = (1 - p_n)^{\binom{k}{2}}.$$

Luego, por la desigualdad de la unión,

$$\begin{aligned} P(\alpha \geq k) &\leq \binom{n}{k} (1 - p_n)^{\binom{k}{2}} \\ &\leq \left(\frac{en}{k} \cdot (1 - p_n)^{\frac{k-1}{2}} \right)^k \\ &\leq \left(\frac{en}{k} \cdot e^{-\frac{p_n(k-1)}{2}} \right)^k. \end{aligned}$$

Si $p_n k \geq 2 \log(n)$, i.e., $k \geq \frac{2 \log n}{p_n}$, luego

$$\begin{aligned} \frac{e \cdot e^{\log(n)}}{k} \cdot e^{\frac{-p_n(k-1)}{2}} &\leq \frac{e^{1+\log n - \log n + \frac{p_n}{2}}}{k} \\ &\leq \frac{e^{1+p_n/2}}{k} \\ &\leq \frac{e^{\frac{3}{2}}}{k} \leq \frac{5}{k}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos tomar $k = k(n)$ de tal forma que

$$P(\alpha \geq k) \leq \left(\frac{5}{k}\right)^k \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty).$$

En consecuencia,

$$P(\alpha < \frac{2 \log n}{p_n}) \leq P(\alpha < k) \rightarrow 1, \quad (n \rightarrow \infty).$$

□

Corolario 3.4.3. Sea $p_n \in (0, 1)$. Entonces

$$\chi(G) \geq \frac{np_n}{2 \log n}, \quad G \in \mathcal{G}(n, p_n)$$

con probabilidad alta.

Demostración. Sea c una $(\chi(G) = k)$ -coloración de los vértices, y sean las partes A_1, \dots, A_k de cada color. Entonces

$$n = \sum_{i=1}^k |A_i| \leq \sum_{i=1}^k \alpha(G) = \chi(G) \cdot \alpha(G).$$

Consecuentemente,

$$\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)} \geq \frac{np_n}{2 \log n}$$

con probabilidad alta por el teorema anterior.

□

3.4.1. Método de alteración

Teorema 3.4.4. Si G es un grafo con $n \in \mathbb{N}$ vértices y $d(G) := d := 2 \frac{v(G)}{e(G)}$, entonces

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{2d}.$$

Demostración. Sea $p \in (0, 1)$ (que no depende de n). Sea A un conjunto aleatorio escogiendo vértice de $V(G)$ con probabilidad p de forma independiente. Luego $\#A \sim \text{Bin}(n, p)$, y

$$\mathbb{E}(\#A) = np.$$

Además, para cada $uv \in E(G)$,

$$P(uv \in E(G[A])) = P(\{u \in A\} \cap \{v \in A\}) = P(u \in A) \cdot P(v \in A) = p^2.$$

Con lo cual, la aditividad de la esperanza implica:

$$\mathbb{E}(e(G[A])) = e(G)p^2.$$

Ahora, notemos que

$$\mathbb{E}(|A| - e(G[A])) = pn\left(1 - \frac{pd}{2}\right).$$

Por la Proposición 3.3.5,

$$P\left(\left\{A \mid |A| - e(G[A]) \geq pn\left(1 - \frac{pd}{2}\right)\right\}\right) > 0,$$

en particular existe un conjunto A de vértices de G tal que,

$$|A| - e(G[A]) \geq pn\left(1 - \frac{pd}{2}\right),$$

y el lado de la derecha se maximiza cuando $p = \frac{1}{d}$; nos queda:

$$|A| - e(G[A]) \geq \frac{n}{2d}.$$

Tomemos ahora el subconjunto A' de A , donde por cada arista $e \in E(G[A])$, quito un extremo en e de A . Por construcción A' es un conjunto independiente de G , y además

$$|A'| \geq \frac{n}{2d}.$$

De aquí deducimos la desigualdad del teorema. \square

Como bien ilustra la demostración anterior, el *método de alteración* es la técnica de obtener un conjunto A que no cumple exactamente la propiedad que buscábamos, pero “alterándolo” a un conjunto A' , se obtiene lo que queríamos.

Teorema 3.4.5 (Erdős). *Para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \geq n_0$, existe un grafo G con n vértices y*

$$\chi(G) \geq k \quad \text{y} \quad g(G) \geq k.$$

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo. Consideremos $\mathcal{G} = \mathcal{G}(n, p_n)$ con $p_n := n^{-1+\varepsilon}$, donde $\varepsilon := \frac{1}{k}$. Consideremos la variable aleatoria X_i en \mathcal{G} que cuenta el número de ciclos de longitud $3 \leq i \leq k-1$; luego la variable aleatoria $X := \sum_{i=3}^{k-1} X_i$ cuenta el número de ciclos de longitud a lo más $k-1$. Notar que existen a lo más n^i ciclos distintos que se pueden formar con los vértices del espacio muestral \mathcal{G} , luego, como X_i es la suma de las variables aleatorias indicadoras de los ciclos C_r de longitud i ,

$$\mathbb{E}(X_i) = \sum_r (G \supset C_r) \leq \sum_{r=1}^{n^i} p^i = n^i p^i.$$

Así,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=3}^{k-1} \mathbb{E}(X_i) \leq \sum_{i=3}^{k-1} n^i p^i = \sum_{i=3}^{k-1} n^{\varepsilon i} < kn^{\varepsilon(k-1)}.$$

Con lo cual, la desigualdad de Markov 3.2.6 implica que

$$P(X \geq \frac{n}{2}) \leq \frac{2}{n} \mathbb{E}(X) \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Entonces $X < \frac{n}{2}$ con probabilidad alta.

Ahora, por el teorema anterior,

$$\alpha(G) \leq \frac{2 \log n}{p_n} = 2n^{1-\varepsilon} \log n, \quad G \in \mathcal{G}$$

con probabilidad alta. Consecuentemente, existe G en n vértices y a lo más $\frac{n}{2}$ ciclos de tamaño menor que k . Removiendo $\frac{n}{2}$ vértices, uno por cada ciclo, obtenemos G' tal que $v(G') \geq \frac{n}{2}$ y $g(G') \geq k$. Por otro lado,

$$\alpha(G') \leq \alpha(G) \leq 2n^{1-\varepsilon} \log n,$$

con lo cual,

$$\chi(G') \geq \frac{v(G')}{\alpha(G')} \geq \frac{n^\varepsilon}{4 \log n} > k,$$

para todo n lo suficientemente grande. \square

Antes, observemos que podemos interpretar el número de Ramsey $R(3, k)$ como el mínimo n tal que todo grafo G con n vértices libre de triángulos satisface $\alpha(G) \geq k$. En efecto, si $n = R(3, k)$, podemos considerar el grafo completo K_n , e incrustar G en K_n pintando las aristas de G de color rojo, y las aristas de su complemento \bar{G} de azul. Si G es libre de triángulos, K_n es libre de K_3 -rojo, pero entonces tiene un K_k -azul por definición de número de Ramsey, equivalentemente, \bar{G} contiene un K_k , i.e., G tiene un conjunto de k -vértices independientes.

Teorema 3.4.6. *Existe $c > 0$ tal que*

$$R(3, k) \geq \left(\frac{ck}{\log k} \right)^{\frac{3}{2}},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande.

Demostración. Tomemos $n_k := \left(\frac{k}{4 \log k} \right)^{\frac{3}{2}}$. Consideremos $\mathcal{G} = \mathcal{G}(n_k, p_{n_k})$ con $p_{n_k} := n_k^{-\frac{2}{3}}$. Notar que $p_{n_k} k = 4 \log k$. El teorema anterior dice que

$$\alpha(G) \leq \frac{2 \log n_k}{p_{n_k}} < k, \quad G \in \mathcal{G}$$

con probabilidad alta ($k \rightarrow \infty$).

Sea X la variable aleatoria en \mathcal{G} tal que $X(G)$ es el número de triángulos de G . Tenemos que

$$\mathbb{E}(X) = \binom{n_k}{3} p_{n_k}^3 \leq \frac{n_k^3}{6} p_{n_k}^3 = \frac{n_k}{6}.$$

Luego por la desigualdad de Markov 3.2.6,

$$P(X \geq \frac{n_k}{2}) \leq \frac{2}{n_k} \mathbb{E}(X) \leq \frac{1}{3}.$$

Por lo tanto, para k lo suficientemente grande, existe un grafo G con n_k vértices y $\alpha(G) < k$, que contiene a lo más $\frac{n_k}{2}$ triángulos. Y quitando a lo más $\frac{n_k}{2}$ vértice de G por cada triángulo, obtenemos un grafo G' con $\alpha(G') < k$, libre de triángulos y $v(G') \geq \frac{n_k}{2}$. Es decir, la constante $c = 1/2^{\frac{8}{3}}$ funciona. \square

3.5. Método del segundo momento

Definición 3.5.1. La **varianza** de una variedad aleatoria X está dada por

$$\text{Var}(X) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2).$$

Además, definimos la **desviación estándar**:

$$\sigma(X) := \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

Tenemos las siguientes propiedades de la varianza:

Proposición 3.5.2. Dada una variable aleatoria X , se tiene que:

1. $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.
2. $\text{Var}(cX) = c^2 \text{Var}(X)$ para toda constante $c \in \mathbb{R}$.
3. Si X_1, \dots, X_n son variables aleatorias independientes, entonces

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n).$$

Proposición 3.5.3 (Desigualdad de Chebyshev). Sea X una variable aleatoria y $\lambda > 0$ una constante. Entonces

$$P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \lambda) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\lambda^2}.$$

En particular, tomando $\lambda := t\sigma(X)$ para $t > 0$,

$$P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t\sigma(X)) \leq \frac{1}{t^2}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \lambda) &= P(|X - \mathbb{E}(X)|^2 \geq \lambda^2) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}{\lambda^2} \\ &= \frac{\text{Var}(X)}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Donde la desigualdad sale de la Desigualdad de Markov 3.2.6. □

Dado $A \subset \mathbb{N}$, denotamos por $\Sigma(A)$ al conjunto de todas las sumas posibles de elementos de A . Notemos que

$$\#\Sigma(A) \leq 2^{\#A}.$$

Diremos que A tiene *sumas distintas*, si

$$\#\Sigma(A) = 2^{\#A}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $A \subset [n]$. ¿Cuál será la máxima cardinalidad $f(n)$ tal que A tiene sumas distintas?

Sea $A := \{2^i \mid 0 \leq i \leq \log_2 n\} \subset [n]$. Entonces $\#A \geq 1 + \lfloor \log_2(n) \rfloor$ y todas las sumas son distintas, con lo cual

$$f(n) \geq 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor.$$

Teorema 3.5.4. Para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$f(n) \leq \log_2 n + \frac{1}{2} \log_2 \log_2 n + O(1).$$

Demostración. Consideremos $A = \{a_1, \dots, a_m\} \subset [n]$ con sumas distintas. Tomemos X_1, \dots, X_m variables aleatorias independientes con $X_i \sim \text{Ber}(\frac{1}{2})$. Se sigue que $\text{Var}(X_i) = \frac{1}{4}$. Sea $X := \sum_{i=1}^m a_i X_i$; escribamos $\mu := \mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^m a_i \mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m a_i$; similarmente, $\text{Var}(X) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^m a_i^2 \leq \frac{n^2 m}{4}$, por lo tanto $\sigma(X) \leq \frac{n\sqrt{m}}{2}$.

Tomemos $t > 1$, por la desigualdad de Chebyshev 3.5.3,

$$P(|X - \mu| \geq \underbrace{\frac{tn\sqrt{m}}{2}}_{\geq t\sigma(X)}) \leq \frac{1}{t^2}.$$

Con lo cual,

$$P(|X - \mu| < \frac{tn\sqrt{m}}{2}) \geq 1 - t^{-2}.$$

Notar que

$$P(X = x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \Sigma(A) \\ 2^{-m} & \text{si } x \in \Sigma(A). \end{cases}$$

Luego

$$P(|X - \mu| < \frac{tn\sqrt{m}}{2}) \leq \frac{tn\sqrt{m} + 1}{2^m},$$

porque las sumas son distintas. Juntando esta desigualdad con la anterior, tenemos que

$$\Omega\left(\frac{2^m}{\sqrt{m}}\right) = \frac{(1 - t^2)2^m - 1}{t\sqrt{m}} \leq n.$$

Concluamos ahora a partir de esto que

$$m \leq \log_2 n + \frac{1}{2} \log_2 \log_2 n + O(1),$$

y por lo tanto $f(n) \leq \log_2 n + \frac{1}{2} \log_2 \log_2 n + O(1)$ como queríamos.

En efecto, la cantidad se maximiza cuando tomamos $t = \sqrt{3}$ (de todas formas no es necesario tomar este t , cualquier t sirve). Tomando logaritmo, nos queda

$$\begin{aligned} \log_2 n &\geq \log_2 \left(2^m \cdot \frac{2}{3} - 1\right) - \frac{1}{2} (\log_2 m + \log_2 3) \\ &\geq \log_2 2^{m-2} - \frac{1}{2} (\log_2 m + \log_2 3) \\ &= m - 2 - \frac{1}{2} \log_2 m - \frac{1}{2} \log_2 3. \end{aligned}$$

Como $\log_2 m \leq m$,

$$\log_2 n \geq \frac{m}{2} - 2 - \frac{1}{2} \log_2 3 \geq \frac{m}{4}$$

para m lo suficientemente grande. En particular,

$$\log_2 \log_2 n + 2 \geq \log m$$

para m grande. Así, usando esta cota para acotar el $\log m$ en la desigualdad de arriba, nos queda

$$\begin{aligned} m &\leq \log_2 n + \frac{1}{2} \log_2 m + \log_2 \sqrt{3} + 2 \\ &\leq \log_2 n + \frac{1}{2} \log_2 \log_2 n + 3 + \log_2 \sqrt{3} \\ &= \log_2 n + \frac{1}{2} \log_2 \log_2 n + O(1). \end{aligned}$$

□

Conjetura 3.5.5. Erdős ofreció una pequeña recompensa para la persona que pruebe

$$f(n) \leq \log_2 n + O(1).$$

Sean A_1, \dots, A_t eventos en un espacio probabilístico (Ω, p) , escribamos $X_i := \mathbb{1}_{A_i}$ para las variables aleatorias indicadoras respectivas. Vamos a utilizar el símbolo $i \sim j$ si solo si A_i y A_j no son independientes. Consideremos $X := X_1 + \dots + X_t$. Luego

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^t \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i) \mathbb{E}(X_j) \\ &\leq \sum_{i \sim j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i=1}^t \mathbb{E}(X_i) \\ &= \mathbb{E}(X) + \Delta. \end{aligned}$$

Proposición 3.5.6. Sean A_1, \dots, A_t eventos en (Ω, p) , $X_i := \mathbb{1}_{A_i}$ y $X := X_1 + \dots + X_t$. Si $\mathbb{E}(X) \rightarrow +\infty$ y $\Delta = o(\mathbb{E}(X)^2)$, entonces

$$X > 0$$

con probabilidad alta.

Demostración. Por Chebyshev 3.5.3,

$$\begin{aligned} P(X = 0) &\leq P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \frac{\mathbb{E}(X)}{2}) \\ &\leq \frac{4 \text{Var}(X)}{\mathbb{E}(X)^2}. \end{aligned}$$

Entonces, como

$$\frac{\text{Var}(X)}{\mathbb{E}(X)^2} \leq \frac{1}{\mathbb{E}(X)} + \frac{\Delta}{\mathbb{E}(X)^2} = o(1).$$

Por lo tanto $X > 0$ con probabilidad alta. □

Teorema 3.5.7. Sea $\mathcal{G} = \mathcal{G}(n, \frac{1}{2})$. Entonces

$$\alpha(G) = (2 + o(1)) \log_2 n, \quad G \in \mathcal{G}$$

con probabilidad alta.

Demostración. Fijemos $k \in [n]$, el conjunto de vértices de \mathcal{G} , y tomemos S un subconjunto de vértices con k elementos. Consideremos la variable aleatoria indicadora X_S para el evento $e(G[S]) = 0$; escribamos $X := \sum_{S \subset [n], |S|=k} X_S$. Luego

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{S \subset [n], |S|=k} \mathbb{E}(X_S) = \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}}.$$

Notar que $X > 0$ implica $\alpha(G) \geq k$.

(I) $X = 0$ si $k > (2 + \varepsilon) \log_2 n$.

(II) $X > 0$ si $k < (2 - \varepsilon) \log_2 n$.

En efecto,

(I)

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &\leq \mathbb{E}(X) \\ &= \binom{n}{k} 2^{-k(k-1)/2} \\ &\leq \left(n \cdot 2^{-(k-1)/2} \right)^k \\ &\leq \left(n \cdot n^{-1-\frac{\varepsilon}{2}} \cdot \sqrt{2} \right)^k \\ &= n^{-\frac{\varepsilon}{2} \cdot k} (\sqrt{2})^k \\ &= o(1). \end{aligned}$$

(II)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \binom{n}{k} \cdot 2^{-\binom{k}{2}} \\ &\geq \left(\frac{n}{k} \right)^k \cdot 2^{-\binom{k}{2}} \\ &\geq \left(\frac{n}{k} \right)^k \cdot n^{-k(1-\varepsilon/2)} \\ &\geq \left(\frac{n}{k} \right)^k \cdot \frac{1}{n^{k(1-\varepsilon/2)}} \end{aligned}$$

Que tiene a infinito cuando n tiende a infinito, de manera uniforme para k .

Si $\Delta = \sum_{S \sim T} P(X_S X_T \geq 1)$ con S, T subconjuntos de vértices de tamaño k ; $2 \leq |S \cap T| \leq k-1$. Así

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{i=2}^{k-1} \binom{n}{k} \binom{k}{i} \binom{n-k}{k-i} 2^{\binom{i}{2} - 2\binom{k}{2}} \\ &= \mathbb{E}(X)^2 \sum_{i=2}^{k-1} g(i), \end{aligned}$$

donde $g(i) := \frac{\binom{n-k}{k-i} \binom{k}{i} 2^{\binom{i}{2}}}{\binom{n}{k}} = o(n^{-1})$. Consecuentemente,

$$\frac{\Delta}{\mathbb{E}(X)^2} = \sum_{i=2}^{k-1} g(i) = o(kn^{-1}) = o(1),$$

y por lo tanto con probabilidad alta $X > 0$. □

Corolario 3.5.8. Sea $\mathcal{G} = \mathcal{G}(n, \frac{1}{2})$. Entonces

$$\chi(G) \leq \left(\frac{1}{2 + o(1)} \right) \frac{n}{\log_2 n}$$

con probabilidad alta.

3.6. Método de concentración

Proposición 3.6.1 (Desigualdad de Chernoff). Si $\varepsilon \in (0, 1]$ y X una variable aleatoria binomial con media μ . Entonces

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon \mu) \leq 2e^{-\frac{\varepsilon^2 \mu}{3}}.$$

Definición 3.6.2. $\hat{r}(H_1, H_2) = \min \{e(G) \mid G \longrightarrow (H_1, H_2)\}$. En particular, escribimos $\hat{r}(H)$ para $\hat{r}(H, H)$.

Teorema 3.6.3 (Beck, 1983). Existe una constante $c > 0$ tal que

$$\hat{r}(P_k) \leq c \cdot k$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Lema 3.6.4. Sea $c > 0$, y sea $\mathcal{G} = \mathcal{G}(n, p)$ con $p = \frac{c}{n}$ para n lo suficientemente grande. Entonces

$$P(\{G \in \mathcal{G} \mid e(G) \geq pn^2\}) \leq e^{-c \frac{n}{8}}.$$

Demostración. Sabemos que la variable aleatoria que cuenta el número de aristas $e(\cdot)$ en \mathcal{G} tiene distribución $\text{Bin}(\binom{n}{2}, p)$. Notar que su $\mu = p \binom{n}{2}$. Como $|e(G) - \mu| \geq \mu$ si y solo si $e(G) \geq 2\mu$, tenemos que por la desigualdad de Chernoff 3.6.1 con $\varepsilon = 1$:

$$P(e(\cdot) \geq pn^2) \leq P(e(\cdot) \geq 2\mu) \leq 2e^{-\frac{\mu}{3}} \leq 2e^{-p \frac{n^2}{8}} = e^{-c \frac{n}{8}}.$$

□

Lema 3.6.5. Sea $c > 0$, y sea $\mathcal{G} = \mathcal{G}(n, p)$ con $p = \frac{c}{n}$ y n lo suficientemente grande. Entonces con probabilidad alta

$$e(X, Y) \geq 1$$

para cada par de subconjuntos de vértices X, Y de \mathcal{G} , disjuntos con $|X| \geq |Y| \geq 3c^{-\frac{1}{2}}n$.

Demostración. Dados X, Y subconjuntos de vértices de \mathcal{G} , disjuntos. Notar que la variable aleatoria $e(X, Y)$ (que depende de $G \in \mathcal{G}$) tiene distribución $\text{Bin}(|X||Y|, p)$, en particular $\mu = p|X||Y|$. Por la desigualdad de Chernoff 3.6.1, si $|X| \geq |Y| \geq 3c^{-\frac{1}{2}}n$, se tiene que

$$\begin{aligned} P(e(X, Y) = 0) &\leq P(|e(X, Y) - \mu| \geq \mu) \leq 2e^{-\frac{\mu}{3}} \\ &= 2e^{-p\frac{|X||Y|}{3}} \\ &\leq 2e^{-p\frac{|X||Y|}{4}} \\ &\leq 2e^{-p\frac{9c^{-1}n^2}{3}} \\ &\leq 2e^{-\frac{9}{4}n} \\ &= e^{-(\frac{9}{4}n - \log 2)} \\ &\leq e^{-2n} \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Así, tenemos un total de $2^n \cdot 2^n = 4^n$ formas de escoger X e Y , con lo cual

$$4^n e^{-2n} = \left(\frac{4}{e^2}\right)^n = o(1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

De donde se sigue lo que queríamos. □

Ahora estamos en condiciones de probar el teorema principal de esta sección:

Demostración del teorema. Sean $a, c > 0$ constantes lo suficientemente grandes. Tomemos $n = a \cdot k$ y $C = a \cdot c$. Aplicamos ambos lemas de arriba con $p = \frac{c}{n}$. Tomemos un grafo G con n vértices y

$$e(G) \leq pn^2 = C \cdot k.$$

Además, por el segundo lema, para todo $X, Y \subset V(G)$ disjuntos con $|X| \geq |Y| \geq 3c^{-\frac{1}{2}}n$ y $e(X, Y) \geq 1$.

Ahora, supongamos por el absurdo que G no tiene una 2-coloración de aristas con un P_k monocromático. Escribamos $V(G) = A \sqcup X \sqcup Y$ para la partición de los vértices de G obtenida, y comencemos el siguiente algoritmo:

1. Si $A = X = \emptyset$ e $Y = V(G)$.
 - (a) Si $A = \emptyset$, escogemos cualquier vértice $u \in Y$ y lo muevo a A .
 - (b) Si $A \neq \emptyset$, tomamos $v \in A$, el último que hemos agregado a A . Si existe $u \in Y$ tal que vu es una arista azul, agregamos u a A . Si no, movemos v a X .

Repetimos esto hasta que $|X| = |Y|$. Observemos que A forma un camino azul, por lo tanto $|A| \leq k$. Más aún, $|Y| - |X|$ disminuye 1 unidad por cada iteración del algoritmo. Como $|Y| - |X| = n$, en algún paso del algoritmo se llegó a que $|X| = |Y|$; así

$$|X| + |Y| = n - |A| \geq n - k = k(a - 1).$$

Consecuentemente, $|X| = |Y| \geq \frac{k(a-1)}{2}$.

Similarmente, podemos repetir el mismo proceso para el caso de aristas rojas: partimos $V(G) = A' \sqcup X' \sqcup Y'$ con A' conteniendo un camino rojo y por lo tanto $|A'| \leq k$, con $|X'| = |Y'| \geq \frac{k(a-1)}{2}$.

Consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 &= \{(X, X'), (Y, Y')\}, \\ \mathcal{P}_2 &= \{(X, Y'), (Y, X')\},\end{aligned}$$

de pares de partes de $V(G)$ obtenidas arriba. Afirmamos que existe $i = 1, 2$ tal que

$$|U \cap W| \geq \frac{k(a-3)}{4}$$

para todo par (U, V) en \mathcal{P}_i . En efecto, supongamos por el absurdo que $|X \cap X'|$ y $|X \cap Y'|$ ambos son menores que $\frac{k(a-3)}{4}$, luego

$$\begin{aligned}\frac{k(a-3)}{2} &> |X \cap X'| + |X \cap Y'| \geq |X| - |A'| \\ &\geq \frac{k(a-1)}{2} - k \\ &= \frac{k(a-3)}{2},\end{aligned}$$

absurdo.

Finalmente, por la afirmación de recién, consideremos sin perdida de generalidad, que $X \cap X'$ e $Y \cap Y'$ son subconjuntos de $V(G)$ de tamaño al menos $\frac{k(a-3)}{4}$ elementos, disjuntos entre sí. Además,

$$\frac{k(a-3)}{4} \geq 3c^{-\frac{1}{2}}n,$$

como $k = \frac{n}{a}$,

$$n \frac{(1 - \frac{3}{a})}{4} \geq 3c^{-\frac{1}{2}}n,$$

llegando a una contradicción porque el segundo lema implica que tiene que haber al menos una arista entre ambos conjuntos. \square

Comentario 3.6.6. Dedek y Pralat en 2017 probaron

$$\hat{r}(P_k) \leq 74k.$$

Por otro lado, Bal y DeBiasio probaron

$$\left(\frac{15}{4} + o(1)\right)k \leq \hat{r}(P_k).$$

Bibliografía

- [Rob55] Herbert Robbins. A remark on stirling's formula. *The American Mathematical Monthly*, 62(1):26–29, 1955.