

# Apuntes - Tópicos en matemática discreta

Enzo Giannotta

18 de noviembre de 2023

# Índice general

<b>1. Teoría extremal de grafos</b>	<b>2</b>
1.1. Teoría extremal de grafos . . . . .	2
1.2. Números extremales en grafos bipartitos . . . . .	6
1.3. Números extremales para árboles . . . . .	9
1.4. Estabilidad y supersaturación . . . . .	12
1.5. Teorema de Erdős-Stone . . . . .	14
1.6. Ejercicios . . . . .	20
1.7. Regularidad . . . . .	23
<b>2. Teoría de Ramsey</b>	<b>35</b>
2.1. Números de Ramsey . . . . .	36
2.2. El problema con un final feliz . . . . .	45
<b>3. El método probabilístico</b>	<b>49</b>
3.1. Fundamentos . . . . .	49
3.2. Esperanza . . . . .	53
3.3. Método del primer momento . . . . .	55
3.4. Erdős-Rényi . . . . .	57
3.4.1. Método de alteración . . . . .	58

# Capítulo 1

## Teoría extremal de grafos

En este curso trabajaremos con grafos simples, usualmente denotados:  $G = (V, E)$ .

### 1.1. Teoría extremal de grafos

¿Cuál es la máxima cantidad de aristas que puede tener un grafo de  $n$  vértices sin que aparezca una cierta estructura?

¿Cómo lucen estos grafos maximales?

**Ejemplo 1.1.1.** 1. Cuando la estructura es un ciclo, la cantidad de aristas es  $n - 1$  y los grafos maximales son los árboles.

2. Cuando la estructura es un ciclo impar. ¿Cómo lucen los grafos sin ciclos impares y que tienen una cantidad máxima de aristas? Son los completos balanceados  $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ . En efecto, para que un grafo bipartito con  $n$  vértices tenga una cantidad máxima de aristas, tiene dos partes  $|X|, |Y|$  con  $|X| + |Y| = n$  y si maximiza la cantidad de aristas es un grafo  $K_{|X|, |Y|}$ . Es decir, tiene  $|X| \cdot |Y|$  aristas y si maximizamos, hay que maximizar la función  $f(y) = (n - y)y$  con  $1 \leq y \leq n - 1$  e  $y$  entero; esto sucede si  $y = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  o  $y = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ .

**Definición 1.1.2.** Sean  $G$  y  $H$  dos grafos. Decimos que  $G$  es **H-libre** (o **libre de H**) si  $H \not\subseteq G$ . El **número extremal** de  $H$  es la cantidad

$$\text{ex}(n, H) = \max\{e(G) \mid G \text{ es un grafo de } n \text{ vértices } H\text{-libre}\},$$

donde  $e(G)$  siempre denotará el número de aristas de  $G$ .

Si  $G$  es  $H$ -libre y  $|G| = \text{ex}(n, H)$ , decimos que  $G$  es **extremal** respecto de  $n$  y  $H$ .

**Teorema 1.1.3** (Mantel, 1907). Sea  $n \in \mathbb{N}$ ,  $G$  un grafo  $K_3$ -libre con  $n$  vértices. Entonces,  $e(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Además,  $e(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \Leftrightarrow G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ <sup>1</sup>.

*Demostración.* Por inducción en  $n$ . Los casos  $n = 1, n = 2$  son un vértice, un 1-camino respectivamente. Luego vale para  $n = 1, 2$ . Ahora, supongamos que  $n \geq 3$ . Sea  $G$  un grafo  $K_3$ -libre con  $n$  vértices, y  $uv \in E(G)$  (si  $G$  no tuviera aristas, podríamos agregar una arista y seguiría siendo  $K_3$ -libre); consideremos  $G' = G \setminus \{u, v\}$ .

<sup>1</sup>Cuando  $n = 1, 2$  tenemos que  $G$  es el completo  $K_n$

Tenemos que  $G'$  también es  $K_3$ -libre y tiene  $n - 2$  vértices. Por inducción,  $G'$  satisface

$$e(G') \leq \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor.$$

Más aún, como  $G$  es  $K_3$ -libre, no existen vértices  $w \in G'$  tal que sea adyacente a  $u$  y  $v$  al mismo tiempo. Luego existen a lo más  $n - 2$  aristas en  $E(G) \setminus E(G')$  sin contar la arista  $uv$ . Es decir,

$$e(G) \leq e(G') + n - 1 \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$



Figura 1.1.1: Ilustración

Para la segunda parte,  $e(G) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \Leftrightarrow G = K_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$ . Es claro que si  $G = K_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$  luego  $e(G) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ . Veamos la recíproca. Sea  $G$  con  $n$  vértices y cantidad máxima de aristas tal que es  $K_3$ -libre. Los casos  $n = 1, 2$  son triviales, luego podemos suponer que  $|G| \geq 3$ . Como  $G$  es  $K_3$ -libre, existen una aristas  $uv \in E(G)$  por maximalidad. Por inducción,  $G' := G \setminus \{u, v\}$  es un  $K_{\left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor}$ , digamos con partición  $X', Y' \subset V(G')$  de sus vértices. Como  $G$  es  $K_3$ -libre, ni  $u$  ni  $v$  pueden tener vecinos en  $G'$  que estén en ambas particiones  $X', Y'$ , además, no puede haber una partición que no tenga a  $u$  y  $v$  como vecinos en  $G$  pues podríamos agregar aristas entre vértices de esa particiones: contradiciendo maximalidad. Sin pérdida de generalidad, los vecinos de  $u$  en  $G'$  están en  $X$  y los de  $v$  en  $Y$ . Más aún, por maximalidad, todos los vértices de  $X$  son vecinos con  $u$  y todos los de  $Y$  con  $v$ . Así,  $G$  es un  $X, Y$  bigrafo tomando  $X := X' \cup \{u\}$  e  $Y := Y' \cup \{v\}$ . Notar que esto prueba que  $G$  es un  $K_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$ . □

**Definición 1.1.4.** El **grafo de Turán**  $T_k(n)$  es el grafo  $k$ -partito completo con la mayor cantidad de aristas, es decir, los cardinales de las particiones difieren a lo más en 1 entre sí (por maximalidad). Notamos

$$t_k(n) := e(T_k(n)).$$

**Observación 1.1.5.** Podemos calcular  $t_k(n)$ . Sea  $\alpha \in \mathbb{N}$  el cardinal más grande de una partición de  $T_k(n)$ . Entonces las demás particiones tienen cardinal  $\alpha$  o  $\alpha - 1$ . Sea  $r$  la cantidad de particiones con cardinal  $\alpha - 1$  y  $k - r$  de cardinal  $\alpha$ . Tenemos que sumando los cardinales de todas las particiones:

$$\alpha k - r = n.$$

Como  $0 \leq r < k$ ,  $r$  es el resto de la división de  $n$  por  $k$  y  $\alpha$  es el cociente. Despejando obtenemos que  $\alpha = \frac{n+r}{k}$  es decir,  $\alpha = \lceil \frac{n}{k} \rceil$ . En particular  $\alpha - 1 = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ . Juntado todo, tenemos que la cantidad total de aristas es:

$$\alpha^2 \binom{k-r}{2} + \alpha(\alpha-1)(k-r)r + (\alpha-1)^2 \binom{r}{2},$$

i.e.,

$$t_k(n) = \lceil \frac{n}{k} \rceil^2 \binom{k-r}{2} + \lceil \frac{n}{k} \rceil \lfloor \frac{n}{k} \rfloor (k-r)r + \lfloor \frac{n}{k} \rfloor^2 \binom{r}{2}.$$

**Teorema 1.1.6** (Turán, 1941). Sean  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $G$  un grafo  $K_{k+1}$ -libre con  $n$  vértice. Entonces

$$e(G) \leq t_k(n).$$

Además,  $e(G) = t_k(n) \Leftrightarrow G = T_k(n)$ <sup>2</sup>.

*Demostración.* Hagamos inducción en  $n$ . Para  $n \leq k$  es trivial. Sea ahora  $G$  con  $n \geq k+1$  que a su vez es  $K_{k+1}$ -libre y arista maximal. Esto implica que agregar cualquier arista hace aparecer un  $K_{k+1}$  como subgrafo. Entonces  $G$  contiene un  $K_k$ . Sea  $A$  el conjunto de vértices de un subgrafo  $K_k$  en  $G$ . Consideremos luego  $G' = G \setminus A$ . El grafo  $G'$  es  $K_{k+1}$ -libre y tiene  $n - k$  vértices. Cada  $x \in V(G')$  tiene a lo más  $k-1$  vecinos en  $A$  dentro del grafo  $G$ , pues  $G$  es  $K_{k+1}$ -libre. Luego por hipótesis inductiva:

$$e(G') \leq t_k(n-k).$$

Si juntamos esto con la hipótesis inductiva, tenemos que

$$e(G) \leq e(G') + (n-k)(k-1) + \binom{k}{2} \leq t_k(n-k) + (n-k) \cdot (k-1) + \binom{k}{2} = t_k(n),$$

donde el segundo término es la cantidad de aristas entre  $A$  y  $V(G')$ .

Veamos ahora la segunda afirmación. Por definición,  $G = T_k(n)$  tiene  $t_k(n)$  aristas. Recíprocamente, supongamos que  $G$  con  $n$  vértices y cantidad máxima de aristas  $e(G)$  tal que es  $K_{k+1}$ -libre. Los casos  $n \leq k$  son triviales, luego supongamos que  $n \geq k+1$ . Por maximalidad,  $G$  contiene un  $K_k$  como subgrafo; llamemos  $A$  a su conjunto de vértices en  $G$  y consideremos  $G' := G \setminus A$ . Notar que

$$e(G') \geq e(G) - \left( (n-k)(k-1) + \binom{k}{2} \right) = t_k(n) - (n-k)(k-1) - \binom{k}{2} = t_k(n-k),$$

pues cada vértice de  $G'$  tiene a lo más  $k-1$  vecinos en  $A$ . Como  $G'$  es  $K_{k+1}$ -libre, en realidad vale la igualdad:  $e(G') = t_k(n-k)$ , por la primera parte que ya demostramos. Llamemos  $X_1, X_2, \dots, X_k$  a las particiones de  $G'$ . Como vale la igualdad arriba, tenemos que cada vértice de  $G'$  tiene exactamente  $k-1$  vecinos en  $A$ . Para cada  $x' \in G'$  llamemos  $\alpha(x')$  al único vértice de  $A$  que no es adyacente a  $x'$  en  $G$ . Más formalmente,  $\alpha : V(G') \rightarrow A$  es una función; afirmamos que:

<sup>2</sup>Cuando  $n = 1, 2, \dots, k-1$  tenemos que  $G$  es el completo  $K_n$

(I)  $\alpha$  es sobreyectiva.

(II) Si  $x'_i \in X_i$  y  $x'_j \in X_j$  para  $i \neq j$ , entonces  $\alpha(x'_i) \neq \alpha(x'_j)$ .

Antes de probar la afirmación, notemos que esta prueba que  $\alpha|_{X_i}$  es constante para cada  $i = 1, \dots, k$  (y por lo tanto tiene sentido el abuso de notación  $\alpha(X_i)$  para denotar al único vértice de  $A$  que no es adyacente a ningún vértice  $x' \in X_i$ ). Veamos entonces la afirmación:

(I) Supongamos que  $\alpha$  no es sobreyectiva: existe un  $a_0 \in A$  tal que para todo  $i = 1, \dots, k$  existe  $x'_i \in X_i$  adyacente a  $a_0$  en  $G$ . Pero esto implica entonces que los vértices  $x'_1, \dots, x'_k, a_0$  forman un  $K_{k+1}$  en  $G$ , absurdo.

(II) En efecto, si  $\alpha(x'_i) = a_0 = \alpha(x'_j)$ , entonces  $x_i, x_j$  y los vértices de  $A \setminus \{a_0\}$  juntos forman un  $K_{k+1}$  en  $G$ , absurdo.

Así, podemos extender la partición de  $G'$  a todo  $G$ : definimos  $\tilde{X}_i := X_i \cup \{\alpha(X_i)\}$ . Es claro que de esta manera  $G$  es un grafo  $k$ -partito completo. Como  $G$  es maximal en su cantidad de aristas, entonces  $G = T_k(n)$ .  $\square$

**Teorema 1.1.7** (Erdős - segunda demostración del teorema). Sean  $n, k \in \mathbb{N}$  y  $G$  un grafo  $K_{k+1}$ -libre con  $n$  vértices. Entonces existe un grafo  $H$  que es  $k$ -partito con  $V(H) = V(G)$  tal que:

$$d_H(v) \geq d_G(v), \quad \forall v \in V(G).$$

*Erdős.* Haremos inducción en  $k$ . Para  $k = 1$  no hay que hacer nada. Sea ahora  $k \geq 2$ . Sea  $v \in V(G)$  con  $d_G(v) = \Delta(G)$ . La vecindad de  $v$ ,  $G' := G[N_G(v)]$  debe ser  $K_k$ -libre. Sea  $A := G \setminus N_G(v)$ . Notar que

$$d_G(u) \leq d_{G'}(u) + |A|.$$

Por hipótesis inductiva existe un grafo  $H'$  que es  $(k-1)$ -partito con  $V(H') = V(G')$  y

$$d_{H'}(u) \geq d_{G'}(u), \quad \forall u \in V(G').$$

Sea  $H$  el grafo obtenido a partir de  $H'$  añadiendo los vértices de  $A$  y conectando todos los vértices entre  $A$  y  $V(H')$ . Observar que  $H$  es  $k+1$ -partito y como  $v$  tiene grado máximo en  $G$ , tenemos que para cada  $u \in A$ :

$$d_G(u) \leq d_G(v) = |V(H')| = d_H(u)$$

y para  $u \in V(H')$  sabemos que:

$$d_G(u) \leq d_{G'}(u) + |A| \underset{H.I.}{\leq} d_{H'}(u) + |A| = d_H(u).$$

$\square$

**Ejercicio 1.1.8.** A partir de la demostración deducir que el grafo  $K_{k+1}$ -extremal es  $T_k(n)$  y es único.

*Solución.* Sea  $G$  un grafo  $K_{k+1}$ -extremal y  $H$  el grafo  $r$ -partito obtenido por el Teorema anterior. Así,  $V(H) = V(G)$  y  $d_H(v) \geq d_G(v)$  para todo vértice  $v$ . Esta desigualdad implica que

$$e(H) \geq e(G),$$

y por lo tanto,  $H$  también es  $K_{r+1}$ -extremal. Pero por definición,  $t_k(n) \geq e(H)$ . Pero ya vimos que los grafos  $K_{r+1}$  extremales tienen  $\geq t_k(n)$  aristas. Con lo cual, en realidad  $e(G) = e(H)$  y más aún,  $d_H(v) = d_G(v)$  para todo  $v$ .

Esto nos indica que inspeccionando la demostración más detalladamanete, se tiene que  $G'$  es un  $T_{k-1}(\Delta)$  (con  $\Delta := \delta(G)$ ) y que  $G$  es luego  $T_k(n)$ .  $\square$

**Observación 1.1.9.** Sea  $H$  un grafo con  $\chi(H) \geq 3$ , es decir no bipartito, entonces

$$\text{ex}(n, H) = \Theta(n^2).$$

*Demostración.* En primer lugar, si  $G$  es un grafo que contiene a  $H$ , luego no puede ser bipartito. En particular, si  $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ , entonces es  $H$ -libre al ser bipartito; de hecho tiene  $n$  vértices y  $e(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Consecuentemente

$$(n-1)^2/4 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \text{ex}(n, H).$$

Por otro lado, la cantidad de aristas maxima de  $G$  es  $\binom{n}{2}$  (en general para cualquier grafo con  $n$  vértices) y por lo tanto  $\text{ex}(n, H) = \Theta(n^2)$ .  $\square$

## 1.2. Números extremales en grafos bipartitos

**Recuerdo 1.2.1** (Desigualdad de Jensen). *Vamos a usar la desigualdad de Jensen: si  $\varphi$  es una función convexa entonces:*

$$\varphi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(\varphi(X)).$$

**Ejercicio 1.2.2.** Probar las siguientes dos desigualdades elementales para el binomio de Newton:

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \stackrel{\text{Cota 1}}{\leq} \binom{n}{k} \stackrel{\text{Cota 2}}{\leq} \left(\frac{n \cdot e}{k}\right)^k.$$

*Solución.*

Cota 1: Notar que

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdots \frac{n-k+1}{1} \geq \left(\frac{n}{k}\right)^k,$$

pues  $\frac{n}{k} \leq \frac{n-j}{k-j}$  para todo  $j = 0, \dots, k$ .

Cota 2: Notar que se tiene una mejor cota:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \leq \frac{n^k}{k!}.$$

Por lo tanto, como  $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ , se sigue que  $e^k \geq \frac{k^k}{k!}$ , y luego

$$\frac{n^k}{k!} \leq \frac{n^k e^k}{k^k},$$

como queríamos.  $\square$

**Teorema 1.2.3** (Erdős, 1938). *Para todo  $n \in \mathbb{N}$*

$$\text{ex}(n, C_4) \leq n^{\frac{3}{2}}.$$

**Definición 1.2.4.** Una **cereza** es un 2-camino  $x_0x_1x_2$ . Llamaremos a  $x_1$  el **centro** y a  $x_0, x_2$  las **hojas**.



Figura 1.2.2: Dibujo de cereza.

*Demostración.* Sea  $G$  un grafo  $C_4$ -libre con  $n$  vértices. Contaremos cereza en  $G$  para acotar el número de aristas  $e(G)$ .

Para cada vértice  $v \in V(G)$  hay exactamente

$$\binom{d_G(v)}{2} \text{ cerezas con centro en } v.$$

Por lo tanto, en  $G$  hay

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{2} \text{ cerezas en } G.$$

Por la desigualdad de Jensen la sumatoria se minimiza cuando todos los grados son iguales:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{2} &\geq n \cdot \binom{2e(G)/n}{2} \\ &\stackrel{\text{Cota 1}}{\geq} n \cdot \left( \frac{e(G)}{n} \right)^2 = \frac{e(G)^2}{n}. \end{aligned}$$

Por otro lado, dado un par  $\{u, v\}$  de hojas de cerezas distintas, entonces tendríamos un subgrafo  $C_4$  en  $G$ , absurdo; por lo tanto hay a lo más

$$\binom{n}{2} \text{ cerezas en } G.$$



Juntando todo:

$$\frac{e(G)^2}{n} \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

consecuentemente  $e(G)^2 \leq n^3$ , i.e.,  $e(G) \leq n^{\frac{3}{2}}$ .  $\square$

**Teorema 1.2.5** (Kövari, Sós, Turán). Sean  $s, t \in \mathbb{N}$ ,  $s \leq t$ . Entonces existe una constante  $c = c(s, t) > 0$  tal que

$$\text{ex}(n, K_{s,t}) \leq c \cdot n^{2 - \frac{1}{s}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Definición 1.2.6.** Una  $s$ -cereza es un  $K_{1,s}$ . Similarmente tenemos la noción de **centro** y **hojas** (las cuales son  $s$ ).



Figura 1.2.3: Dibujo de  $s$ -cereza.

*Demostración.* Sea  $G$  un grafo  $K_{s,t}$ -libre en  $n$  vértices. Para cada  $v \in V(G)$  hay  $\binom{d_G(v)}{s}$   $s$ -cerezas. Por lo tanto en  $G$  hay

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{s} \quad s\text{-cerezas},$$

con lo cual

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{s} \stackrel{\text{Cota 1}}{\geq} \sum_{v \in V(G)} \frac{d_G(v)^s}{s^s} \stackrel{\text{Jensen}}{\geq} \frac{n}{s^s} \left( \frac{2e(G)}{n} \right)^s.$$

Procediendo de manera análoga a la demostración del teorema anterior, tenemos que un conjunto de  $s$  vértices del grafo puede ser conjunto de hojas de a lo más  $(t-1)$  cerezas, pues de lo contrario habría una copia de  $K_{s,t}$ . Por lo tanto, hay en total a lo más

$$(t-1) \cdot \binom{n}{s} \quad s\text{-cerezas}.$$

Juntando todo:

$$n \left( \frac{2e(G)}{sn} \right)^s \leq (t-1) \cdot \binom{n}{s} \stackrel{\text{Cota 2}}{\leq} (t-1) \cdot \left( \frac{ne}{s} \right)^s,$$

luego

$$\frac{2e(G)}{sn} \leq \frac{(t-1)^{\frac{1}{s}}}{n^{\frac{1}{s}}} \cdot \frac{ne}{s},$$

equivalentemente,

$$e(G) \leq \frac{(t-1)^{\frac{1}{s}} se}{2s} \cdot n^{2-\frac{1}{s}} = c(s, t) \cdot n^{2-\frac{1}{s}}.$$

□

**Ejercicio 1.2.7.** Demostrar que

$$\text{ex}(n, H) = o(n^2) \Leftrightarrow H \text{ es bipartito.}$$

*Solución.* Como  $H$  es bipartito, existen  $s, t \in \mathbb{N}$ , digamos  $s \leq t$ , tales  $H \subset K_{s,t}$ . Así, por el Teorema de 1.2.5,

$$\text{ex}(n, H) \leq c(s, t) \cdot n^{2-\frac{1}{s}},$$

pues si  $G$  no contiene a  $H$ , tampoco contiene a  $K_{s,t}$ . Así, obtenemos que  $\text{ex}(n, H) = o(n^2)$ .

Recíprocamente, supongamos que  $H$  no es bipartito, luego por la Observación 1.1.9,  $\text{ex}(n, H) = \Theta(n^2)$ . Con lo cual, si  $\text{ex}(n, H) = o(n^2)$ , necesariamente  $H$  es bipartito. □

### 1.3. Números extremales para árboles

**Teorema 1.3.1.** Sean  $n, k \in \mathbb{N}$  y  $T$  un árbol con  $k+1$  vértices. Entonces,

$$\text{ex}(n, T) \leq (k-1) \cdot n.$$

**Lema 1.3.2.** Sean  $k \in \mathbb{N}$  y  $T$  un árbol con  $k+1$  vértices. Entonces si  $G$  es un grafo con  $\delta(G) \geq k$ , luego contiene a  $T$  como subgrafo.

*Demostración.* Haremos inducción en  $k$ . Para  $k=1$  es claro, pues existe un vértice con al menos un vecino. En general, supongamos que  $k \geq 2$ . Sea  $h$  una hoja de  $T$  y consideremos el árbol  $T' = T \setminus \{h\}$ . Por hipótesis inductiva,  $T' \subset G$ . Sea  $p$  el único vecino de  $h$  en  $T$ , i.e.  $p \in T'$ . Como  $T$  tiene  $k+1$  vértices,  $p$  tiene a lo más  $k-1$  vecinos en  $T'$ , luego  $p$  tiene un vecino en  $G$  que no está en  $T'$  pues  $\delta_G(p) \geq k$ . Entonces podemos incrustar  $T$  en  $G$  considerando  $h$  como este vértice. □

**Lema 1.3.3.** Todo grafo  $G$  contiene un subgrafo  $H$  con  $\delta(H) > \varepsilon(H) \geq \frac{e(G)}{n}$ , donde  $n = |G|$ .

*Demostración.* Construiremos una secuencia de subgrafos de  $G$ :

$$G =: G_0 \supset G_1 \supset \dots$$

de la siguiente manera, si  $v_i \in G_i$  es un vértice con  $d_{G_i}(v_i) \leq \varepsilon(G_i) := \frac{e(G_i)}{|G_i|}$ , entonces definimos  $G_{i+1} := G_i \setminus \{v_i\}$ . Eventualmente esta secuencia termina, digamos en  $H := G_{j_0}$ .

Notar que  $\varepsilon(G_{i+1}) \geq \varepsilon(G_i)$ , y por lo tanto  $\varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$ . En efecto,

$$\varepsilon(G_{i+1}) = \frac{e(G_{i+1})}{|G_{i+1}|} = \frac{e(G_i) - d_{G_i}(v_i)}{|G_i| - 1},$$

que es mayor o igual que  $\frac{e(G_i)}{|G_i|}$  si y solo si

$$(e(G_i) - d_{G_i}(v_i))|G_i| \geq e(G_i)(|G_i| - 1),$$

equivalentemente,

$$e(G_i) \geq |G_i|d_{G_i}(v_i),$$

i.e.,

$$\frac{e(G_i)}{|G_i|} \geq d_{G_i}(v_i),$$

que es cierto por construcción. Por otro lado, por minimalidad de  $H$ , se sigue que  $\delta(H) > \varepsilon(H)$ .  $\square$

*Demostración del teorema.* Sea  $G$  un grafo con  $\geq (k-1) \cdot n + 1$  aristas. Por el segundo lema,  $G$  contiene  $H$  con

$$\delta(H) \geq \frac{e(G)}{n} > \frac{(k-1)n}{n},$$

y por el primer lema  $T \subset H \subset G$ .  $\square$

**Conjetura 1.3.4** (Erd s, S s, 1963). *Se conjetura que en el teorema anterior se tiene una mejor cota:*

$$\text{ex}(n, T) \leq \frac{1}{2}(k-1)n.$$

*Notar que de ser verdadera la conjetura, entonces esta cota es tight cuando  $n$  es un múltiplo de  $k$ : Sea  $G$  el grafo obtenido al unir  $\frac{n}{k}$  copias de  $K_k$ , así  $e(G) = \frac{n}{k} \binom{k}{2} = \frac{n}{2}(k-1)$ .*

*Esta conjetura es verdadera en el caso  $T$  un camino:*

**Teorema 1.3.5** (Erd s & Gallai, 1959). *Sean  $n, k \in \mathbb{N}$ . Entonces,*

$$\text{ex}(n, P_k) \leq \frac{(k-1) \cdot n}{2}$$

**Ejercicio 1.3.6.** A partir de la demostración de este teorema, obtenga que los grafos extremales son únicos.

**Lema 1.3.7.** *Todo grafo conexo  $G$  con  $n$  vértices contiene un camino de largo*

$$k := \min\{2\delta(G), n-1\}.$$

*Demostración.* Tomemos  $P := v_0, \dots, v_l$  camino de largo máximo. Sabemos que  $N_G(v_0), N_G(v_l) \subset V(P)$  por maximalidad de  $P$ . Si  $V(P) = V(G)$  ganamos. Así que supongamos que no; supongamos también que  $l < k \leq 2\delta(G)$ . Demostraremos que existe un ciclo de longitud  $l$  contenido en  $G[V(P)]$ , así llegaremos a una contradicción pues al existir un vértice  $x$  fuera de  $G[V(P)]$  en  $G$ , podríamos extender el ciclo a un camino de longitud al menos  $k+1$  en  $G$  conectándolo con  $x$ .



Figura 1.3.4: Notar que en este caso  $v_0 P v_{i-1} v_l P v_i v_0$  es un ciclo de longitud  $|P|$  en  $G[V(P)]$ .

En efecto, supongamos que no existe tal ciclo, luego para cada  $i \in \{1, \dots, l-1\}$  se tiene que  $v_{i-1} v_l \notin E(G)$  o  $v_0 v_i \notin E(G)$ . Entonces

$$2\delta(G) \leq d_G(v_0) + d_G(v_l) \leq l < 2\delta(G),$$

absurdo. □

*Demostración del teorema.* Haremos inducción en  $n$ . Afirmamos que  $G$  es  $P_k$ -libre en  $n$  vértices, entonces

$$e(G) \leq \frac{(k-1) \cdot n}{2}.$$

El caso base es  $n \leq k$ , luego  $e(G) \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{n(k-1)}{2}$ . Luego supongamos que  $n \geq k+1$ . Si  $G$  no es conexo: sean  $G_1, \dots, G_r$  las componentes conexas, por hipótesis

$$e(G_i) \leq \frac{|G_i|(k-1)}{2},$$

entonces

$$e(G) = \sum_{i=1}^r e(G_i) \leq \frac{k-1}{2} \sum_{i=1}^r |G_i| = \frac{n(k-1)}{2}.$$

Ahora, supongamos que  $G$  es conexo. Si  $n-1 \leq 2\delta(G)$ , entonces por el Lema 1.3.7,  $G$  contiene un camino de largo  $n-1 \geq k$ , absurdo. Con lo cual, podemos asumir que  $2\delta(G) \leq n-1$ , y por el Lema,  $G$  contiene un camino de largo  $2\delta(G)$  que debe cumplir

$$2\delta(G) < k \quad \Leftrightarrow \quad \delta(G) \leq \frac{k-1}{2}.$$

Sea  $v$  un vértice de grado  $\leq \frac{k-1}{2}$ , consideremos  $G' := G \setminus \{v\}$ . Por hipótesis inductiva

$$e(G') \leq \frac{(n-1)(k-1)}{2},$$

con lo cual,

$$e(G) \leq e(G') + \frac{k-1}{2} \leq \frac{(n-1)(k-1)}{2} + \frac{k-1}{2} = \frac{n(k-1)}{2}.$$

□

## 1.4. Estabilidad y supersaturación

**Teorema 1.4.1** (Füredi, 2015). Sean  $n, t \in \mathbb{N}$ , y  $G$  con  $n$  vértices. Si  $G$  está  $t$ -lejos de ser bipartito<sup>3</sup>, entonces hay al menos

$$\frac{n}{6} \left( e(G) - \frac{n^2}{4} + t \right)$$

triángulos en  $G$ .

*Demostración.* Para cada  $u \in V(G)$ , definimos

$$B_u := N_G(u) \quad \text{y} \quad A_u := V(G) \setminus B_u.$$

Luego la cantidad de triángulos de  $G$  es:

$$k_3(G) = \frac{1}{3} \sum_{u \in V(G)} e(B_u).$$

Para cada  $u \in V(G)$ , si borro las aristas de  $G[B_u]$  y las de  $G[A_u]$ , obtengo un subgrafo bipartito de  $G$ : el  $(A_u, B_u)$ -bigrafo; luego tuvimos que haber quitado al menos  $t$  aristas porque  $G$  está  $t$ -lejos de ser bipartito, es decir:

$$e(B_u) + e(A_u) \geq t.$$

Además, para cada  $u \in V(G)$

$$\sum_{v \in A_u} d_G(v) = e(B_u, A_u) + 2e(A_u).$$

Como

$$e(G) = e(A_u) + e(A_u, B_u) + e(B_u),$$

se sigue que  $e(A_u) = e(B_u) - e(G) + \sum_{v \in A_u} d_G(v)$  (juntando ambas ecuaciones). Ahora, por la desigualdad  $e(B_u) + e(A_u) \geq t$ , se tiene que

$$e(B_u) \geq t - e(A_u) = t + e(G) - e(B_u) - \sum_{v \in A_u} d_G(v)$$

y por lo tanto

$$2e(B_u) \geq t + e(G) - \sum_{v \in A_u} d_G(v).$$

---

<sup>3</sup>Esto significa que si  $H$  es un subgrafo bipartito de  $G$ , entonces  $e(H) \leq e(G) - t$ .

Sumando sobre todos los  $u \in V(G)$  y utilizando que  $k_3(G) = \frac{1}{3} \sum_{u \in V(G)} e(B_u)$ , concluimos:

$$k_3(G) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} (nt + ne(G) - \sum_{u \in V(G)} \sum_{v \in A_u} d_G(v));$$

sin embargo, afirmamos que vale la siguiente igualdad:

$$\sum_{u \in V(G)} \sum_{v \in A_u} d_G(v) = \sum_{x \in V(G)} d_G(x)(n - d_G(x));$$

ya que cada término de la sumatoria se acota inferiormente por  $\frac{n}{2} \cdot (n - \frac{n}{2}) = \frac{n^2}{2}$ , concluimos el resultado.

Veamos la afirmación: notar que para cada  $x \in V(G)$ , su cantidad de aristas  $d_G(x)$  es contada exactamente  $|A_x| = n - d_G(x)$  veces del lado izquierdo de la sumatoria.  $\square$

Como corolario, se prueban los siguientes dos teoremas:

**Teorema 1.4.2** (Estabilidad). *Sean  $n, t \in \mathbb{N}$ , y  $G$  es  $K_3$ -libre con  $n$  vértices. Si  $e(G) \geq \frac{n^2}{4} - t$ , entonces  $G$  contiene un grafo bipartito con al menos  $e(G) - t$  aristas.*

*Demostración.* Si  $G$  no tuviera un grafo bipartito con al menos  $e(G) - t$  aristas, entonces  $G$  estaría  $(t+1)$ -lejos de ser bipartito. Por el Teorema 1.4.1 tiene al menos

$$\frac{n}{6} \left( e(G) - \frac{n^2}{4} + (t+1) \right) \geq \frac{n}{6}$$

triángulos, i.e., al menos uno, lo cual es absurdo.  $\square$

**Teorema 1.4.3** (Supersaturación). *Sean  $n, t \in \mathbb{N}$ , y  $G$  un grafo con  $n$  vértices. Si  $e(G) \geq \frac{n^2}{4} + t$ , entonces  $G$  contiene al menos  $t \cdot n/3$  triángulos.*

*Demostración.* Notar que  $G$  está  $t$ -lejos de ser bipartito, en efecto, un grafo bipartito de orden  $m \leq n$  tiene a lo más  $\frac{m^2}{4} \leq \frac{n^2}{4}$  aristas, pero  $G$  tiene al menos  $\frac{n^2}{4} + t \geq \frac{m^2}{4} + t$  aristas. Luego por el Teorema 1.4.1,  $G$  tiene

$$\frac{n}{6} \left( e(G) - \frac{n^2}{4} + (t+1) \right) \geq \frac{n}{3}t$$

triángulos.  $\square$

**Teorema 1.4.4** (Füredi, 2015 – Estabilidad). *Sean  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $t \geq 0$  y  $G$  un grafo  $K_{k+1}$ -libre en  $n$ -vértices. Si  $e(G) \geq t_k(n) - t$ , entonces  $G$  contiene un subgrafo generador  $k$ -partito con al menos  $e(G) - t$  aristas.*

*Demostración.* Haremos inducción en  $k$ . El caso  $k = 1$  tenemos que  $t_k(n) = 0$  y siempre se cumple. Entonces supongamos que  $k \geq 2$ . Tomemos  $u \in V(G)$  con  $d_G(u) = \Delta(G)$ . Definamos  $G' := G[B]$  con  $B = N_G(u)$ . Sea  $A = V(G) \setminus B$ . El grafo  $G'$  es  $K_k$ -libre porque  $G$  es  $K_{k+1}$ -libre, luego por el Teorema de Turán 1.1.6,  $e(G') \leq t_{k-1}(d)$  con  $d := |B|$  y entonces podemos definir  $t' := t_{k-1}(d) - e(G') \geq 0$  y aplicar hipótesis

inductiva al grafo  $G'$ . Así,  $G'$  contiene un subgrafo  $H'$  generador  $(k-1)$ -partito con al menos  $e(G') - t' = 2e(G') - t_{k-1}(d)$  aristas.

Probemos que

$$H := (V(H') \cup A, E(H') \cup E(A, B))$$

tiene al menos  $e(G) - t$  aristas, y así  $H$  es un subgrafo  $k$ -partito generador de  $G$  con al menos  $e(G) - t$  aristas. En efecto, queremos probar que

$$e(H') + e(A, B) \geq e(G) - t;$$

como  $e(G) = e(A, B) + e(G') + e(A)$ , la desigualdad de arriba es equivalente a

$$e(H') \geq e(G') + e(A) - t \Leftrightarrow e(H') - e(G') + t \geq e(A).$$

Ya que  $e(H') \geq e(G') - t'$ , nos queda que la última desigualdad es cierta si  $e(A) \leq t - t'$ .

Sabemos que

$$2e(A) + e(A, B) = \sum_{v \in A} d_G(v) \leq d \cdot (n - d),$$

donde la desigualdad sale de que la sumatoria tiene  $(n - d)$  términos y cada grado  $d_G(v) \leq \Delta(G) = d_G(u) = |B| = d$ ; y reemplacemos  $e(A, B) = e(G) - e(A) - e(G')$  y nos queda

$$e(A) + e(G) - e(G') \leq d \cdot (n - d).$$

Ahora, notar que

$$t_k(n) \geq t_{k-1}(d) + d \cdot (n - d),$$

pues el lado izquierdo es la cantidad de aristas de un grafo de Turán (la cual es máxima) y el lado derecho es la cantidad de aristas de un grafo  $k$ -partito en  $n$ -vértices: el obtenido a partir del grafo de Turán  $T_{k-1}(d)$  agregando  $n - d$  vértices y conectándolos a las  $k - 1$  particiones de  $T_{k-1}(d)$ . Juntando todo,

$$e(A) \leq d \cdot (n - d) - \underbrace{e(G)}_{\geq t_k(n) - t} + \underbrace{e(G')}_{= t_{k-1}(d) - t'} \leq d \cdot (n - d) - t_k(n) + t + t_{k-1}(d) - t' \leq t - t'$$

como queríamos probar.  $\square$

## 1.5. Teorema de Erdős-Stone

**Notación 1.5.1.** Notaremos por  $K_s(t)$  al grafo de Turán  $T_s(t \cdot s)$ .

**Teorema 1.5.2** (Erdős-Stone, 1946). *Sea  $H$  un grafo con  $e(H) \geq 1$ . Entonces*

$$\text{ex}(n, H) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + o(1)\right) \cdot \frac{n^2}{2} \quad (n \rightarrow \infty).$$

**Observación 1.5.3.** Sea  $H$  un grafo con  $e(H) \geq 1$ . Entonces

$$t_{\chi(H)-1}(n) \leq \text{ex}(n, H),$$

pues todo grafo  $G$  necesita de al menos  $\chi(H)$  colores para tener a  $H$  incrustado, por lo tanto  $T_{\chi(H)-1}(n)$  es  $H$ -libre.

**Observación 1.5.4.**

$$t_{\chi(H)-1}(n) \sim \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1}\right) \frac{n^2}{2}.$$

Con lo cual, la desigualdad de Erdős-Stone es asintóticamente justa.

*Demostración.* En efecto, esto equivale a probar que

$$t_k(n) \sim \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2}{2} \quad (n \rightarrow \infty),$$

para  $k \geq 2$  fijo. Escribiendo  $n = qk + r$  con  $0 \leq r < k$ , tenemos que

$$t_k(qk) \leq t_k(n) \leq t_k((q+1)k),$$

pero para cualquier  $q \in \mathbb{N}$  es fácil de calcular el número de aristas del grafo de Turán  $T_k(qk)$ :

$$t_k(qk) = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{(qk)^2}{2},$$

con lo cual  $t_k(qk), t_k((q+1)k) \sim \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2}{2}$  y por lo tanto  $t_k(n)$  también.  $\square$

**Lema 1.5.5.** Sea  $c \in (0, 1)$  y sea  $\varepsilon > 0$ . Si  $G$  es un grafo con  $n$  vértices, con  $n$  lo suficientemente grande tal que

$$e(G) \geq c \frac{n^2}{2},$$

entonces existe un subgrafo  $G' \subset G$  con

$$|G'| \geq \varepsilon n \quad y \quad \delta(G') \geq (c - \varepsilon) |G'|.$$

*Demostración.* Sea  $G_n, G_{n-1}, G_{n-2}, \dots, G_t$  la secuencia de subgrafos de  $G$  obtenida de la siguiente manera:  $G_n := G$  y el grafo  $G_{n-(i+1)}$  se obtiene a partir de  $G_{n-i}$  borrando un vértice  $v \in V(G_{n-i})$  con  $d_{G_{n-i}}(v) < (c - \varepsilon) \cdot |G_{n-i}|$ ; además,  $G_t$  es el último grafo de la secuencia. Notar que  $|G_{n-i}| = n - i$ .

Afirmamos que  $t \geq \varepsilon n$  para  $n$  lo suficientemente grande, y por ende,  $G_t$  será el subgrafo que buscábamos: por construcción  $\delta(G_t) \geq (c - \varepsilon) |G_t|$ . Para eso, calculamos la cantidad total de aristas borradas para la obtención de  $G_t$ :

$$\sum_{i=0}^{n-(t+1)} d_{G_{n-i}}(v_i) < (c - \varepsilon) \sum_{i=0}^{n-(t+1)} (n - i) = (c - \varepsilon)(n - t)(n + t + 1)/2,$$

y como  $G_t$  tiene a lo más  $\binom{t}{2}$  aristas, tenemos que

$$e(G) \leq (c - \varepsilon)(n - t)(n + t + 1)/2 + \binom{t}{2}.$$

Supongamos por el absurdo que  $t \leq \varepsilon n$ . Nuestro objetivo es acotar el lado derecho:

$$\begin{aligned} e(G) &\leq (c - \varepsilon)(n - t)(n + t + 1)/2 + \binom{t}{2} = (c - \varepsilon) \frac{(n^2 + n - (t^2 + t))}{2} + \frac{t(t-1)}{2} \\ &\leq (c - \varepsilon) \frac{n^2 + n}{2} + \frac{\varepsilon n(\varepsilon n - 1)}{2} \\ &= (c - \varepsilon + \varepsilon^2) \frac{n^2}{2} + (c - 2\varepsilon) \frac{n}{2}. \end{aligned}$$



Notar que el lado derecho es un polinomio cuadrático en la variable  $n$  con coeficiente principal  $\frac{c-\varepsilon+\varepsilon^2}{2} < \frac{c}{2}$  y por lo tanto para  $n$  lo suficientemente grande, se contradice la desigualdad  $c\frac{n^2}{2} \leq e(G)$ . Así,  $t \geq \varepsilon n$ .  $\square$

**Lema 1.5.6.** Para todo  $r, t \in \mathbb{N}$  y  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $G$  es un grafo con  $n \geq n_0$  vértices y

$$\delta(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right)n$$

luego  $K_{r+1}(t) \subset G$ .

*Demostración.* Procedemos por inducción en  $r$ . Para  $r = 1$ , tenemos que  $K_2(t) = K_{t,t}$  y sabemos que en este caso  $\text{ex}(n, K_{t,t}) = o(n^2)$ . Como  $n$  es lo suficientemente grande,  $K_{t,t} \subset G$ . En efecto, se tendrá que

$$e(G) = \frac{1}{2} \sum_{v \in G} d_G(v) \geq \frac{\delta(G)n}{2} \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) \frac{n^2}{2}.$$

Ahora, supongamos que  $r \geq 2$ . Primero, encontraremos por hipótesis inductiva, una copia de  $K_r(q)$  con  $q \geq t/\varepsilon$ ; escribamos  $A := \bigcup_{i=1}^r A_i$  a la partición de los vértices de  $K_r(q)$ .

Luego, definimos  $X \subset B := V(G) \setminus A$ , el conjunto de todos los vértices que tienen al menos  $t$  vecinos en cada  $A_i$ . Mostramos que  $|X| \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Para esto, acotamos  $e(A, B)$  por abajo:

$$\begin{aligned} e(A, B) &= \sum_{v \in A} d_G(v) - 2e(A) \\ &\geq qr \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right)n - 2 \frac{(qr)^2}{2}. \end{aligned}$$

Y acotamos por arriba:

$$e(A, B) \leq |X|qr + (|B| - |X|)(q(r-1) + t - 1).$$

Juntando ambas desigualdades, tenemos:

$$\underbrace{n(qr\varepsilon - t + 1)}_{>0} + \underbrace{q^2(-r^2 + r - 1) - q(t - 1)}_{>0} \leq |X| \underbrace{(q - t + 1)}_{>0}$$

Por lo tanto, se sigue lo que queremos cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Finalmente, demostramos que existen conjuntos

$$B_i \subset A_i \text{ con } |B_i| = t \text{ y } t \text{ vértices } x \in X \text{ que satisfacen } N_G(x) \supset B_i,$$

de donde concluiremos que  $K_{r+1}(t) \subset G$ . Sea  $x \in X$ , existen a lo más  $\binom{q}{t}$  formas de elegir  $B_i^x$  en  $A_i$ , donde  $B_i^x$  satisface  $|B_i^x| = t$  y  $N_G(x) \subset B_i^x$ . Si  $|X| > \binom{q}{t}^r \cdot (t - 1)$ , entonces por el principio del palomar tenemos lo que queremos.  $\square$

*Demostración del Teorema.* Observemos que  $H$  está contenido en el grafo  $\chi(H)$ -partito, completo y con partes de tamaño  $|H|$ , es decir, en  $K_{\chi(H)}(|H|)$ . Con lo cual,

basta probar el teorema para  $H' := K_r(t)$  con  $r := \chi(H)$  y  $t := |H|$ . De hecho, probaremos que para cualquier  $r \geq 2$ ,  $t \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que:

$$\text{ex}(n, K_r(t)) \leq \left(1 - \frac{1}{r-1} + \varepsilon\right) \frac{n^2}{2} \quad (n \geq n_0).$$

Sea  $\varepsilon > 0$  arbitrariamente pequeño. Sea  $n$  lo suficientemente grande, y  $G$  con  $n$  vértices tal que

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r-1} + \varepsilon\right) \frac{n^2}{2}.$$

Aplicamos el primer lema 1.5.5 con  $c = 1 - \frac{1}{r-1} + \varepsilon$  y  $\frac{\varepsilon}{2}$ . Así, obtenemos un subgrafo  $G' \subset G$  con

$$|G'| \geq \frac{\varepsilon}{2}n \quad \text{y} \quad \delta(G') \geq \left(1 - \frac{1}{r-1} + \varepsilon\right) |G'|.$$

Como  $n$  es lo suficientemente grande:  $\frac{\varepsilon}{2}n \geq n_0$ , y por el segundo lema 1.5.6,  $G'$  contiene a  $K_r(t)$ , y por lo tanto  $G$  también. El resultado se sigue.  $\square$

**Definición 1.5.7.**  $G$  está  $t$ -cerca de ser  $r$ -partito si existe un subgrafo  $r$ -partito de  $G$  con al menos  $e(G) - t$  aristas.

**Teorema 1.5.8** (Teorema de Estabilidad de Erdős-simonovits). *Para todo grafo  $H$  con  $e(H) \geq 1$ , para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que: si  $G$  es  $H$ -libre en  $n$ -vértices y*

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} - \delta\right) \binom{n}{2}.$$

*Entonces  $G$  está  $(\varepsilon n^2)$ -cerca de ser  $(\chi(H) - 1)$ -partito.*

Haremos la demostración con  $H = K_{r+1}$  y para  $H$  general lo haremos con el Lema de Regularidad 1.7.5.

Para todo  $\varepsilon > 0$  lo suficientemente chico, existe  $\delta > 0$  tal que: si  $G$  es  $K_{r+1}$ -libre en  $n$ -vértices y

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right) \binom{n}{2},$$

entonces  $G$  está  $(\varepsilon n^2)$ -cerca de ser  $r$ -partito.

Requerimos probar dos lemas previos:

**Lema 1.5.9.** *Sea  $r \in \mathbb{N}$  y  $\delta > 0$  y  $n$  suficientemente grande. Si  $G$  es  $K_{r+1}$ -libre con  $n$  vértices y*

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} - \delta^2\right) \frac{n^2}{2},$$

*entonces existe  $G' \subset G$  con  $|G'| \geq (1 - \delta)n$  y*

$$\delta(G') \geq \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right) |G'|.$$

*Demostración.* De la demostración del Lema 1.5.5 se deduce un enunciado más fuerte:

Dados  $r \in \mathbb{N}$  y  $c \in (0, 1)$ . Para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo grafo  $G$  con  $n \geq n_0$  vértices y

$$e(G) \geq c \frac{n^2}{2},$$

existe un subgrafo  $G_t \subset G$  con  $|G_t| = t \geq \varepsilon n$  y  $\delta(G_t) \geq (c - \varepsilon)|G_t|$ ; más aún,

$$e(G) \leq e(G_t) + (c - \varepsilon)(n - t)(n + t + 1)/2.$$

Ahora, dado  $\delta > 0$ , el cual sin pérdida de generalidad lo podemos asumir  $\delta < \frac{1}{2}$ , tomamos  $c := (1 - \frac{1}{r} - \delta^2) > 0$  y  $\varepsilon = \delta - \delta^2 > 0$ . Supongamos que  $G$  es un grafo con  $n$  vértices  $K_{r+1}$ -libre, y

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} - \delta^2\right) \frac{n^2}{2} = c \frac{n^2}{2},$$

luego existe un subgrafo  $G_t \subset G$  con  $t \geq (\delta - \delta^2)n$  vértices. Como en la demostración de la Observación 1.5.4 se ve que  $t_r(t) \sim (1 - \frac{1}{r}) \frac{t^2}{2}$  ( $t \rightarrow \infty$ ), podemos suponer que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$ , entonces  $t_r(t) \leq (1 - \frac{1}{r} + \gamma) \frac{t^2}{2}$ , para  $\gamma := \frac{\delta^2}{2}$ .

Ahora, como  $G$  es  $K_{r+1}$ -libre, entonces  $G_t$  también y se tiene que

$$e(G_t) \leq \text{ex}(t, K_{r+1}) \leq t_r(t) \leq \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\delta^2}{2}\right) \frac{t^2}{2},$$

por el Teorema de Turán 1.1.6. Juntando esto con lo mencionado al principio, tenemos que

$$\begin{aligned} c \frac{n^2}{2} &\leq e(G) \leq e(G_t) + (c - \varepsilon)(n - t)(n + t + 1)/2 \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\delta^2}{2}\right) \frac{t^2}{2} + (c - \varepsilon)(n - t)(n + t + 1)/2 \\ &= \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\delta^2}{2}\right) \frac{t^2}{2} + (c - \varepsilon) \frac{(n^2 + n - t^2 - t)}{2}, \end{aligned}$$

esto implica que para  $n$  lo suficientemente grande de tal suerte que  $\frac{(c - \varepsilon)}{2}n \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{n^2}{2}$ ,

$$\varepsilon \frac{n^2}{4} \leq (\delta + \frac{\delta^2}{2}) \frac{t^2}{2}.$$

Reemplazando  $\varepsilon = \delta - \delta^2$  en la última desigualdad, y despejando  $t$ :

$$\sqrt{\frac{\delta - \delta^2}{2\delta + \delta^2}} n \leq t.$$

Como la expresión de la izquierda es más grande que  $(1 - \delta)$  cuando  $\delta < \frac{1}{2}$ , se sigue que para todo  $n$  lo suficientemente grande,

$$|G_t| = t \geq (1 - \delta)n.$$

Es decir,  $G_t$  es el subgrafo  $G'$  de  $G$  que cumple las propiedades deseadas del enunciado.  $\square$

**Lema 1.5.10.** Para todo  $r \in \mathbb{N}$ , para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $G$  es  $K_{r+1}$ -libre con  $n$  vértices y

$$\delta(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right)n,$$

entonces existe una partición  $V(G) = A_0 \sqcup A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_r$  tal que  $|A_0| \leq \varepsilon n$  y  $A_i$  son conjuntos independientes para todo  $i \geq 1$ .

*Demostración.* Si tomamos  $\delta > 0$  lo suficientemente pequeño, entonces  $G$  contiene una copia de  $K_r$  por el Teorema de Turán 1.1.6 (esto ocurre si  $e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r-1}\right) \frac{n^2}{2}$ ; tomar  $\delta < \frac{1}{r-1} - \frac{1}{r}$  y notar que en la demostración de la Observación 1.5.4 se ve que  $t_r(t) \sim \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{t^2}{2}$  ( $t \rightarrow \infty$ )).

Sea  $A$  un conjunto de vértices que induce un  $K_r$  en  $G$ . Sean  $B := V(G) \setminus A$  y  $X := \{v \in V(G) \mid |N_G(v) \cap A| \leq r-2\}$ , vamos a mostrar que  $X$  es pequeño.

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right)nr - r(r-1) &\leq e(A, B) & \left(2e(A) + e(A, B) = \sum_{v \in A} d_G(v) \geq r \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right)n\right) \\ &\leq (r-1)((n-r) - |X|) + (r-2)|X| = (r-1)(n-r) - |X|, \end{aligned}$$

manipulando la desigualdad, obtenemos:

$$|X| \leq \delta nr.$$

Tomando  $\delta < \min\{\frac{\varepsilon}{r}, \frac{1}{r-1} - \frac{1}{r}\}$ , el  $A_0$  será  $X$  y los conjuntos independientes son:

$$A_u = \{u\} \cup \{v \in B \setminus X \mid uv \notin E(G)\}$$

para cada  $u \in A$ . □

Ahora estamos en condiciones de demostrar el Teorema de Estabilidad de Erdos-Simonovits para  $H = K_{r+1}$  1.5:

*Demostración del Teorema de Estabilidad de Erdos-Simonovits para  $H = K_{r+1}$  1.5.* Sea  $\varepsilon > 0$  chico, tomemos  $\delta = (\delta')^2$  donde  $\delta'$  se obtiene del Lema 1.5.10 con  $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2}$ . Notar que de la demostración podemos suponer que si  $\varepsilon > 0$  es chico, luego  $\delta' < \frac{\varepsilon'}{2}$  también. Por hipótesis

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} - (\delta')^2\right) \frac{n^2}{2},$$

entonces por el Lema 1.5.9: existe  $G' \subset G$  con  $n' := |G'| \geq (1 - \delta')n$  y  $\delta(G') \geq \left(1 - \frac{1}{r} - \delta'\right)|G'| = n'$ . Por el Lema 1.5.10: para  $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2}$  se tiene que existe  $A_0, A_1, \dots, A_r$  partición de  $G'$  con  $|A_0| < \varepsilon'n' \leq \varepsilon'n$  y  $A_i$  conjuntos independientes para todo  $i \geq 1$ . Así el subgrafo generado por los  $A_i$  con  $i \geq 1$  es  $r$ -partito. Además, para obtener este subgrafo, hay que quitar a lo más

$$\varepsilon'n^2 + \varepsilon'n^2 < \varepsilon n^2 \quad (\delta, \delta' \ll 1)$$

aristas de  $G$ , es decir,  $G$  está  $\varepsilon n^2$ -cerca de ser  $r$ -partito. En efecto, las aristas de  $G[V(G) \setminus V(G')]$  junto con  $E_G(V(G'), V(G) \setminus V(G'))$  aportan  $\leq \binom{\delta'n}{2} + n' \cdot (n - n') \leq \delta'n^2 + \delta'n^2 \leq \varepsilon'n^2$ , y las de  $G[V(A_0)]$  junto con  $E_G(V(A_0), V(G) \setminus V(A_0))$  aportan

$$\leq \binom{\varepsilon'n}{2} + (\varepsilon'n) \cdot (\delta')n \leq \varepsilon'n^2.$$

□

## 1.6. Ejercicios

**Ejercicio 1.6.1.** Púebel el teorema de Mantel de manera alternativa. Considere un conjunto independiente  $B$  de tamaño máximo en un grafo  $K_3$ -libre y la suma de los grados de los vértices que no están en  $B$ .

*Solución.* Sea  $G$  un grafo  $K_3$ -libre con orden  $n$  y  $B$  un conjunto independiente de  $G$  de tamaño máximo; consideremos  $A := V(G) \setminus B$ . Inspeccionemos la sumatoria

$$\sum_{v \in A} d_G(v);$$

notar que  $d_G(v) = |N_G(v)|$  y que  $N_G(v)$  es un conjunto de vértices aislados en  $G$ : si  $x, y$  son dos vecinos de  $v$  entonces  $xy \notin E(G)$  porque de lo contrario  $G$  tendría un triángulo  $xyv$ . Así, como  $|B|$  es máximo, se sigue que  $|N_G(v)| \leq |B|$ . Esto implica que

$$\sum_{v \in A} d_G(v) \leq |A| |B|.$$

Más aún, como  $A, B$  particionan  $V(G)$ :  $|A| + |B| = n$ . Luego  $|A| \cdot |B|$  se maximiza cuando  $|A| |B| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = t_2(n)$ . Así,

$$e(G) = e(A, B) + e(A) \leq e(A, B) + 2e(A) = \sum_{v \in A} d_G(v) \leq t_2(n),$$

como queríamos probar. □

**Comentario 1.6.2.** Que  $|A| \cdot |B|$  con  $|A| + |B| = n$  se maximiza cuando  $|A| \cdot |B| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  se deduce de que reemplazando  $|B| = n - |A|$ , el problema equivale a maximizar  $|A| \cdot (n - |A|)$ . Más formalmente, el problema equivale a maximizar  $f(x) = x(n - x)$  con  $x$  número natural en el intervalo  $[0, n]$ . Simplemente notemos que  $f'(x) = n - 2x$ , luego  $f$  es creciente en  $[0, \frac{n}{2}]$  y decreciente en  $[\frac{n}{2}, n]$ , pero como  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  es el mayor número entero  $\leq \frac{n}{2}$ ,  $f$  alcanza máximo en  $[0, \frac{n}{2}]$  cuando  $x = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ , similarmente,  $f$  alcanza máximo en  $[\frac{n}{2}, n]$  cuando  $x = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ . Como  $f(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) = f(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil)$ , se sigue que  $f$  se maximiza en  $x = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  y  $x = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ , es decir, el valor máximo de  $f$  es  $f(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ .

**Ejercicio 1.6.3.** Demuestre que si  $G$  es un grafo con  $n = 2k + 1$  vértices, entonces  $G$  contiene un camino de largo  $k$ , digamos  $P_k$ , o el complemento de  $G$  tiene un triángulo.

*Solución.* Supongamos por el absurdo que ninguna de las dos situaciones pasa. Por un lado, si el complemento  $\overline{G}$  de  $G$  no contiene triángulos, el Teorema de Mantel nos dice que

$$e(\overline{G}) \leq \text{ex}(n, K_3) \leq k(k + 1).$$

Como  $(2k + 1)k = \binom{n}{2} = e(G) + e(\overline{G})$ , deducimos que

$$k^2 \leq e(G).$$

Por otro lado, si  $G$  no contiene  $P_k$ -caminos, el Teorema de Erdős & Gallai dice que

$$e(G) \leq \text{ex}(n, P_k) \leq \frac{(k - 1)n}{2} = \frac{(k - 1)(2k + 1)}{2}.$$

Juntando ambas desigualdades, llegamos al absurdo:

$$k^2 \not\leq \frac{(k-1)(2k+1)}{2}.$$

Por lo tanto,  $G$  contiene un  $P_k$ -camino o  $\overline{G}$  un triángulo.  $\square$

**Ejercicio 1.6.4.** Demuestre que si  $T$  es un árbol con  $k$  vértices, entonces  $T \subseteq G$  o el complemento de  $G$  contiene un triángulo si  $n := |G| = 2k - 1$ .

*Solución.* Supongamos por el absurdo que  $G$  es un grafo con  $n = 2k - 1$  vértices que no contiene a un árbol  $T$  con  $k$  vértices, y que  $\overline{G}$ , su complemento, no contiene triángulos. En particular, la primera suposición implica que  $\delta(G) \leq k - 2$  por el siguiente lema, cuya demostración vimos en clase:

*Sean  $t \in \mathbb{N}$  y  $T$  un árbol con  $t + 1$  vértices. Entonces si  $G$  es un grafo con  $\delta(G) \geq t$ , luego contiene a  $T$  como subgrafo.*

Mientras que la segunda suposición ( $\overline{G}$  no tiene triángulos), implica que dado un vértice  $w \in V(G)$ , entonces para cada par de vértices  $w', w''$  no adyacentes a  $w$  se tiene que  $w'w'' \in E(G)$ . En otras palabras, para todo  $w \in V(G)$ , el subgrafo  $G[A_w]$  inducido por el conjunto  $A_w := V(G) \setminus \{N_G(w) \cup \{w\}\}$  es completo; notar que como  $|A_w| = n - (d_G(w) + 1)$ , este grafo es isomorfo a  $K_{n-d_G(w)-1}$ .

Finalmente, para llegar al absurdo, consideremos  $v \in V(G)$  un vértice con grado  $d_G(v) = \delta(G) \leq k - 2$ , entonces  $G[A_v]$  es un subgrafo de  $G$  isomorfo a  $K_{n-\delta(G)-1}$ , i.e. un completo con al menos

$$n - \delta(G) - 1 = (2k - 1) - \delta(G) - 1 \geq (2k - 1) - (k - 2) - 1 = k$$

vértices, luego contiene una copia de  $T$ , con lo cual  $G$  también: absurdo. Consecuentemente,  $G$  contiene una copia de  $T$  o  $\overline{G}$  tiene triángulo(s).  $\square$

*Solución.* [Segunda solución] Otra manera de resolver el ejercicio es haciendo inducción  $k \geq 1$ : supongamos que  $G$  es un grafo de orden  $2k - 1$  con  $\overline{G}$  libre de triángulos, probaremos que  $T \subset G$  para cualquier árbol  $T$  de orden  $k$ . El caso  $k = 1$  es trivial.

En general, supongamos que  $k \geq 2$  y tomemos una hoja  $h$  de  $T$ , consideremos  $T' := T \setminus \{h\}$  y escribamos  $p \in T'$  para el padre de  $h$  en  $T$ . Ahora, si  $G$  es completo ya ganamos, pues  $K_{2k-1} \supset T$ , con lo cual podemos suponer que existen  $v, w \in V(G)$  tales que  $vw \notin G$ , y consideremos  $G' := G \setminus \{v, w\}$ . Notar que  $\overline{G'}$  es  $K_3$ -libre y  $G'$  tiene orden  $2(k-1) - 1$ , luego por hipótesis inductiva  $G'$  contiene a  $T'$ . Por otro lado,  $p \in T'$  tiene que ser vecino de  $w$  o de  $v$  en  $G$ , de lo contrario  $\overline{G}$  tendría un triángulo! Esto prueba que  $T \subset G$ .  $\square$

**Ejercicio 1.6.5.** Pruebe que si  $e(G) > n^2/4$ , entonces  $G$  contiene al menos  $\lfloor n/2 \rfloor$  triángulos.

*Solución.* El Teorema de Füredi (2015) dice:

*Sean  $n, t \in \mathbb{N}$ , y  $G$  con  $n$  vértices. Si  $G$  está  $t$ -lejos de ser bipartito, entonces hay al menos*

$$\frac{n}{6} \left( e(G) - \frac{n^2}{4} + t \right)$$

*triángulos en  $G$ .*

Sea  $H \subset G$  el subgrafo bipartito con cantidad de aristas  $e(H)$  máxima de  $G$ . Como  $e(H) \leq \frac{n^2}{2} < e(G)$ , tenemos que  $H \subsetneq G$ ; y podemos escribir  $t := e(G) - e(H) \geq 1$ . En particular, como  $e(H)$  es máximo, tenemos que  $G$  está  $t$ -lejos de ser bipartito. Con lo cual, el Teorema de Füredi implica que  $G$  contiene al menos

$$\frac{n}{6} \left( e(G) - \frac{n^2}{4} + t \right)$$

triángulos; en particular, si  $e(G) - \frac{n^2}{4} + t \geq 3$  ganamos, pues en este caso habrían al menos  $\frac{n}{2} \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  triángulos. Por otro lado, esta cantidad es menor que 3 si y solo si  $t = 1$  y  $H = T_2(n)$ . En este caso,  $H = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$ . Tomemos una arista  $f \in E(G) \setminus E(H)$ , con lo cual  $f$  tiene sus extremos en una de las dos particiones de  $H$ ; en el peor de los casos está en la partición más grande, es decir, para todo vértice  $v$  de la partición de  $H$  con menor cantidad de vértices:  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , se forma un triángulo distinto con vértices  $v$  y los extremos de  $f$ . En particular,  $G$  contiene en este caso al menos  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  triángulos.  $\square$

**Ejercicio 1.6.6.** Sean  $G$  y  $H$  grafos. Demuestre que si  $G$  tiene  $n$  vértices y al menos  $2 \cdot \text{ex}(n, H)$  aristas, entonces  $G$  contiene al menos  $\text{ex}(n, H)$  copias de  $H$ .

*Solución.* Supongamos que  $G$  no contiene  $e := \text{ex}(n, H)$  copias de  $H$ , luego quitando una arista por cada copia de  $H$  en  $G$  obtenemos un grafo  $H$ -libre con al menos  $e(G) - (e - 1) \geq 2e - (e - 1) = e + 1$  aristas. Sin embargo, por definición de  $e$ , se sigue que este grafo tiene a lo más  $e$  aristas, absurdo. Esto prueba que  $G$  tiene al menos  $e$  copias de  $H$ .  $\square$

**Ejercicio 1.6.7.** Sea  $k \in \mathbb{N}$  y  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande. Demuestre que todo grafo  $G$  con  $n$  vértices y al menos  $n^2/4$  aristas contiene un grafo  $H$  con al menos  $k$  vértices y  $\delta(H) \geq \frac{|H|}{2}$ .

*Solución.* Probaremos un enunciado más fuerte:

*Sea  $k \in \mathbb{N}$  y  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande. Entonces todo grafo  $G$  con  $n$  vértices y al menos  $\frac{n^2}{4}$  aristas contiene a  $H := K_{k,k}$ .*

Esto prueba el ejercicio pues el grafo  $H := K_{k,k}$  tiene  $2k \geq k$  vértices y  $\delta(H) = k = \frac{v(H)}{2}$ .

Ahora probemos este enunciado más fuerte. Para eso utilizaremos el Teorema de Kövani, Sós, y Turán (abreviado “KST”):

*Sean  $s, t \in \mathbb{N}$ ,  $s \leq t$ . Entonces existe una constante  $c = c(s, t) > 0$  tal que*

$$\text{ex}(n, K_{s,t}) \leq c \cdot n^{2-\frac{1}{s}}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

lo aplicamos al caso  $s = t = k$ .

Así, el Teorema de KST dice que

$$\text{ex}(n, H) \leq c \cdot n^{2-\frac{1}{k}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

con  $c > 0$  una constante que depende solo de  $k$ . Tomando  $n_0 \in \mathbb{N}$  para que  $\frac{n^2}{4} > cn^{2-\frac{1}{k}}$  valga para todo  $n \geq n_0$ , se sigue que  $G$  siempre debe tener a  $H$  como subgrafo: de lo contrario se llegaría al absurdo:

$$\frac{n^2}{4} \leq e(G) \leq \text{ex}(n, H) \leq cn^{2-\frac{1}{k}}.$$

□

*Solución.* [Segunda solución] Por el Lema 1.3.3,  $G$  contiene un subgrafo  $H'$  tal que

$$\delta(H') > \varepsilon(H') \geq \varepsilon(G).$$

Como  $\varepsilon(G) = \frac{e(G)}{|G|} \geq \frac{n}{4}$ , se tiene que para  $n$  lo suficientemente grande,  $H'$  contiene a  $K_{1,k}$ , y por lo tanto  $H := K_{1,k}$  sirve. En efecto,

$$\delta(H) = k \geq \frac{k+1}{2} = \frac{|H|}{2}.$$

□

## 1.7. Regularidad

**Definición 1.7.1.** Dada una partición de los vértices de un grafo  $G$ , digamos  $V(G) = X \sqcup Y$ , definimos la **densidad** del par  $(X, Y)$  como la cantidad

$$d(X, Y) := \frac{e(X, Y)}{|X||Y|}.$$

**Definición 1.7.2.** Dado  $\varepsilon > 0$ . Sean  $A, B \subset V(G)$  con  $G$  un grafo. Diremos que el par  $(A, B)$  es  $\varepsilon$ -**regular** si para todo  $X \subset A, Y \subset B$  con

$$|X| \geq \varepsilon |A| \quad \text{e} \quad |Y| \geq \varepsilon |B|$$

tenemos

$$|d(X, Y) - d(A, B)| \leq \varepsilon.$$

**Definición 1.7.3.** Sea  $G$  un grafo. Una partición  $V(G) = V_0 \sqcup V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_k$ , se dice **equipartición**, si

$$|V_0| \leq |V_1| = |V_2| = \cdots = |V_k|.$$

Al conjunto  $V_0$  lo llamamos **conjunto excepcional**.

**Definición 1.7.4.** Sea  $G$  un grafo con  $n$  vértices y  $\varepsilon > 0$ . Diremos que una partición  $V(G) = V_0 \sqcup V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_k$  es  $\varepsilon$ -**regular**, si  $|V_0| \leq \varepsilon n$  y a lo más  $\varepsilon k^2$  pares  $(V_i, V_j)$  con  $1 \leq i, j \leq k$  no son  $\varepsilon$ -regulares.

**Teorema 1.7.5** (Lema de Regularidad de Szemerédi). *Para todo  $\varepsilon > 0$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , existe  $M = M(\varepsilon, m) \in \mathbb{N}$  tal que para cualquier grafo  $G$  con  $|G| \geq M$ , existe una equipartición  $\varepsilon$ -regular*

$$V(G) = V_0 \sqcup V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_k$$

con  $m \leq k \leq M$ .



*Demostración.*

**Definición 1.7.6.** Dado un grafo  $G$  con  $n$  vértices y partición de sus vértices  $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ , definimos la **media cuadrática** del par  $(V_i, V_j)$  para cada  $i \neq j$  como

$$d_2(V_i, V_j) := \frac{e(V_i, V_j)^2}{|V_i||V_j|n^2},$$

y la **media cuadrática** de la partición  $\mathcal{P}$  como

$$d_2(\mathcal{P}) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} d_2(V_i, V_j) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \frac{|V_i||V_j|}{n^2} d(V_i, V_j)^2 \leq 1.$$

**Definición 1.7.7.** Una partición  $\mathcal{P}'$  de  $G$  se dice que **refina** a una partición  $\mathcal{P}$  (o que es un **refinamiento** de  $\mathcal{P}$ ) si cada parte de  $\mathcal{P}$  es una unión de algunas partes de  $\mathcal{P}'$ .

**Lema 1.7.8.** Si  $\mathcal{P}'$  es un refinamiento de  $\mathcal{P}$ , entonces

$$d_2(\mathcal{P}') \geq d_2(\mathcal{P}).$$

**Lema 1.7.9.** Sea  $G$  un grafo y  $\mathcal{P}$  una partición de  $V(G)$ . Si  $(X, Y)$  es un par no  $\varepsilon$ -regular en  $\mathcal{P}$ . Entonces, existen particiones  $\{X_1, X_2\}$  de  $X$  y particiones  $\{Y_1, Y_2\}$  de  $Y$  tales que

$$\sum_{1 \leq r, s \leq 2} \frac{|X_r||Y_s|}{n^2} \cdot d(X_r, Y_s)^2 \geq d(X, Y)^2 + \varepsilon^4.$$

**Lema 1.7.10.** Sea  $G$  un grafo con  $n$  vértices y  $\mathcal{P}$  partición de  $G$  que no es  $\varepsilon$ -regular. Entonces existe un refinamiento  $\mathcal{P}'$  de  $\mathcal{P}$  tal que:

$$(I) \quad d_2(\mathcal{P}') \geq d_2(\mathcal{P}) + \varepsilon^5.$$

$$(II) \quad \#\mathcal{P}' \leq k \cdot 2^{k-1}.$$

Ahora, veamos la demostración del teorema. Sea  $\mathcal{P}_0 = \{V_0, V_1, \dots, V_m\}$  una partición de  $G$  con  $\underbrace{|V_0|}_{1 \leq |V_0| \leq m-1} = n - n \lfloor \frac{n}{m} \rfloor$  y  $|V_i| = \lfloor \frac{n}{m} \rfloor$  para todo  $i = 1, \dots, m$ . Si  $\mathcal{P}_0$  no

es  $\varepsilon$ -regular, existe  $\mathcal{P}_1$  refinamiento de  $\mathcal{P}_0$  tal que  $d_2(\mathcal{P}_1) \geq d_2(\mathcal{P}_0) + \varepsilon^5$  y

$$|\mathcal{P}_1| \leq m \cdot 2^m.$$

Ahora, obtenemos una equipartición de  $\mathcal{P}'_1$  a partir de  $\mathcal{P}_1$ : particionando cada parte de  $\mathcal{P}_1$  en conjuntos de tamaño

$$\frac{\frac{\varepsilon^6}{2}n}{\#\mathcal{P}_1},$$

y un conjunto despreciable de tamaño  $< \frac{\varepsilon^6}{2}n$ . En total, el conjunto de los vértices despreciados lo agregamos al *conjunto excepcional*  $V_0$ , es decir, agregamos  $< \frac{\varepsilon^6}{2}n$  vértices. Afirmamos que  $\mathcal{P}'_1$  está acotado por arriba por algo que depende de  $\varepsilon$  y  $m$ :

$$\#\mathcal{P}'_1 \leq \frac{n}{\frac{\varepsilon^6}{2}} / \#\mathcal{P}_1 = \frac{2\#\mathcal{P}_1}{\varepsilon^6} \leq \frac{m2^{m+1}}{\varepsilon^6}.$$

Por el primer lema,  $d_2(\mathcal{P}'_1) \geq d_2(\mathcal{P}_1) \geq d_2(\mathcal{P}_0) + \varepsilon^5$ .

Si no obtenemos una partición  $\varepsilon$ -regular, entonces continuamos refinando, para así obtener una secuencia de equiparticiones:

$$\mathcal{P}_0, \mathcal{P}'_1, \mathcal{P}'_2, \dots, \mathcal{P}'_k.$$

Como  $d(\mathcal{Q}) \leq 1$  para cualquier partición  $\mathcal{Q}$  de  $G$ , y  $d_2(\mathcal{P}_{i+1}) \geq d_2(\mathcal{P}'_i) + \varepsilon^5$ , tenemos que  $k \leq \varepsilon^{-5}$ . Entonces, luego de a lo más  $\varepsilon^{-5}$  iteraciones, habremos encontrado una partición  $\varepsilon$ -regular con una cantidad de partes acotada por  $M$  que solamente depende de  $m$  y  $\varepsilon$ . Por último, el conjunto excepcional de dicha partición es

$$\leq (m-1) + \frac{\varepsilon^6 n}{2} \varepsilon^{-5} < \varepsilon n.$$

□

**Corolario 1.7.11.** *Se puede probar el Teorema de Erdős-Stone 1.5.2:*

*Dado un grafo  $H$ , para todo  $\delta > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $G$  es un grafo con  $n \geq n_0$  vértices y*

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \delta\right) \frac{n^2}{2},$$

*entonces  $H \subset G$ , donde  $r = \chi(H) - 1$ .*

La idea de la demostración del corolario será la siguiente:

Tomemos  $\delta > 0$  arbitrariamente pequeño, aplicamos el Lema de Regularidad de Szemerédi con  $\varepsilon$  lo suficientemente pequeño y  $m > \frac{1}{\varepsilon}$ . Así existe  $M \in \mathbb{N}$ , y obtenemos una equipartición  $\varepsilon$ -regular

$$V(G) = V_0 \coprod V_1 \coprod \dots \coprod V_k,$$

con  $M \geq k \geq m > \frac{1}{\varepsilon}$ , de cualquier grafo  $G$  con  $|G| \geq M$ .

Borramos de  $G$  todas las aristas sobre las que “no hay control”:

- (a) Las que ven a  $V_0$ .
- (b) Aristas dentro de las partes  $V_i$  con  $i \geq 1$ .
- (c) Las aristas entre pares no  $\varepsilon$ -regulares.
- (d) Aristas entre pares no densos, i.e., “tenemos menos que  $\delta/2$  densidad”.

Después, obtenemos el grafo reducido  $R$ : dado por contraer cada  $V_i$  a un vértice  $w_i$  con  $i \geq 1$ , y borrar aristas múltiples. Así,  $R$  tiene conjunto de vértices  $w_1, \dots, w_r$  donde  $w_i w_j \in E(R)$  sii  $(V_i, V_j)$  es  $\varepsilon$ -regular y denso.

Aplicamos lemas de inmersión en “aristas” de grafo - grafo reducido:

$$\text{Si } H \subset R \quad \Rightarrow \quad H \subset G.$$

**Lema 1.7.12.** *Sea  $V_0 \coprod V_1 \coprod \dots \coprod V_k$  una partición  $\varepsilon$ -regular de un grafo  $G$  de  $n$  vértices, con  $k \geq \frac{1}{\varepsilon}$ . Entonces, hay un máximo de:*

- (a)  $\varepsilon n^2$  aristas con un extremo en  $V_0$ .
- (b)  $\varepsilon n^2$  aristas dentro de una parte  $V_i$  con  $i \geq 1$ .
- (c)  $\varepsilon n^2$  aristas entre pares (con  $i, j \neq 0$ ) que no son  $\varepsilon$ -regulares.
- (d)  $\delta n^2$  aristas entre pares (con  $i, j \neq 0$ ) de densidad  $< \delta$ .

*Demostración.* (a) Como  $|V_0| \leq \varepsilon n$  entonces hay a lo más

$$\varepsilon n(1 - \varepsilon)n + \binom{\varepsilon n}{2} < \varepsilon n^2 \text{ aristas en (a).}$$

(b) Cada  $V_i$  tiene  $\leq \frac{n}{k}$  vértices (pues estamos en una equipartición), y entonces hay a lo más  $k \cdot \binom{\frac{n}{k}}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} n^2$  aristas para (b).

(c) Hay a lo más  $\varepsilon k^2$  pares que no son  $\varepsilon$ -regulares y cada par tiene a lo más  $\left(\frac{n}{k}\right)^2$  aristas entre sí. Consecuentemente, aportan a lo más  $\varepsilon k^2 \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^2 = \varepsilon n^2$  aristas en (c).

(d) En el peor caso, los  $\binom{k}{2}$  pares son poco densos. En este caso, por definición de densidad:

$$e(V_i, V_j) \leq \delta \left(\frac{n}{k}\right)^2, \quad \forall 1 \leq i, j \leq k,$$

y entonces, hay a lo más  $\delta \left(\frac{n}{k}\right)^2 \binom{k}{2} \leq \delta n^2$  aristas en pares “poco densos”, i.e., en (d). □

**Lema 1.7.13.** Sea  $\varepsilon > 0$ , y sea  $(A, B)$  un par  $\varepsilon$ -regular de un grafo  $G$ . Entonces,

$$(d(A, B) - \varepsilon) |B| \leq |N_G(v) \cap B| \leq (d(A, B) + \varepsilon) |B|$$

para todo  $v \in A$ , salvo a lo más  $2\varepsilon |A|$ .

*Demostración.* Consideremos el conjunto  $X \subset A$  de los vértices que no cumplen alguna de las dos desigualdades. Probaremos que  $|X| < 2\varepsilon |A|$  por el absurdo. Si este no fuera el caso, tendríamos que  $|X| \geq 2\varepsilon |A|$  y por lo tanto hay al menos  $\varepsilon |A|$  vértices que no cumplen la primera desigualdad o la segunda. Supongamos que estamos en el primer caso, el segundo caso es análogo. Es decir, supongamos que existe un conjunto  $X' \subset A$  con  $|X'| \geq \varepsilon |A|$  tal que para todo  $v \in X'$ ,

$$(d(A, B) - \varepsilon) |B| > |N_G(v) \cap B|.$$

Sumando en la desigualdad anterior sobre todos los  $v \in X'$ , tenemos que

$$(d(A, B) - \varepsilon) |B| |A| > e(X', B),$$

por lo tanto  $(d(A, B) - \varepsilon) > d(X', B)$ , i.e.,

$$|d(A, B) - d(X', B)| > \varepsilon.$$

Consideremos ahora  $Y' = B$ , en particular  $|Y'| \geq \varepsilon |B|$  si  $\varepsilon > 0$  es chico. Luego por  $\varepsilon$ -regularidad del par  $(A, B)$ , tenemos que

$$|d(A, B) - d(X', B)| \leq \varepsilon,$$

absurdo. □

**Lema 1.7.14** (Slicing). Sea  $\alpha \geq \varepsilon > 0$ , y sea  $(A, B)$  un par  $\varepsilon$ -regular en un grafo  $G$ . Para cualquier  $X \subset A, Y \subset B$  con

$$|X| \geq \alpha |A| \quad \text{y} \quad |Y| \geq \alpha |B|$$

se tiene que el par  $(X, Y)$  es  $\max\{\frac{\varepsilon}{\alpha}, 2\varepsilon\}$ -regular. Además, por  $\varepsilon$ -regularidad del par  $(A, B)$ , se tiene que

$$|d(X, Y) - d(A, B)| \leq \varepsilon.$$

*Demostración.* La última afirmación es clara. Veamos la primera, para eso consideremos  $\varepsilon' = \max\{\frac{\varepsilon}{\alpha}, 2\varepsilon\}$ . Sean  $Z \subset X$  y  $W \subset Y$  tales que  $|Z| \geq \varepsilon' |X|$  y  $|W| \geq \varepsilon' |Y|$ , entonces  $|Z| \geq \varepsilon |A|$  y  $|W| \geq \varepsilon |B|$ . Luego por  $\varepsilon$ -regularidad del par  $(A, B)$ , se tiene que

$$|d(Z, W) - d(A, B)| \leq \varepsilon.$$

Además, por  $\varepsilon$ -regularidad del par  $(A, B)$ , se tiene que

$$|d(X, Y) - d(A, B)| \leq \varepsilon.$$

Juntando ambas desigualdades tenemos que:

$$\begin{aligned} |d(Z, W) - d(X, Y)| &\leq |d(Z, W) - d(A, B)| + |d(X, Y) - d(A, B)| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon \leq 2\varepsilon \leq \varepsilon'. \end{aligned}$$

□

**Definición 1.7.15** (Reducido). Dado un grafo  $H$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon, \delta > 0$ , definimos

$$\mathcal{G}(H, n, \varepsilon, \delta)$$

como la familia de grafos  $G$ , tales que existe una equipartición  $V(G) = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_l$  con  $A_i$  de cardinal  $n$  e independiente, y un etiquetamiento de los vértices  $V(H) = \{w_1, \dots, w_l\}$  tal que para cada  $w_i w_j \in E(G)$ , el par  $(A_i, A_j)$  es un par  $\varepsilon$ -regular y además  $d(A_i, A_j) \geq \delta$ .

**Lema 1.7.16** (Lema de inmersión general). Para todo grafo  $H$  y todo  $\delta > 0$ , existen  $\varepsilon > 0$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que

$$G \in \mathcal{G}(H, n, \varepsilon, \delta), n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad H \subset G.$$

*Demostración.* Haremos inducción en  $|H|$ . Cuando  $|H| = 1$  es trivial. Supongamos entonces que  $|H| \geq 2$ . Escribamos  $V(H) = \{w_1, \dots, w_l\}$  y sea  $V(G) = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_l$  una partición de acuerdo a la definición de  $\mathcal{G}(H, n, \varepsilon, \delta)$ :  $(A_i, A_j)$   $\varepsilon$ -regular y  $d(A_i, A_j) \geq \delta$  para cada  $i \leq l - 1$  tal que  $w_i w_l \in E(H)$ .

Elijamos  $\varepsilon$  lo suficientemente pequeño y apliquemos el Lema 1.7.13 a cada  $(A_i, A_l)$  con  $w_i w_l \in E(H)$ : todos, excepto a lo más  $2\varepsilon |A_l|$  vértices  $v \in A_l$  satisfaciendo:

$$|N_G(v) \cap A_i| \geq (\delta - \varepsilon) \cdot |A_i|$$



Figura 1.7.5

Como  $2\epsilon |A_l| (l-1) < n$ , existe  $v \in A_l$  tal que

$$|N_G(v) \cap A_i| \geq (\delta - \epsilon) |A_i|, \quad \forall i \leq l-1$$

con  $w_i w_l \in E(H)$ . Definimos

$$\tilde{X}_i = \begin{cases} A_i \cap N_G(v) & \text{si } w_i \in N_H(w_l) \\ A_i & \text{si no,} \end{cases}$$

y por cada  $\tilde{X}_i$  construimos un subgrafo  $X_i$ , de manera que todos los  $X_i$  tengan el mismo cardinal.

Ahora, tomando  $\alpha = \delta - \epsilon \geq \epsilon > 0$ , podemos aplicar el Lema de Slicing 1.7.14 en  $X_i, X_j$  cuando  $w_i w_j \in E(H)$  para asegurar que son pares  $\max\{\frac{\epsilon}{\delta - \epsilon}, 2\epsilon\}$ -regulares y densidad al menos  $\delta - \epsilon$ . Luego queremos usar la hipótesis inductiva: sea  $H' := H \setminus \{w_l\}$  y  $G' := G[\bigcup_{i=1}^{l-1} X_i]$ . Así, existen  $\epsilon' > 0$  y  $n'_0 \in \mathbb{N}$  tales que

$$G' \in \mathcal{G}(H', n', \epsilon', \delta - \epsilon), n' \geq n'_0 \Rightarrow H' \subset G'$$

Con lo cual, si escogemos  $\epsilon$  tal que  $\max\{\frac{2\epsilon}{\delta - \epsilon}, 2\epsilon\} < \epsilon'$  y  $n_0$  lo suficientemente grande, de tal suerte que  $(\delta - \epsilon)n_0 \geq n'_0$ , tenemos por hipótesis inductiva que  $H' \subset G'$ . Por lo tanto,  $H \subset G$ .  $\square$

**Lema 1.7.17** (Lema de inmersión aplicable). Sea  $H$  un grafo y  $\delta > 0$ . Defina  $r = \chi(H)$ . Entonces, existen  $\epsilon > 0$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que

$$G \in \mathcal{G}(K_r, n, \epsilon, \delta), n \geq n_0 \Rightarrow H \subset G.$$

*Demostración.* El Lema 1.7.16 garantiza que para todo  $\delta' > 0$  existen  $\epsilon', n'_0$  tales que

$$G \in \mathcal{G}(K_r(t), n', \epsilon', \delta'), n' \geq n'_0 \Rightarrow K_r(t) \subset G,$$

donde  $t := |H|$ . Como  $H \subset K_r(t)$ , se tiene que en este caso  $H \subset G$ .

Concluimos gracias al siguiente ejercicio:

**Ejercicio 1.7.18.**

- (1) Demostrar que para todo  $\delta > 0$ ,  $n' \in \mathbb{N}$  y  $\varepsilon' > 0$ , existen  $\varepsilon$  y  $\delta'$  tales que

$$\mathcal{G}(K_r, n't, \varepsilon, \delta) \subset \mathcal{G}(K_r(t), n', \varepsilon', \delta').$$

- (2) Demostrar que para todo  $\delta > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  y  $n' \in \mathbb{N}$  es lo suficientemente grande, se tiene que si

$$G \in \mathcal{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta) \quad \text{con } n't \leq n < (n' + 1)t,$$

entonces existe un subgrafo  $G' \subset G$  tal que  $G' \in \mathcal{G}(K_r, n't, 2\varepsilon, \delta - \varepsilon)$ .

*Solución.*

- (1) Tomemos  $n = n't$ . Fijemos un etiquetamiento  $K_r = \{w_1, \dots, w_r\}$  tal que  $K_r(t) = \{w_i^j\}_{1 \leq j \leq t, 1 \leq i \leq r}$  con  $w_i^j w_{i'}^{j'} \in E(K_r(t))$  si y solo si  $w_i w_{i'} \in E(K_r)$ . Entonces si  $G \in \mathcal{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta)$ , con equipartición  $V(G) = \bigsqcup_{i=1}^r V_i$ . Se sigue que podemos sub-dividir la partición: cada  $V_i = \bigsqcup_{j=1}^t V_i^j$  en otra equipartición con partes de cardinal  $n'$ .

Ahora busquemos  $\varepsilon$  y  $\delta'$  tales que  $G \in \mathcal{G}(K_r(t), n', \varepsilon', \delta')$ . Pero si  $w_i^j w_{i'}^{j'} \in E(K_r(t))$ , entonces  $w_i w_{i'} \in E(K_r)$ , y por lo tanto el par  $(V_i, V_{i'})$  es  $\varepsilon$  regular y como  $|V_i^j| = \frac{1}{t} |V_i|$  para todo  $1 \leq j \leq t$ , el Lema de Slicing 1.7.14 garantiza que los pares  $(V_i^j, V_{i'}^{j'})$  para  $1 \leq j, j' \leq t$  son  $\max\{t\varepsilon, 2\varepsilon\}$ -regulares si  $\varepsilon$  es lo suficientemente pequeño, i.e.  $\frac{1}{t} > \varepsilon$ . En cuanto a la densidad, nuevamente el Lema de Slicing garantiza que

$$d(A_i^j, A_{i'}^{j'}) \geq d(A_i, A_{i'}) - \varepsilon \geq \delta - \varepsilon.$$

Por lo tanto, tomamos  $\varepsilon < \min\{\varepsilon'/2, \frac{1}{t}\varepsilon', \frac{1}{t}, \delta/2\}$  y  $\delta' = \delta/2$  y funciona.

- (2) Sea  $G \in \mathcal{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta)$ . Luego  $V(G) = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k$  es una equipartición de  $G$  con  $|V_i| = n$ . Consideremos cualquier subgrafo  $G'$  de  $G$  dado por quitar a cada conjunto  $V_i$  los suficientes elementos tales que los vértices de  $G'$  se equiparticionan en partes de tamaño  $n't \geq \frac{n'}{n'+1}n = (1 - \frac{1}{n'+1})n = \left(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{t} \rceil}\right)n = \alpha n$ , con  $\alpha \geq \frac{1}{2}$  para  $n'$  lo suficientemente grande ( $t$  está fijo). Luego por el Lema de Slicing 1.7.14,

$$G' \in \mathcal{G}(K_r, n't, 2\varepsilon, \delta - \varepsilon).$$

□

En efecto, para todo  $\delta > 0$ , el primer ítem dice que

$$\mathcal{G}(K_r, n't, \varepsilon, \delta'),$$

para algún  $\varepsilon$  y todo  $n' \geq n'_0$ . Luego, por el segundo ítem, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  lo suficientemente grande tal que si

$$G \in \mathcal{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta),$$

entonces existe un subgrafo  $G' \subset G$  tal que  $G' \in \mathcal{G}(K_r, n't, 2\varepsilon, \delta - \varepsilon)$ . Juntando ambas cosas obtenemos que

$$G \in \mathcal{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta), n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad H \subset G.$$

□

**Teorema 1.7.19** (Regularidad de Erdős-Stone). *Para todo grafo  $H$  con  $e(H) \geq 1$  y cada  $\delta > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que para todo grafo  $G$  con  $n \geq n_0$  vértices y*

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + 4\delta\right) \frac{n^2}{2},$$

*entonces  $H \subset G$ .*

**Comentario 1.7.20.** Como  $\delta > 0$  es arbitrario, podríamos reemplazar  $4\delta$  por  $\delta' > 0$  arbitrario en el enunciado.

*Demostración.* Tomamos  $\varepsilon > 0$  lo suficientemente pequeño dado por el Lema de inmersión aplicable 1.7.17, y aplicamos Regularidad 1.7.5 para el caso  $m \geq \frac{1}{\varepsilon}$  al grafo  $G$  con  $r = \chi(H) - 1$  satisfaciendo la hipótesis del enunciado. Obtenemos una partición  $V(G) = V_0 \sqcup V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k$  con  $m \leq k \leq M$  una equipartición  $\varepsilon$ -regular. Sea  $G'$  el grafo obtenido a partir de  $G$  borrando todas “las aristas sobre las que no hay control” con parámetro  $\varepsilon$  (regularidad) y  $\delta$  (densidad). Así, tenemos que  $G'$  tiene al menos  $e(G) - (3\varepsilon + \delta)n^2$  aristas por el Lema 1.7.12. Sea  $R$  el “grafo reducido”, se tiene

$$G' \in \mathcal{G}(R, n', \varepsilon, \delta)$$

con  $n' := \frac{n - |V_0|}{k}$ . Por lo tanto, si  $K_{r+1} \subset R$ , entonces por el lema de inmersión aplicable 1.7.17 tendríamos que  $H \subset G'$ . En efecto, quitando algunas particiones de  $V(G')$ , obtenemos un subgrafo  $G'' \subset G'$  tal que  $G'' \in \mathcal{G}(K_{r+1}, n', \varepsilon, \delta)$ .

Supongamos ahora que  $K_{r+1} \not\subset R$ . Luego por el Teorema de Turán 1.1.6:

$$e(R) \leq t_r(k) \sim \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{k^2}{2} \quad (k \rightarrow \infty),$$

es decir, achicando  $\varepsilon$  de ser necesario para que  $k$  sea grande y  $t_r(k) \leq \left(1 - \frac{1}{r} + \delta\right) \frac{k^2}{2}$ . Se tiene que

$$e(G') \leq \left(1 - \frac{1}{r} + \delta\right) \frac{k^2}{2} \cdot \frac{n^2}{k^2} = \left(1 - \frac{1}{r} + \delta\right) \frac{n^2}{2}.$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} e(G) &\leq \left(1 - \frac{1}{r} + \delta\right) \frac{n^2}{2} + 2(3\varepsilon + \delta) \frac{n^2}{2} \\ &= \left(1 - \frac{1}{r} + 6\varepsilon + 3\delta\right) \frac{n^2}{2} \\ &< \left(1 - \frac{1}{r} + 4\delta\right) \frac{n^2}{2}, \end{aligned}$$

absurdo. □

Segunda aplicación del Lema de Regularidad de Szémeredi 1.7.5:

**Teorema 1.7.21** (Erdős-Simonovits). *Para todo grafo  $H$ , y para todo  $\delta > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $G$  es un grafo  $H$ -libre con  $n \geq n_0$  vértices y*

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} - \delta\right) \frac{n^2}{2},$$

*entonces  $G$  está  $(5\delta n^2)$ -cerca de ser  $(\chi(H) - 1)$ -partito.*

**Comentario 1.7.22.** Notar que este enunciado es equivalente al enunciado que vimos antes: 1.5.8.

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$  lo suficientemente pequeño (que depende de  $H$  y  $\delta$ ). Aplicamos el Lema de Regularidad de Szémeredi 1.7.5 para  $\varepsilon$  y  $m \geq \frac{1}{\varepsilon}$ ; obtenemos la equipartición  $\varepsilon$ -regular  $V(G) = V_0 \sqcup V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_k$  con  $m \leq k \leq M$  para todo grafo con  $|G| \geq M$ .

Luego consideramos el “grafo reducido”  $R$  con parámetros  $\varepsilon$  y  $\delta$ , y vértices  $w_1, \dots, w_k$ . Sea  $r = \chi(H) - 1$ . Si  $K_{r+1} \subset R$ , entonces  $H \subset G$  por el Lema de Inmersión aplicable 1.7.17, lo cual nos lleva a una contradicción. Es decir,  $R$  es  $K_{r+1}$ -libre.

Elijamos  $t = 3\delta k^2$ . Si  $e(R) < t_r(k) - t$ , entonces por el Lema 1.7.12, tenemos:

$$\begin{aligned} e(G) &\leq (\delta + 3\varepsilon)n^2 + e(R) \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^2 \\ &< (\delta + 3\varepsilon)n^2 + \left( \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{k^2}{2} - 3\delta k^2 \right) \frac{n^2}{k^2} \\ &= \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{n^2}{2} + \underbrace{(3\varepsilon - 2\delta)}_{< -\frac{\delta}{2}} n^2 \\ &< \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{n^2}{2} - \frac{\delta}{2} n^2, \end{aligned}$$

contradicción.

Con lo cual, el Teorema de Estabilidad de Füredi 1.4.4 nos permite suponer que  $R$  está  $t$ -cerca de ser  $r$ -partito. Es decir, hay una  $r$ -partición

$$V(R) = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_r$$

con a lo más  $t$  aristas dentro de las partes. Utilizando nuevamente el Lema 1.7.12 para acotar las aristas despreciables de la partición de  $G$ , y acotando las aristas dentro de las partes de la partición de  $R$ , concluimos que es posible borrar a lo más

$$\underbrace{t \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^2}_{\leq 3\delta n^2} + \underbrace{(\delta + 3\varepsilon)n^2}_{\leq 2\delta n^2} \leq 5\delta n^2$$

aristas para obtener una  $r$ -partición de  $G$ . □

**Lema 1.7.23** (Lema de conteo general). *Para todo grafo  $H$ , y todo  $\delta > 0$ , existen  $\varepsilon > 0$  y  $M \in \mathbb{N}$  tales que si*

$$G \in \mathcal{G}(H, n, \varepsilon, \delta)$$

*para algún  $n \geq M$ , entonces  $G$  contiene al menos*

$$\frac{\delta^{e(H)} \cdot n^{|H|}}{2}$$

*copias de  $H$ .*



*Demostración.* Haremos inducción en  $|H|$ , y de hecho nuestra hipótesis inductiva será más fuerte:

Para todo grafo  $H$ , y todo  $\delta > 0$ , existen  $\varepsilon > 0$  y  $M \in \mathbb{N}$ , tales que si

$$G \in \mathcal{G}(H, n, \varepsilon, \delta)$$

para algún  $n \geq M$ , y más aún, dada una equipartición  $G = V_1 \coprod \cdots \coprod V_l$  indexada según  $H = \{w_1, \dots, w_l\}$  con  $(V_i, V_j)$   $\varepsilon$ -regular y  $d(v_i, V_j) \geq \delta$  siempre y cuando que  $w_i w_j \in E(H)$ , se tiene que hay al menos

$$\frac{\delta^{e(H)} \cdot n^{|H|}}{2}$$

copias de  $H$ , de tal forma que los vértices  $x_j$  correspondientes a un  $w_j$  vía un isomorfismo con  $H$  pertenezcan a  $V_j$  para todo  $j = 1, \dots, l$ .

Si  $|H| = 1$ , la afirmación es inmediata. Si  $|H| = 2$  y no tiene aristas también es fácil. Si  $|H| = 2$  y  $e(H) = 1$ , luego basta probar que existen al menos  $\delta \frac{n^2}{2}$  aristas en  $E(V_0, V_1)$ . Pero tomando  $\varepsilon < \min\{\delta/4, 1/8\}$ , la  $\varepsilon$ -regularidad del par  $(V_0, V_1)$  junto con  $d(V_0, V_1)$  implican que existen vértices  $v \in V_1$  tales que

$$(\delta - \varepsilon)n \leq |N_G(v) \cap V_0|$$

salvo  $2\varepsilon n$  vértices por el Lema 1.7.13. Es decir,  $E(V_0, V_1)$  tiene al menos

$$(\delta - \varepsilon)(1 - 2\varepsilon)n^2 \geq \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}\right)\delta n^2 \geq \frac{1}{2}\delta n^2$$

aristas, como queríamos.

En general, supongamos que  $|H| \geq 3$ . Si  $G \in \mathcal{G}(H, n, \varepsilon, \delta)$  para  $n \geq M$ , entonces  $G = V_1 \coprod \cdots \coprod V_l$  con  $V_i$  todos de cardinal  $n$  y para la escritura  $H = \{w_1, \dots, w_l\}$ ,  $w_i w_j \in E(H)$  si y solo si  $(V_i, V_j)$  es  $\varepsilon$ -regular y  $d(V_i, V_j) \geq \delta$ .

Consideremos  $H' = H \setminus \{w_l\}$  y  $G' := G \setminus V_l$ , entonces  $G' \in \mathcal{G}(H', n, \varepsilon, \delta)$  y por hipótesis inductiva existe  $M'$  tal que si  $n \geq M'$ , entonces  $G'$  contiene al menos

$$\frac{\delta^{e(H')} \cdot n^{|H'|}}{2}$$

copias de  $H'$ , donde cada copia tiene su vértice correspondiente a  $w_j$  en la parte  $V_j$  para cada  $j < l$ . Ahora, por el Lema 1.7.13, para todo  $v \in V_l$ , salvo  $2\varepsilon n$  vértices, se tiene que

$$(\delta - \varepsilon)n \leq |N_G(v) \cap V_j|, \quad \forall j < l.$$

Por lo tanto, tenemos al menos  $(1 - 2\varepsilon(l - 1))n$  vértices en  $V_l$ , cada uno con al menos  $(\delta - \varepsilon)n$  vecinos en cada  $V_j$  con  $j < l$ , y por lo tanto,  $(\delta - \varepsilon)n(l - 1)$  vecinos en  $G$ .

En el peor de los casos, todos los vértices que no son vecinos de  $v$  en  $V_j$  pertenecen a una de estas copias de  $H'$  para cada  $j < l$ , luego este  $v$  forma al menos  $\frac{\delta^{e(H')} \cdot n^{l-1}}{2} - (1 - (\delta - \varepsilon))n(l - 1)$  copias de  $H$  en  $G$ . Es decir,  $G$  tiene al menos

$$\left( \frac{\delta^{e(H')} \cdot n^{l-1}}{2} - (1 - (\delta - \varepsilon))n(l - 1) \right) (1 - 2\varepsilon(l - 1))n$$

copias de  $H$ , donde cada copia tiene su vértice correspondiente a  $w_j$  en la parte  $V_j$  para cada  $1 \leq j \leq l$ . Así, basta probar que tomando  $M \gg M'$  y  $\varepsilon > 0$  lo suficientemente chico, esta cantidad es  $\geq \frac{\delta^{e(H)} \cdot n^l}{2}$ .

En efecto, esto equivale a que

$$\left( \frac{\delta^{e(H')} \cdot n^{l-1}}{2} - (1 - (\delta - \varepsilon))n(l-1) \right) (1 - 2\varepsilon(l-1)) \geq \frac{\delta^{e(H)} \cdot n^{l-1}}{2}$$

si y solo si,

$$\frac{\delta^{e(H')} \cdot n^{l-1}(1 - 2\varepsilon(l-1))}{2} - \frac{\delta^{e(H)} \cdot n^{l-1}}{2} \geq (1 - (\delta - \varepsilon))(l-1)(1 - 2\varepsilon(l-1))n.$$

Es decir, hay que probar

$$\left( \delta^{e(H')}(1 - 2\varepsilon(l-1)) - \delta^{e(H)} \right) \frac{n^{l-2}}{2} \geq (1 - (\delta - \varepsilon))(l-1)(1 - 2\varepsilon(l-1)).$$

Pero como  $l \geq 3$ , se sigue que si  $\varepsilon > 0$  es lo suficientemente chico (por ejemplo  $\varepsilon < \frac{1 - \delta^{e(H)} - \delta^{e(H')}}{2(l-1)}$ ), existe  $M$  con  $M \geq M'$  lo suficientemente grande, tal que si  $n \geq M$ , el lado izquierdo es más grande que el lado derecho (que no depende de  $n$ ) pues

$$\left( \delta^{e(H')}(1 - 2\varepsilon(l-1)) - \delta^{e(H)} \right) > 0.$$

□

**Apliación 3 del Lema de Regularidad de Szemerédi 1.7.5:**

**Teorema 1.7.24** (Teorema de Roth). *Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$  y  $A \subset \{1, \dots, n\}$  con  $|A| > \varepsilon n$ , entonces  $A$  contiene una 3-progresión aritmética<sup>4</sup>.*

**Lema 1.7.25** (Lema de remoción de triángulos). *Para todo  $\alpha > 0$ , existe  $\beta > 0$  tal que todo grafo  $G$  con  $n$  vértices y a lo más  $\beta n^3$  triángulos, puede ser  $K_3$ -libre borrando a lo más  $\alpha n^2$  aristas*

*Demostración.* Tomemos  $0 < \delta < \frac{\alpha}{3}$  y  $\varepsilon < \frac{\delta}{9}$  lo suficientemente chico. Aplicamos el Lema de Regularidad de Szemerédi 1.7.5 con parámetros  $\varepsilon$  y  $m \geq \frac{1}{\varepsilon}$ , obteniendo una partición de un grafo  $G$  con  $|G| \geq M \geq k \geq m$ ,

$$V(G) = V_0 \sqcup V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k.$$

Consideremos el grafo reducido  $R$  con parámetros  $\varepsilon$  y  $\delta$ . Notar que el subgrafo  $G' := G \setminus V_0 \subset G$  cumple que  $G' \in \mathcal{G}(R, n', \varepsilon, \delta)$  con  $n' \geq \frac{(1-\varepsilon)n}{k} \geq \frac{1-\varepsilon}{M}n$ .

Supongamos que  $R$  tiene al menos un triángulo  $K_3$ . Entonces  $G'$  tiene un subgrafo  $G''$  dado por quedarnos solamente con las partes  $V_i, V_j, V_k$  correspondientes a vértices  $w_i, w_j, w_k$  que forman un triángulo en  $R$ ; en particular,  $G'' \in \mathcal{G}(K_3, n', \varepsilon, \delta)$ . Aplicando el Lema de conteo general 1.7.23 para  $H = K_3$  y el subgrafo  $G'' \in \mathcal{G}(H, n', \varepsilon, \delta)$ , tenemos que  $G''$ , y por lo tanto  $G$ , tiene al menos:

$$\delta^3 \cdot \left( \frac{(1-\varepsilon)n}{k} \right)^3 > \frac{\delta^3 (1-\varepsilon)^3}{2 M^3} \cdot n^3 > \beta n^3$$

<sup>4</sup>En general, una  **$k$ -progresión aritmética** es una secuencia de enteros  $a, a+d, a+2d, \dots, a+(k-1)d$ .

triángulos para  $n$  lo suficientemente grande, donde  $\beta < \frac{\delta^3 (1-\varepsilon)^3}{2M^3}$ . Achicando  $\beta$  de ser necesario, podemos asumir que  $n$  es arbitrario.

Con lo cual, si  $G$  tiene a lo más  $\beta n^3$  triángulos, el párrafo anterior nos dice que  $R$  no tiene triángulos. Así, al remover  $\leq (\delta + 3\varepsilon)n^2 < \alpha n^2$  aristas de  $G$  (ver Lema 1.7.12), nos quedamos sin triángulos.  $\square$

**Teorema 1.7.26** (Teorema de Roth). *Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$  y  $A \subset \{1, \dots, n\}$  con  $|A| > \varepsilon n$ , entonces  $A$  contiene una 3-progresión aritmética.*

*Demostración.* Vamos a probar que si  $A$  no contiene una 3-progresión aritmética, entonces  $|A| = o(n)$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ , y  $n$  lo suficientemente grande, supongamos que  $|A| \geq \varepsilon n$  y que no contiene 3-progresiones aritméticas. Definimos un grafo  $G$  con  $V(G) = X \sqcup Y \sqcup Z$ , disjuntos y  $|X| = |Y| = |Z| = 3n$  cada conjunto  $X, Y, Z$  es una copia de  $\{1, \dots, 3n\}$ .

$$E(X, Y) = \{xy \mid x \in X, y \in Y, y = x + a \text{ para algún } a \in A\}.$$

$$E(Y, Z) = \{yz \mid y \in Y, z \in Z, z = y + a \text{ para algún } a \in A\}.$$

$$E(X, Z) = \{xz \mid x \in X, z \in Z, z = x + 2a \text{ para algún } a \in A\}.$$

Si  $xyz$  es un triángulo en  $G$ , entonces existen  $a, a', a'' \in A$  tales que

$$\begin{cases} y = x + a, & a \in A \\ z = y + a', & a' \in A \\ z = x + 2a'', & a'' \in A, \end{cases}$$

y esto es una 3-progresión aritmética  $a, a'' = a + (a' - a''), a' = a + 2(a' - a'')$  si  $a, a', a''$  son distintos. Como  $A$  no tiene 3-progresiones aritméticas, entonces cada triángulo en  $G$  es de la forma  $xyz$  con  $y = x + a, z = x + 2a$ . Lo cual implica que cada triángulo queda completamente determinado por  $x$  y  $a$ . Consecuentemente  $G$  tiene a lo más

$$3n|A| \leq 3n^2 = o(n^3)$$

triángulos.

Por el Lema de Remoción de Triángulos 1.7.25, es posible borrar  $o(n^2)$  aristas de  $G$  para obtener un grafo libre de triángulos. Ahora, vamos a obtener una cota por abajo de la cantidad de triángulos arista disjunto que tiene  $G$ : consideremos el conjunto de tripletas de la forma  $(x, x+a, x+2a)$ , con  $x \in X, a \in A$ . Observar que cada tripleta corresponde con un triángulo de  $G$  y todos son arista-disjuntos entre sí, por lo tanto  $G$  contiene al menos  $3n|A| > 3\varepsilon n^2$  triángulos disjuntos y por lo tanto si o si deben ser quitados para que  $G$  sea libre de triángulos. Contradiciendo el Lema de Remoción de Triángulos.  $\square$

# Capítulo 2

## Teoría de Ramsey

**Notación 2.0.1.** Cuando nos refiramos a una  $r$ -**coloración** de un grafo  $G$ , será una función  $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, r\}$  que a cada arista  $e \in E(G)$ , le asigna un **color**  $c(e)$  (No necesariamente la coloración es *propia*, es decir, pueden existir aristas adyacentes con el mismo color).

**Notación 2.0.2.** Sea  $G$  un grafo con una coloración  $c$ . Entonces dado un vértice  $v \in V(G)$ , podemos considerar los vecinos  $w$  de  $v$  tales que  $c(vw) = i$ . Notaremos a este subconjunto de vecinos de  $v$  como  $N_G^i(v)$ , o simplemente  $N^i(v)$  cuando el contexto sea claro.

La teoría de Ramsey se motiva mediante el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 2.0.3.** Toda 2-coloración de  $K_6$  genera un triángulo monocromático.

*Demostración.* Sea  $v \in V(K_6)$ . Hay al menos 3 aristas incidentes a  $v$  que tienen el mismo color, digamos rojo, por el principio del palomar. Si en  $N^{\text{rojo}}(v)$  hay aristas rojas, entonces hay un triángulo rojo. Si no, todas las aristas entre vértices de  $N^{\text{rojo}}(v)$  son azules. Como,  $|N^{\text{rojo}}(v)| \geq 3$ , entonces hay un triángulo azul en  $K_6[N^{\text{rojo}}(v)]$ , y por lo tanto había un triángulo azul en  $K_6$ .  $\square$

**Teorema 2.0.4** (Teorema de Ramsey (1930)). *Para todo  $k, r \in \mathbb{N}$ , existe un  $n \in \mathbb{N}$  tal que toda  $r$ -coloración de  $K_n$  genera un  $K_k$  monocromático.*

*Demostración.* Sea  $v_1 \in V(K_n)$ . Existe algún color  $c_1 \in \{1, \dots, r\}$  tal que las aristas incidentes a  $v_1$  de color  $c_1$  son al menos

$$\frac{n-1}{r},$$

escribamos  $A_1 := N_{K_n}^{c_1}(v_1)$ . Similarmente, sea  $v_2 \in K_n[A_1]$ , existe un color  $c_2 \in \{1, \dots, r\}$  tal que las aristas incidentes a  $v_2$  en  $K_n[A_1]$  son de color  $c_2$  y por lo menos hay

$$\frac{|A_1|-1}{r},$$

escribamos  $A_2 := N_{K_n[A_1]}^{c_2}(v_2)$ . Continuando este procedimiento, para  $n$  lo suficientemente grande, obtenemos una secuencia

$$v_1, c_1, v_2, c_2, v_3, c_3, \dots, v_t, c_t,$$

en donde si  $t \geq rk$ , se sigue que existe un color que se repite al menos  $k$  veces en esta secuencia, y por lo tanto, sus vértices  $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$  correspondientes forman un  $K_k$  monocromático de ese color.  $\square$

**Ejercicio 2.0.5.** Calcular una cota inferior para  $n$ .

*Solución.* Escribamos  $a_1, a_2, \dots$  para la secuencia de cardinales de los conjuntos  $A_1, A_2, \dots$ . Inspeccionando la demostración anterior, vemos que  $a_1 \geq \frac{n-1}{r}$  y que recursivamente  $a_{t+1} \geq \frac{a_t-1}{r}$ ,  $t \geq 1$ . Por lo tanto, tenemos que inductivamente:

$$a_{t+1} \geq \frac{n}{r^{t+1}} - \sum_{i=1}^{t+1} \frac{1}{r^i} = \frac{n}{r^{t+1}} - \frac{1}{r} \frac{1-r^{t+1}}{1-r}, \quad t \geq 0.$$

Con lo cual, si  $t \geq rk$  como en la demostración de arriba, se sigue que

$$n \geq a_{rk} \geq \frac{n}{r^{rk}} - \frac{1}{r} \frac{1-r^{rk}}{1-r},$$

y consecuentemente,

$$n \geq \frac{r^{rk}-1}{1-r}.$$

□

## 2.1. Números de Ramsey

**Definición 2.1.1.** El número de Ramsey  $R(k)$ , es el mínimo  $n$  tal que cualquier 2-coloración de  $K_n$  contiene una copia monocromática de  $K_k$ .

**Ejemplo 2.1.2.** En el Ejemplo 2.0.3 vimos que  $R(3) \leq 6$ . Pero de hecho, es fácil encontrar una 2-coloración de  $K_5$  que no contiene triángulos monocromáticos, y por lo tanto,  $R(3) = 6$ :

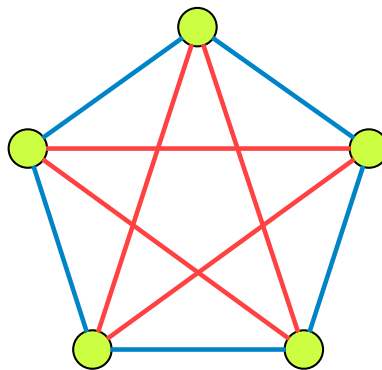


Figura 2.1.1: 2-coloración de  $K_5$  libre de triángulos monocromáticos.

**Definición 2.1.3.** Sean  $G$ ,  $H_1$  y  $H_2$  grafos, escribimos  $G \rightarrow (H_1, H_2)$  si toda 2-coloración de  $G$  con rojo-azul de  $E(G)$  contiene una copia de  $H_1$  rojo o una copia de  $H_2$  azul.

Para  $s, t \in \mathbb{N}$  definimos

$$R(s, t) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid K_n \rightarrow (K_s, K_t)\}.$$

(En particular,  $R(k) = R(k, k)$ ).

**Teorema 2.1.4** (Erdős-Szekeres (1935)). *Para todo  $k \geq 1$ , se tiene que*

$$R(k) \leq \binom{2k-2}{k-1} \leq \frac{4^{k-1}}{\sqrt{\pi(k-1)}}.$$

*Demostración.* La segunda desigualdad se deduce de una aplicación inmediata de las desigualdades probadas en [Rob55]. Concentrémonos en la primera desigualdad, y de hecho, probaremos una versión un poco más general:

$$R(s, t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}.$$

Notar que tomando  $s = t = k$  se prueba la primera desigualdad del teorema.

Para eso, necesitamos un lema previo:

**Lema 2.1.5.** *Para todo  $s, t \geq 2$ , se tiene*

$$R(s, t) \leq R(s-1, t) + R(s, t-1).$$

*Demostración.* En efecto, sea  $c$  una coloración de  $E(K_n)$  con  $n = R(s-1, t) + R(s, t-1)$ . Queremos probar que hay una copia roja de  $K_s$  o una copia azul de  $K_t$ . Sea  $v \in K_n$ , entonces hay dos casos:

**Caso 1:** Existen al menos  $R(s-1, t)$  aristas rojas incidentes a  $v$ , o

**Caso 2:** Existen al menos  $R(s, t-1)$  aristas azules incidentes a  $v$ .

En cualquier caso extendemos completos monocromáticos en el vecindario de  $v$  a un  $K_s$  rojo o un  $K_t$  azul, respectivamente.  $\square$

Ahora, probemos la desigualdad por inducción en  $s+t$ , el caso base es  $R(1, t) = R(s, 1) = 1$ . En general, si  $\min\{s, t\} \geq 2$ , tenemos que por el lema de arriba

$$\begin{aligned} R(s, t) &\leq R(s-1, t) + R(s, t-1) \\ &\leq \binom{s+t-3}{s-2} + \binom{s+t-3}{s-1} = \binom{s+t-2}{s-1}. \end{aligned}$$

$\square$

**Observación 2.1.6.** Existe una cota inferior muy mala, para valores de  $k$  grandes, del número de Ramsey:

$$R(k) \geq 2(k-1), \quad k \geq 2.$$

*Demostración.* Supongamos  $k > 3$ , pues el caso  $k = 2$  es trivial.

En efecto, sea  $n = 2(k-1)$ , entonces particionando los vértices de  $K_n$  en dos conjuntos  $A_1, A_2$  de tamaño  $k-1$ , y pintando las aristas de  $K_n[A_1]$  y  $K_n[A_2]$  de azul, pero las aristas entre  $A_1$  y  $A_2$  de rojo, obtenemos una coloración libre de  $K_k$  monocromáticos. En efecto, si existiera un  $K_k$  monocromático, entonces no puede ser azul porque cada  $A_i$  tiene  $k-1$  vértices; por otro lado no puede ser rojo porque en una partición hay al menos un vértice y en otra al menos 2 (estamos en el caso  $k > 3$ ), digamos en  $A_1$  y  $A_2$  respectivamente, entonces en  $K_n[A_2]$  debería haber una arista color rojo, absurdo.  $\square$

El siguiente teorema confirma que la cota anterior es *muy poco óptima*.

**Teorema 2.1.7** (Erdős (1947)).

$$R(k) \geq 2^{k/2}, \quad \forall k \geq 2.$$

*Demostración.* Consideremos  $K_n$  con  $n = \lceil 2^{k/2} \rceil$  y supongamos que  $k \geq 6$ , notar que los casos  $k = 2, \dots, 5$  valen por la cota de la Observación anterior 2.1.6 (que es mejor para  $k$  chico).

Tenemos exactamente

$$2^{\binom{n}{2}}$$

2-coloraciones de  $E(K_n)$ . Vamos a mostrar que la cantidad de 2-coloraciones de  $E(K_n)$  que contienen a  $K_k$  monocromático es  $< 2^{\binom{n}{2}}$ . Para eso, notar que en este caso tenemos  $\binom{n}{k}$  formas de elegir una copia de  $K_k$  y luego  $2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2} + 1}$  formas de colorear el resto de las aristas. Por lo tanto, la cantidad de 2-coloraciones que contienen un  $K_k$  monocromático es menor o igual que

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2} + 1} &\leq \left( \frac{en}{k} \right)^k 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2} + 1} \\ &\leq \left( \frac{e(2^{k/2} + 1)}{k} \right)^k 2^{-\frac{k(k-1)}{2}} 2 \cdot 2^{\binom{n}{2}}, \end{aligned}$$

pero notar que si  $k \geq 6$ , entonces

$$\left( \frac{e(2^{k/2} + 1)}{k} \right)^k 2^{-\frac{k(k-1)}{2}} \cdot 2 \leq \left( \frac{2^{k/2} + 1}{2} \right)^k 2^{-\frac{k(k-1)}{2}} \cdot 2 < 1,$$

de donde se sigue lo que queríamos. En efecto, se puede realizar un estudio cualitativo de la función para  $k \in \mathbb{R}_{\geq 6}$  utilizando cálculo elemental.  $\square$

**Definición 2.1.8.** En general, el **número de Ramsey con  $r$  colores**  $R_r(k)$  es el mínimo  $n$  tal que todo  $r$ -coloreo de  $K_n$  tiene un  $K_k$  monocromático.

**Teorema 2.1.9.** Para todo  $r \geq 2$ , se tiene que

$$2^r \leq R_r(3) \leq 3 \cdot r!.$$

*Demostración.* Primero veamos la cota inferior, para eso consideremos  $n := 2^r$  y encontraremos una  $r$ -coloración de  $K_n$  sin triángulos monocromáticos. Haremos inducción en  $r$ , si  $r = 2$  vale, pues podemos considerar la siguiente coloración:



Figura 2.1.2

Para el paso inductivo, consideremos una partición en dos partes de  $2^{r-1}$  vértices, donde el conjunto  $A$  y el  $B$  tienen  $(r-1)$ -coloraciones sin triángulos monocromáticos, por hipótesis inductiva, y luego pintamos las aristas entre  $A$  y  $B$  de color  $r$  que nunca fue utilizado.



Figura 2.1.3

Ahora veamos la cota superior. En el Ejemplo 2.0.3 vimos que  $R_2(3) \leq 6 = 3 \cdot 2!$ , así vale el caso  $r = 2$ . Supongamos ahora que  $r \geq 3$ , y que  $n = 3 \cdot r!$ , sea  $v_0 \in K_n$  fijo, y  $c$  una  $r$ -coloración de  $K_n$ . Entonces existe un color  $i \in \{1, \dots, r\}$  tal que

$$E_i^0 = |\{uv_0 \in K_n \mid c(uv) = i\}| \geq \frac{3 \cdot r!}{r} = 3 \cdot (r-1)!$$

y sea  $A := N_{K_n}^i(v_0)$ . Pueden ocurrir dos casos:

**Caso 1:** El color  $i$  aparece en una arista de  $K_n[A]$ , luego tenemos un triángulo de color  $i$ .



**Caso 2:** En  $K_n[A]$  no aparece el color  $i$ , entonces la coloración  $c$  inducida en  $K_n[A]$  es una  $(r-1)$ -coloración, con lo cual por hipótesis inductiva existe un triángulo monocromático en  $K_n[A]$ , en particular en  $K_n$ .



Figura 2.1.4: Ilustración del Caso 1.

□

**Definición 2.1.10.** El **número de Ramsey de  $H_1$  versus  $H_2$**  está definido por:

$$r(H_1, H_2) = \min\{n | K_n \rightarrow (H_1, H_2)\}.$$

En particular, escribimos  $r(H) := r(H, H)$ .

**Teorema 2.1.11.**

$$r(K_3, P_k) = 2k + 1.$$

*Demostración.* Primero acotaremos por abajo: sea  $n = 2k$ , consideramos la siguiente coloración de  $K_n$ :



Figura 2.1.5

Particionamos  $K_n$  en dos partes de  $k$  vértices cada una y pintamos las aristas de color azul, y las aristas entre ambas particiones las pintamos de rojo. Claramente no hay caminos de longitud  $k$  de color azul porque las particiones tienen  $k$  vértices y no hay triángulos rojos porque las aristas rojas inducen un grafo bipartito.

Para la cota superior, consideremos  $K_n$  con  $n = 2k + 1$ . Sea  $P$  un camino maximal de color azul; supongamos que  $|V(P)| \leq k$  y entonces  $B := V(K_n) \setminus V(P)$  tiene al menos  $k + 1$  vértices. Sea  $v_0$  un extremo de  $P$ , por maximalidad  $v_0$  está conectado a cada vértice de  $B$  por aristas rojas. Tenemos dos casos:

**Caso 1:** Si en  $K_n[B]$  hay aristas rojas entonces hay un triángulo de color rojo (con un vértice  $v_0$ ).

**Caso 2:** Si en  $K_n[B]$  no hay aristas rojas, entonces todas las aristas son azules y por lo tanto hay una copia de  $K_{k+1}$  azul, y por lo tanto contiene a  $P_k$  de color azul. □

**Teorema 2.1.12.** Sea  $T_k$  un árbol con  $k$  aristas (i.e.,  $k + 1$  vértices). Entonces

$$r(K_3, T_k) = 2k + 1.$$

*Demostración.* Para la primera desigualdad se puede aplicar un razonamiento similar a la demostración del teorema anterior. Veamos entonces solo la cota superior.

Sea  $n = 2k + 1$  y consideremos  $K_n$  con una coloración. Supongamos entonces que existe un vértice  $v$  de grado rojo al menos  $k + 1$ . Entonces la vecindad  $N^{\text{rojo}}(v)$  induce un  $K_{k+1}$  que si tiene alguna arista roja entonces existe un triángulo rojo en  $K_n$ , y si no,  $K_n$  contiene un  $K_{k+1}$  con aristas azules y en particular contiene un  $T_k$  azul.



Figura 2.1.6

Ahora, supongamos que todo vértice tiene grado rojo  $\leq k$ . Esto implica que el grado mínimo del subgrafo azul inducido es  $\geq k$ , y por lo tanto el Lema 1.3.2 nos permite encontrar una copia de  $T_k$  en el subgrafo azul inducido, en particular  $K_n$  tiene una copia azul de  $T_k$ . □

**Teorema 2.1.13** (Chvátal (1977)). Sea  $T_k$  un árbol con  $k$  aristas, y sea  $s \geq 2$ . Entonces

$$r(K_{s+1}, T_k) = s \cdot k + 1.$$

*Demostración.* Primero veamos la cota inferior: sea  $n = s \cdot k$ , consideremos la siguiente coloración de  $K_n$ : el grafo azul consiste de  $s$  copias de  $K_k$  y las aristas rojas son las aristas entre los vértices de las copias de  $K_k$ .



Figura 2.1.7

Para la cota superior, haremos inducción en  $s \geq 2$ . Si  $s = 2$ , tenemos que  $r(K_3, T_k) \leq 2k + 1$  por el teorema anterior. Supongamos ahora que  $s \geq 3$ . Sea  $n = s \cdot k + 1$ . Sea  $v$  un vértice con grado rojo  $\geq (s - 1)k + 1$ , y sea  $A$  la vecindad roja de  $v$ . Por hipótesis inductiva en  $K_n[A]$ , hay una copia de  $K_s$  rojo, o una copia de  $T_k$  azul y ganamos. Así, podemos asumir que el grado rojo de cada vértice es  $\leq (s - 1)k$ . Esto implica que el grafo azul tendrá grado mínimo  $\geq (s \cdot k + 1) - 1 - (s - 1)k \geq k$ . Con lo cual contiene una copia de  $T_k$  por el Lema 1.3.2.  $\square$

**Teorema 2.1.14.** Para todo  $k \in \mathbb{N}$  se tiene que

$$r(P_k) = \left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil.$$

*Demostración.* Veamos primero la cota inferior. Sea  $n := \left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil - 1$ . Consideremos un  $K_k$  azul en  $K_n$  y escribamos  $A$  al conjunto de sus vértices; el resto de las aristas las pintamos de rojo. Notar que  $B := V(K_n) \setminus V(K_k)$  cumple

$$|B| < \frac{k}{2}.$$

Así,  $K_n$  no tiene un  $P_k$  azul. Veamos que tampoco tiene un rojo:

Tomemos un camino rojo  $P$ , luego no puede tener dos vértices adyacentes de  $A$  (pues  $K_n[A]$  es un completo azul). Por lo tanto en el peor de los casos  $P$  tiene  $|B|$

vértices de  $B$  tales que entre cada par consecutivo de estos hay un vértice de  $A$ . O sea,

$$|P| \leq 2|B| + 1 < k + 1.$$

Es decir, tampoco tiene un  $P_k$  rojo.



Figura 2.1.8: Ilustración de esta situación.

Veamos ahora la cota superior. Vamos a probar un resultado un poco más general haciendo inducción en  $k$ :

Sea  $k \geq l \geq 1$  y sea  $n = k + \lceil \frac{l}{2} \rceil$ , entonces

$$K_n \longrightarrow (P_k, P_l)$$

Notar que el caso  $k = l$  implica la cota superior.

Consideremos una coloración de  $K_n$ . Sea  $P$  un camino rojo maximal y supongamos que  $|P| \leq k$ . Por maximalidad, cada extremo forma aristas azules con cada vértice de  $V(G) \setminus V(P)$ .

Nuestro caso base es  $1 \leq l \leq k \leq 3$ , donde vale la afirmación:



Figura 2.1.9

Ahora veamos el paso inductivo. Supongamos que  $4 \leq l < k$ . Por hipótesis inductiva, tenemos que  $K_n \longrightarrow (P_{k-1}, P_l)$  y por lo tanto sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe un  $(k-1)$ -camino rojo en  $K_n$ , digamos  $P = v_1 v_2 \cdots v_k$ . Escribamos  $U := V(K_n) \setminus V(P)$ ; sabemos que  $|U| = \lceil \frac{l}{2} \rceil$ . Notemos lo siguiente:

- (I) Las aristas entre  $v_1, v_k$  y  $U$  son azules.
- (II) Para cada par de vértices consecutivos  $v_i v_{i+1}$  en  $P$  y cada  $u \in U$ , existe una arista azul en  $\{v_i u, v_{i+1} u\}$ , pues de lo contrario habríamos encontrado un  $P_k$  rojo.

Sean  $Q_1$  y  $Q_2$  caminos azules vértice-disjuntos de longitud impar (i.e., cantidad par de vértices) que alternan vértices de  $v_2, \dots, v_k$  y  $U$ . Tomemos  $Q_1$  maximal, y sujeto a esto, tomemos  $Q_2$  maximal. Por paridad de la longitud de  $Q_1$  y  $Q_2$ , ambos tienen exactamente un extremo en  $U$ , digamos  $x$  e  $y$ , respectivamente. Tenemos dos casos:

**Caso 1:**  $Q_1$  y  $Q_2$  cubren  $U$ , es decir,  $U \subset Q_1 \cup Q_2$ . Con lo cual, podemos construir un  $l$ -camino azul considerando  $Q_1 x v_1 y Q_2$ . Luego supongamos que estamos en:

**Caso 2:** Existe  $z \in U \setminus (Q_1 \cup Q_2)$ .

Observemos que  $v_k \in Q_1$ , de lo contrario podríamos extender  $Q_1$  con las aristas azules  $v_k z$  y  $v_k x$ . Notemos que  $Q_1 \cup Q_2$  contiene a lo más  $|U| - 1$  vértices de  $P$ , y

$$|U| - 1 < \frac{k-1}{2}.$$

Con lo cual, en  $\{v_2, \dots, v_{k-1}\}$  hay  $\frac{k-1}{2} - 2 < \lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor$  vértices de  $Q_1 \cup Q_2$ . Así, existe un par de vértices consecutivos  $v_i, v_{i+1}$  con  $2 \leq i \leq k-2$  tales que  $v_i, v_{i+1} \notin Q_1 \cup Q_2$ . Sin embargo, por el ítem (ii), existen existen dos aristas azules entre  $v_i$  o  $v_{i+1}$  y alguno de los siguientes conjuntos:  $\{x, y\}$ ;  $\{y, z\}$ ; o  $\{x, z\}$ . Esto contradice la maximalidad de  $Q_1$  y  $Q_2$ , ya que podríamos extender algunos de estos caminos, y por ende el caso 2 no puede ocurrir.

Finalmente veamos el caso  $k = l \geq 4$ . Por hipótesis inductiva, tenemos que  $K_n \longrightarrow (P_k, P_{k-1})$  y y por simetría se tiene  $K_n \longrightarrow (P_{k-1}, P_k)$ . Con lo cual, existe un  $(k-1)$ -camino rojo, digamos  $P_r = v_1 \cdots v_k$ , y un  $(k-1)$ -camino azul, digamos  $P_a = w_1 \cdots w_k$ . Si alguno de estos caminos se pudiera extender monocromáticamente habríamos terminado, con lo cual supongamos que son maximales monocromáticos. Notar que por maximalidad, debe ser que  $\{v_1, v_k\} = \{w_1, w_k\}$ , de lo contrario podríamos extender monocromáticamente alguno de los dos caminos; digamos que  $v_1 = w_1$  y  $v_k = w_k$ .

Ahora bien, tenemos que

$$n = k + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \geq |V(P_r) \cup V(P_a)| = |V(P_r)| + |V(P_a)| - |V(P_r) \cap V(P_a)| = 2k - |V(P_r) \cap V(P_a)|.$$

Consecuentemente,  $|V(P_r) \cap V(P_a)| \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil$ . Hay dos opciones:

**Opción 1:**  $|V(P_r) \cap V(P_a)| > \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ . En este caso existe  $z \in V(K_n) \setminus (V(P_r) \cup V(P_a))$ , y por lo tanto  $z v_1 = z w_1$  es una arista de color rojo o azul, y en cualquier caso podemos extender  $P_r$  o  $P_a$  monocromáticamente, contradiciendo la maximalidad de los caminos.

**Opción 2:**  $|V(P_r) \cap V(P_a)| = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ . En este caso  $P_r \cup P_a = K_n$  y de hecho, deben existir dos vértices interiores consecutivos de  $P_r$ , digamos  $v_i v_{i+1}$  con  $1 < i < k$ , tales que no son vértices de  $P_a$ ; similarmente, existen dos vértices interiores consecutivos de  $P_a$ , digamos  $w_j w_{j+1}$  con  $1 < j < k$ , tales que no son vértices de  $P_r$ .

Más aún, la arista  $v_1 v_k = w_1 w_k$  es de color rojo o azul, digamos rojo (el otro caso es análogo). Con lo cual, tenemos un ciclo rojo  $C_r := v_1 P_r v_k v_1$  de longitud  $k$ , y por lo tanto, podemos suponer que todas las aristas incidentes a  $C_r$  tienen que ser azules, si no habríamos encontrado un  $k$ -camino rojo. Pero luego las aristas  $w_j v_i$  y  $w_{j+1} v_i$  son azules, y podemos alargar  $P_a$  a un  $k$ -camino azul:

$$w_1 \cdots w_j v_i w_{j+1} \cdots w_k,$$

contradiciendo la maximalidad de  $P_a$ . Como hemos agotado todos los casos, se concluye la demostración.  $\square$

## 2.2. El problema con un final feliz

**Proposición 2.2.1** (El problema de E. Klein (1930)). *Para todo  $k \in \mathbb{N}$ , existe  $n = n(k) \in \mathbb{N}$  tal que dados  $n$  puntos en posición general del plano (i.e. no hay 3 puntos colineales). Entonces el conjunto de puntos contiene  $k$  puntos en posición convexa.*

*Demostración del caso  $k = 4$  y  $n = 5$ .* Ella probó este caso<sup>1</sup>. Consideramos la cápsula convexa de los 5 puntos, si los vértices son 4 o 5 de estos puntos ya ganamos, si no, existen dos puntos que están contenidos en el interior del triángulo convexo (formado por 3 de estos puntos como vértices). Luego simplemente consideramos la recta que une a estos dos puntos interiores, la cual interseca a dos lados distintos del triángulo, y por lo tanto hay 4 puntos en posición convexa:



$\square$

El caso general se resolvió utilizando el *Teorema de Ramsey Generalizado*, que enunciamos luego de algunas definiciones:

<sup>1</sup>El cual fue bautizado como “El problema con un final feliz” por Paul Erdős, debido a que llevó al casamiento de George Szekeres y Esther Klein.

**Notación 2.2.2.** Dado  $n \in \mathbb{N}$ , notamos al conjunto  $[n] := \{1, \dots, n\}$ .

**Notación 2.2.3.** Sea  $A$  un conjunto arbitrario, y  $s \in \mathbb{N}$ , notamos al conjunto:

$$\binom{A}{s} := \{S \subset A \mid |S| = s\}.$$

**Definición 2.2.4.** Una  $r$ -**coloración de subconjuntos** de  $[n]$  de tamaño  $s$ , es una función

$$c : \binom{[n]}{s} \longrightarrow \{1, \dots, r\}.$$

Diremos que  $A \in \binom{[n]}{s}$  es **monocromático** (respecto de  $c$ ), si  $c(S) = c(S')$  para todo  $S \in \binom{A}{s}$ .

**Teorema 2.2.5** (Teorema de Ramsey Generalizado). *Para todo  $k, r, s \in \mathbb{N}$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que toda  $r$ -coloración de  $\binom{[n]}{s}$  contiene un conjunto monocromático de tamaño  $k$ .*

**Comentario 2.2.6.** Nosotros probamos el caso  $K_n$  en lugar de  $\binom{[n]}{s}$  con  $s = 2$  y  $K_k$  monocromático.

*Continuación de la demostración del problema de E. Klein.* Falta probar el caso  $k \geq 5$ . Tomemos una coloración rojo-azul  $c$  del conjunto  $\binom{[n]}{4}$ . Y coloreemos  $c(S)$  de rojo si y solo si los puntos de  $S$  están en posición convexa. Por el Teorema de Ramsey Generalizado 2.2.5, existe  $n$  tal que  $B \subset [n]$  es monocromático y  $|B| = k$ . Hay dos casos:

**Caso 1:**  $B$  es rojo, y por lo tanto todos los subconjuntos de tamaño 4 de  $B$  tienen color rojo, i.e., están en posición convexa. Ahora, los puntos de  $B$  están en posición convexa, de lo contrario, podríamos encontrar un punto de  $B$  en el interior de un triángulo con vértices de  $B$  (notar que esto vale por no-colinealidad: trazamos las diagonales entre vértices del polígono convexo; el punto no puede estar en ninguna de estas rectas, i.e., está dentro de un triángulo), absurdo.

**Caso 2:**  $B$  es azul, como  $k \geq 5$ , por el resultado preliminar de Klein, existen 4 puntos en posición convexa, absurdo.

□

**Teorema 2.2.7** (Seidenberg). *Toda secuencia de  $k^2 + 1$  números reales contiene una subsecuencia monótona de largo  $k + 1$ .*

*Demostración.* Sea  $a_1, \dots, a_n$  una secuencia de números reales con  $n = k^2 + 1$ . Para cada  $i \in [n]$ , definimos un par:

$$(x_i, y_i),$$

donde  $x_i$  es el largo de la subsecuencia no decreciente más larga que termina en  $a_i$ ;  $y_i$  es el largo de la subsecuencia no creciente más larga que termina en  $a_i$ .

Para  $i \neq j$ , veamos que  $(x_i, y_i) \neq (x_j, y_j)$ . Para eso, sin pérdida de generalidad, supongamos que  $i < j$ . Tenemos dos casos:

**Caso 1:**  $a_i \leq a_j$ . Aquí se tiene que  $x_i < x_j$ .

**Caso 2:**  $a_j \leq a_i$ . Aquí se tiene que  $y_i < y_j$ .

Ahora por contradicción, si  $x_i, y_i \leq k$  para todo  $i \in [n]$ , entonces hay a lo más  $k^2$  pares distintos, sin embargo  $n = k^2 + 1$ , por lo que hay al menos un par repetido, absurdo.  $\square$

El siguiente ejercicio dice que el teorema anterior es preciso:

**Ejercicio 2.2.8.** Encontrar secuencia de números reales de largo  $k^2$  sin subsecuencias monótonas de largo  $k + 1$ .

**Teorema 2.2.9** (Chrátal, Rödl, Szemerédi & Trotter (1983)). *Para todo  $\Delta \in \mathbb{N}$ , existe una constante  $c = c(\Delta) > 0$  tal que todo grafo  $H$  con  $\Delta(H) \leq \Delta$ , satisface*

$$r(H) \leq c(\Delta) \cdot |H|.$$

*En particular, para  $n \geq c(\Delta) \cdot |H|$ , toda 2-coloración de  $K_n$  contiene un  $H$  monocromático.*

**Demostración.** La idea será aplicar el Lema de Regularidad de Szemerédi 1.7.5 y el siguiente lema de inmersión:

**Lema 2.2.10** (Un lema de inmersión). *Dados  $d \in \mathbb{N}$  y  $\delta > 0$ , existe  $\varepsilon > 0$  y  $\gamma > 0$  tales que si  $n \in \mathbb{N}$  y  $H$  es un grafo con  $\Delta(H) \leq d$  y  $|H| \leq \gamma n$ , entonces*

$$G \in \mathcal{G}(K_{d+1}, n, \varepsilon, \delta) \implies H \subset G.$$

Sea  $\Delta > 0$  y  $H$  con  $\Delta(H) \leq \Delta$ . Aplicamos este lema de inmersión con  $d = \Delta$  y  $\delta = \frac{1}{2}$ , y obtenemos parámetros  $\varepsilon$  y  $\gamma$ , tales que se cumple la conclusión del enunciado. Consideremos  $K_n$  con  $n \geq c(\Delta) \cdot |H|$  donde  $c(\delta)$  es lo suficientemente grande.

Tomemos una coloración con rojo y azul de  $K_n$ , y sean  $G_r$  y  $G_a$  los subgrafos inducidos de color rojo y azul, respectivamente. Sea  $m := r(K_{d+1})$ . Aplicamos el Lema de Regularidad de Szemerédi 1.7.5 en  $G_r$  con parámetro  $m$  y  $\varepsilon$ . Obtenemos una partición  $\varepsilon$ -regular

$$V(G_r) = V_0 \sqcup V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k,$$

con  $m \leq k \leq M$ . Notar que esta partición también es  $\varepsilon$ regular para  $G_a$  **TAREA**.

Sea  $R$  el grafo reducido con parámetros  $\varepsilon$  y densidad 0 (no nos interesa la densidad). Entonces,

$$e(R) \geq \binom{k}{2} - \varepsilon k^2 > t_{m-1}(k) = \left(1 - \frac{1}{m-1} + o(1)\right) \frac{k^2}{2} \quad (k \rightarrow 1),$$

y por lo tanto el Teorema de Turán 1.1.6,  $R \supset K_m$ . Sean ahora  $A_1, \dots, A_m$  las partes que corresponden a los vértices de  $K_m$  en  $R$ . Vamos a definir una 2-coloración  $f$  de las aristas de  $K_m$ :

$$f(ij) = \text{rojo} \iff d_{G_r}(V_i, V_j) \geq \frac{1}{2}.$$

Como  $m = r(K_{d+1})$ , existe un  $K_{d+1}$  rojo o azul, sin pérdida de generalidad suponemos que es rojo en  $K_m$ . Reindexando los  $A_i$ , podemos suponer que  $A_1, \dots, A_{d+1}$  corresponden a las partes de  $K_{d+1}$  de  $K_m$ . El grafo inducido

$$G' = G_r[A_1 \cup \dots \cup A_{d+1}]$$



satisface que  $G' \in \mathcal{G}(K_{d+1}, n', \varepsilon, \delta)$ , con

$$n' = |V_1| = \cdots, |V_k| \geq \frac{n}{M}.$$

Así, elegimos  $c = c(\Delta)$  suficientemente grande (en particular,  $c \geq M/\gamma$ ), entonces

$$|H| \leq \frac{n}{c(\Delta)} \leq \frac{\gamma n}{M} \leq \gamma n',$$

con lo cual se tiene la conclusión del teorema por el lema de inmersión de arriba.  $\square$

# Capítulo 3

## El método probabilístico

En 1959, Erdős probó que *para todo entero  $k$  existe un grafo  $G$  con  $g(G) > k$  y  $\chi(G) > k$* . El enfoque que tomó fue definir un espacio de probabilidad en el conjunto de grafos con  $n$  vértices, y probar que para una medida de probabilidad adecuada, la probabilidad de que un grafo con  $n$  vértices cumpla ambas condiciones es positiva para  $n$  lo suficientemente grande. A esta técnica se le llama el **método probabilístico**, y será el eje central de este capítulo.

### 3.1. Fundamentos

**Definición 3.1.1.** Un **espacio probabilístico** es un par  $(\Omega, P)$ , donde  $\Omega$  se denomina **espacio muestral** y  $P$  la **función probabilística**, la cual cumple

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1,$$

y  $P(\omega) \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$ . A los subconjuntos  $A \subset \Omega$ , los llamamos **eventos**, y definimos la cantidad

$$P(A) := \sum_{\omega \in A} P(\omega),$$

i.e., la **probabilidad de que suceda el evento  $A$** .

Daremos ahora las propiedades básicas de un espacio probabilístico, cuyas demostraciones se ven en cualquier curso introductorio de probabilidad:

**Proposición 3.1.2.** Sea  $(\Omega, P)$  un espacio de probabilidad. Entonces:

(1) Para todo evento  $A \subset \Omega$

$$P(A) = 1 - P(\Omega \setminus A).$$

(2) Si  $A \subset B \subset \Omega$ , luego  $P(A) \leq P(B)$ .

(3) Sean  $A, B \subset \Omega$ , luego tenemos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

(4) Para una familia  $A_1, \dots, A_r \subset \Omega$ , tenemos que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

**Definición 3.1.3.** Una **distribución uniforme** (discreta), es un espacio probabilístico  $(\Omega, P)$  tal que  $P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$ . Si  $A \subset \Omega$ , entonces  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ .

**Definición 3.1.4.** Sean  $A, B \subset \Omega$ , decimos que  $A$  y  $B$  son **eventos independientes** o simplemente **independientes** si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Más generalmente, sean  $A_1, \dots, A_n \subset \Omega$ , decimos que son **independientes dos a dos**, si  $A_i$  y  $A_j$  son independientes para cada  $i \neq j$ . Por otro lado, decimos que  $A_1, \dots, A_n$  son **mutuamente independientes** si

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i).$$

Dado  $n \in \mathbb{N}$ , podemos construir un espacio probabilístico  $\mathcal{G} := \mathcal{G}(n, p) := (\Omega, P)$ , donde  $\Omega$  es el conjunto de grafos con conjunto de vértices  $V := [n]$ , y para cada posible arista  $e$ , la probabilidad de que  $e$  pertenezca a  $E(G)$  para  $G \in \Omega$  es  $p$ , y estos eventos son independientes para distintas aristas  $e \neq e'$ . Más precisamente, los eventos  $A_e := \{G \in \Omega \mid e \text{ es arista de } G\}$  con distintos  $e$ , son mutuamente independientes. Llamaremos a  $G$  un **grafo aleatorio**. (Se puede encontrar una construcción formal en el Capítulo 11 de [?]).

**Ejemplo 3.1.5.** Dado un grafo fijo  $H$  con  $k$  vértices y  $m$  aristas, consideremos el evento:  $G$  contiene a  $H$  como subgrafo. La probabilidad de que este evento suceda, es

$$\prod_{e \in H} P(A_e) = p^m.$$

Similarmente, la probabilidad de que  $H$  sea un subgrafo inducido de  $G$  es  $p^m(1-p)^{\binom{k}{2}-m}$ , pues ahora hay que considerar que las aristas que no están en  $H$  tampoco pueden estar en  $G$  (evento independiente).

**Teorema 3.1.6** (Erdős 1947). *Para todo  $k \geq 3$ , se tiene que  $R(k) > 2^{k/2}$ .*

*Demostración.* Sea  $n = 2^{k/2}$ . A cada arista  $uv$  de  $K_n$ , asignémosle la probabilidad  $P(uv) = \frac{1}{2}$  de que sea color rojo, y lo mismo color azul. El objetivo es probar de que el evento de que haya un coloreo sin  $K_k$  monocromático en  $K_n$  tiene medida positiva, de aquí se seguirá la demostración. (Notar que estamos trabajando en el espacio probabilístico  $(\Omega, P)$ , con espacio muestral  $\prod_{uv \in E(K_n)} \{\text{rojo}, \text{azul}\}$  y los eventos con aristas distintas son independientes.)

Para cada  $A \subset V(K_n)$  de tamaño  $k$ , tenemos que

$$P(A \text{ monocromático}) = 2^{-\binom{k}{2}} + 2^{-\binom{k}{2}} = 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{\binom{n}{k}} A_i\right) &\leq \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} P(A_i) \\
&= \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} \\
&\leq \frac{n^k}{k!} 2^{1-k^2/2+k/2} \\
&= \frac{2^{1+k/2}}{k!} < 1.
\end{aligned}$$

□

**Definición 3.1.7.** Un **hipergrafo  $k$ -uniforme**  $H$ , es una estructura compuesta por vértices y aristas, donde las aristas son conjuntos de  $k$ -vértices.

**Definición 3.1.8.** Decimos que un hipergrafo  $H$  es **bicolor**, si es posible colorear los vértices con dos colores, de tal manera que no hay aristas con vértices monocromáticos.



Figura 3.1.1: Bicoloración de un 3-hipergrafo  $H$  con vértices  $v_1, v_2, v_3, v_4$  y aristas  $e_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ ,  $e_2 = \{v_2, v_3, v_4\}$ ,  $e_3 = \{v_1, v_2, v_4\}$ .

**Teorema 3.1.9** (Erdős 1963). Sea  $H$  un hipergrafo  $k$ -uniforme con  $m$  aristas. Si  $m < 2^{k-1}$ , entonces  $H$  es bicolor.

*Demostración.* Sea  $H$  un hipergrafo  $k$ -uniforme. Consideramos un coloreo de cada vértice vértice con color rojo o azul, de forma independiente con probabilidad  $\frac{1}{2}$ . Consideremos  $A \in E(H)$ , luego

$$P(A \text{ monocromático}) = 2^{1-k}.$$

Escribamos  $A_i$  con  $i \in [m]$  para los vértices de cada una de las  $m$  aristas de  $H$ . Luego

$$P\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) \leq \sum_{i=1}^m P(A_i) = m \cdot 2^{1-k} < 1.$$

□

**Definición 3.1.10.** Un **torneo**  $T$  es un grafo dirigido tal que su grafo subyacente no tiene aristas paralelas.

Dado un conjunto  $S \subset V(T)$  y un vértice  $u \in V(T)$ , escribimos  $u \rightarrow S$  si  $(u, v) \in E(T)$  para todo  $v \in S$ .

Decimos que  $T$  tiene **la propiedad**  $\mathcal{T}_k$ , si para todo  $S \subset V(T)$  de tamaño  $k$ , existe un  $u \in V(T) \setminus \{S\}$  tal que  $u \rightarrow S$ .



Figura 3.1.2: Ejemplo de un torneo  $T$  con conjunto  $S \subset V(T)$  y  $u \in V(T)$  tal que  $u \rightarrow S$ .

**Teorema 3.1.11** (Erdős 1963). Si  $n \geq k^2 2^{k+1}$ , entonces existe un torneo  $T$  con  $n$  vértices con la propiedad  $\mathcal{T}_k$ .

*Demostración.* Consideremos un torneo aleatorio  $T$  con  $n$  vértices y para cada par  $u, v$  escogemos  $uv \in E(T)$  o  $vu \in E(T)$  de forma independiente con probabilidad  $\frac{1}{2}$ . Consideremos un conjunto  $S \subset V(T)$  con tamaño  $k$ . Para todo  $u \in V(T) \setminus S$

$$P(u \rightarrow S) = 2^{-k}.$$

Consideremos  $A_S$  como el evento de que todo  $u \in V(T) \setminus S$  no se cumpla que  $u \rightarrow S$ . Luego

$$P(A_S) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n-k} \{u_i \not\rightarrow S\}\right) = \prod_{i=1}^{n-k} P(\{u_i \not\rightarrow S\}) = (1 - 2^{-k})^{n-k}$$

por independencia de eventos. Ahora

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\binom{n}{k}} A_{S_i}\right) \leq \binom{n}{k} \cdot P(A_S) = \binom{n}{k} (1 - 2^{-k})^{n-k} \leq \frac{n^k}{k!} e^{-(n-k)/2^k} \leq n^k e^{-n/2^k}.$$

donde usamos que  $1 + x \leq e^x$  y que  $e^{k/2^k}/k! < 1$ . Finalmente, notar que se puede escribir el lado derecho como  $n^k e^{-n/2^k} = e^{k \log n - n/2^k}$ . Por lo tanto, basta ver que  $k \log n < n/2^k$ , equivalentemente

$$k2^k < n/\log n,$$

para probar que la probabilidad del lado izquierdo de la desigualdad de arriba es menor que 1. Este es el caso, pues el lado derecho es creciente en  $n$  y se cumple la desigualdad para  $n = k^2 2^{k+1}$ .  $\square$

## 3.2. Esperanza

**Definición 3.2.1.** Dado un espacio probabilístico  $\mathcal{G} = (\Omega, P)$ , una **variable aleatoria** (en  $\mathcal{G}$ ) es una función

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

La **esperanza** o **promedio** de  $X$  es la cantidad

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{G \in \Omega} P(\{G\}) \cdot X(G).$$

**Notación 3.2.2.** Si  $X : \mathcal{G} \rightarrow [0, +\infty)$  es una variable aleatoria en un espacio probabilístico, dada una proposición lógica  $A$ , notamos

$$P(X \text{ cumple la propiedad } A) = P(\{G \in \Omega \mid X(G) \text{ cumple la propiedad } A\}).$$

En particular,  $P(X \geq a) := P(X^{-1}([a, +\infty)))$ ,  $P(X < b) := P(X^{-1}([0, b)))$ ,  $P(X = c) := P(X^{-1}(\{c\}))$ , etc.

También diremos que  $X$  cumple la propiedad  $A$  **salvo probabilidad cero**, si

$$P(G \in \Omega \mid X(G) \text{ no cumple } A) = 0.$$

Por ejemplo,  $X \geq a$ ,  $X < b$ ,  $X = c$ , salvo probabilidad cero, si respectivamente

$$P(X \geq a) = P(X < b) = P(X = c) = 0.$$

**Observación 3.2.3.** 1. Notar que cuando  $X$  toma valores enteros, podemos calcular la esperanza de manera alternativa:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 1} P(X \geq k) = \sum_{k \geq 1} k \cdot P(X = k).$$

2. Sea  $\mathcal{H}$  un conjunto fijo de grafos en  $V$ . Y sea  $X$  la variable aleatoria tal que  $X(G)$  es la cantidad de grafos  $H \in \mathcal{H}$  que son subgrafos de  $G$ . Entonces la esperanza de  $X$  tiene dos maneras distintas de calcular (observación útil para utilizar argumentos de “conte doble”):

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{G \in \mathcal{G}} \#\{H \in \mathcal{H} \mid H \subset G\} \cdot P(\{G\}) = \sum_{H \in \mathcal{H}} P(G \in \Omega \mid G \supset H).$$

Las siguientes propiedades son fáciles de demostrar:

**Proposición 3.2.4.** Dadas variables aleatorias  $X, Y \geq 0$  de un espacio probabilístico  $G = (\Omega, P)$ , y sea  $a \geq 0$ . La esperanza cumple las siguientes propiedades:

- (I) **Positividad:**  $\mathbb{E}(X) \geq 0$ .
- (II) **Linealidad:**  $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ , y  $\mathbb{E}(a \cdot X) = a\mathbb{E}(X)$ .
- (III) **Monotonicidad:** Si  $X \leq Y$ , salvo probabilidad cero, entonces  $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$ .
- (IV) Si  $\mathbb{E}(X) = 0$ , entonces el conjunto  $B := \{G \in \Omega \mid X(G) \neq 0\}$  tiene probabilidad 0.
- (V) Si  $X = Y$ , salvo probabilidad cero, entonces  $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ .

Estas propiedades nos permiten calcular la esperanza de una variable aleatoria como ilustra el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 3.2.5.** El promedio de  $k$ -ciclos en  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  es

$$\mathbb{E}(X) = \frac{p^k}{2k} \prod_{r=0}^{k-1} (n - r).$$

*Demostración.* Consideremos la familia de  $k$ -ciclos  $\mathcal{C}_k$  en  $\mathcal{G}$ . Entonces dado  $C \in \mathcal{C}_k$  podemos considerar la variable aleatoria **función indicadora**:

$$X_C : \mathcal{G}(n, p) \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$G \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } C \subset G, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Notar que

$$\mathbb{E}(X_C) = P(X_C = 1) = P(G \in \mathcal{G}(n, p) \mid G \supset C) = p^k.$$

Por otro lado, sea  $X$  la variable aleatoria tal que  $X(G)$  es la cantidad de ciclos  $C \in \mathcal{C}_k$  contenidos en  $G$ . Entonces

$$X = \sum_{C \in \mathcal{C}_k} X_C.$$

Por linealidad (3.2.4),

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{C \in \mathcal{C}_k} \mathbb{E}(X_C) = \sum_{C \in \mathcal{C}_k} P(G \supset C) = |\mathcal{C}_k| p^k.$$

Finalmente, como por cada elección de  $k$  distintos vértices en  $V$  hay  $2k$  maneras distintas de formar un  $k$ -ciclo en  $\mathcal{G}$ , tenemos que

$$|\mathcal{C}_k| = \frac{1}{2k} \prod_{r=0}^{k-1} (n - r),$$

de donde concluimos. □

Una desigualdad útil que nos dice que la probabilidad de que  $X$  valga “mucho más respecto del promedio” es baja:

**Lema 3.2.6** (Desigualdad de Markov). Sea  $X : \mathcal{G} \rightarrow [0, +\infty)$  una variable aleatoria y  $a > 0$ . Entonces

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

*Demostración.*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{G \in \mathcal{G}} P(\{G\}) \cdot X(G) \geq \sum_{\substack{G \in \mathcal{G} \\ X(G) \geq a}} P(\{G\}) \cdot a = P(X \geq a) \cdot a.$$

□

### 3.3. Método del primer momento

**Definición 3.3.1.** Decimos que una variable aleatoria  $X$  **sigue una distribución de Bernoulli con parámetro**  $p \in [0, 1]$ , si  $P(X = 1) = p$  y  $P(X = 0) = 1 - p$ . (Notar que  $\mathbb{E}(X) = p$ ).

**Definición 3.3.2.** Dadas variables aleatorias  $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , decimos que son **independientes**, si para cualquier  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , los eventos  $\{X_i = x_i\}$  con  $i = 1, \dots, n$  son mutuamente independientes.

**Proposición 3.3.3.** Sean  $X_1, X_2$  variables aleatorias independientes, entonces

$$\mathbb{E}(X_1 \cdot X_2) = \mathbb{E}(X_1) \cdot \mathbb{E}(X_2)$$

**Definición 3.3.4.** Una variable aleatoria binomial  $X$  con parámetros  $n$  y  $p$  es la suma de  $n$  variables aleatorias mutuamente independientes de Bernoulli con parámetro  $p$ . (Notar que en este caso se tiene  $\mathbb{E}(X) = np$ ).

**Proposición 3.3.5.** Sea  $X$  una variable aleatoria. Si  $\mathbb{E}(X) \geq t$ , entonces

$$P(X \geq t) > 0.$$

**Teorema 3.3.6.** Todo grafo  $G$  tiene un subgrafo bipartito  $H \subset G$  tal que

$$e(H) \geq \frac{e(G)}{2}.$$

*Demostración.* Consideremos un conjunto aleatorio  $A \subset V(G)$ , obtenido escogiendo a cada vértice  $v \in V(G)$  de forma aleatoria e independiente con probabilidad  $\frac{1}{2}$ . Sea  $B = V \setminus A$  y consideremos el subgrafo  $H$  con conjunto de vértices  $A$  y  $B$ , y aristas  $E(H) = \{uv \in E(G) \mid u \in A, v \in B\}$ . Para  $uv \in E(G)$ , definamos la variable aleatoria  $X_{uv}$  tal que  $X_{uv}(H) = 1$  si  $uv \in E(H)$  o  $X_{uv}(H) = 0$  si no. Se tiene que

$$\mathbb{E}(X_{uv}) = P(\{uv \in E(H)\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Consideremos la variable aleatoria  $e$  tal que  $e(H)$  que devuelve la cantidad de aristas de  $H$ . Como  $e = \sum_{uv \in E(G)} X_{uv}$ , se sigue que

$$\mathbb{E}(e) = \mathbb{E} \left( \sum_{uv \in E(G)} X_{uv} \right) = \sum_{uv \in E(G)} \mathbb{E}(X_{uv}) = \frac{e(G)}{2}.$$

Finalmente, por la Proposición 3.3.5,  $P(e \geq \frac{e(G)}{2}) > 0$ , i.e., tiene que existir un subgrafo  $H$  de  $G$  bipartito tal que  $e(H) \geq \frac{e(G)}{2}$ . □



**Teorema 3.3.7** (Szele). *Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existe un torneo  $T$  con  $n$  vértices y al menos  $\frac{n!}{2^{n-1}}$  caminos dirigidos Hamiltonianos (caminos que pasan por todas los vértices).*

*Demostración.* Consideremos el espacio probabilístico de torneos  $T$  con vértices en  $[n]$ , es decir, el espacio de grafos aleatorios con vértices  $[n]$  tales que si  $uv$  es una arista la orientamos de manera aleatoria en cada dirección con probabilidad  $\frac{1}{2}$ , de manera independiente del resto de las aristas. Tenemos la variable aleatoria  $X$  tal que  $X(T)$  es el número de caminos hamiltonianos en  $T$ . Para cada permutación  $\sigma : [n] \rightarrow [n]$ , definimos  $X_\sigma$  como la variable aleatoria indicadora del evento

$$\{\sigma(1), \dots, \sigma(n) \text{ es un camino Hamiltoniano en } T\}.$$

Ahora,

$$\mathbb{E}(X_\sigma) = P(\sigma(1), \dots, \sigma(n) \text{ es un camino Hamiltoniano en } T) = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Así,

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{\sigma} X_\sigma\right) = \frac{n!}{2^{n-1}}.$$

Con lo cual la Proposición 3.3.5 concluye el teorema.  $\square$

Dado un grupo abeliano  $\mathcal{A}$ . Diremos que  $A \subset \mathcal{A}$  es *libre de suma*, si no existen tres elementos  $x, y, z \in A$  tales que  $x + y = z$ . Por ejemplo, podemos considerar  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}$  o  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , para un primo  $p$ .

**Teorema 3.3.8** (Erdős). *Sea  $A$  un conjunto de  $n$  números enteros positivos, entonces existe  $B \subset A$  libre de suma tal que  $|B| > \frac{n}{3}$ .*

*Demostración.* Tomemos un número primo  $p = 3k + 1$  suficientemente grande, por ejemplo  $p > 2 \max A$ . Sea  $\mathbb{Z}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , y consideremos  $C := \{i \in \mathbb{N} | k < i \leq 2k + 1\}$ . Luego  $|C| = k + 1 > \frac{p-1}{3}$ . Luego  $C$  es libre de suma en  $\mathbb{Z}_p$ .

Tomemos  $t \in \mathbb{Z}_p^\times$  de manera aleatoria y uniforme (probabilidad  $\frac{1}{p-1}$ ). Sea  $Y = t \cdot A$  mód  $p$ , notemos que para  $a \in \mathbb{Z}_p^\times$  tenemos la variable aleatoria  $Z$  tal que  $Z(t)$  indica si  $a \in Y$  o no con 1 o 0 respectivamente. Notar que

$$P(Z) = P(a \in Y) = \frac{\#A}{p-1},$$

pues  $a \in Y$  si y solo si  $at^{-1} \in A$  mód  $p$ , si y solo si,  $t^{-1} \in a^{-1}A$  mód  $p$ , además,  $A$  mód  $p$  es un conjunto de  $\#A$  elementos y multiplicar por un elemento de  $\mathbb{Z}_p^\times$  e invertir son biyecciones. Consecuentemente,

$$\mathbb{E}(\#Y \cap C) = \sum_{a \in C} P(a \in Y) = \frac{\#A \cdot \#C}{p-1} > \frac{\#A}{3} = \frac{n}{3}.$$

Luego por la Proposición 3.3.5 existe  $t_0 \in \mathbb{Z}_p^\times$ , tal que  $\#Y \cap C \geq \frac{n}{3}$ .

Así, el conjunto  $B := \{a \in A | t_0 a \text{ mód } p \in C\}$  funciona. En efecto, por cómo lo tomamos,  $|B| > \frac{n}{3}$ , y es libre de suma: si  $a, b, c \in B$  son tales que

$$a + b = c,$$

luego

$$t_0 a + t_0 b = t_0 c \text{ mód } p,$$

pero esto es imposible pues  $C$  es libre de suma.  $\square$

**Teorema 3.3.9.** *Para cada grafo  $G$  se tiene que*

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{1 + d_G(v)}.$$

*Demostración.* Sea  $n = |G|$ , identifiquemos los vértices de  $G$  con  $[n]$ , y consideremos el espacio probabilístico de funciones biyectivas  $\sigma : [n] \rightarrow [n]$  escogidas de manera aleatoria y uniforme. Sea

$$A = \{v \in V(G) \mid \sigma(v) < \min_{w \in N_G(v)} \sigma(w)\},$$

notemos que  $A$  es un conjunto independiente. Afirmamos que  $P(v \in A) = \frac{1}{1+d(v)}$  para cualquier  $v \in G$ . En efecto, dado  $v \in G$ , consideremos el conjunto  $X := \{x_0, \dots, x_d\}$ , donde  $x_0 = v$  y  $x_1, \dots, x_d$  son los  $d := d_G(v)$  vecinos de  $v$  en  $G$ , entonces tenemos la variable aleatoria  $Y$ , tal que  $Y(\sigma) = \min_{0 \leq i \leq d} \{\sigma(x_i)\}$ , luego notar que

$$1 = \sum_{i=0}^d P(\sigma \mid Y(\sigma) = \sigma(x_i)) = (d+1)P(\sigma \mid Y(\sigma) = \sigma(x_0)),$$

pues todas las probabilidades que aparecen son iguales: la probabilidad es uniforme y por simetría los eventos tienen todos la misma cardinalidad. Como la probabilidad del extremo derecho es justamente  $P(v \in A)$ , concluimos la afirmación.

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}(\#A) = \sum_{v \in V(G)} P(v \in A) = \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{1 + d_G(v)},$$

con lo cual la Proposición 3.3.5 prueba el teorema. □

## 3.4. Erdős-Rényi

**Definición 3.4.1.** Sea  $p_n \in [0, 1]$ . Diremos que un evento  $E_n$  en  $\mathcal{G}(n, p_n)$  tiene **probabilidad alta**, si

$$P(E_n) \longrightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

**Teorema 3.4.2** (Erdős-Rényi). *Sea  $p_n \in (0, 1)$ . Entonces el evento*

$$\alpha(G) \leq \frac{2 \log n}{p_n}, \quad G \in \mathcal{G}(n, p),$$

*tiene probabilidad alta.*

*Demostración.* Sea  $G \in \mathcal{G}(n, p_n)$ . Dado  $S \subset V(G)$  de tamaño  $k$ . Entonces

$$P(e(G[S]) = 0) = (1 - p_n)^{\binom{k}{2}}.$$

Luego, por la desigualdad de la unión,

$$\begin{aligned} P(\alpha \geq k) &\leq \binom{n}{k} (1 - p_n)^{\binom{k}{2}} \\ &\leq \left( \frac{en}{k} \cdot (1 - p_n)^{\frac{k-1}{2}} \right)^k \\ &\leq \left( \frac{en}{k} \cdot e^{-\frac{p_n(k-1)}{2}} \right)^k. \end{aligned}$$

Si  $p_n k \geq 2 \log(n)$ , i.e.,  $k \geq \frac{2 \log n}{p_n}$ , luego

$$\begin{aligned} \frac{e \cdot e^{\log(n)}}{k} \cdot e^{\frac{-p_n(k-1)}{2}} &\leq \frac{e^{1+\log n - \log n + \frac{p_n}{2}}}{k} \\ &\leq \frac{e^{1+p_n/2}}{k} \\ &\leq \frac{e^{\frac{3}{2}}}{k} \leq \frac{5}{k}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos tomar  $k = k(n)$  de tal forma que

$$P(\alpha \geq k) \leq \left(\frac{5}{k}\right)^k \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty).$$

En consecuencia,

$$P(\alpha < \frac{2 \log n}{p_n}) \leq P(\alpha < k) \rightarrow 1, \quad (n \rightarrow \infty).$$

□

**Corolario 3.4.3.** Sea  $p_n \in (0, 1)$ . Entonces

$$\chi(G) \geq \frac{np_n}{2 \log n}, \quad G \in \mathcal{G}(n, p_n)$$

con probabilidad alta.

*Demostración.* Sea  $c$  una  $(\chi(G) = k)$ -coloración de los vértices, y sean las partes  $A_1, \dots, A_k$  de cada color. Entonces

$$n = \sum_{i=1}^k |A_i| \leq \sum_{i=1}^k \alpha(G) = \chi(G) \cdot \alpha(G).$$

Consecuentemente,

$$\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)} \geq \frac{np_n}{2 \log n}$$

con probabilidad alta por el teorema anterior.

□

### 3.4.1. Método de alteración

**Teorema 3.4.4.** Si  $G$  es un grafo con  $n \in \mathbb{N}$  vértices y  $d(G) := d := 2 \frac{v(G)}{e(G)}$ , entonces

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{2d}.$$

*Demostración.* Sea  $p \in (0, 1)$  (que no depende de  $n$ ). Sea  $A$  un conjunto aleatorio escogiendo vértice de  $V(G)$  con probabilidad  $p$  de forma independiente. Luego  $\#A \sim \text{Bin}(n, p)$ , y

$$\mathbb{E}(\#A) = np.$$

Además, para cada  $uv \in E(G)$ ,

$$P(uv \in E(G[A])) = P(\{u \in A\} \cap \{v \in A\}) = P(u \in A) \cdot P(v \in A) = p^2.$$

Con lo cual, la aditividad de la esperanza implica:

$$\mathbb{E}(e(G[A])) = e(G)p^2.$$

Ahora, notemos que

$$\mathbb{E}(|A| - e(G[A])) = pn\left(1 - \frac{pd}{2}\right).$$

Por la Proposición 3.3.5,

$$P\left(\left\{A \mid |A| - e(G[A]) \geq pn\left(1 - \frac{pd}{2}\right)\right\}\right) > 0,$$

en particular existe un conjunto  $A$  de vértices de  $G$  tal que,

$$|A| - e(G[A]) \geq pn\left(1 - \frac{pd}{2}\right),$$

y el lado de la derecha se maximiza cuando  $p = \frac{1}{d}$ ; nos queda:

$$|A| - e(G[A]) \geq \frac{n}{2d}.$$

Tomemos ahora el subconjunto  $A'$  de  $A$ , donde por cada arista  $e \in E(G[A])$ , quito un extremo en  $e$  de  $A$ . Por construcción  $A'$  es un conjunto independiente de  $G$ , y además

$$|A'| \geq \frac{n}{2d}.$$

De aquí deducimos la desigualdad del teorema.  $\square$

Como bien ilustra la demostración anterior, el *método de alteración* es la técnica de obtener un conjunto  $A$  que no cumple exactamente la propiedad que buscábamos, pero “alterándolo” a un conjunto  $A'$ , se obtiene lo que queríamos.

**Teorema 3.4.5 (Erdős).** *Para todo  $k \in \mathbb{N}$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tal que para todo  $n \geq n_0$ , existe un grafo  $G$  con  $n$  vértices y*

$$\chi(G) \geq k \quad \text{y} \quad g(G) \geq k.$$

*Demostración.* Sea  $k \in \mathbb{N}$  fijo. Consideremos  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(n, p_n)$  con  $p_n := n^{-1+\varepsilon}$ , donde  $\varepsilon := \frac{1}{k}$ . Consideremos la variable aleatoria  $X_i$  en  $\mathcal{G}$  que cuenta el número de ciclos de longitud  $3 \leq i \leq k-1$ ; luego la variable aleatoria  $X := \sum_{i=3}^{k-1} X_i$  cuenta el número de ciclos de longitud a lo más  $k-1$ . Notar que existen a lo más  $n^i$  ciclos distintos que se pueden formar con los vértices del espacio muestral  $\mathcal{G}$ , luego, como  $X_i$  es la suma de las variables aleatorias indicadoras de los ciclos  $C_r$  de longitud  $i$ ,

$$\mathbb{E}(X_i) = \sum_r (G \supset C_r) \leq \sum_{r=1}^{n^i} p^i = n^i p^i.$$

Así,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=3}^{k-1} \mathbb{E}(X_i) \leq \sum_{i=3}^{k-1} n^i p^i = \sum_{i=3}^{k-1} n^{\varepsilon i} < kn^{\varepsilon(k-1)}.$$

Con lo cual, la desigualdad de Markov 3.2.6 implica que

$$P(X \geq \frac{n}{2}) \leq \frac{2}{n} \mathbb{E}(X) \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Entonces  $X < \frac{n}{2}$  con probabilidad alta.

Ahora, por el teorema anterior,

$$\alpha(G) \leq \frac{2 \log n}{p_n} = 2n^{1-\varepsilon} \log n, \quad G \in \mathcal{G}$$

con probabilidad alta. Consecuentemente, existe  $G$  en  $n$  vértices y a lo más  $\frac{n}{2}$  ciclos de tamaño menor que  $k$ . Removiendo  $\frac{n}{2}$  vértices, uno por cada ciclo, obtenemos  $G'$  tal que  $v(G') \geq \frac{n}{2}$  y  $g(G') \geq k$ . Por otro lado,

$$\alpha(G') \leq \alpha(G) \leq 2n^{1-\varepsilon} \log n,$$

con lo cual,

$$\chi(G') \geq \frac{v(G')}{\alpha(G')} \geq \frac{n^\varepsilon}{4 \log n} > k,$$

para todo  $n$  lo suficientemente grande.  $\square$

Antes, observemos que podemos interpretar el número de Ramsey  $R(3, k)$  como el mínimo  $n$  tal que todo grafo con  $n$  vértices libre de triángulos satisface  $\alpha(G) \geq k$ . En efecto, si  $n = R(3, k)$ , podemos considerar el grafo completo  $K_n$ , e incrustar  $G$  en  $K_n$  pintando las aristas de  $G$  de color rojo, y las aristas de su complemento  $\overline{G}$  de azul. Si  $G$  es libre de triángulos,  $K_n$  es libre de  $K_3$ -rojo, pero entonces tiene un  $K_k$ -azul por definición de número de Ramsey, equivalentemente,  $\overline{G}$  contiene un  $K_k$ , i.e.,  $G$  tiene un conjunto de  $k$ -vértices independientes.

**Teorema 3.4.6.** *Existe  $c > 0$  tal que*

$$R(3, k) \geq \left( \frac{ck}{\log k} \right)^{\frac{3}{2}},$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$  lo suficientemente grande.

*Demostración.* Tomemos  $n_k := \left( \frac{k}{4 \log k} \right)^{\frac{3}{2}}$ . Consideremos  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(n_k, p_{n_k})$  con  $p_{n_k} := n_k^{-\frac{2}{3}}$ . Notar que  $p_{n_k} k = 4 \log k$ . El teorema anterior dice que

$$\alpha(G) \leq \frac{2 \log n_k}{p_{n_k}} < k, \quad G \in \mathcal{G}$$

con probabilidad alta ( $k \rightarrow \infty$ ).

Sea  $X$  la variable aleatoria en  $\mathcal{G}$  tal que  $X(G)$  es el número de triángulos de  $G$ . Tenemos que

$$\mathbb{E}(X) = \binom{n_k}{3} p_{n_k}^3 \leq \frac{n_k^3}{6} p_{n_k}^3 = \frac{n_k}{6}.$$

Luego por la desigualdad de Markov 3.2.6,

$$P(X \geq \frac{n_k}{2}) \leq \frac{2}{n_k} \mathbb{E}(X) \leq \frac{1}{3}.$$

Por lo tanto, para  $k$  lo suficientemente grande, existe un grafo  $G$  con  $n_k$  vértices y  $\alpha(G) < k$ , que contiene a lo más  $\frac{n_k}{2}$  triángulos. Y quitando a lo más  $\frac{n_k}{2}$  vértice de  $G$  por cada triángulo, obtenemos un grafo  $G'$  con  $\alpha(G') < k$ , libre de triángulos y  $v(G') \geq \frac{n_k}{2}$ . Es decir, la constante  $c = 1/2^{\frac{8}{3}}$  funciona.  $\square$

# Bibliografía

- [Rob55] Herbert Robbins. A remark on stirling's formula. *The American Mathematical Monthly*, 62(1):26–29, 1955.