

Apuntes - Tópicos en matemática discreta

Enzo Giannotta

17 de enero de 2024

Índice general

| | |
|--|-----------|
| 1. Teoría extremal de grafos | 2 |
| 1.1. Teoría extremal de grafos | 2 |
| 1.2. Números extremales en grafos bipartitos | 6 |
| 1.3. Números extremales para árboles | 9 |
| 1.4. Estabilidad y supersaturación | 12 |
| 1.5. Teorema de Erdős-Stone | 14 |
| 1.6. Ejercicios | 20 |
| 1.7. Regularidad | 23 |
| 2. Teoría de Ramsey | 35 |
| 2.1. Números de Ramsey | 36 |
| 2.2. El problema con un final feliz | 45 |
| 3. El método probabilístico | 49 |
| 3.1. Fundamentos | 49 |
| 3.2. Esperanza | 53 |
| 3.3. Método del primer momento | 55 |
| 3.4. Erdős-Rényi | 57 |
| 3.4.1. Método de alteración | 58 |
| 3.5. Método del segundo momento | 61 |
| 3.6. Método de concentración | 65 |
| 3.7. Grafos aleatorios | 68 |
| 3.8. Conexidad de grafos aleatorios | 69 |
| 3.9. Grafos de dependencia | 72 |
| 3.10. Grafos K_3 libres | 75 |
| 3.10.1. Desigualdades de Janson | 75 |
| 3.11. Elección aleatoria dependiente | 77 |
| 3.11.1. El número de Ramsey-Turán | 77 |
| 3.11.2. Número extremal de grafos bipartitos | 80 |
| 3.11.3. El número de Ramsey de un hipercubo | 82 |

Capítulo 1

Teoría extremal de grafos

En este curso trabajaremos con grafos simples, usualmente denotados: $G = (V, E)$.

1.1. Teoría extremal de grafos

¿Cuál es la máxima cantidad de aristas que puede tener un grafo de n vértices sin que aparezca una cierta estructura?

¿Cómo lucen estos grafos maximales?

Ejemplo 1.1.1. 1. Cuando la estructura es un ciclo, la cantidad de aristas es $n - 1$ y los grafos maximales son los árboles.

2. Cuando la estructura es un ciclo impar. ¿Cómo lucen los grafos sin ciclos impares y que tienen una cantidad máxima de aristas? Son los completos balanceados $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. En efecto, para que un grafo bipartito con n vértices tenga una cantidad máxima de aristas, tiene dos partes $|X|, |Y|$ con $|X| + |Y| = n$ y si maximiza la cantidad de aristas es un grafo $K_{|X|, |Y|}$. Es decir, tiene $|X| \cdot |Y|$ aristas y si maximizamos, hay que maximizar la función $f(y) = (n - y)y$ con $1 \leq y \leq n - 1$ e y entero; esto sucede si $y = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ o $y = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Definición 1.1.2. Sean G y H dos grafos. Decimos que G es **H-libre** (o **libre de H**) si $H \not\subseteq G$. El **número extremal** de H es la cantidad

$$\text{ex}(n, H) = \max\{e(G) \mid G \text{ es un grafo de } n \text{ vértices } H\text{-libre}\},$$

donde $e(G)$ siempre denotará el número de aristas de G .

Si G es H -libre y $|G| = \text{ex}(n, H)$, decimos que G es **extremal** respecto de n y H .

Teorema 1.1.3 (Mantel, 1907). Sea $n \in \mathbb{N}$, G un grafo K_3 -libre con n vértices. Entonces, $e(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Además, $e(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \Leftrightarrow G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ ¹.

Demostración. Por inducción en n . Los casos $n = 1, n = 2$ son un vértice, un 1-camino respectivamente. Luego vale para $n = 1, 2$. Ahora, supongamos que $n \geq 3$. Sea G un grafo K_3 -libre con n vértices, y $uv \in E(G)$ (si G no tuviera aristas, podríamos agregar una arista y seguiría siendo K_3 -libre); consideremos $G' = G \setminus \{u, v\}$.

¹Cuando $n = 1, 2$ tenemos que G es el completo K_n

Tenemos que G' también es K_3 -libre y tiene $n - 2$ vértices. Por inducción, G' satisface

$$e(G') \leq \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor.$$

Más aún, como G es K_3 -libre, no existen vértices $w \in G'$ tal que sea adyacente a u y v al mismo tiempo. Luego existen a lo más $n - 2$ aristas en $E(G) \setminus E(G')$ sin contar la arista uv . Es decir,

$$e(G) \leq e(G') + n - 1 \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$



Figura 1.1.1: Ilustración

Para la segunda parte, $e(G) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \Leftrightarrow G = K_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$. Es claro que si $G = K_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$ luego $e(G) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Veamos la recíproca. Sea G con n vértices y cantidad máxima de aristas tal que es K_3 -libre. Los casos $n = 1, 2$ son triviales, luego podemos suponer que $|G| \geq 3$. Como G es K_3 -libre, existen una aristas $uv \in E(G)$ por maximalidad. Por inducción, $G' := G \setminus \{u, v\}$ es un $K_{\left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor}$, digamos con partición $X', Y' \subset V(G')$ de sus vértices. Como G es K_3 -libre, ni u ni v pueden tener vecinos en G' que estén en ambas particiones X', Y' , además, no puede haber una partición que no tenga a u y v como vecinos en G pues podríamos agregar aristas entre vértices de esa particiones: contradiciendo maximalidad. Sin pérdida de generalidad, los vecinos de u en G' están en X y los de v en Y . Más aún, por maximalidad, todos los vértices de X son vecinos con u y todos los de Y con v . Así, G es un X, Y bigrafo tomando $X := X' \cup \{u\}$ e $Y := Y' \cup \{v\}$. Notar que esto prueba que G es un $K_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$. □

Definición 1.1.4. El **grafo de Turán** $T_k(n)$ es el grafo k -partito completo con la mayor cantidad de aristas, es decir, los cardinales de las particiones difieren a lo más en 1 entre sí (por maximalidad). Notamos

$$t_k(n) := e(T_k(n)).$$

Observación 1.1.5. Podemos calcular $t_k(n)$. Sea $\alpha \in \mathbb{N}$ el cardinal más grande de una partición de $T_k(n)$. Entonces las demás particiones tienen cardinal α o $\alpha - 1$. Sea r la cantidad de particiones con cardinal $\alpha - 1$ y $k - r$ de cardinal α . Tenemos que sumando los cardinales de todas las particiones:

$$\alpha k - r = n.$$

Como $0 \leq r < k$, r es el resto de la división de n por k y α es el cociente. Despejando obtenemos que $\alpha = \frac{n+r}{k}$ es decir, $\alpha = \lceil \frac{n}{k} \rceil$. En particular $\alpha - 1 = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$. Juntado todo, tenemos que la cantidad total de aristas es:

$$\alpha^2 \binom{k-r}{2} + \alpha(\alpha-1)(k-r)r + (\alpha-1)^2 \binom{r}{2},$$

i.e.,

$$t_k(n) = \lceil \frac{n}{k} \rceil^2 \binom{k-r}{2} + \lceil \frac{n}{k} \rceil \lfloor \frac{n}{k} \rfloor (k-r)r + \lfloor \frac{n}{k} \rfloor^2 \binom{r}{2}.$$

Teorema 1.1.6 (Turán, 1941). Sean $n, k \in \mathbb{N}$, G un grafo K_{k+1} -libre con n vértice. Entonces

$$e(G) \leq t_k(n).$$

Además, $e(G) = t_k(n) \Leftrightarrow G = T_k(n)$ ².

Demostración. Hagamos inducción en n . Para $n \leq k$ es trivial. Sea ahora G con $n \geq k+1$ que a su vez es K_{k+1} -libre y arista maximal. Esto implica que agregar cualquier arista hace aparecer un K_{k+1} como subgrafo. Entonces G contiene un K_k . Sea A el conjunto de vértices de un subgrafo K_k en G . Consideremos luego $G' = G \setminus A$. El grafo G' es K_{k+1} -libre y tiene $n - k$ vértices. Cada $x \in V(G')$ tiene a lo más $k-1$ vecinos en A dentro del grafo G , pues G es K_{k+1} -libre. Luego por hipótesis inductiva:

$$e(G') \leq t_k(n-k).$$

Si juntamos esto con la hipótesis inductiva, tenemos que

$$e(G) \leq e(G') + (n-k)(k-1) + \binom{k}{2} \leq t_k(n-k) + (n-k) \cdot (k-1) + \binom{k}{2} = t_k(n),$$

donde el segundo término es la cantidad de aristas entre A y $V(G')$.

Veamos ahora la segunda afirmación. Por definición, $G = T_k(n)$ tiene $t_k(n)$ aristas. Recíprocamente, supongamos que G con n vértices y cantidad máxima de aristas $e(G)$ tal que es K_{k+1} -libre. Los casos $n \leq k$ son triviales, luego supongamos que $n \geq k+1$. Por maximalidad, G contiene un K_k como subgrafo; llamemos A a su conjunto de vértices en G y consideremos $G' := G \setminus A$. Notar que

$$e(G') \geq e(G) - \left((n-k)(k-1) + \binom{k}{2} \right) = t_k(n) - (n-k)(k-1) - \binom{k}{2} = t_k(n-k),$$

pues cada vértice de G' tiene a lo más $k-1$ vecinos en A . Como G' es K_{k+1} -libre, en realidad vale la igualdad: $e(G') = t_k(n-k)$, por la primera parte que ya demostramos. Llamemos X_1, X_2, \dots, X_k a las particiones de G' . Como vale la igualdad arriba, tenemos que cada vértice de G' tiene exactamente $k-1$ vecinos en A . Para cada $x' \in G'$ llamemos $\alpha(x')$ al único vértice de A que no es adyacente a x' en G . Más formalmente, $\alpha : V(G') \rightarrow A$ es una función; afirmamos que:

²Cuando $n = 1, 2, \dots, k-1$ tenemos que G es el completo K_n

(I) α es sobreyectiva.

(II) Si $x'_i \in X_i$ y $x'_j \in X_j$ para $i \neq j$, entonces $\alpha(x'_i) \neq \alpha(x'_j)$.

Antes de probar la afirmación, notemos que esta prueba que $\alpha|_{X_i}$ es constante para cada $i = 1, \dots, k$ (y por lo tanto tiene sentido el abuso de notación $\alpha(X_i)$ para denotar al único vértice de A que no es adyacente a ningún vértice $x' \in X_i$). Veamos entonces la afirmación:

(I) Supongamos que α no es sobreyectiva: existe un $a_0 \in A$ tal que para todo $i = 1, \dots, k$ existe $x'_i \in X_i$ adyacente a a_0 en G . Pero esto implica entonces que los vértices x'_1, \dots, x'_k, a_0 forman un K_{k+1} en G , absurdo.

(II) En efecto, si $\alpha(x'_i) = a_0 = \alpha(x'_j)$, entonces x_i, x_j y los vértices de $A \setminus \{a_0\}$ juntos forman un K_{k+1} en G , absurdo.

Así, podemos extender la partición de G' a todo G : definimos $\tilde{X}_i := X_i \cup \{\alpha(X_i)\}$. Es claro que de esta manera G es un grafo k -partito completo. Como G es maximal en su cantidad de aristas, entonces $G = T_k(n)$. \square

Teorema 1.1.7 (Erdős - segunda demostración del teorema). Sean $n, k \in \mathbb{N}$ y G un grafo K_{k+1} -libre con n vértices. Entonces existe un grafo H que es k -partito con $V(H) = V(G)$ tal que:

$$d_H(v) \geq d_G(v), \quad \forall v \in V(G).$$

Erdős. Haremos inducción en k . Para $k = 1$ no hay que hacer nada. Sea ahora $k \geq 2$. Sea $v \in V(G)$ con $d_G(v) = \Delta(G)$. La vecindad de v , $G' := G[N_G(v)]$ debe ser K_k -libre. Sea $A := G \setminus N_G(v)$. Notar que

$$d_G(u) \leq d_{G'}(u) + |A|.$$

Por hipótesis inductiva existe un grafo H' que es $(k-1)$ -partito con $V(H') = V(G')$ y

$$d_{H'}(u) \geq d_{G'}(u), \quad \forall u \in V(G').$$

Sea H el grafo obtenido a partir de H' añadiendo los vértices de A y conectando todos los vértices entre A y $V(H')$. Observar que H es $k+1$ -partito y como v tiene grado máximo en G , tenemos que para cada $u \in A$:

$$d_G(u) \leq d_G(v) = |V(H')| = d_H(u)$$

y para $u \in V(H')$ sabemos que:

$$d_G(u) \leq d_{G'}(u) + |A| \underset{H.I.}{\leq} d_{H'}(u) + |A| = d_H(u).$$

\square

Ejercicio 1.1.8. A partir de la demostración deducir que el grafo K_{k+1} -extremal es $T_k(n)$ y es único.

Solución. Sea G un grafo K_{k+1} -extremal y H el grafo r -partito obtenido por el Teorema anterior. Así, $V(H) = V(G)$ y $d_H(v) \geq d_G(v)$ para todo vértice v . Esta desigualdad implica que

$$e(H) \geq e(G),$$

y por lo tanto, H también es K_{r+1} -extremal. Pero por definición, $t_k(n) \geq e(H)$. Pero ya vimos que los grafos K_{r+1} extremales tienen $\geq t_k(n)$ aristas. Con lo cual, en realidad $e(G) = e(H)$ y más aún, $d_H(v) = d_G(v)$ para todo v .

Esto nos indica que inspeccionando la demostración más detalladamanete, se tiene que G' es un $T_{k-1}(\Delta)$ (con $\Delta := \Delta(G)$) y que G es luego $T_k(n)$. \square

Observación 1.1.9. Sea H un grafo con $\chi(H) \geq 3$, es decir no bipartito, entonces

$$\text{ex}(n, H) \sim n^2.$$

Demostración. En primer lugar, si G es un grafo que contiene a H , luego no puede ser bipartito. En particular, si $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, entonces es H -libre al ser bipartito; de hecho tiene n vértices y $e(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Consecuentemente

$$(n-1)^2/4 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \text{ex}(n, H).$$

Por otro lado, la cantidad de aristas maxima de G es $\binom{n}{2}$ (en general para cualquier grafo con n vértices) y por lo tanto $\text{ex}(n, H) = \Theta(n^2)$. \square

1.2. Números extremales en grafos bipartitos

Recuerdo 1.2.1 (Desigualdad de Jensen). *Vamos a usar la desigualdad de Jensen: si φ es una función convexa entonces:*

$$\varphi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(\varphi(X)).$$

Ejercicio 1.2.2. Probar las siguientes dos desigualdades elementales para el binomio de Newton:

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \stackrel{\text{Cota 1}}{\leq} \binom{n}{k} \stackrel{\text{Cota 2}}{\leq} \left(\frac{n \cdot e}{k}\right)^k.$$

Solución.

Cota 1: Notar que

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdots \frac{n-k+1}{1} \geq \left(\frac{n}{k}\right)^k,$$

pues $\frac{n}{k} \leq \frac{n-j}{k-j}$ para todo $j = 0, \dots, k$.

Cota 2: Notar que se tiene una mejor cota:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \leq \frac{n^k}{k!}.$$

Por lo tanto, como $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, se sigue que $e^k \geq \frac{k^k}{k!}$, y luego

$$\frac{n^k}{k!} \leq \frac{n^k e^k}{k^k},$$

como queríamos. \square

Teorema 1.2.3 (Erdős, 1938). *Para todo $n \in \mathbb{N}$*

$$\text{ex}(n, C_4) \leq n^{\frac{3}{2}}.$$

Definición 1.2.4. Una **cereza** es un 2-camino $x_0x_1x_2$. Llamaremos a x_1 el **centro** y a x_0, x_2 las **hojas**.



Figura 1.2.2: Dibujo de cereza.

Demostración. Sea G un grafo C_4 -libre con n vértices. Contaremos cereza en G para acotar el número de aristas $e(G)$.

Para cada vértice $v \in V(G)$ hay exactamente

$$\binom{d_G(v)}{2} \text{ cerezas con centro en } v.$$

Por lo tanto, en G hay

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{2} \text{ cerezas en } G.$$

Por la desigualdad de Jensen la sumatoria se minimiza cuando todos los grados son iguales:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{2} &\geq n \cdot \binom{2e(G)/n}{2} \\ &\stackrel{\text{Cota 1}}{\geq} n \cdot \left(\frac{e(G)}{n} \right)^2 = \frac{e(G)^2}{n}. \end{aligned}$$

Por otro lado, dado un par $\{u, v\}$ de hojas de cerezas distintas, entonces tendríamos un subgrafo C_4 en G , absurdo; por lo tanto hay a lo más

$$\binom{n}{2} \text{ cerezas en } G.$$

Juntando todo:

$$\frac{e(G)^2}{n} \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

consecuentemente $e(G)^2 \leq n^3$, i.e., $e(G) \leq n^{\frac{3}{2}}$. \square

Teorema 1.2.5 (Kövari, Sós, Turán). Sean $s, t \in \mathbb{N}$, $s \leq t$. Entonces existe una constante $c = c(s, t) > 0$ tal que

$$\text{ex}(n, K_{s,t}) \leq c \cdot n^{2 - \frac{1}{s}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definición 1.2.6. Una s -cereza es un $K_{1,s}$. Similarmente tenemos la noción de **centro** y **hojas** (las cuales son s).



Figura 1.2.3: Dibujo de s -cereza.

Demostración. Sea G un grafo $K_{s,t}$ -libre en n vértices. Para cada $v \in V(G)$ hay $\binom{d_G(v)}{s}$ s -cerezas. Por lo tanto en G hay

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{s} \quad s\text{-cerezas},$$

con lo cual

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{s} \stackrel{\text{Cota 1}}{\geq} \sum_{v \in V(G)} \frac{d_G(v)^s}{s^s} \stackrel{\text{Jensen}}{\geq} \frac{n}{s^s} \left(\frac{2e(G)}{n} \right)^s.$$

Procediendo de manera análoga a la demostración del teorema anterior, tenemos que un conjunto de s vértices del grafo puede ser conjunto de hojas de a lo más $(t-1)$ cerezas, pues de lo contrario habría una copia de $K_{s,t}$. Por lo tanto, hay en total a lo más

$$(t-1) \cdot \binom{n}{s} \quad s\text{-cerezas}.$$

Juntando todo:

$$n \left(\frac{2e(G)}{sn} \right)^s \leq (t-1) \cdot \binom{n}{s} \stackrel{\text{Cota 2}}{\leq} (t-1) \cdot \left(\frac{ne}{s} \right)^s,$$

luego

$$\frac{2e(G)}{sn} \leq \frac{(t-1)^{\frac{1}{s}}}{n^{\frac{1}{s}}} \cdot \frac{ne}{s},$$

equivalentemente,

$$e(G) \leq \frac{(t-1)^{\frac{1}{s}} se}{2s} \cdot n^{2-\frac{1}{s}} = c(s, t) \cdot n^{2-\frac{1}{s}}.$$

□

Ejercicio 1.2.7. Demostrar que

$$\text{ex}(n, H) = o(n^2) \Leftrightarrow H \text{ es bipartito.}$$

Solución. Como H es bipartito, existen $s, t \in \mathbb{N}$, digamos $s \leq t$, tales $H \subset K_{s,t}$. Así, por el Teorema de 1.2.5,

$$\text{ex}(n, H) \leq c(s, t) \cdot n^{2-\frac{1}{s}},$$

pues si G no contiene a H , tampoco contiene a $K_{s,t}$. Así, obtenemos que $\text{ex}(n, H) = o(n^2)$.

Recíprocamente, supongamos que H no es bipartito, luego por la Observación 1.1.9, $\text{ex}(n, H) = \Theta(n^2)$. Con lo cual, si $\text{ex}(n, H) = o(n^2)$, necesariamente H es bipartito. □

1.3. Números extremales para árboles

Teorema 1.3.1. Sean $n, k \in \mathbb{N}$ y T un árbol con $k+1$ vértices. Entonces,

$$\text{ex}(n, T) \leq (k-1) \cdot n.$$

Lema 1.3.2. Sean $k \in \mathbb{N}$ y T un árbol con $k+1$ vértices. Entonces si G es un grafo con $\delta(G) \geq k$, luego contiene a T como subgrafo.

Demostración. Haremos inducción en k . Para $k=1$ es claro, pues existe un vértice con al menos un vecino. En general, supongamos que $k \geq 2$. Sea h una hoja de T y consideremos el árbol $T' = T \setminus \{h\}$. Por hipótesis inductiva, $T' \subset G$. Sea p el único vecino de h en T , i.e. $p \in T'$. Como T tiene $k+1$ vértices, p tiene a lo más $k-1$ vecinos en T' , luego p tiene un vecino en G que no está en T' pues $\delta_G(p) \geq k$. Entonces podemos incrustar T en G considerando h como este vértice. □

Lema 1.3.3. Todo grafo G contiene un subgrafo H con $\delta(H) > \varepsilon(H) \geq \frac{e(G)}{n}$, donde $n = |G|$.

Demostración. Construiremos una secuencia de subgrafos de G :

$$G =: G_0 \supset G_1 \supset \dots$$

de la siguiente manera, si $v_i \in G_i$ es un vértice con $d_{G_i}(v_i) \leq \varepsilon(G_i) := \frac{e(G_i)}{|G_i|}$, entonces definimos $G_{i+1} := G_i \setminus \{v_i\}$. Eventualmente esta secuencia termina, digamos en $H := G_{j_0}$.

Notar que $\varepsilon(G_{i+1}) \geq \varepsilon(G_i)$, y por lo tanto $\varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$. En efecto,

$$\varepsilon(G_{i+1}) = \frac{e(G_{i+1})}{|G_{i+1}|} = \frac{e(G_i) - d_{G_i}(v_i)}{|G_i| - 1},$$

que es mayor o igual que $\frac{e(G_i)}{|G_i|}$ si y solo si

$$(e(G_i) - d_{G_i}(v_i))|G_i| \geq e(G_i)(|G_i| - 1),$$

equivalentemente,

$$e(G_i) \geq |G_i|d_{G_i}(v_i),$$

i.e.,

$$\frac{e(G_i)}{|G_i|} \geq d_{G_i}(v_i),$$

que es cierto por construcción. Por otro lado, por minimalidad de H , se sigue que $\delta(H) > \varepsilon(H)$. \square

Demostración del teorema. Sea G un grafo con $\geq (k-1) \cdot n + 1$ aristas. Por el segundo lema, G contiene H con

$$\delta(H) \geq \frac{e(G)}{n} > \frac{(k-1)n}{n},$$

y por el primer lema $T \subset H \subset G$. \square

Conjetura 1.3.4 (Erd s, S s, 1963). *Se conjetura que en el teorema anterior se tiene una mejor cota:*

$$\text{ex}(n, T) \leq \frac{1}{2}(k-1)n.$$

Notar que de ser verdadera la conjetura, entonces esta cota es tight cuando n es un múltiplo de k : Sea G el grafo obtenido al unir $\frac{n}{k}$ copias de K_k , así $e(G) = \frac{n}{k} \binom{k}{2} = \frac{n}{2}(k-1)$.

Esta conjetura es verdadera en el caso T un camino:

Teorema 1.3.5 (Erd s & Gallai, 1959). *Sean $n, k \in \mathbb{N}$. Entonces,*

$$\text{ex}(n, P_k) \leq \frac{(k-1) \cdot n}{2}$$

Ejercicio 1.3.6. A partir de la demostración de este teorema, obtenga que los grafos extremales son únicos.

Lema 1.3.7. *Todo grafo conexo G con n vértices contiene un camino de largo*

$$k := \min\{2\delta(G) + 1, n - 1\}.$$

Demostración. Tomemos $P := v_0, \dots, v_l$ camino de largo máximo. Sabemos que $N_G(v_0), N_G(v_l) \subset V(P)$ por maximalidad de P . Si $V(P) = V(G)$ ganamos. Así que supongamos que no; supongamos también que $l < k \leq 2\delta(G) + 1$. Demostraremos que existe un ciclo de longitud l contenido en $G[V(P)]$, así llegaremos a una contradicción pues al existir un vértice x fuera de $G[V(P)]$ en G , podríamos extender el ciclo a un camino de longitud al menos $l + 1$ en G conectándolo con x .



Figura 1.3.4: Notar que en este caso $v_0 P v_{i-1} v_l P v_i v_0$ es un ciclo de longitud $|P|$ en $G[V(P)]$.

En efecto, supongamos que no existe tal ciclo, luego para cada $i \in \{1, \dots, l-1\}$ se tiene que $v_{i-1} v_l \notin E(G)$ o $v_0 v_i \notin E(G)$. Entonces

$$2\delta(G) \leq d_G(v_0) + d_G(v_l) \leq l-1 < 2\delta(G),$$

absurdo. □

Demostración del teorema. Haremos inducción en n . Afirmamos que G es P_k -libre en n vértices, entonces

$$e(G) \leq \frac{(k-1) \cdot n}{2}.$$

El caso base es $n \leq k$, luego $e(G) \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{n(k-1)}{2}$. Luego supongamos que $n \geq k+1$. Si G no es conexo: sean G_1, \dots, G_r las componentes conexas, por hipótesis

$$e(G_i) \leq \frac{|G_i|(k-1)}{2},$$

entonces

$$e(G) = \sum_{i=1}^r e(G_i) \leq \frac{k-1}{2} \sum_{i=1}^r |G_i| = \frac{n(k-1)}{2}.$$

Ahora, supongamos que G es conexo. Si $n-1 \leq 2\delta(G)$, entonces por el Lema 1.3.7, G contiene un camino de largo $n-1 \geq k$, absurdo. Con lo cual, podemos asumir que $2\delta(G) \leq n-1$, y por el Lema, G contiene un camino de largo $2\delta(G)$ que debe cumplir

$$2\delta(G) < k \quad \Leftrightarrow \quad \delta(G) \leq \frac{k-1}{2}.$$

Sea v un vértice de grado $\leq \frac{k-1}{2}$, consideremos $G' := G \setminus \{v\}$. Por hipótesis inductiva

$$e(G') \leq \frac{(n-1)(k-1)}{2},$$

con lo cual,

$$e(G) \leq e(G') + \frac{k-1}{2} \leq \frac{(n-1)(k-1)}{2} + \frac{k-1}{2} = \frac{n(k-1)}{2}.$$

□

1.4. Estabilidad y supersaturación

Teorema 1.4.1 (Füredi, 2015). Sean $n, t \in \mathbb{N}$, y G con n vértices. Si G está t -lejos de ser bipartito³, entonces hay al menos

$$\frac{n}{6} \left(e(G) - \frac{n^2}{4} + t \right)$$

triángulos en G .

Demostración. Para cada $u \in V(G)$, definimos

$$B_u := N_G(u) \quad \text{y} \quad A_u := V(G) \setminus B_u.$$

Luego la cantidad de triángulos de G es:

$$k_3(G) = \frac{1}{3} \sum_{u \in V(G)} e(B_u).$$

Para cada $u \in V(G)$, si borro las aristas de $G[B_u]$ y las de $G[A_u]$, obtengo un subgrafo bipartito de G : el (A_u, B_u) -bigrafo; luego tuvimos que haber quitado al menos t aristas porque G está t -lejos de ser bipartito, es decir:

$$e(B_u) + e(A_u) \geq t.$$

Además, para cada $u \in V(G)$

$$\sum_{v \in A_u} d_G(v) = e(B_u, A_u) + 2e(A_u).$$

Como

$$e(G) = e(A_u) + e(A_u, B_u) + e(B_u),$$

se sigue que $e(A_u) = e(B_u) - e(G) + \sum_{v \in A_u} d_G(v)$ (juntando ambas ecuaciones). Ahora, por la desigualdad $e(B_u) + e(A_u) \geq t$, se tiene que

$$e(B_u) \geq t - e(A_u) = t + e(G) - e(B_u) - \sum_{v \in A_u} d_G(v)$$

y por lo tanto

$$2e(B_u) \geq t + e(G) - \sum_{v \in A_u} d_G(v).$$

³Esto significa que si H es un subgrafo bipartito de G , entonces $e(H) \leq e(G) - t$.

Sumando sobre todos los $u \in V(G)$ y utilizando que $k_3(G) = \frac{1}{3} \sum_{u \in V(G)} e(B_u)$, concluimos:

$$k_3(G) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} (nt + ne(G) - \sum_{u \in V(G)} \sum_{v \in A_u} d_G(v));$$

sin embargo, afirmamos que vale la siguiente igualdad:

$$\sum_{u \in V(G)} \sum_{v \in A_u} d_G(v) = \sum_{x \in V(G)} d_G(x)(n - d_G(x));$$

ya que cada término de la sumatoria se acota inferiormente por $\frac{n}{2} \cdot (n - \frac{n}{2}) = \frac{n^2}{2}$, concluimos el resultado.

Veamos la afirmación: notar que para cada $x \in V(G)$, su cantidad de aristas $d_G(x)$ es contada exactamente $|A_x| = n - d_G(x)$ veces del lado izquierdo de la sumatoria. \square

Como corolario, se prueban los siguientes dos teoremas:

Teorema 1.4.2 (Estabilidad). *Sean $n, t \in \mathbb{N}$, y G es K_3 -libre con n vértices. Si $e(G) \geq \frac{n^2}{4} - t$, entonces G contiene un grafo bipartito con al menos $e(G) - t$ aristas.*

Demostración. Si G no tuviera un grafo bipartito con al menos $e(G) - t$ aristas, entonces G estaría $(t+1)$ -lejos de ser bipartito. Por el Teorema 1.4.1 tiene al menos

$$\frac{n}{6} \left(e(G) - \frac{n^2}{4} + (t+1) \right) \geq \frac{n}{6}$$

triángulos, i.e., al menos uno, lo cual es absurdo. \square

Teorema 1.4.3 (Supersaturación). *Sean $n, t \in \mathbb{N}$, y G un grafo con n vértices. Si $e(G) \geq \frac{n^2}{4} + t$, entonces G contiene al menos $t \cdot n/3$ triángulos.*

Demostración. Notar que G está t -lejos de ser bipartito, en efecto, un grafo bipartito de orden $m \leq n$ tiene a lo más $\frac{m^2}{4} \leq \frac{n^2}{4}$ aristas, pero G tiene al menos $\frac{n^2}{4} + t \geq \frac{m^2}{4} + t$ aristas. Luego por el Teorema 1.4.1, G tiene

$$\frac{n}{6} \left(e(G) - \frac{n^2}{4} + (t+1) \right) \geq \frac{n}{3}t$$

triángulos. \square

Teorema 1.4.4 (Füredi, 2015 – Estabilidad). *Sean $n, k \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$ y G un grafo K_{k+1} -libre en n -vértices. Si $e(G) \geq t_k(n) - t$, entonces G contiene un subgrafo generador k -partito con al menos $e(G) - t$ aristas.*

Demostración. Haremos inducción en k . El caso $k = 1$ tenemos que $t_k(n) = 0$ y siempre se cumple. Entonces supongamos que $k \geq 2$. Tomemos $u \in V(G)$ con $d_G(u) = \Delta(G)$. Definamos $G' := G[B]$ con $B = N_G(u)$. Sea $A = V(G) \setminus B$. El grafo G' es K_k -libre porque G es K_{k+1} -libre, luego por el Teorema de Turán 1.1.6, $e(G') \leq t_{k-1}(d)$ con $d := |B|$ y entonces podemos definir $t' := t_{k-1}(d) - e(G') \geq 0$ y aplicar hipótesis

inductiva al grafo G' . Así, G' contiene un subgrafo H' generador $(k-1)$ -partito con al menos $e(G') - t' = 2e(G') - t_{k-1}(d)$ aristas.

Probemos que

$$H := (V(H') \cup A, E(H') \cup E(A, B))$$

tiene al menos $e(G) - t$ aristas, y así H es un subgrafo k -partito generador de G con al menos $e(G) - t$ aristas. En efecto, queremos probar que

$$e(H') + e(A, B) \geq e(G) - t;$$

como $e(G) = e(A, B) + e(G') + e(A)$, la desigualdad de arriba es equivalente a

$$e(H') \geq e(G') + e(A) - t \Leftrightarrow e(H') - e(G') + t \geq e(A).$$

Ya que $e(H') \geq e(G') - t'$, nos queda que la última desigualdad es cierta si $e(A) \leq t - t'$.

Sabemos que

$$2e(A) + e(A, B) = \sum_{v \in A} d_G(v) \leq d \cdot (n - d),$$

donde la desigualdad sale de que la sumatoria tiene $(n - d)$ términos y cada grado $d_G(v) \leq \Delta(G) = d_G(u) = |B| = d$; y reemplacemos $e(A, B) = e(G) - e(A) - e(G')$ y nos queda

$$e(A) + e(G) - e(G') \leq d \cdot (n - d).$$

Ahora, notar que

$$t_k(n) \geq t_{k-1}(d) + d \cdot (n - d),$$

pues el lado izquierdo es la cantidad de aristas de un grafo de Turán (la cual es máxima) y el lado derecho es la cantidad de aristas de un grafo k -partito en n -vértices: el obtenido a partir del grafo de Turán $T_{k-1}(d)$ agregando $n - d$ vértices y conectándolos a las $k - 1$ particiones de $T_{k-1}(d)$. Juntando todo,

$$e(A) \leq d \cdot (n - d) - \underbrace{e(G)}_{\geq t_k(n) - t} + \underbrace{e(G')}_{= t_{k-1}(d) - t'} \leq d \cdot (n - d) - t_k(n) + t + t_{k-1}(d) - t' \leq t - t'$$

como queríamos probar. \square

1.5. Teorema de Erdős-Stone

Notación 1.5.1. Notaremos por $K_s(t)$ al grafo de Turán $T_s(t \cdot s)$.

Teorema 1.5.2 (Erdős-Stone, 1946). *Sea H un grafo con $e(H) \geq 1$. Entonces*

$$\text{ex}(n, H) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + o(1)\right) \cdot \frac{n^2}{2} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Observación 1.5.3. Sea H un grafo con $e(H) \geq 1$. Entonces

$$t_{\chi(H)-1}(n) \leq \text{ex}(n, H),$$

pues todo grafo G necesita de al menos $\chi(H)$ colores para tener a H incrustado, por lo tanto $T_{\chi(H)-1}(n)$ es H -libre.

Observación 1.5.4.

$$t_{\chi(H)-1}(n) \sim \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1}\right) \frac{n^2}{2}.$$

Con lo cual, la desigualdad de Erdős-Stone es asintóticamente justa.

Demostración. En efecto, esto equivale a probar que

$$t_k(n) \sim \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2}{2} \quad (n \rightarrow \infty),$$

para $k \geq 2$ fijo. Escribiendo $n = qk + r$ con $0 \leq r < k$, tenemos que

$$t_k(qk) \leq t_k(n) \leq t_k((q+1)k),$$

pero para cualquier $q \in \mathbb{N}$ es fácil de calcular el número de aristas del grafo de Turán $T_k(qk)$:

$$t_k(qk) = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{(qk)^2}{2},$$

con lo cual $t_k(qk), t_k((q+1)k) \sim \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2}{2}$ y por lo tanto $t_k(n)$ también. \square

Lema 1.5.5. Sea $c \in (0, 1)$ y sea $\varepsilon > 0$. Si G es un grafo con n vértices, con n lo suficientemente grande tal que

$$e(G) \geq c \frac{n^2}{2},$$

entonces existe un subgrafo $G' \subset G$ con

$$|G'| \geq \varepsilon n \quad y \quad \delta(G') \geq (c - \varepsilon) |G'|.$$

Demostración. Sea $G_n, G_{n-1}, G_{n-2}, \dots, G_t$ la secuencia de subgrafos de G obtenida de la siguiente manera: $G_n := G$ y el grafo $G_{n-(i+1)}$ se obtiene a partir de G_{n-i} borrando un vértice $v \in V(G_{n-i})$ con $d_{G_{n-i}}(v) < (c - \varepsilon) \cdot |G_{n-i}|$; además, G_t es el último grafo de la secuencia. Notar que $|G_{n-i}| = n - i$.

Afirmamos que $t \geq \varepsilon n$ para n lo suficientemente grande, y por ende, G_t será el subgrafo que buscábamos: por construcción $\delta(G_t) \geq (c - \varepsilon) |G_t|$. Para eso, calculamos la cantidad total de aristas borradas para la obtención de G_t :

$$\sum_{i=0}^{n-(t+1)} d_{G_{n-i}}(v_i) < (c - \varepsilon) \sum_{i=0}^{n-(t+1)} (n - i) = (c - \varepsilon)(n - t)(n + t + 1)/2,$$

y como G_t tiene a lo más $\binom{t}{2}$ aristas, tenemos que

$$e(G) \leq (c - \varepsilon)(n - t)(n + t + 1)/2 + \binom{t}{2}.$$

Supongamos por el absurdo que $t \leq \varepsilon n$. Nuestro objetivo es acotar el lado derecho:

$$\begin{aligned} e(G) &\leq (c - \varepsilon)(n - t)(n + t + 1)/2 + \binom{t}{2} = (c - \varepsilon) \frac{(n^2 + n - (t^2 + t))}{2} + \frac{t(t-1)}{2} \\ &\leq (c - \varepsilon) \frac{n^2 + n}{2} + \frac{\varepsilon n(\varepsilon n - 1)}{2} \\ &= (c - \varepsilon + \varepsilon^2) \frac{n^2}{2} + (c - 2\varepsilon) \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Notar que el lado derecho es un polinomio cuadrático en la variable n con coeficiente principal $\frac{c-\varepsilon+\varepsilon^2}{2} < \frac{c}{2}$ y por lo tanto para n lo suficientemente grande, se contradice la desigualdad $c\frac{n^2}{2} \leq e(G)$. Así, $t \geq \varepsilon n$. \square

Lema 1.5.6. Para todo $r, t \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si G es un grafo con $n \geq n_0$ vértices y

$$\delta(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right)n$$

luego $K_{r+1}(t) \subset G$.

Demostración. Procedemos por inducción en r . Para $r = 1$, tenemos que $K_2(t) = K_{t,t}$ y sabemos que en este caso $\text{ex}(n, K_{t,t}) = o(n^2)$. Como n es lo suficientemente grande, $K_{t,t} \subset G$. En efecto, se tendrá que

$$e(G) = \frac{1}{2} \sum_{v \in G} d_G(v) \geq \frac{\delta(G)n}{2} \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) \frac{n^2}{2}.$$

Ahora, supongamos que $r \geq 2$. Primero, encontraremos por hipótesis inductiva, una copia de $K_r(q)$ con $q \geq t/\varepsilon$; escribamos $A := \bigcup_{i=1}^r A_i$ a la partición de los vértices de $K_r(q)$.

Luego, definimos $X \subset B := V(G) \setminus A$, el conjunto de todos los vértices que tienen al menos t vecinos en cada A_i . Mostramos que $|X| \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. Para esto, acotamos $e(A, B)$ por abajo:

$$\begin{aligned} e(A, B) &= \sum_{v \in A} d_G(v) - 2e(A) \\ &\geq qr \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right)n - 2 \frac{(qr)^2}{2}. \end{aligned}$$

Y acotamos por arriba:

$$e(A, B) \leq |X|qr + (|B| - |X|)(q(r-1) + t - 1).$$

Juntando ambas desigualdades, tenemos:

$$\underbrace{n(qr\varepsilon - t + 1)}_{>0} + \underbrace{q^2(-r^2 + r - 1) - q(t - 1)}_{>0} \leq |X| \underbrace{(q - t + 1)}_{>0}$$

Por lo tanto, se sigue lo que queremos cuando $n \rightarrow \infty$.

Finalmente, demostramos que existen conjuntos

$$B_i \subset A_i \text{ con } |B_i| = t \text{ y } t \text{ vértices } x \in X \text{ que satisfacen } N_G(x) \supset B_i,$$

de donde concluiremos que $K_{r+1}(t) \subset G$. Sea $x \in X$, existen a lo más $\binom{q}{t}$ formas de elegir B_i^x en A_i , donde B_i^x satisface $|B_i^x| = t$ y $N_G(x) \subset B_i^x$. Si $|X| > \binom{q}{t}^r \cdot (t - 1)$, entonces por el principio del palomar tenemos lo que queremos. \square

Demostración del Teorema. Observemos que H está contenido en el grafo $\chi(H)$ -partito, completo y con partes de tamaño $|H|$, es decir, en $K_{\chi(H)}(|H|)$. Con lo cual,

basta probar el teorema para $H' := K_r(t)$ con $r := \chi(H)$ y $t := |H|$. De hecho, probaremos que para cualquier $r \geq 2$, $t \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\text{ex}(n, K_r(t)) \leq \left(1 - \frac{1}{r-1} + \varepsilon\right) \frac{n^2}{2} \quad (n \geq n_0).$$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño. Sea n lo suficientemente grande, y G con n vértices tal que

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r-1} + \varepsilon\right) \frac{n^2}{2}.$$

Aplicamos el primer lema 1.5.5 con $c = 1 - \frac{1}{r-1} + \varepsilon$ y $\frac{\varepsilon}{2}$. Así, obtenemos un subgrafo $G' \subset G$ con

$$|G'| \geq \frac{\varepsilon}{2}n \quad \text{y} \quad \delta(G') \geq \left(1 - \frac{1}{r-1} + \varepsilon\right) |G'|.$$

Como n es lo suficientemente grande: $\frac{\varepsilon}{2}n \geq n_0$, y por el segundo lema 1.5.6, G' contiene a $K_r(t)$, y por lo tanto G también. El resultado se sigue. \square

Definición 1.5.7. G está t -cerca de ser r -partito si existe un subgrafo r -partito de G con al menos $e(G) - t$ aristas.

Teorema 1.5.8 (Teorema de Estabilidad de Erdős-simonovits). *Para todo grafo H con $e(H) \geq 1$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que: si G es H -libre en n -vértices y*

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} - \delta\right) \binom{n}{2}.$$

Entonces G está (εn^2) -cerca de ser $(\chi(H) - 1)$ -partito.

Haremos la demostración con $H = K_{r+1}$ y para H general lo haremos con el Lema de Regularidad 1.7.5.

Para todo $\varepsilon > 0$ lo suficientemente chico, existe $\delta > 0$ tal que: si G es K_{r+1} -libre en n -vértices y

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right) \binom{n}{2},$$

entonces G está (εn^2) -cerca de ser r -partito.

Requerimos probar dos lemas previos:

Lema 1.5.9. *Sea $r \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ y n suficientemente grande. Si G es K_{r+1} -libre con n vértices y*

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} - \delta^2\right) \frac{n^2}{2},$$

entonces existe $G' \subset G$ con $|G'| \geq (1 - \delta)n$ y

$$\delta(G') \geq \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right) |G'|.$$

Demostración. De la demostración del Lema 1.5.5 se deduce un enunciado más fuerte:

Dados $r \in \mathbb{N}$ y $c \in (0, 1)$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo grafo G con $n \geq n_0$ vértices y

$$e(G) \geq c \frac{n^2}{2},$$

existe un subgrafo $G_t \subset G$ con $|G_t| = t \geq \varepsilon n$ y $\delta(G_t) \geq (c - \varepsilon)|G_t|$; más aún,

$$e(G) \leq e(G_t) + (c - \varepsilon)(n - t)(n + t + 1)/2.$$

Ahora, dado $\delta > 0$, el cual sin pérdida de generalidad lo podemos asumir $\delta < \frac{1}{2}$, tomamos $c := (1 - \frac{1}{r} - \delta^2) > 0$ y $\varepsilon = \delta - \delta^2 > 0$. Supongamos que G es un grafo con n vértices K_{r+1} -libre, y

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} - \delta^2\right) \frac{n^2}{2} = c \frac{n^2}{2},$$

luego existe un subgrafo $G_t \subset G$ con $t \geq (\delta - \delta^2)n$ vértices. Como en la demostración de la Observación 1.5.4 se ve que $t_r(t) \sim (1 - \frac{1}{r}) \frac{t^2}{2}$ ($t \rightarrow \infty$), podemos suponer que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $t_r(t) \leq (1 - \frac{1}{r} + \gamma) \frac{t^2}{2}$, para $\gamma := \frac{\delta^2}{2}$.

Ahora, como G es K_{r+1} -libre, entonces G_t también y se tiene que

$$e(G_t) \leq \text{ex}(t, K_{r+1}) \leq t_r(t) \leq \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\delta^2}{2}\right) \frac{t^2}{2},$$

por el Teorema de Turán 1.1.6. Juntando esto con lo mencionado al principio, tenemos que

$$\begin{aligned} c \frac{n^2}{2} &\leq e(G) \leq e(G_t) + (c - \varepsilon)(n - t)(n + t + 1)/2 \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\delta^2}{2}\right) \frac{t^2}{2} + (c - \varepsilon)(n - t)(n + t + 1)/2 \\ &= \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\delta^2}{2}\right) \frac{t^2}{2} + (c - \varepsilon) \frac{(n^2 + n - t^2 - t)}{2}, \end{aligned}$$

esto implica que para n lo suficientemente grande de tal suerte que $\frac{(c - \varepsilon)}{2}n \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{n^2}{2}$,

$$\varepsilon \frac{n^2}{4} \leq (\delta + \frac{\delta^2}{2}) \frac{t^2}{2}.$$

Reemplazando $\varepsilon = \delta - \delta^2$ en la última desigualdad, y despejando t :

$$\sqrt{\frac{\delta - \delta^2}{2\delta + \delta^2}} n \leq t.$$

Como la expresión de la izquierda es más grande que $(1 - \delta)$ cuando $\delta < \frac{1}{2}$, se sigue que para todo n lo suficientemente grande,

$$|G_t| = t \geq (1 - \delta)n.$$

Es decir, G_t es el subgrafo G' de G que cumple las propiedades deseadas del enunciado. \square

Lema 1.5.10. Para todo $r \in \mathbb{N}$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si G es K_{r+1} -libre con n vértices y

$$\delta(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right)n,$$

entonces existe una partición $V(G) = A_0 \sqcup A_1 \sqcup \dots \sqcup A_r$ tal que $|A_0| \leq \varepsilon n$ y A_i son conjuntos independientes para todo $i \geq 1$.

Demostración. Si tomamos $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño, entonces G contiene una copia de K_r por el Teorema de Turán 1.1.6 (esto ocurre si $e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r-1}\right) \frac{n^2}{2}$; tomar $\delta < \frac{1}{r-1} - \frac{1}{r}$ y notar que en la demostración de la Observación 1.5.4 se ve que $t_r(t) \sim \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{t^2}{2}$ ($t \rightarrow \infty$)).

Sea A un conjunto de vértices que induce un K_r en G . Sean $B := V(G) \setminus A$ y $X := \{v \in V(G) \mid |N_G(v) \cap A| \leq r-2\}$, vamos a mostrar que X es pequeño.

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right)nr - r(r-1) &\leq e(A, B) & \left(2e(A) + e(A, B) = \sum_{v \in A} d_G(v) \geq r \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right)n\right) \\ &\leq (r-1)((n-r) - |X|) + (r-2)|X| = (r-1)(n-r) - |X|, \end{aligned}$$

manipulando la desigualdad, obtenemos:

$$|X| \leq \delta nr.$$

Tomando $\delta < \min\{\frac{\varepsilon}{r}, \frac{1}{r-1} - \frac{1}{r}\}$, el A_0 será X y los conjuntos independientes son:

$$A_u = \{u\} \cup \{v \in B \setminus X \mid uv \notin E(G)\}$$

para cada $u \in A$. □

Ahora estamos en condiciones de demostrar el Teorema de Estabilidad de Erdos-Simonovits para $H = K_{r+1}$ 1.5:

Demostración del Teorema de Estabilidad de Erdos-Simonovits para $H = K_{r+1}$ 1.5. Sea $\varepsilon > 0$ chico, tomemos $\delta = (\delta')^2$ donde δ' se obtiene del Lema 1.5.10 con $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2}$. Notar que de la demostración podemos suponer que si $\varepsilon > 0$ es chico, luego $\delta' < \frac{\varepsilon'}{2}$ también. Por hipótesis

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} - (\delta')^2\right) \frac{n^2}{2},$$

entonces por el Lema 1.5.9: existe $G' \subset G$ con $n' := |G'| \geq (1 - \delta')n$ y $\delta(G') \geq \left(1 - \frac{1}{r} - \delta'\right)|G'| = n'$. Por el Lema 1.5.10: para $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2}$ se tiene que existe A_0, A_1, \dots, A_r partición de G' con $|A_0| < \varepsilon'n' \leq \varepsilon'n$ y A_i conjuntos independientes para todo $i \geq 1$. Así el subgrafo generado por los A_i con $i \geq 1$ es r -partito. Además, para obtener este subgrafo, hay que quitar a lo más

$$\varepsilon'n^2 + \varepsilon'n^2 < \varepsilon n^2 \quad (\delta, \delta' \ll 1)$$

aristas de G , es decir, G está εn^2 -cerca de ser r -partito. En efecto, las aristas de $G[V(G) \setminus V(G')]$ junto con $E_G(V(G'), V(G) \setminus V(G'))$ aportan $\leq \binom{\delta'n}{2} + n' \cdot (n - n') \leq \delta'n^2 + \delta'n^2 \leq \varepsilon'n^2$, y las de $G[V(A_0)]$ junto con $E_G(V(A_0), V(G) \setminus V(A_0))$ aportan

$$\leq \binom{\varepsilon'n}{2} + (\varepsilon'n) \cdot (\delta')n \leq \varepsilon'n^2.$$

□

1.6. Ejercicios

Ejercicio 1.6.1. Púebel el teorema de Mantel de manera alternativa. Considere un conjunto independiente B de tamaño máximo en un grafo K_3 -libre y la suma de los grados de los vértices que no están en B .

Solución. Sea G un grafo K_3 -libre con orden n y B un conjunto independiente de G de tamaño máximo; consideremos $A := V(G) \setminus B$. Inspeccionemos la sumatoria

$$\sum_{v \in A} d_G(v);$$

notar que $d_G(v) = |N_G(v)|$ y que $N_G(v)$ es un conjunto de vértices aislados en G : si x, y son dos vecinos de v entonces $xy \notin E(G)$ porque de lo contrario G tendría un triángulo xyv . Así, como $|B|$ es máximo, se sigue que $|N_G(v)| \leq |B|$. Esto implica que

$$\sum_{v \in A} d_G(v) \leq |A| |B|.$$

Más aún, como A, B particionan $V(G)$: $|A| + |B| = n$. Luego $|A| \cdot |B|$ se maximiza cuando $|A| |B| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil = t_2(n)$. Así,

$$e(G) = e(A, B) + e(A) \leq e(A, B) + 2e(A) = \sum_{v \in A} d_G(v) \leq t_2(n),$$

como queríamos probar. \square

Comentario 1.6.2. Que $|A| \cdot |B|$ con $|A| + |B| = n$ se maximiza cuando $|A| \cdot |B| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil$ se deduce de que reemplazando $|B| = n - |A|$, el problema equivale a maximizar $|A| \cdot (n - |A|)$. Más formalmente, el problema equivale a maximizar $f(x) = x(n - x)$ con x número natural en el intervalo $[0, n]$. Simplemente notemos que $f'(x) = n - 2x$, luego f es creciente en $[0, \frac{n}{2}]$ y decreciente en $[\frac{n}{2}, n]$, pero como $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ es el mayor número entero $\leq \frac{n}{2}$, f alcanza máximo en $[0, \frac{n}{2}]$ cuando $x = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, similarmente, f alcanza máximo en $[\frac{n}{2}, n]$ cuando $x = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Como $f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) = f(\lceil \frac{n}{2} \rceil)$, se sigue que f se maximiza en $x = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y $x = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, es decir, el valor máximo de f es $f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Ejercicio 1.6.3. Demuestre que si G es un grafo con $n = 2k + 1$ vértices, entonces G contiene un camino de largo k , digamos P_k , o el complemento de G tiene un triángulo.

Solución. Supongamos por el absurdo que ninguna de las dos situaciones pasa. Por un lado, si el complemento \overline{G} de G no contiene triángulos, el Teorema de Mantel nos dice que

$$e(\overline{G}) \leq \text{ex}(n, K_3) \leq k(k + 1).$$

Como $(2k + 1)k = \binom{n}{2} = e(G) + e(\overline{G})$, deducimos que

$$k^2 \leq e(G).$$

Por otro lado, si G no contiene P_k -caminos, el Teorema de Erdős & Gallai dice que

$$e(G) \leq \text{ex}(n, P_k) \leq \frac{(k - 1)n}{2} = \frac{(k - 1)(2k + 1)}{2}.$$

Juntando ambas desigualdades, llegamos al absurdo:

$$k^2 \not\leq \frac{(k-1)(2k+1)}{2}.$$

Por lo tanto, G contiene un P_k -camino o \overline{G} un triángulo. \square

Ejercicio 1.6.4. Demuestre que si T es un árbol con k vértices, entonces $T \subseteq G$ o el complemento de G contiene un triángulo si $n := |G| = 2k - 1$.

Solución. Supongamos por el absurdo que G es un grafo con $n = 2k - 1$ vértices que no contiene a un árbol T con k vértices, y que \overline{G} , su complemento, no contiene triángulos. En particular, la primera suposición implica que $\delta(G) \leq k - 2$ por el siguiente lema, cuya demostración vimos en clase:

Sean $t \in \mathbb{N}$ y T un árbol con $t + 1$ vértices. Entonces si G es un grafo con $\delta(G) \geq t$, luego contiene a T como subgrafo.

Mientras que la segunda suposición (\overline{G} no tiene triángulos), implica que dado un vértice $w \in V(G)$, entonces para cada par de vértices w', w'' no adyacentes a w se tiene que $w'w'' \in E(G)$. En otras palabras, para todo $w \in V(G)$, el subgrafo $G[A_w]$ inducido por el conjunto $A_w := V(G) \setminus \{N_G(w) \cup \{w\}\}$ es completo; notar que como $|A_w| = n - (d_G(w) + 1)$, este grafo es isomorfo a $K_{n-d_G(w)-1}$.

Finalmente, para llegar al absurdo, consideremos $v \in V(G)$ un vértice con grado $d_G(v) = \delta(G) \leq k - 2$, entonces $G[A_v]$ es un subgrafo de G isomorfo a $K_{n-\delta(G)-1}$, i.e. un completo con al menos

$$n - \delta(G) - 1 = (2k - 1) - \delta(G) - 1 \geq (2k - 1) - (k - 2) - 1 = k$$

vértices, luego contiene una copia de T , con lo cual G también: absurdo. Consecuentemente, G contiene una copia de T o \overline{G} tiene triángulo(s). \square

Solución. [Segunda solución] Otra manera de resolver el ejercicio es haciendo inducción $k \geq 1$: supongamos que G es un grafo de orden $2k - 1$ con \overline{G} libre de triángulos, probaremos que $T \subset G$ para cualquier árbol T de orden k . El caso $k = 1$ es trivial.

En general, supongamos que $k \geq 2$ y tomemos una hoja h de T , consideremos $T' := T \setminus \{h\}$ y escribamos $p \in T'$ para el padre de h en T . Ahora, si G es completo ya ganamos, pues $K_{2k-1} \supset T$, con lo cual podemos suponer que existen $v, w \in V(G)$ tales que $vw \notin G$, y consideremos $G' := G \setminus \{v, w\}$. Notar que $\overline{G'}$ es K_3 -libre y G' tiene orden $2(k-1) - 1$, luego por hipótesis inductiva G' contiene a T' . Por otro lado, $p \in T'$ tiene que ser vecino de w o de v en G , de lo contrario \overline{G} tendría un triángulo! Esto prueba que $T \subset G$. \square

Ejercicio 1.6.5. Pruebe que si $e(G) > n^2/4$, entonces G contiene al menos $\lfloor n/2 \rfloor$ triángulos.

Solución. El Teorema de Füredi (2015) dice:

Sean $n, t \in \mathbb{N}$, y G con n vértices. Si G está t -lejos de ser bipartito, entonces hay al menos

$$\frac{n}{6} \left(e(G) - \frac{n^2}{4} + t \right)$$

triángulos en G .

Sea $H \subset G$ el subgrafo bipartito con cantidad de aristas $e(H)$ máxima de G . Como $e(H) \leq \frac{n^2}{2} < e(G)$, tenemos que $H \subsetneq G$; y podemos escribir $t := e(G) - e(H) \geq 1$. En particular, como $e(H)$ es máximo, tenemos que G está t -lejos de ser bipartito. Con lo cual, el Teorema de Füredi implica que G contiene al menos

$$\frac{n}{6} \left(e(G) - \frac{n^2}{4} + t \right)$$

triángulos; en particular, si $e(G) - \frac{n^2}{4} + t \geq 3$ ganamos, pues en este caso habrían al menos $\frac{n}{2} \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ triángulos. Por otro lado, esta cantidad es menor que 3 si y solo si $t = 1$ y $H = T_2(n)$. En este caso, $H = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$. Tomemos una arista $f \in E(G) \setminus E(H)$, con lo cual f tiene sus extremos en una de las dos particiones de H ; en el peor de los casos está en la partición más grande, es decir, para todo vértice v de la partición de H con menor cantidad de vértices: $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, se forma un triángulo distinto con vértices v y los extremos de f . En particular, G contiene en este caso al menos $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ triángulos. \square

Ejercicio 1.6.6. Sean G y H grafos. Demuestre que si G tiene n vértices y al menos $2 \cdot \text{ex}(n, H)$ aristas, entonces G contiene al menos $\text{ex}(n, H)$ copias de H .

Solución. Supongamos que G no contiene $e := \text{ex}(n, H)$ copias de H , luego quitando una arista por cada copia de H en G obtenemos un grafo H -libre con al menos $e(G) - (e - 1) \geq 2e - (e - 1) = e + 1$ aristas. Sin embargo, por definición de e , se sigue que este grafo tiene a lo más e aristas, absurdo. Esto prueba que G tiene al menos e copias de H . \square

Ejercicio 1.6.7. Sea $k \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Demuestre que todo grafo G con n vértices y al menos $n^2/4$ aristas contiene un grafo H con al menos k vértices y $\delta(H) \geq \frac{|H|}{2}$.

Solución. Probaremos un enunciado más fuerte:

Sea $k \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Entonces todo grafo G con n vértices y al menos $\frac{n^2}{4}$ aristas contiene a $H := K_{k,k}$.

Esto prueba el ejercicio pues el grafo $H := K_{k,k}$ tiene $2k \geq k$ vértices y $\delta(H) = k = \frac{v(H)}{2}$.

Ahora probemos este enunciado más fuerte. Para eso utilizaremos el Teorema de Kövani, Sós, y Turán (abreviado “KST”):

Sean $s, t \in \mathbb{N}$, $s \leq t$. Entonces existe una constante $c = c(s, t) > 0$ tal que

$$\text{ex}(n, K_{s,t}) \leq c \cdot n^{2-\frac{1}{s}}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

lo aplicamos al caso $s = t = k$.

Así, el Teorema de KST dice que

$$\text{ex}(n, H) \leq c \cdot n^{2-\frac{1}{k}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

con $c > 0$ una constante que depende solo de k . Tomando $n_0 \in \mathbb{N}$ para que $\frac{n^2}{4} > cn^{2-\frac{1}{k}}$ valga para todo $n \geq n_0$, se sigue que G siempre debe tener a H como subgrafo: de lo contrario se llegaría al absurdo:

$$\frac{n^2}{4} \leq e(G) \leq \text{ex}(n, H) \leq cn^{2-\frac{1}{k}}.$$

□

Solución. [Segunda solución] Por el Lema 1.3.3, G contiene un subgrafo H' tal que

$$\delta(H') > \varepsilon(H') \geq \varepsilon(G).$$

Como $\varepsilon(G) = \frac{e(G)}{|G|} \geq \frac{n}{4}$, se tiene que para n lo suficientemente grande, H' contiene a $K_{1,k}$, y por lo tanto $H := K_{1,k}$ sirve. En efecto,

$$\delta(H) = k \geq \frac{k+1}{2} = \frac{|H|}{2}.$$

□

1.7. Regularidad

Definición 1.7.1. Dada una partición de los vértices de un grafo G , digamos $V(G) = X \sqcup Y$, definimos la **densidad** del par (X, Y) como la cantidad

$$d(X, Y) := \frac{e(X, Y)}{|X||Y|}.$$

Definición 1.7.2. Dado $\varepsilon > 0$. Sean $A, B \subset V(G)$ con G un grafo. Diremos que el par (A, B) es **ε -regular** si para todo $X \subset A, Y \subset B$ con

$$|X| \geq \varepsilon |A| \quad \text{e} \quad |Y| \geq \varepsilon |B|$$

tenemos

$$|d(X, Y) - d(A, B)| \leq \varepsilon.$$

Definición 1.7.3. Sea G un grafo. Una partición $V(G) = V_0 \sqcup V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_k$, se dice **equipartición**, si

$$|V_0| \leq |V_1| = |V_2| = \cdots = |V_k|.$$

Al conjunto V_0 lo llamamos **conjunto excepcional**.

Definición 1.7.4. Sea G un grafo con n vértices y $\varepsilon > 0$. Diremos que una partición $V(G) = V_0 \sqcup V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_k$ es **ε -regular**, si $|V_0| \leq \varepsilon n$ y a lo más εk^2 pares (V_i, V_j) con $1 \leq i, j \leq k$ no son ε -regulares.

Teorema 1.7.5 (Lema de Regularidad de Szemerédi). *Para todo $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$, existe $M = M(\varepsilon, m) \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier grafo G con $|G| \geq M$, existe una equipartición ε -regular*

$$V(G) = V_0 \sqcup V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_k$$

con $m \leq k \leq M$.

Demostración.

Definición 1.7.6. Dado un grafo G con n vértices y partición de sus vértices $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$, definimos la **media cuadrática** del par (V_i, V_j) para cada $i \neq j$ como

$$d_2(V_i, V_j) := \frac{e(V_i, V_j)^2}{|V_i||V_j|n^2},$$

y la **media cuadrática** de la partición \mathcal{P} como

$$d_2(\mathcal{P}) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} d_2(V_i, V_j) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \frac{|V_i||V_j|}{n^2} d(V_i, V_j)^2 \leq 1.$$

Definición 1.7.7. Una partición \mathcal{P}' de G se dice que **refina** a una partición \mathcal{P} (o que es un **refinamiento** de \mathcal{P}) si cada parte de \mathcal{P} es una unión de algunas partes de \mathcal{P}' .

Lema 1.7.8. Si \mathcal{P}' es un refinamiento de \mathcal{P} , entonces

$$d_2(\mathcal{P}') \geq d_2(\mathcal{P}).$$

Lema 1.7.9. Sea G un grafo y \mathcal{P} una partición de $V(G)$. Si (X, Y) es un par no ε -regular en \mathcal{P} . Entonces, existen particiones $\{X_1, X_2\}$ de X y particiones $\{Y_1, Y_2\}$ de Y tales que

$$\sum_{1 \leq r, s \leq 2} \frac{|X_r||Y_s|}{n^2} \cdot d(X_r, Y_s)^2 \geq d(X, Y)^2 + \varepsilon^4.$$

Lema 1.7.10. Sea G un grafo con n vértices y \mathcal{P} partición de G que no es ε -regular. Entonces existe un refinamiento \mathcal{P}' de \mathcal{P} tal que:

$$(I) \quad d_2(\mathcal{P}') \geq d_2(\mathcal{P}) + \varepsilon^5.$$

$$(II) \quad \#\mathcal{P}' \leq k \cdot 2^{k-1}.$$

Ahora, veamos la demostración del teorema. Sea $\mathcal{P}_0 = \{V_0, V_1, \dots, V_m\}$ una partición de G con $\underbrace{|V_0|}_{1 \leq |V_0| \leq m-1} = n - n \lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ y $|V_i| = \lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ para todo $i = 1, \dots, m$. Si \mathcal{P}_0 no

es ε -regular, existe \mathcal{P}_1 refinamiento de \mathcal{P}_0 tal que $d_2(\mathcal{P}_1) \geq d_2(\mathcal{P}_0) + \varepsilon^5$ y

$$|\mathcal{P}_1| \leq m \cdot 2^m.$$

Ahora, obtenemos una equipartición de \mathcal{P}'_1 a partir de \mathcal{P}_1 : particionando cada parte de \mathcal{P}_1 en conjuntos de tamaño

$$\frac{\frac{\varepsilon^6}{2}n}{\#\mathcal{P}_1},$$

y un conjunto despreciable de tamaño $< \frac{\varepsilon^6}{2}n$. En total, el conjunto de los vértices despreciados lo agregamos al *conjunto excepcional* V_0 , es decir, agregamos $< \frac{\varepsilon^6}{2}n$ vértices. Afirmamos que \mathcal{P}'_1 está acotado por arriba por algo que depende de ε y m :

$$\#\mathcal{P}'_1 \leq \frac{n}{\frac{\varepsilon^6}{2}} / \#\mathcal{P}_1 = \frac{2\#\mathcal{P}_1}{\varepsilon^6} \leq \frac{m2^{m+1}}{\varepsilon^6}.$$

Por el primer lema, $d_2(\mathcal{P}'_1) \geq d_2(\mathcal{P}_1) \geq d_2(\mathcal{P}_0) + \varepsilon^5$.

Si no obtenemos una partición ε -regular, entonces continuamos refinando, para así obtener una secuencia de equiparticiones:

$$\mathcal{P}_0, \mathcal{P}'_1, \mathcal{P}'_2, \dots, \mathcal{P}'_k.$$

Como $d(\mathcal{Q}) \leq 1$ para cualquier partición \mathcal{Q} de G , y $d_2(\mathcal{P}_{i+1}) \geq d_2(\mathcal{P}'_i) + \varepsilon^5$, tenemos que $k \leq \varepsilon^{-5}$. Entonces, luego de a lo más ε^{-5} iteraciones, habremos encontrado una partición ε -regular con una cantidad de partes acotada por M que solamente depende de m y ε . Por último, el conjunto excepcional de dicha partición es

$$\leq (m-1) + \frac{\varepsilon^6 n}{2} \varepsilon^{-5} < \varepsilon n.$$

□

Corolario 1.7.11. *Se puede probar el Teorema de Erdős-Stone 1.5.2:*

Dado un grafo H , para todo $\delta > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si G es un grafo con $n \geq n_0$ vértices y

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \delta\right) \frac{n^2}{2},$$

entonces $H \subset G$, donde $r = \chi(H) - 1$.

La idea de la demostración del corolario será la siguiente:

Tomemos $\delta > 0$ arbitrariamente pequeño, aplicamos el Lema de Regularidad de Szemerédi con ε lo suficientemente pequeño y $m > \frac{1}{\varepsilon}$. Así existe $M \in \mathbb{N}$, y obtenemos una equipartición ε -regular

$$V(G) = V_0 \sqcup V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k,$$

con $M \geq k \geq m > \frac{1}{\varepsilon}$, de cualquier grafo G con $|G| \geq M$.

Borramos de G todas las aristas sobre las que “no hay control”:

- (a) Las que ven a V_0 .
- (b) Aristas dentro de las partes V_i con $i \geq 1$.
- (c) Las aristas entre pares no ε -regulares.
- (d) Aristas entre pares no densos, i.e., “tenemos menos que $\delta/2$ densidad”.

Después, obtenemos el grafo reducido R : dado por contraer cada V_i a un vértice w_i con $i \geq 1$, y borrar aristas múltiples. Así, R tiene conjunto de vértices w_1, \dots, w_r donde $w_i w_j \in E(R)$ sii (V_i, V_j) es ε -regular y denso.

Aplicamos lemas de inmersión en “aristas” de grafo - grafo reducido:

$$\text{Si } H \subset R \quad \Rightarrow \quad H \subset G.$$

Lema 1.7.12. *Sea $V_0 \sqcup V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k$ una partición ε -regular de un grafo G de n vértices, con $k \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Entonces, hay un máximo de:*

- (a) εn^2 aristas con un extremo en V_0 .
- (b) εn^2 aristas dentro de una parte V_i con $i \geq 1$.
- (c) εn^2 aristas entre pares (con $i, j \neq 0$) que no son ε -regulares.
- (d) δn^2 aristas entre pares (con $i, j \neq 0$) de densidad $< \delta$.

Más aún, hay un máximo de

- (b') εn^2 aristas dentro de V_0 .

Demostración. (a) Como $|V_0| \leq \varepsilon n$ entonces hay a lo más

$$\varepsilon n(1 - \varepsilon)n + \binom{\varepsilon n}{2} < \varepsilon n^2 \text{ aristas en (a).}$$

- (b) Cada V_i tiene $\leq \frac{n}{k}$ vértices (pues estamos en una equipartición), y entonces hay a lo más $k \cdot \binom{\frac{n}{k}}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} n^2$ aristas para (b).
- (c) Hay a lo más εk^2 pares que no son ε -regulares y cada par tiene a lo más $\left(\frac{n}{k}\right)^2$ aristas entre sí. Consecuentemente, aportan a lo más $\varepsilon k^2 \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^2 = \varepsilon n^2$ aristas en (c).
- (d) En el peor caso, los $\binom{k}{2}$ pares son poco densos. En este caso, por definición de densidad:

$$e(V_i, V_j) \leq \delta \left(\frac{n}{k}\right)^2, \quad \forall 1 \leq i, j \leq k,$$

y entonces, hay a lo más $\delta \left(\frac{n}{k}\right)^2 \binom{k}{2} \leq \delta n^2$ aristas en pares “poco densos”, i.e., en (d).

Por último,

- (b') Como $|V_0| \leq \varepsilon n$, hay a lo más $|V_0|^2 \leq \varepsilon n^2$ aristas en V_0 .

□

Lema 1.7.13. Sea $\varepsilon > 0$, y sea (A, B) un par ε -regular de un grafo G . Entonces,

$$(d(A, B) - \varepsilon) |B| \leq |N_G(v) \cap B| \leq (d(A, B) + \varepsilon) |B|$$

para todo $v \in A$, salvo a lo más $2\varepsilon |A|$.

Demostración. Consideremos el conjunto $X \subset A$ de los vértices que no cumplen alguna de las dos desigualdades. Probaremos que $|X| < 2\varepsilon |A|$ por el absurdo. Si este no fuera el caso, tendríamos que $|X| \geq 2\varepsilon |A|$ y por lo tanto hay al menos $\varepsilon |A|$ vértices que no cumplen la primera desigualdad o la segunda. Supongamos que estamos en el primer caso, el segundo caso es análogo. Es decir, supongamos que existe un conjunto $X' \subset A$ con $|X'| \geq \varepsilon |A|$ tal que para todo $v \in X'$,

$$(d(A, B) - \varepsilon) |B| > |N_G(v) \cap B|.$$

Sumando en la desigualdad anterior sobre todos los $v \in X'$, tenemos que

$$(d(A, B) - \varepsilon) |B| |A| > e(X', B),$$

por lo tanto $(d(A, B) - \varepsilon) > d(X', B)$, i.e.,

$$|d(A, B) - d(X', B)| > \varepsilon.$$

Consideremos ahora $Y' = B$, en particular $|Y'| \geq \varepsilon |B|$ si $\varepsilon > 0$ es chico. Luego por ε -regularidad del par (A, B) , tenemos que

$$|d(A, B) - d(X', B)| \leq \varepsilon,$$

absurdo. □

Lema 1.7.14 (Slicing). *Sea $\alpha \geq \varepsilon > 0$, y sea (A, B) un par ε -regular en un grafo G . Para cualquier $X \subset A, Y \subset B$ con*

$$|X| \geq \alpha |A| \quad \text{y} \quad |Y| \geq \alpha |B|$$

se tiene que el par (X, Y) es $\max\{\frac{\varepsilon}{\alpha}, 2\varepsilon\}$ -regular. Además, por ε -regularidad del par (A, B) , se tiene que

$$|d(X, Y) - d(A, B)| \leq \varepsilon.$$

Demostración. La última afirmación es clara. Veamos la primera, para eso consideremos $\varepsilon' = \max\{\frac{\varepsilon}{\alpha}, 2\varepsilon\}$. Sean $Z \subset X$ y $W \subset Y$ tales que $|Z| \geq \varepsilon' |X|$ y $|W| \geq \varepsilon' |Y|$, entonces $|Z| \geq \varepsilon |A|$ y $|W| \geq \varepsilon |B|$. Luego por ε -regularidad del par (A, B) , se tiene que

$$|d(Z, W) - d(A, B)| \leq \varepsilon.$$

Además, por ε -regularidad del par (A, B) , se tiene que

$$|d(X, Y) - d(A, B)| \leq \varepsilon.$$

Juntando ambas desigualdades tenemos que:

$$\begin{aligned} |d(Z, W) - d(X, Y)| &\leq |d(Z, W) - d(A, B)| + |d(X, Y) - d(A, B)| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon \leq 2\varepsilon \leq \varepsilon'. \end{aligned}$$

□

Definición 1.7.15 (Reducido). Dado un grafo H , $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon, \delta > 0$, definimos

$$\mathcal{G}(H, n, \varepsilon, \delta)$$

como la familia de grafos G , tales que existe una equipartición $V(G) = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_l$ con A_i de cardinal n e independiente, y un etiquetamiento de los vértices $V(H) = \{w_1, \dots, w_l\}$ tal que para cada $w_i w_j \in E(H)$, el par (A_i, A_j) es un par ε -regular y además $d(A_i, A_j) \geq \delta$.

Lema 1.7.16 (Lema de inmersión general). *Para todo grafo H y todo $\delta > 0$, existen $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que*

$$G \in \mathcal{G}(H, n, \varepsilon, \delta), n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad H \subset G.$$

Demostración. Haremos inducción en $|H|$. Cuando $|H| = 1$ es trivial. Supongamos entonces que $|H| \geq 2$. Escribamos $V(H) = \{w_1, \dots, w_l\}$ y sea $V(G) = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_l$ una partición de acuerdo a la definición de $\mathcal{G}(H, n, \varepsilon, \delta)$: (A_i, A_j) ε -regular y $d(A_i, A_j) \geq \delta$ para cada $i \leq l-1$ tal que $w_i w_l \in E(H)$.

Elijamos ε lo suficientemente pequeño y apliquemos el Lema 1.7.13 a cada (A_i, A_l) con $w_i w_l \in E(H)$: todos, excepto a lo más $2\varepsilon |A_l|$ vértices $v \in A_l$ satisfaciendo:

$$|N_G(v) \cap A_i| \geq (\delta - \varepsilon) \cdot |A_i|$$

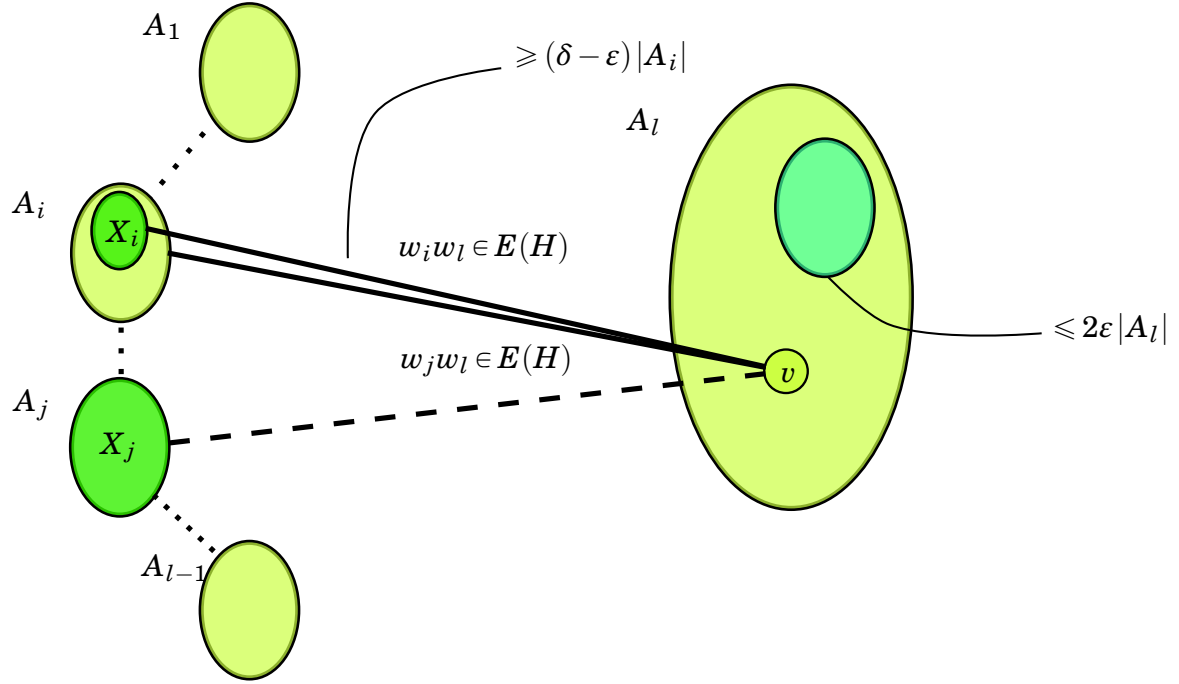


Figura 1.7.5

Como $2\varepsilon |A_l| (l-1) < n$, existe $v \in A_l$ tal que

$$|N_G(v) \cap A_i| \geq (\delta - \varepsilon) |A_i|, \quad \forall i \leq l-1$$

con $w_i w_l \in E(H)$. Definimos

$$\tilde{X}_i = \begin{cases} A_i \cap N_G(v) & \text{si } w_i \in N_H(w_l) \\ A_i & \text{si no,} \end{cases}$$

y por cada \tilde{X}_i construimos un subgrafo X_i , de manera que todos los X_i tengan el mismo cardinal.

Ahora, tomando $\alpha = \delta - \varepsilon \geq \varepsilon > 0$, podemos aplicar el Lema de Slicing 1.7.14 en X_i, X_j cuando $w_i w_j \in E(H)$ para asegurar que son pares $\max\{\frac{\varepsilon}{\delta - \varepsilon}, 2\varepsilon\}$ -regulares y densidad al menos $\delta - \varepsilon$. Luego queremos usar la hipótesis inductiva: sea $H' := H \setminus \{w_l\}$ y $G' := G[\bigcup_{i=1}^{l-1} X_i]$. Así, existen $\varepsilon' > 0$ y $n'_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$G' \in \mathcal{G}(H', n', \varepsilon', \delta - \varepsilon), n' \geq n'_0 \Rightarrow H' \subset G'$$

Con lo cual, si escogemos ε tal que $\max\{\frac{2\varepsilon}{\delta - \varepsilon}, 2\varepsilon\} < \varepsilon'$ y n_0 lo suficientemente grande, de tal suerte que $(\delta - \varepsilon)n_0 \geq n'_0$, tenemos por hipótesis inductiva que $H' \subset G'$. Por lo tanto, $H \subset G$. \square

Lema 1.7.17 (Lema de inmersión aplicable). Sea H un grafo y $\delta > 0$. Defina $r = \chi(H)$. Entonces, existen $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$G \in \mathcal{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta), n \geq n_0 \Rightarrow H \subset G.$$

Demostración. El Lema 1.7.16 garantiza que para todo $\delta' > 0$ existen ε', n'_0 tales que

$$G \in \mathcal{G}(K_r(t), n', \varepsilon', \delta'), n' \geq n'_0 \Rightarrow K_r(t) \subset G,$$

donde $t := |H|$. Como $H \subset K_r(t)$, se tiene que en este caso $H \subset G$.

Concluimos gracias al siguiente ejercicio:

Ejercicio 1.7.18.

- (1) Demostrar que para todo $\delta > 0$, $n' \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon' > 0$, existen ε y δ' tales que

$$\mathcal{G}(K_r, n't, \varepsilon, \delta) \subset \mathcal{G}(K_r(t), n', \varepsilon', \delta').$$

- (2) Demostrar que para todo $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ y $n' \in \mathbb{N}$ es lo suficientemente grande, se tiene que si

$$G \in \mathcal{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta) \quad \text{con } n't \leq n < (n' + 1)t,$$

entonces existe un subgrafo $G' \subset G$ tal que $G' \in \mathcal{G}(K_r, n't, 2\varepsilon, \delta - \varepsilon)$.

Solución.

- (1) Tomemos $n = n't$. Fijemos un etiquetamiento $K_r = \{w_1, \dots, w_r\}$ tal que $K_r(t) = \{w_i^j\}_{1 \leq i \leq r}^{1 \leq j \leq t}$ con $w_i^j w_{i'}^{j'} \in E(K_r(t))$ si y solo si $w_i w_{i'} \in E(K_r)$. Entonces si $G \in \mathcal{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta)$, con equipartición $V(G) = \bigsqcup_{i=1}^r V_i$. Se sigue que podemos subdividir la partición: cada $V_i = \bigsqcup_{j=1}^t V_i^j$ en otra equipartición con partes de cardinal n' .

Ahora busquemos ε y δ' tales que $G \in \mathcal{G}(K_r(t), n', \varepsilon', \delta')$. Pero si $w_i^j w_{i'}^{j'} \in E(K_r(t))$, entonces $w_i w_{i'} \in E(K_r)$, y por lo tanto el par $(V_i, V_{i'})$ es ε regular y como $|V_i^j| = \frac{1}{t} |V_i|$ para todo $1 \leq j \leq t$, el Lema de Slicing 1.7.14 garantiza que los pares $(V_i^j, V_{i'}^{j'})$ para $1 \leq j, j' \leq t$ son $\max\{t\varepsilon, 2\varepsilon\}$ -regulares si ε es lo suficientemente pequeño, i.e. $\frac{1}{t} > \varepsilon$. En cuanto a la densidad, nuevamente el Lema de Slicing garantiza que

$$d(A_i^j, A_{i'}^{j'}) \geq d(A_i, A_{i'}) - \varepsilon \geq \delta - \varepsilon.$$

Por lo tanto, tomamos $\varepsilon < \min\{\varepsilon'/2, \frac{1}{t}\varepsilon', \frac{1}{t}, \delta/2\}$ y $\delta' = \delta/2$ y funciona.

- (2) Sea $G \in \mathcal{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta)$. Luego $V(G) = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k$ es una equipartición de G con $|V_i| = n$. Consideremos cualquier subgrafo G' de G dado por quitar a cada conjunto V_i los suficientes elementos tales que los vértices de G' se equiparticionan en partes de tamaño $n't \geq \frac{n'}{n'+1}n = (1 - \frac{1}{n'+1})n = \left(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n'}{t} \rceil}\right)n = \alpha n$, con $\alpha \geq \frac{1}{2}$ para n' lo suficientemente grande (t está fijo). Luego por el Lema de Slicing 1.7.14,

$$G' \in \mathcal{G}(K_r, n't, 2\varepsilon, \delta - \varepsilon).$$

□

En efecto, para todo $\delta > 0$, el primer ítem dice que

$$\mathcal{G}(K_r, n't, \varepsilon, \delta'),$$

para algún ε y todo $n' \geq n'_0$. Luego, por el segundo ítem, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande tal que si

$$G \in \mathcal{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta),$$

entonces existe un subgrafo $G' \subset G$ tal que $G' \in \mathcal{G}(K_r, n't, 2\varepsilon, \delta - \varepsilon)$. Juntando ambas cosas obtenemos que

$$G \in \mathcal{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta), n \geq n_0 \Rightarrow H \subset G.$$

□

Teorema 1.7.19 (Regularidad de Erdős-Stone). *Para todo grafo H con $e(H) \geq 1$ y cada $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que para todo grafo G con $n \geq n_0$ vértices y*

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + 4\delta\right) \frac{n^2}{2},$$

entonces $H \subset G$.

Comentario 1.7.20. Como $\delta > 0$ es arbitrario, podríamos reemplazar 4δ por $\delta' > 0$ arbitrario en el enunciado.

Demostración. Tomamos $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño dado por el Lema de inmersión aplicable 1.7.17, y aplicamos Regularidad 1.7.5 para el caso $m \geq \frac{1}{\varepsilon}$ al grafo G con $r = \chi(H) - 1$ satisfaciendo la hipótesis del enunciado. Obtenemos una partición $V(G) = V_0 \sqcup V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k$ con $m \leq k \leq M$ una equipartición ε -regular. Sea G' el grafo obtenido a partir de G borrando todas “las aristas sobre las que no hay control” con parámetro ε (regularidad) y δ (densidad). Así, tenemos que G' tiene al menos $e(G) - (3\varepsilon + \delta)n^2$ aristas por el Lema 1.7.12. Sea R el “grafo reducido”, se tiene

$$G' \in \mathcal{G}(R, n', \varepsilon, \delta)$$

con $n' := \frac{n - |V_0|}{k}$. Por lo tanto, si $K_{r+1} \subset R$, entonces por el lema de inmersión aplicable 1.7.17 tendríamos que $H \subset G'$. En efecto, quitando algunas particiones de $V(G')$, obtenemos un subgrafo $G'' \subset G'$ tal que $G'' \in \mathcal{G}(K_{r+1}, n', \varepsilon, \delta)$.

Supongamos ahora que $K_{r+1} \not\subset R$. Luego por el Teorema de Turán 1.1.6:

$$e(R) \leq t_r(k) \sim \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{k^2}{2} \quad (k \rightarrow \infty),$$

es decir, achicando ε de ser necesario para que k sea grande y $t_r(k) \leq \left(1 - \frac{1}{r} + \delta\right) \frac{k^2}{2}$. Se tiene que

$$e(G') \leq \left(1 - \frac{1}{r} + \delta\right) \frac{k^2}{2} \cdot \frac{n^2}{k^2} = \left(1 - \frac{1}{r} + \delta\right) \frac{n^2}{2}.$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} e(G) &\leq \left(1 - \frac{1}{r} + \delta\right) \frac{n^2}{2} + 2(3\varepsilon + \delta) \frac{n^2}{2} \\ &= \left(1 - \frac{1}{r} + 6\varepsilon + 3\delta\right) \frac{n^2}{2} \\ &< \left(1 - \frac{1}{r} + 4\delta\right) \frac{n^2}{2}, \end{aligned}$$

absurdo.

□

Segunda aplicación del Lema de Regularidad de Szémeredi 1.7.5:

Teorema 1.7.21 (Erdős-Simonovits). *Para todo grafo H , y para todo $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que G es un grafo H -libre con $n \geq n_0$ vértices y*

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} - \delta\right) \frac{n^2}{2},$$

entonces G está $(5\delta n^2)$ -cerca de ser $(\chi(H) - 1)$ -partito.

Comentario 1.7.22. Notar que este enunciado es equivalente al enunciado que vimos antes: 1.5.8.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño (que depende de H y δ). Aplicamos el Lema de Regularidad de Szémeredi 1.7.5 para ε y $m \geq \frac{1}{\varepsilon}$; obtenemos la equipartición ε -regular $V(G) = V_0 \sqcup V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k$ con $m \leq k \leq M$ para todo grafo con $|G| \geq M$.

Luego consideramos el “grafo reducido” R con parámetros ε y δ , y vértices w_1, \dots, w_k . Sea $r = \chi(H) - 1$. Si $K_{r+1} \subset R$, entonces $H \subset G$ por el Lema de Inmersión aplicable 1.7.17, lo cual nos lleva a una contradicción. Es decir, R es K_{r+1} -libre.

Elijamos $t = 3\delta k^2$. Si $e(R) < t_r(k) - t$, entonces por el Lema 1.7.12, tenemos:

$$\begin{aligned} e(G) &\leq (\delta + 3\varepsilon)n^2 + e(R) \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^2 \\ &< (\delta + 3\varepsilon)n^2 + \left(\left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{k^2}{2} - 3\delta k^2\right) \frac{n^2}{k^2} \\ &= \left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2} + \underbrace{(3\varepsilon - 2\delta)n^2}_{< -\frac{\delta}{2}n^2} \\ &< \left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2} - \frac{\delta}{2}n^2, \end{aligned}$$

contradicción.

Con lo cual, el Teorema de Estabilidad de Füredi 1.4.4 nos permite suponer que R está t -cerca de ser r -partito. Es decir, hay una r -partición

$$V(R) = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_r$$

con a lo más t aristas dentro de las partes. Utilizando nuevamente el Lema 1.7.12 para acotar las aristas despreciables de la partición de G , y acotando las aristas dentro de las partes de la partición de R , concluimos que es posible borrar a lo más

$$\underbrace{t \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^2}_{\leq 3\delta n^2} + \underbrace{(\delta + 3\varepsilon)n^2}_{\leq 2\delta n^2} \leq 5\delta n^2$$

aristas para obtener una r -partición de G . □

Lema 1.7.23 (Lema de conteo general). *Para todo grafo H , y todo $\delta > 0$, existen $\varepsilon > 0$ y $M \in \mathbb{N}$ tales que si*

$$G \in \mathcal{G}(H, n, \varepsilon, \delta)$$

para algún $n \geq M$, entonces G contiene al menos

$$\frac{\delta^{e(H)} \cdot n^{|H|}}{2}$$

copias de H .

Demostración. Haremos inducción en $|H|$, y de hecho nuestra hipótesis inductiva será más fuerte:

Para todo grafo H , y todo $\delta > 0$, existen $\varepsilon > 0$ y $M \in \mathbb{N}$, tales que si

$$G \in \mathcal{G}(H, n, \varepsilon, \delta)$$

para algún $n \geq M$, y más aún, dada una equipartición $G = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_l$ indexada según $H = \{w_1, \dots, w_l\}$ con (V_i, V_j) ε -regular y $d(v_i, V_j) \geq \delta$ siempre y cuando que $w_i w_j \in E(H)$, se tiene que hay al menos

$$\frac{\delta^{e(H)} \cdot n^{|H|}}{2}$$

copias de H , de tal forma que los vértices x_j correspondientes a un w_j vía un isomorfismo con H pertenezcan a V_j para todo $j = 1, \dots, l$.

Si $|H| = 1$, la afirmación es inmediata. Si $|H| = 2$ y no tiene aristas también es fácil. Si $|H| = 2$ y $e(H) = 1$, luego basta probar que existen al menos $\delta \frac{n^2}{2}$ aristas en $E(V_0, V_1)$. Pero tomando $\varepsilon < \min\{\delta/4, 1/8\}$, la ε -regularidad del par (V_0, V_1) junto con $d(V_0, V_1)$ implican que existen vértices $v \in V_1$ tales que

$$(\delta - \varepsilon)n \leq |N_G(v) \cap V_0|$$

salvo $2\varepsilon n$ vértices por el Lema 1.7.13. Es decir, $E(V_0, V_1)$ tiene al menos

$$(\delta - \varepsilon)(1 - 2\varepsilon)n^2 \geq \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}\right)\delta n^2 \geq \frac{1}{2}\delta n^2$$

aristas, como queríamos.

En general, supongamos que $|H| \geq 3$. Si $G \in \mathcal{G}(H, n, \varepsilon, \delta)$ para $n \geq M$, entonces $G = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_l$ con V_i todos de cardinal n y para la escritura $H = \{w_1, \dots, w_l\}$, $w_i w_j \in E(H)$ si y solo si (V_i, V_j) es ε -regular y $d(V_i, V_j) \geq \delta$.

Consideremos $H' = H \setminus \{w_l\}$ y $G' := G \setminus V_l$, entonces $G' \in \mathcal{G}(H', n, \varepsilon, \delta)$ y por hipótesis inductiva existe M' tal que si $n \geq M'$, entonces G' contiene al menos

$$\frac{\delta^{e(H')} \cdot n^{|H'|}}{2}$$

copias de H' , donde cada copia tiene su vértice correspondiente a w_j en la parte V_j para cada $j < l$. Ahora, por el Lema 1.7.13, para todo $v \in V_l$, salvo $2\varepsilon n$ vértices, se tiene que

$$(\delta - \varepsilon)n \leq |N_G(v) \cap V_j|, \quad \forall j < l.$$

Por lo tanto, tenemos al menos $(1 - 2\varepsilon(l - 1))n$ vértices en V_l , cada uno con al menos $(\delta - \varepsilon)n$ vecinos en cada V_j con $j < l$, y por lo tanto, $(\delta - \varepsilon)n(l - 1)$ vecinos en G .

En el peor de los casos, todos los vértices que no son vecinos de v en V_j pertenecen a una de estas copias de H' para cada $j < l$, luego este v forma al menos $\frac{\delta^{e(H')} \cdot n^{l-1}}{2} - (1 - (\delta - \varepsilon))n(l - 1)$ copias de H en G . Es decir, G tiene al menos

$$\left(\frac{\delta^{e(H')} \cdot n^{l-1}}{2} - (1 - (\delta - \varepsilon))n(l - 1) \right) (1 - 2\varepsilon(l - 1))n$$

copias de H , donde cada copia tiene su vértice correspondiente a w_j en la parte V_j para cada $1 \leq j \leq l$. Así, basta probar que tomando $M \gg M'$ y $\varepsilon > 0$ lo suficientemente chico, esta cantidad es $\geq \frac{\delta^{e(H)} \cdot n^l}{2}$.

En efecto, esto equivale a que

$$\left(\frac{\delta^{e(H')} \cdot n^{l-1}}{2} - (1 - (\delta - \varepsilon))n(l - 1) \right) (1 - 2\varepsilon(l - 1)) \geq \frac{\delta^{e(H)} \cdot n^{l-1}}{2}$$

si y solo si,

$$\frac{\delta^{e(H')} \cdot n^{l-1}(1 - 2\varepsilon(l - 1))}{2} - \frac{\delta^{e(H)} \cdot n^{l-1}}{2} \geq (1 - (\delta - \varepsilon))(l - 1)(1 - 2\varepsilon(l - 1))n.$$

Es decir, hay que probar

$$\left(\delta^{e(H')}(1 - 2\varepsilon(l - 1)) - \delta^{e(H)} \right) \frac{n^{l-2}}{2} \geq (1 - (\delta - \varepsilon))(l - 1)(1 - 2\varepsilon(l - 1)).$$

Pero como $l \geq 3$, se sigue que si $\varepsilon > 0$ es lo suficientemente chico (por ejemplo $\varepsilon < \frac{1 - \delta^{e(H)} - \delta^{e(H')}}{2(l - 1)}$), existe M con $M \geq M'$ lo suficientemente grande, tal que si $n \geq M$, el lado izquierdo es más grande que el lado derecho (que no depende de n) pues

$$\left(\delta^{e(H')}(1 - 2\varepsilon(l - 1)) - \delta^{e(H)} \right) > 0.$$

□

Aplicación 3 del Lema de Regularidad de Szemerédi **1.7.5**:

Teorema 1.7.24 (Teorema de Roth). *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ y $A \subset \{1, \dots, n\}$ con $|A| > \varepsilon n$, entonces A contiene una 3-progresión aritmética⁴.*

Lema 1.7.25 (Lema de remoción de triángulos). *Para todo $\alpha > 0$, existe $\beta > 0$ tal que todo grafo G con n vértices y a lo más βn^3 triángulos, puede ser K_3 -libre borrando a lo más αn^2 aristas*

Demostración. Tomemos $0 < \delta < \frac{\alpha}{3}$ y $\varepsilon < \frac{\delta}{9}$ lo suficientemente chico. Aplicamos el Lema de Regularidad de Szemerédi **1.7.5** con parámetros ε y $m \geq \frac{1}{\varepsilon}$, obteniendo una partición de un grafo G con $|G| \geq M \geq k \geq m$,

$$V(G) = V_0 \sqcup V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k.$$

⁴En general, una **k -progresión aritmética** es una secuencia de enteros $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (k - 1)d$.

Consideremos el grafo reducido R con parámetros ε y δ . Notar que el subgrafo $G' := G \setminus V_0 \subset G$ cumple que $G' \in \mathcal{G}(R, n', \varepsilon, \delta)$ con $n' \geq \frac{(1-\varepsilon)n}{k} \geq \frac{1-\varepsilon}{M}n$.

Supongamos que R tiene al menos un triángulo K_3 . Entonces G' tiene un subgrafo G'' dado por quedarnos solamente con las partes V_i, V_j, V_k correspondientes a vértices w_i, w_j, w_k que forman un triángulo en R ; en particular, $G'' \in \mathcal{G}(K_3, n', \varepsilon, \delta)$. Aplicando el Lema de conteo general 1.7.23 para $H = K_3$ y el subgrafo $G'' \in \mathcal{G}(H, n', \varepsilon, \delta)$, tenemos que G'' , y por lo tanto G , tiene al menos:

$$\delta^3 \cdot \left(\frac{(1-\varepsilon)n}{k} \right)^3 > \frac{\delta^3 (1-\varepsilon)^3}{2 M^3} \cdot n^3 > \beta n^3$$

triángulos para n lo suficientemente grande, donde $\beta < \frac{\delta^3 (1-\varepsilon)^3}{2 M^3}$. Achicando β de ser necesario, podemos asumir que n es arbitrario.

Con lo cual, si G tiene a lo más βn^3 triángulos, el párrafo anterior nos dice que R no tiene triángulos. Así, al remover $\leq (\delta + 3\varepsilon)n^2 < \alpha n^2$ aristas de G (ver Lema 1.7.12), nos quedamos sin triángulos. \square

Teorema 1.7.26 (Teorema de Roth). *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ y $A \subset \{1, \dots, n\}$ con $|A| > \varepsilon n$, entonces A contiene una 3-progresión aritmética.*

Demostración. Vamos a probar que si A no contiene una 3-progresión aritmética, entonces $|A| = o(n)$.

Sea $\varepsilon > 0$, y n lo suficientemente grande, supongamos que $|A| \geq \varepsilon n$ y que no contiene 3-progresiones aritméticas. Definimos un grafo G con $V(G) = X \sqcup Y \sqcup Z$, disjuntos y $|X| = |Y| = |Z| = 3n$ cada conjunto X, Y, Z es una copia de $\{1, \dots, 3n\}$.

$$E(X, Y) = \{xy \mid x \in X, y \in Y, y = x + a \text{ para algún } a \in A\}.$$

$$E(Y, Z) = \{yz \mid y \in Y, z \in Z, z = y + a \text{ para algún } a \in A\}.$$

$$E(X, Z) = \{xz \mid x \in X, z \in Z, z = x + 2a \text{ para algún } a \in A\}.$$

Si xyz es un triángulo en G , entonces existen $a, a', a'' \in A$ tales que

$$\begin{cases} y = x + a, & a \in A \\ z = y + a', & a' \in A \\ z = x + 2a'', & a'' \in A, \end{cases}$$

y esto es una 3-progresión aritmética $a, a'' = a + (a' - a''), a' = a + 2(a' - a'')$ si a, a', a'' son distintos. Como A no tiene 3-progresiones aritméticas, entonces cada triángulo en G es de la forma xyz con $y = x + a, z = x + 2a$. Lo cual implica que cada triángulo queda completamente determinado por x y a . Consecuentemente G tiene a lo más

$$3n|A| \leq 3n^2 = o(n^3)$$

triángulos.

Por el Lema de Remoción de Triángulos 1.7.25, es posible borrar $o(n^2)$ aristas de G para obtener un grafo libre de triángulos. Ahora, vamos a obtener una cota por abajo de la cantidad de triángulos arista disjunto que tiene G : consideremos el conjunto de tripletas de la forma $(x, x + a, x + 2a)$, con $x \in \{1, \dots, n\}, a \in A$. Observar que cada tripleta corresponde con un triángulo de G y todos son arista-disjuntos entre sí, por lo tanto G contiene al menos $n|A| > \varepsilon n^2$ triángulos disjuntos y por lo tanto si o si deben ser quitados para que G sea libre de triángulos. Contradiciendo el Lema de Remoción de Triángulos. \square

Capítulo 2

Teoría de Ramsey

Notación 2.0.1. Cuando nos refiramos a una r -**coloración** de un grafo G , será una función $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, r\}$ que a cada arista $e \in E(G)$, le asigna un **color** $c(e)$ (No necesariamente la coloración es *propia*, es decir, pueden existir aristas adyacentes con el mismo color).

Notación 2.0.2. Sea G un grafo con una coloración c . Entonces dado un vértice $v \in V(G)$, podemos considerar los vecinos w de v tales que $c(vw) = i$. Notaremos a este subconjunto de vecinos de v como $N_G^i(v)$, o simplemente $N^i(v)$ cuando el contexto sea claro.

La teoría de Ramsey se motiva mediante el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.0.3. Toda 2-coloración de K_6 genera un triángulo monocromático.

Demostración. Sea $v \in V(K_6)$. Hay al menos 3 aristas incidentes a v que tienen el mismo color, digamos rojo, por el principio del palomar. Si en $N^{\text{rojo}}(v)$ hay aristas rojas, entonces hay un triángulo rojo. Si no, todas las aristas entre vértices de $N^{\text{rojo}}(v)$ son azules. Como, $|N^{\text{rojo}}(v)| \geq 3$, entonces hay un triángulo azul en $K_6[N^{\text{rojo}}(v)]$, y por lo tanto había un triángulo azul en K_6 . \square

Teorema 2.0.4 (Teorema de Ramsey (1930)). *Para todo $k, r \in \mathbb{N}$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que toda r -coloración de K_n genera un K_k monocromático.*

Demostración. Sea $v_1 \in V(K_n)$. Existe algún color $c_1 \in \{1, \dots, r\}$ tal que las aristas incidentes a v_1 de color c_1 son al menos

$$\frac{n-1}{r},$$

escribamos $A_1 := N_{K_n}^{c_1}(v_1)$. Similarmente, sea $v_2 \in K_n[A_1]$, existe un color $c_2 \in \{1, \dots, r\}$ tal que las aristas incidentes a v_2 en $K_n[A_1]$ son de color c_2 y por lo menos hay

$$\frac{|A_1|-1}{r},$$

escribamos $A_2 := N_{K_n[A_1]}^{c_2}(v_2)$. Continuando este procedimiento, para n lo suficientemente grande, obtenemos una secuencia

$$v_1, c_1, v_2, c_2, v_3, c_3, \dots, v_t, c_t,$$

en donde si $t \geq rk$, se sigue que existe un color que se repite al menos k veces en esta secuencia, y por lo tanto, sus vértices v_{i_1}, \dots, v_{i_k} correspondientes forman un K_k monocromático de ese color. \square

Ejercicio 2.0.5. Calcular una cota inferior para n .

Solución. Escribamos a_1, a_2, \dots para la secuencia de cardinales de los conjuntos A_1, A_2, \dots . Inspeccionando la demostración anterior, vemos que $a_1 \geq \frac{n-1}{r}$ y que recursivamente $a_{t+1} \geq \frac{a_t-1}{r}$, $t \geq 1$. Por lo tanto, tenemos que inductivamente:

$$a_{t+1} \geq \frac{n}{r^{t+1}} - \sum_{i=1}^{t+1} \frac{1}{r^i} = \frac{n}{r^{t+1}} - \frac{1}{r} \frac{1-r^{t+1}}{1-r}, \quad t \geq 0.$$

Con lo cual, si $t \geq rk$ como en la demostración de arriba, se sigue que

$$a_{rk} \geq \frac{n}{r^{rk}} - \frac{1}{r} \frac{1-r^{rk}}{1-r}.$$

Como queremos que $a_{rk-1} \geq 1$ para que se repitan k colores en la secuencia de la demostración, basta tomar

$$n \geq \frac{r^{2(rk-1)}}{r-1}.$$

□

2.1. Números de Ramsey

Definición 2.1.1. El número de Ramsey $R(k)$, es el mínimo n tal que cualquier 2-coloración de K_n contiene una copia monocromática de K_k .

Ejemplo 2.1.2. En el Ejemplo 2.0.3 vimos que $R(3) \leq 6$. Pero de hecho, es fácil encontrar una 2-coloración de K_5 que no contiene triángulos monocromáticos, y por lo tanto, $R(3) = 6$:



Figura 2.1.1: 2-coloración de K_5 libre de triángulos monocromáticos.

Definición 2.1.3. Sean G , H_1 y H_2 grafos, escribimos $G \rightarrow (H_1, H_2)$ si toda 2-coloración de G con rojo-azul de $E(G)$ contiene una copia de H_1 rojo o una copia de H_2 azul.

Para $s, t \in \mathbb{N}$ definimos

$$R(s, t) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid K_n \rightarrow (K_s, K_t)\}.$$

(En particular, $R(k) = R(k, k)$).

Teorema 2.1.4 (Erdős-Szekeres (1935)). *Para todo $k \geq 1$, se tiene que*

$$R(k) \leq \binom{2k-2}{k-1} \leq \frac{4^{k-1}}{\sqrt{\pi(k-1)}}.$$

Demostración. La segunda desigualdad se deduce de una aplicación inmediata de las desigualdades probadas en [Rob55]. Concentrémonos en la primera desigualdad, y de hecho, probaremos una versión un poco más general:

$$R(s, t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}.$$

Notar que tomando $s = t = k$ se prueba la primera desigualdad del teorema.

Para eso, necesitamos un lema previo:

Lema 2.1.5. *Para todo $s, t \geq 2$, se tiene*

$$R(s, t) \leq R(s-1, t) + R(s, t-1).$$

Demostración. En efecto, sea c una coloración de $E(K_n)$ con $n = R(s-1, t) + R(s, t-1)$. Queremos probar que hay una copia roja de K_s o una copia azul de K_t . Sea $v \in K_n$, entonces hay dos casos:

Caso 1: Existen al menos $R(s-1, t)$ aristas rojas incidentes a v , o

Caso 2: Existen al menos $R(s, t-1)$ aristas azules incidentes a v .

En cualquier caso extendemos completos monocromáticos en el vecindario de v a un K_s rojo o un K_t azul, respectivamente. \square

Ahora, probemos la desigualdad por inducción en $s+t$, el caso base es $R(1, t) = R(s, 1) = 1$. En general, si $\min\{s, t\} \geq 2$, tenemos que por el lema de arriba

$$\begin{aligned} R(s, t) &\leq R(s-1, t) + R(s, t-1) \\ &\leq \binom{s+t-3}{s-2} + \binom{s+t-3}{s-1} = \binom{s+t-2}{s-1}. \end{aligned}$$

\square

Observación 2.1.6. Existe una cota inferior muy mala, para valores de k grandes, del número de Ramsey:

$$R(k) \geq 2(k-1), \quad k \geq 2.$$

Demostración. Supongamos $k > 3$, pues el caso $k = 2$ es trivial.

En efecto, sea $n = 2(k - 1)$, entonces particionando los vértices de K_n en dos conjuntos A_1, A_2 de tamaño $k - 1$, y pintando las aristas de $K_n[A_1]$ y $K_n[A_2]$ de azul, pero las aristas entre A_1 y A_2 de rojo, obtenemos una coloración libre de K_k monocromáticos. En efecto, si existiera un K_k monocromático, entonces no puede ser azul porque cada A_i tiene $k - 1$ vértices; por otro lado no puede ser rojo porque en una partición hay al menos un vértice y en otra al menos 2 (estamos en el caso $k > 3$), digamos en A_1 y A_2 respectivamente, entonces en $K_n[A_2]$ debería haber una arista color rojo, absurdo. \square

El siguiente teorema confirma que la cota anterior es *muy poco óptima*.

Teorema 2.1.7 (Erdős (1947)).

$$R(k) \geq 2^{k/2}, \quad \forall k \geq 2.$$

Demostración. Consideremos K_n con $n = \lceil 2^{k/2} \rceil$ y supongamos que $k \geq 6$, notar que los casos $k = 2, \dots, 5$ valen por la cota de la Observación anterior 2.1.6 (que es mejor para k chico).

Tenemos exactamente

$$2^{\binom{n}{2}}$$

2-coloraciones de $E(K_n)$. Vamos a mostrar que la cantidad de 2-coloraciones de $E(K_n)$ que contienen a K_k monocromático es $< 2^{\binom{n}{2}}$. Para eso, notar que en este caso tenemos $\binom{n}{k}$ formas de elegir una copia de K_k y luego $2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}}$ formas de colorear el resto de las aristas. Por lo tanto, la cantidad de 2-coloraciones que contienen un K_k monocromático es menor o igual que

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}} &\leq \left(\frac{en}{k} \right)^k 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}} \\ &\leq \left(\frac{e(2^{k/2} + 1)}{k} \right)^k 2^{-\frac{k(k-1)}{2}} \cdot 2^{\binom{n}{2}}, \end{aligned}$$

pero notar que si $k \geq 6$, entonces

$$\left(\frac{e(2^{k/2} + 1)}{k} \right)^k 2^{-\frac{k(k-1)}{2}} \leq \left(\frac{2^{k/2} + 1}{2} \right)^k 2^{-\frac{k(k-1)}{2}} < 1,$$

de donde se sigue lo que queríamos. En efecto, se puede realizar un estudio cualitativo de la función para $k \in \mathbb{R}_{\geq 6}$ utilizando cálculo elemental. \square

Definición 2.1.8. En general, el **número de Ramsey con r colores** $R_r(k)$ es el mínimo n tal que todo r -coloreo de K_n tiene un K_k monocromático.

Teorema 2.1.9. Para todo $r \geq 2$, se tiene que

$$2^r \leq R_r(3) \leq 3 \cdot r!.$$

Demostración. Primero veamos la cota inferior, para eso consideremos $n := 2^r$ y encontraremos una r -coloración de K_n sin triángulos monocromáticos. Haremos inducción en r , si $r = 2$ vale, pues podemos considerar la siguiente coloración:



Figura 2.1.2

Para el paso inductivo, consideremos una partición en dos partes de 2^{r-1} vértices, donde el conjunto A y el B tienen $(r-1)$ -coloraciones sin triángulos monocromáticos, por hipótesis inductiva, y luego pintamos las aristas entre A y B de color r que nunca fue utilizado.

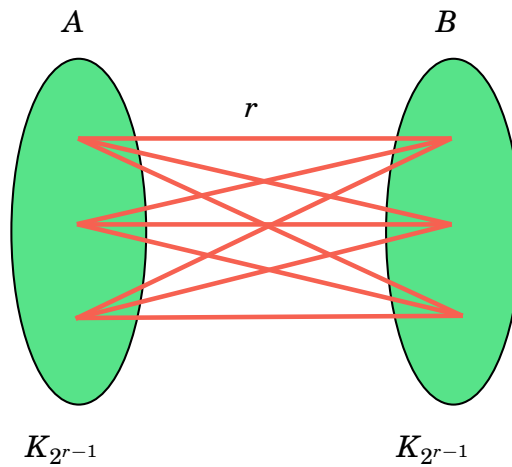


Figura 2.1.3

Ahora veamos la cota superior. En el Ejemplo 2.0.3 vimos que $R_2(3) \leq 6 = 3 \cdot 2!$, así vale el caso $r = 2$. Supongamos ahora que $r \geq 3$, y que $n = 3 \cdot r!$, sea $v_0 \in K_n$ fijo, y c una r -coloración de K_n . Entonces existe un color $i \in \{1, \dots, r\}$ tal que

$$E_i^0 = |\{uv_0 \in E(K_n) \mid c(uv) = i\}| \geq \frac{3 \cdot r!}{r} = 3 \cdot (r-1)!$$

y sea $A := N_{K_n}^i(v_0)$. Pueden ocurrir dos casos:

Caso 1: El color i aparece en una arista de $K_n[A]$, luego tenemos un triángulo de color i .

Caso 2: En $K_n[A]$ no aparece el color i , entonces la coloración c inducida en $K_n[A]$ es una $(r-1)$ -coloración, con lo cual por hipótesis inductiva existe un triángulo monocromático en $K_n[A]$, en particular en K_n .

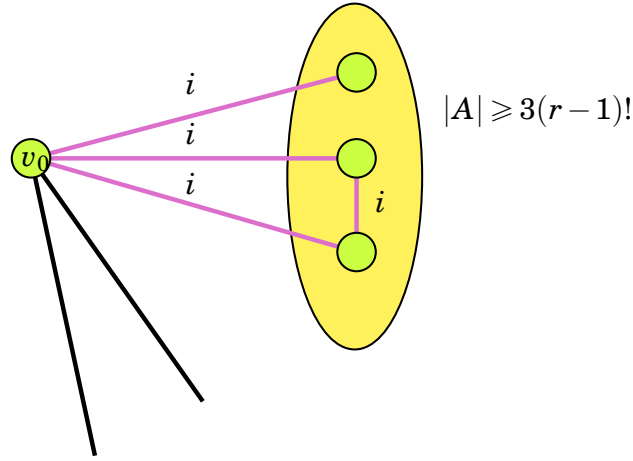


Figura 2.1.4: Ilustración del Caso 1.

□

Definición 2.1.10. El **número de Ramsey de H_1 versus H_2** está definido por:

$$r(H_1, H_2) = \min\{n | K_n \rightarrow (H_1, H_2)\}.$$

En particular, escribimos $r(H) := r(H, H)$.

Teorema 2.1.11.

$$r(K_3, P_k) = 2k + 1.$$

Demostración. Primero acotaremos por abajo: sea $n = 2k$, consideramos la siguiente coloración de K_n :

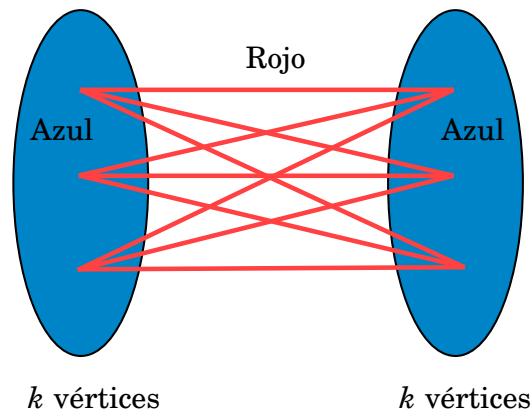


Figura 2.1.5

Particionamos K_n en dos partes de k vértices cada una y pintamos las aristas de color azul, y las aristas entre ambas particiones las pintamos de rojo. Claramente no hay caminos de longitud k de color azul porque las particiones tienen k vértices y no hay triángulos rojos porque las aristas rojas inducen un grafo bipartito.

Para la cota superior, consideremos K_n con $n = 2k + 1$. Sea P un camino maximal de color azul; supongamos que $|V(P)| \leq k$ y entonces $B := V(K_n) \setminus V(P)$ tiene al menos $k + 1$ vértices. Sea v_0 un extremo de P , por maximalidad v_0 está conectado a cada vértice de B por aristas rojas. Tenemos dos casos:

Caso 1: Si en $K_n[B]$ hay aristas rojas entonces hay un triángulo de color rojo (con un vértice v_0).

Caso 2: Si en $K_n[B]$ no hay aristas rojas, entonces todas las aristas son azules y por lo tanto hay una copia de K_{k+1} azul, y por lo tanto contiene a P_k de color azul.

□

Teorema 2.1.12. Sea T_k un árbol con k aristas (i.e., $k + 1$ vértices). Entonces

$$r(K_3, T_k) = 2k + 1.$$

Demostración. Para la primera desigualdad se puede aplicar un razonamiento similar a la demostración del teorema anterior. Veamos entonces solo la cota superior.

Sea $n = 2k + 1$ y consideremos K_n con una coloración. Supongamos entonces que existe un vértice v de grado rojo al menos $k + 1$. Entonces la vecindad $N^{\text{rojo}}(v)$ induce un K_{k+1} que si tiene alguna arista roja entonces existe un triángulo rojo en K_n , y si no, K_n contiene un K_{k+1} con aristas azules y en particular contiene un T_k azul.

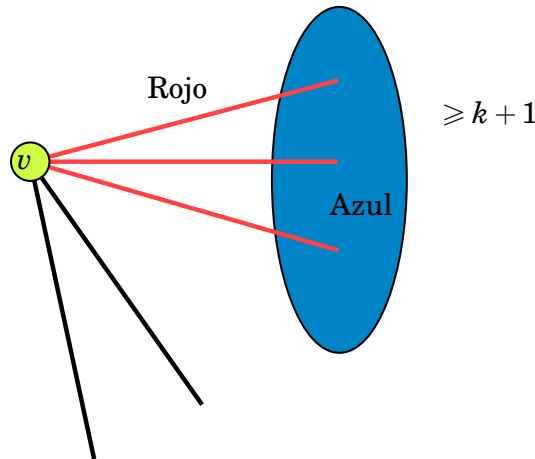


Figura 2.1.6

Ahora, supongamos que todo vértice tiene grado rojo $\leq k$. Esto implica que el grado mínimo del subgrafo azul inducido es $\geq k$, y por lo tanto el Lema 1.3.2 nos permite encontrar una copia de T_k en el subgrafo azul inducido, en particular K_n tiene una copia azul de T_k .

□

Teorema 2.1.13 (Chvátal (1977)). Sea T_k un árbol con k aristas, y sea $s \geq 2$. Entonces

$$r(K_{s+1}, T_k) = s \cdot k + 1.$$

Demostración. Primero veamos la cota inferior: sea $n = s \cdot k$, consideremos la siguiente coloración de K_n : el grafo azul consiste de s copias de K_k y las aristas rojas son las aristas entre los vértices de las copias de K_k .



Figura 2.1.7

Para la cota superior, haremos inducción en $s \geq 2$. Si $s = 2$, tenemos que $r(K_3, T_k) \leq 2k + 1$ por el teorema anterior. Supongamos ahora que $s \geq 3$. Sea $n = s \cdot k + 1$. Sea v un vértice con grado rojo $\geq (s - 1)k + 1$, y sea A la vecindad roja de v . Por hipótesis inductiva en $K_n[A]$, hay una copia de K_s rojo, o una copia de T_k azul y ganamos. Así, podemos asumir que el grado rojo de cada vértice es $\leq (s - 1)k$. Esto implica que el grafo azul tendrá grado mínimo $\geq (s \cdot k + 1) - 1 - (s - 1)k = k$. Con lo cual contiene una copia de T_k por el Lema 1.3.2. \square

Teorema 2.1.14. Para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$r(P_k) = \left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil.$$

Demostración. Veamos primero la cota inferior. Sea $n := \left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil - 1$. Consideremos un K_k azul en K_n y escribamos A al conjunto de sus vértices; el resto de las aristas las pintamos de rojo. Notar que $B := V(K_n) \setminus V(K_k)$ cumple

$$|B| < \frac{k}{2}.$$

Así, K_n no tiene un P_k azul. Veamos que tampoco tiene un rojo:

Tomemos un camino rojo P , luego no puede tener dos vértices adyacentes de A (pues $K_n[A]$ es un completo azul). Por lo tanto en el peor de los casos P tiene $|B|$

vértices de B tales que entre cada par consecutivo de estos hay un vértice de A . O sea,

$$|P| \leq 2|B| + 1 < k + 1.$$

Es decir, tampoco tiene un P_k rojo.



Figura 2.1.8: Ilustración de esta situación.

Veamos ahora la cota superior. Vamos a probar un resultado un poco más general haciendo inducción en k :

Sea $k \geq l \geq 1$ y sea $n = k + \lceil \frac{l}{2} \rceil$, entonces

$$K_n \longrightarrow (P_k, P_l)$$

Notar que el caso $k = l$ implica la cota superior.

Consideremos una coloración de K_n . Sea P un camino rojo maximal y supongamos que $|P| \leq k$. Por maximalidad, cada extremo forma aristas azules con cada vértice de $V(G) \setminus V(P)$.

Nuestro caso base es $1 \leq l \leq k \leq 3$, donde vale la afirmación:

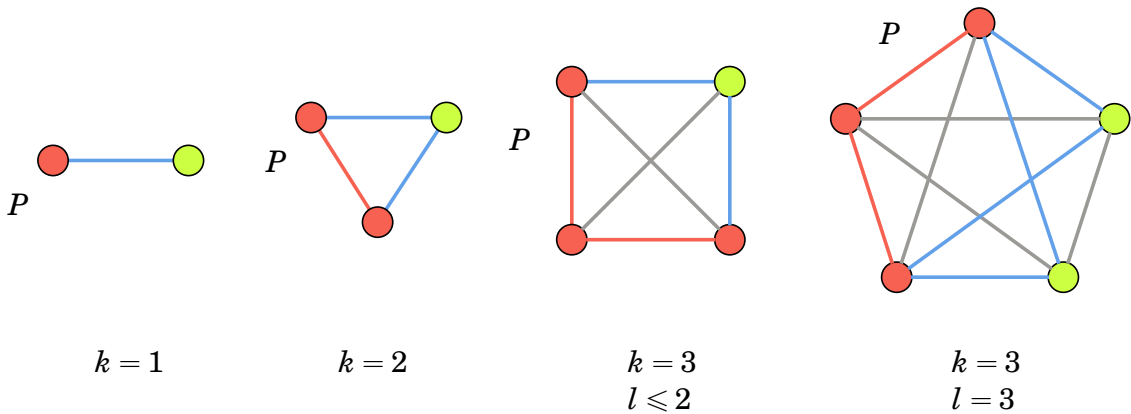


Figura 2.1.9

Ahora veamos el paso inductivo. Supongamos que $4 \leq l < k$. Por hipótesis inductiva, tenemos que $K_n \longrightarrow (P_{k-1}, P_l)$ y por lo tanto sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe un $(k-1)$ -camino rojo en K_n , digamos $P = v_1 v_2 \cdots v_k$. Escribamos $U := V(K_n) \setminus V(P)$; sabemos que $|U| = \lceil \frac{l}{2} \rceil$. Notemos lo siguiente:

(I) Las aristas entre v_1, v_k y U son azules.

(II) Para cada par de vértices consecutivos $v_i v_{i+1}$ en P y cada $u \in U$, existe una arista azul en $\{v_i u, v_{i+1} u\}$, pues de lo contrario habríamos encontrado un P_k rojo.

Sean Q_1 y Q_2 caminos azules vértice-disjuntos de longitud impar (i.e., cantidad par de vértices) que alternan vértices de v_2, \dots, v_k y U . Tomemos Q_1 maximal, y sujeto a esto, tomemos Q_2 maximal. Por paridad de la longitud de Q_1 y Q_2 , ambos tienen exactamente un extremo en U , digamos x e y , respectivamente. Tenemos dos casos:

Caso 1: Q_1 y Q_2 cubren U , es decir, $U \subset Q_1 \cup Q_2$. Con lo cual, podemos construir un l -camino azul considerando $Q_1 x v_1 y Q_2$. Luego supongamos que estamos en:

Caso 2: Existe $z \in U \setminus (Q_1 \cup Q_2)$.

Observemos que $v_k \in Q_1$, de lo contrario podríamos extender Q_1 con las aristas azules $v_k z$ y $v_k x$. Notemos que $Q_1 \cup Q_2$ contiene a lo más $|U| - 1$ vértices de P , y

$$|U| - 1 < \frac{k-1}{2}.$$

Con lo cual, en $\{v_2, \dots, v_{k-1}\}$ hay $\frac{k-1}{2} - 2 < \lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor$ vértices de $Q_1 \cup Q_2$. Así, existe un par de vértices consecutivos v_i, v_{i+1} con $2 \leq i \leq k-2$ tales que $v_i, v_{i+1} \notin Q_1 \cup Q_2$. Sin embargo, por el ítem (ii), existen existen dos aristas azules entre v_i o v_{i+1} y alguno de los siguientes conjuntos: $\{x, y\}$; $\{y, z\}$; o $\{x, z\}$. Esto contradice la maximalidad de Q_1 y Q_2 , ya que podríamos extender algunos de estos caminos, y por ende el caso 2 no puede ocurrir.

Finalmente veamos el caso $k = l \geq 4$. Por hipótesis inductiva, tenemos que $K_n \longrightarrow (P_k, P_{k-1})$ y y por simetría se tiene $K_n \longrightarrow (P_{k-1}, P_k)$. Con lo cual, existe un $(k-1)$ -camino rojo, digamos $P_r = v_1 \cdots v_k$, y un $(k-1)$ -camino azul, digamos $P_a = w_1 \cdots w_k$. Si alguno de estos caminos se pudiera extender monocromáticamente habríamos terminado, con lo cual supongamos que son maximales monocromáticos. Notar que por maximalidad, debe ser que $\{v_1, v_k\} = \{w_1, w_k\}$, de lo contrario podríamos extender monocromáticamente alguno de los dos caminos; digamos que $v_1 = w_1$ y $v_k = w_k$.

Ahora bien, tenemos que

$$n = k + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \geq |V(P_r) \cup V(P_a)| = |V(P_r)| + |V(P_a)| - |V(P_r) \cap V(P_a)| = 2k - |V(P_r) \cap V(P_a)|.$$

Consecuentemente, $|V(P_r) \cap V(P_a)| \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil$. Hay dos opciones:

Opción 1: $|V(P_r) \cap V(P_a)| > \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. En este caso existe $z \in V(K_n) \setminus (V(P_r) \cup V(P_a))$, y por lo tanto $z v_1 = z w_1$ es una arista de color rojo o azul, y en cualquier caso podemos extender P_r o P_a monocromáticamente, contradiciendo la maximalidad de los caminos.

Opción 2: $|V(P_r) \cap V(P_a)| = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. En este caso $P_r \cup P_a = K_n$ y de hecho, deben existir dos vértices interiores consecutivos de P_r , digamos $v_i v_{i+1}$ con $1 < i < k$, tales que no son vértices de P_a ; similarmente, existen dos vértices interiores consecutivos de P_a , digamos $w_j w_{j+1}$ con $1 < j < k$, tales que no son vértices de P_r .

Más aún, la arista $v_1 v_k = w_1 w_k$ es de color rojo o azul, digamos rojo (el otro caso es análogo). Con lo cual, tenemos un ciclo rojo $C_r := v_1 P_r v_k v_1$ de longitud k , y por lo tanto, podemos suponer que todas las aristas incidentes a C_r tienen que ser azules, si no habríamos encontrado un k -camino rojo. Pero luego las aristas $w_j v_i$ y $w_{j+1} v_i$ son azules, y podemos alargar P_a a un k -camino azul:

$$w_1 \cdots w_j v_i w_{j+1} \cdots w_k,$$

contradiciendo la maximalidad de P_a . Como hemos agotado todos los casos, se concluye la demostración. \square

2.2. El problema con un final feliz

Proposición 2.2.1 (El problema de E. Klein (1930)). *Para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $n = n(k) \in \mathbb{N}$ tal que dados n puntos en posición general del plano (i.e. no hay 3 puntos colineales), entonces el conjunto de puntos contiene k puntos en posición convexa.*

Demostración del caso $k = 4$ y $n = 5$. Ella probó este caso¹. Consideramos la cápsula convexa de los 5 puntos, si los vértices son 4 o 5 de estos puntos ya ganamos, si no, existen dos puntos que están contenidos en el interior del triángulo convexo (formado por 3 de estos puntos como vértices). Luego simplemente consideramos la recta que une a estos dos puntos interiores, la cual interseca a dos lados distintos del triángulo, y por lo tanto hay 4 puntos en posición convexa:



\square

El caso general se resolvió utilizando el *Teorema de Ramsey Generalizado*, que enunciamos luego de algunas definiciones:

¹El cual fue bautizado como “El problema con un final feliz” por Paul Erdős, debido a que llevó al casamiento de George Szekeres y Esther Klein.

Notación 2.2.2. Dado $n \in \mathbb{N}$, notamos al conjunto $[n] := \{1, \dots, n\}$.

Notación 2.2.3. Sea A un conjunto arbitrario, y $s \in \mathbb{N}$, notamos al conjunto:

$$\binom{A}{s} := \{S \subset A \mid |S| = s\}.$$

Definición 2.2.4. Una r -coloración de subconjuntos de $[n]$ de tamaño s , es una función

$$c: \binom{[n]}{s} \longrightarrow \{1, \dots, r\}.$$

Diremos que $A \subset [n]$ es **monocromático** (respecto de c), si $c(S) = c(S')$ para todo $S \in \binom{A}{s}$.

Teorema 2.2.5 (Teorema de Ramsey Generalizado). *Para todo $k, r, s \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que toda r -coloración de $\binom{[n]}{s}$ contiene un conjunto monocromático de tamaño k .*

Comentario 2.2.6. Nosotros probamos el caso K_n en lugar de $\binom{[n]}{s}$ con $s = 2$ y K_k monocromático.

Continuación de la demostración del problema de E. Klein. Falta probar el caso $k \geq 5$. Tomemos una coloración rojo-azul c del conjunto $\binom{[n]}{4}$. Y coloreemos $c(S)$ de rojo si y solo si los puntos de S están en posición convexa. Por el Teorema de Ramsey Generalizado 2.2.5, existe n tal que $B \subset [n]$ es monocromático y $|B| = k$. Hay dos casos:

Caso 1: B es rojo, y por lo tanto todos los subconjuntos de tamaño 4 de B tienen color rojo, i.e., están en posición convexa. Ahora, los puntos de B están en posición convexa, de lo contrario, podríamos encontrar un punto de B en el interior de un triángulo con vértices de B (notar que esto vale por no-colinealidad: trazamos las diagonales entre vértices del polígono convexo; el punto no puede estar en ninguna de estas rectas, i.e., está dentro de un triángulo), absurdo.

Caso 2: B es azul, como $k \geq 5$, por el resultado preliminar de Klein, existen 4 puntos en posición convexa, absurdo.

□

Teorema 2.2.7 (Seidenberg). *Toda secuencia de $k^2 + 1$ números reales contiene una subsecuencia monótona de largo $k + 1$.*

Demostración. Sea a_1, \dots, a_n una secuencia de números reales con $n = k^2 + 1$. Para cada $i \in [n]$, definimos un par:

$$(x_i, y_i),$$

donde x_i es el largo de la subsecuencia no decreciente más larga que termina en a_i ; y_i es el largo de la subsecuencia no creciente más larga que termina en a_i .

Para $i \neq j$, veamos que $(x_i, y_i) \neq (x_j, y_j)$. Para eso, sin pérdida de generalidad, supongamos que $i < j$. Tenemos dos casos:

Caso 1: $a_i \leq a_j$. Aquí se tiene que $x_i < x_j$.

Caso 2: $a_j \leq a_i$. Aquí se tiene que $y_i < y_j$.

Ahora por contradicción, si $x_i, y_i \leq k$ para todo $i \in [n]$, entonces hay a lo más k^2 pares distintos, sin embargo $n = k^2 + 1$, por lo que hay al menos un par repetido, absurdo. \square

El siguiente ejercicio dice que el teorema anterior es preciso:

Ejercicio 2.2.8. Encontrar secuencia de números reales de largo k^2 sin subsecuencias monótonas de largo $k + 1$.

Teorema 2.2.9 (Chrátal, Rödl, Szemerédi & Trotter (1983)). *Para todo $\Delta \in \mathbb{N}$, existe una constante $c = c(\Delta) > 0$ tal que todo grafo H con $\Delta(H) \leq \Delta$, satisface*

$$r(H) \leq c(\Delta) \cdot |H|.$$

En particular, para $n \geq c(\Delta) \cdot |H|$, toda 2-coloración de K_n contiene un H monocromático.

Demostración. La idea será aplicar el Lema de Regularidad de Szemerédi 1.7.5 y el siguiente lema de inmersión:

Lema 2.2.10 (Un lema de inmersión). *Dados $d \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ y $\gamma > 0$ tales que si $n \in \mathbb{N}$ y H es un grafo con $\Delta(H) \leq d$ y $|H| \leq \gamma n$, entonces*

$$G \in \mathcal{G}(K_{d+1}, n, \varepsilon, \delta) \implies H \subset G.$$

Sea $\Delta > 0$ y H con $\Delta(H) \leq \Delta$. Aplicamos este lema de inmersión con $d = \Delta$ y $\delta = \frac{1}{2}$, y obtenemos parámetros ε y γ , tales que se cumple la conclusión del enunciado. Consideremos K_n con $n \geq c(\Delta) \cdot |H|$ donde $c(\delta)$ es lo suficientemente grande.

Tomemos una coloración con rojo y azul de K_n , y sean G_r y G_a los subgrafos inducidos de color rojo y azul, respectivamente. Sea $m := r(K_{d+1})$. Aplicamos el Lema de Regularidad de Szemerédi 1.7.5 en G_r con parámetro m y ε . Obtenemos una partición ε -regular

$$V(G_r) = V_0 \sqcup V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k,$$

con $m \leq k \leq M$. Notar que esta partición también es ε -regular para G_a **TAREA**.

Sea R el grafo reducido con parámetros ε y densidad 0 (no nos interesa la densidad). Entonces,

$$e(R) \geq \binom{k}{2} - \varepsilon k^2 > t_{m-1}(k) = \left(1 - \frac{1}{m-1} + o(1)\right) \frac{k^2}{2} \quad (k \rightarrow 1),$$

y por lo tanto el Teorema de Turán 1.1.6, $R \supset K_m$. Sean ahora A_1, \dots, A_m las partes que corresponden a los vértices de K_m en R . Vamos a definir una 2-coloración f de las aristas de K_m :

$$f(ij) = \text{rojo} \iff d_{G_r}(V_i, V_j) \geq \frac{1}{2}.$$

Como $m = r(K_{d+1})$, existe un K_{d+1} rojo o azul, sin pérdida de generalidad suponemos que es rojo en K_m . Reindexando los A_i , podemos suponer que A_1, \dots, A_{d+1} corresponden a las partes de K_{d+1} de K_m . El grafo inducido

$$G' = G_r[A_1 \cup \dots \cup A_{d+1}]$$

satisface que $G' \in \mathcal{G}(K_{d+1}, n', \varepsilon, \delta)$, con

$$n' = |V_1| = \cdots, |V_k| \geq \frac{n}{M}.$$

Así, elegimos $c = c(\Delta)$ suficientemente grande (en particular, $c \geq M/\gamma$), entonces

$$|H| \leq \frac{n}{c(\Delta)} \leq \frac{\gamma n}{M} \leq \gamma n',$$

con lo cual se tiene la conclusión del teorema por el lema de inmersión de arriba. \square

Capítulo 3

El método probabilístico

En 1959, Erdős probó que *para todo entero k existe un grafo G con $g(G) > k$ y $\chi(G) > k$* . El enfoque que tomó fue definir un espacio de probabilidad en el conjunto de grafos con n vértices, y probar que para una medida de probabilidad adecuada, la probabilidad de que un grafo con n vértices cumpla ambas condiciones es positiva para n lo suficientemente grande. A esta técnica se le llama el **método probabilístico**, y será el eje central de este capítulo.

3.1. Fundamentos

Definición 3.1.1. Un **espacio probabilístico** es un par (Ω, P) , donde Ω se denomina **espacio muestral** y P la **función probabilística**, la cual cumple

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1,$$

y $P(\omega) \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$. A los subconjuntos $A \subset \Omega$, los llamamos **eventos**, y definimos la cantidad

$$P(A) := \sum_{\omega \in A} P(\omega),$$

i.e., la **probabilidad de que suceda el evento A** .

Daremos ahora las propiedades básicas de un espacio probabilístico, cuyas demostraciones se ven en cualquier curso introductorio de probabilidad:

Proposición 3.1.2. Sea (Ω, P) un espacio de probabilidad. Entonces:

(1) Para todo evento $A \subset \Omega$

$$P(A) = 1 - P(\Omega \setminus A).$$

(2) Si $A \subset B \subset \Omega$, luego $P(A) \leq P(B)$.

(3) Sean $A, B \subset \Omega$, luego tenemos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

(4) Para una familia $A_1, \dots, A_r \subset \Omega$, tenemos que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Definición 3.1.3. Una **distribución uniforme** (discreta), es un espacio probabilístico (Ω, P) tal que $P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$. Si $A \subset \Omega$, entonces $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Definición 3.1.4. Sean $A, B \subset \Omega$, decimos que A y B son **eventos independientes** o simplemente **independientes** si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Más generalmente, sean $A_1, \dots, A_n \subset \Omega$, decimos que son **independientes dos a dos**, si A_i y A_j son independientes para cada $i \neq j$. Por otro lado, decimos que A_1, \dots, A_n son **mutuamente independientes** si

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i).$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, podemos construir un espacio probabilístico $\mathcal{G} := \mathcal{G}(n, p) := (\Omega, P)$, donde Ω es el conjunto de grafos con conjunto de vértices $V := [n]$, y para cada posible arista e , la probabilidad de que e pertenezca a $E(G)$ para $G \in \Omega$ es p , y estos eventos son independientes para distintas aristas $e \neq e'$. Más precisamente, los eventos $A_e := \{G \in \Omega \mid e \text{ es arista de } G\}$ con distintos e , son mutuamente independientes. Llamaremos a G un **grafo aleatorio**. (Se puede encontrar una construcción formal en el Capítulo 11 de [Die00]).

Ejemplo 3.1.5. Dado un grafo fijo H con k vértices y m aristas, consideremos el evento: G contiene a H como subgrafo. La probabilidad de que este evento suceda, es

$$\prod_{e \in H} P(A_e) = p^m.$$

Similarmente, la probabilidad de que H sea un subgrafo inducido de G es $p^m(1-p)^{\binom{k}{2}-m}$, pues ahora hay que considerar que las aristas que no están en H tampoco pueden estar en G (evento independiente).

Teorema 3.1.6 (Erdős 1947). *Para todo $k \geq 3$, se tiene que $R(k) > 2^{k/2}$.*

Demostración. Sea $n = 2^{k/2}$. A cada arista uv de K_n , asignémosle la probabilidad $P(uv) = \frac{1}{2}$ de que sea color rojo, y lo mismo color azul. El objetivo es probar de que el evento de que haya un coloreo sin K_k monocromático en K_n tiene medida positiva, de aquí se seguirá la demostración. (Notar que estamos trabajando en el espacio probabilístico (Ω, P) , con espacio muestral $\prod_{uv \in E(K_n)} \{\text{rojo}, \text{azul}\}$ y los eventos con aristas distintas son independientes.)

Para cada $A \subset V(K_n)$ de tamaño k , tenemos que

$$P(A \text{ monocromático}) = 2^{-\binom{k}{2}} + 2^{-\binom{k}{2}} = 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{\binom{n}{k}} A_i\right) &\leq \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} P(A_i) \\
&= \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} \\
&\leq \frac{n^k}{k!} 2^{1-k^2/2+k/2} \\
&= \frac{2^{1+k/2}}{k!} < 1.
\end{aligned}$$

□

Definición 3.1.7. Un **hipergrafo k -uniforme** H , es una estructura compuesta por vértices y aristas, donde las aristas son conjuntos de k -vértices.

Definición 3.1.8. Decimos que un hipergrafo H es **bicolor**, si es posible colorear los vértices con dos colores, de tal manera que no hay aristas con vértices monocromáticos.



Figura 3.1.1: Bicoloración de un 3-hipergrafo H con vértices v_1, v_2, v_3, v_4 y aristas $e_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $e_2 = \{v_2, v_3, v_4\}$, $e_3 = \{v_1, v_2, v_4\}$.

Teorema 3.1.9 (Erdős 1963). Sea H un hipergrafo k -uniforme con m aristas. Si $m < 2^{k-1}$, entonces H es bicolor.

Demostración. Sea H un hipergrafo k -uniforme. Consideramos un coloreo de cada vértice vértice con color rojo o azul, de forma independiente con probabilidad $\frac{1}{2}$. Consideremos $A \in E(H)$, luego

$$P(A \text{ monocromático}) = 2^{1-k}.$$

Escribamos A_i con $i \in [m]$ para los vértices de cada una de las m aristas de H . Luego

$$P\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) \leq \sum_{i=1}^m P(A_i) = m \cdot 2^{1-k} < 1.$$

□

Definición 3.1.10. Un **torneo** T es un grafo dirigido tal que su grafo subyacente no tiene aristas paralelas.

Dado un conjunto $S \subset V(T)$ y un vértice $u \in V(T)$, escribimos $u \rightarrow S$ si $(u, v) \in E(T)$ para todo $v \in S$.

Decimos que T tiene **la propiedad** \mathcal{T}_k , si para todo $S \subset V(T)$ de tamaño k , existe un $u \in V(T) \setminus \{S\}$ tal que $u \rightarrow S$.



Figura 3.1.2: Ejemplo de un torneo T con conjunto $S \subset V(T)$ y $u \in V(T)$ tal que $u \rightarrow S$.

Teorema 3.1.11 (Erdős 1963). Si $n \geq k^2 2^{k+1}$, entonces existe un torneo T con n vértices con la propiedad \mathcal{T}_k .

Demostración. Consideremos un torneo aleatorio T con n vértices y para cada par u, v escogemos $uv \in E(T)$ o $vu \in E(T)$ de forma independiente con probabilidad $\frac{1}{2}$. Consideremos un conjunto $S \subset V(T)$ con tamaño k . Para todo $u \in V(T) \setminus S$

$$P(u \rightarrow S) = 2^{-k}.$$

Consideremos A_S como el evento de que todo $u \in V(T) \setminus S$ no se cumpla que $u \rightarrow S$. Luego

$$P(A_S) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n-k} \{u_i \not\rightarrow S\}\right) = \prod_{i=1}^{n-k} P(\{u_i \not\rightarrow S\}) = (1 - 2^{-k})^{n-k}$$

por independencia de eventos. Ahora

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\binom{n}{k}} A_{S_i}\right) \leq \binom{n}{k} \cdot P(A_S) = \binom{n}{k} (1 - 2^{-k})^{n-k} \leq \frac{n^k}{k!} e^{-(n-k)/2^k} \leq n^k e^{-n/2^k}.$$

donde usamos que $1 + x \leq e^x$ y que $e^{k/2^k}/k! < 1$. Finalmente, notar que se puede escribir el lado derecho como $n^k e^{-n/2^k} = e^{k \log n - n/2^k}$. Por lo tanto, basta ver que $k \log n < n/2^k$, equivalentemente

$$k2^k < n/\log n,$$

para probar que la probabilidad del lado izquierdo de la desigualdad de arriba es menor que 1. Este es el caso, pues el lado derecho es creciente en n y se cumple la desigualdad para $n = k^2 2^{k+1}$. \square

3.2. Esperanza

Definición 3.2.1. Dado un espacio probabilístico $\mathcal{G} = (\Omega, P)$, una **variable aleatoria** (en \mathcal{G}) es una función

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

La **esperanza** o **promedio** de X es la cantidad

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{G \in \Omega} P(\{G\}) \cdot X(G).$$

Notación 3.2.2. Si $X : \mathcal{G} \rightarrow [0, +\infty)$ es una variable aleatoria en un espacio probabilístico, dada una proposición lógica A , notamos

$$P(X \text{ cumple la propiedad } A) = P(\{G \in \Omega \mid X(G) \text{ cumple la propiedad } A\}).$$

En particular, $P(X \geq a) := P(X^{-1}([a, +\infty)))$, $P(X < b) := P(X^{-1}([0, b)))$, $P(X = c) := P(X^{-1}(\{c\}))$, etc.

También diremos que X cumple la propiedad A **salvo probabilidad cero**, si

$$P(G \in \Omega \mid X(G) \text{ no cumple } A) = 0.$$

Por ejemplo, $X \geq a$, $X < b$, $X = c$, salvo probabilidad cero, si respectivamente

$$P(X \geq a) = P(X < b) = P(X = c) = 0.$$

Observación 3.2.3. 1. Notar que cuando X toma valores enteros, podemos calcular la esperanza de manera alternativa:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 1} P(X \geq k) = \sum_{k \geq 1} k \cdot P(X = k).$$

2. Sea \mathcal{H} un conjunto fijo de grafos en V . Y sea X la variable aleatoria tal que $X(G)$ es la cantidad de grafos $H \in \mathcal{H}$ que son subgrafos de G . Entonces la esperanza de X tiene dos maneras distintas de calcular (observación útil para utilizar argumentos de “conte doble”):

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{G \in \mathcal{G}} \#\{H \in \mathcal{H} \mid H \subset G\} \cdot P(\{G\}) = \sum_{H \in \mathcal{H}} P(G \in \Omega \mid G \supset H).$$

Las siguientes propiedades son fáciles de demostrar:

Proposición 3.2.4. Dadas variables aleatorias $X, Y \geq 0$ de un espacio probabilístico $G = (\Omega, P)$, y sea $a \geq 0$. La esperanza cumple las siguientes propiedades:

- (I) **Positividad:** $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
- (II) **Linealidad:** $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$, y $\mathbb{E}(a \cdot X) = a\mathbb{E}(X)$.
- (III) **Monotonicidad:** Si $X \leq Y$, salvo probabilidad cero, entonces $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.
- (IV) Si $\mathbb{E}(X) = 0$, entonces el conjunto $B := \{G \in \Omega \mid X(G) \neq 0\}$ tiene probabilidad 0.
- (V) Si $X = Y$, salvo probabilidad cero, entonces $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$.

Estas propiedades nos permiten calcular la esperanza de una variable aleatoria como ilustra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.2.5. El promedio de k -ciclos en $G \in \mathcal{G}(n, p)$ es

$$\mathbb{E}(X) = \frac{p^k}{2k} \prod_{r=0}^{k-1} n - r.$$

Demostración. Consideremos la familia de k -ciclos \mathcal{C}_k en \mathcal{G} . Entonces dado $C \in \mathcal{C}_k$ podemos considerar la variable aleatoria **función indicadora**:

$$X_C : \mathcal{G}(n, p) \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$G \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } C \subset G, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Notar que

$$\mathbb{E}(X_C) = P(X_C = 1) = P(G \in \mathcal{G}(n, p) \mid G \supset C) = p^k.$$

Por otro lado, sea X la variable aleatoria tal que $X(G)$ es la cantidad de ciclos $C \in \mathcal{C}_k$ contenidos en G . Entonces

$$X = \sum_{C \in \mathcal{C}_k} X_C.$$

Por linealidad (3.2.4),

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{C \in \mathcal{C}_k} \mathbb{E}(X_C) = \sum_{C \in \mathcal{C}_k} P(G \supset C) = |\mathcal{C}_k| p^k.$$

Finalmente, como por cada elección de k distintos vértices en V hay $2k$ maneras distintas de formar un k -ciclo en \mathcal{G} , tenemos que

$$|\mathcal{C}_k| = \frac{1}{2k} \prod_{r=0}^{k-1} n - r,$$

de donde concluimos. □

Una desigualdad útil que nos dice que la probabilidad de que X valga “mucho más respecto del promedio” es baja:

Lema 3.2.6 (Desigualdad de Markov). Sea $X : \mathcal{G} \rightarrow [0, +\infty)$ una variable aleatoria y $a > 0$. Entonces

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Demostración.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{G \in \mathcal{G}} P(\{G\}) \cdot X(G) \geq \sum_{\substack{G \in \mathcal{G} \\ X(G) \geq a}} P(\{G\}) \cdot a = P(X \geq a) \cdot a.$$

□

3.3. Método del primer momento

Definición 3.3.1. Decimos que una variable aleatoria X **sigue una distribución de Bernoulli con parámetro** $p \in [0, 1]$, si $P(X = 1) = p$ y $P(X = 0) = 1 - p$. (Notar que $\mathbb{E}(X) = p$).

Definición 3.3.2. Dadas variables aleatorias $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, decimos que son **independientes**, si para cualquier $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, los eventos $\{X_i = x_i\}$ con $i = 1, \dots, n$ son mutuamente independientes.

Proposición 3.3.3. Sean X_1, X_2 variables aleatorias independientes, entonces

$$\mathbb{E}(X_1 \cdot X_2) = \mathbb{E}(X_1) \cdot \mathbb{E}(X_2)$$

Definición 3.3.4. Una variable aleatoria binomial X con parámetros n y p es la suma de n variables aleatorias mutuamente independientes de Bernoulli con parámetro p . (Notar que en este caso se tiene $\mathbb{E}(X) = np$).

Proposición 3.3.5. Sea X una variable aleatoria. Si $\mathbb{E}(X) \geq t$, entonces

$$P(X \geq t) > 0.$$

Teorema 3.3.6. Todo grafo G tiene un subgrafo bipartito $H \subset G$ tal que

$$e(H) \geq \frac{e(G)}{2}.$$

Demostración. Consideremos un conjunto aleatorio $A \subset V(G)$, obtenido escogiendo a cada vértice $v \in V(G)$ de forma aleatoria e independiente con probabilidad $\frac{1}{2}$. Sea $B = V \setminus A$ y consideremos el subgrafo H con conjunto de vértices A y B , y aristas $E(H) = \{uv \in E(G) \mid u \in A, v \in B\}$. Para $uv \in E(G)$, definamos la variable aleatoria X_{uv} tal que $X_{uv}(H) = 1$ si $uv \in E(H)$ o $X_{uv}(H) = 0$ si no. Se tiene que

$$\mathbb{E}(X_{uv}) = P(\{uv \in E(H)\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Consideremos la variable aleatoria e tal que $e(H)$ que devuelve la cantidad de aristas de H . Como $e = \sum_{uv \in E(G)} X_{uv}$, se sigue que

$$\mathbb{E}(e) = \mathbb{E} \left(\sum_{uv \in E(G)} X_{uv} \right) = \sum_{uv \in E(G)} \mathbb{E}(X_{uv}) = \frac{e(G)}{2}.$$

Finalmente, por la Proposición 3.3.5, $P(e \geq \frac{e(G)}{2}) > 0$, i.e., tiene que existir un subgrafo H de G bipartito tal que $e(H) \geq \frac{e(G)}{2}$. □

Teorema 3.3.7 (Szele). *Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un torneo T con n vértices y al menos $\frac{n!}{2^{n-1}}$ caminos dirigidos Hamiltonianos (caminos que pasan por todas los vértices).*

Demostración. Consideremos el espacio probabilístico de torneos T con vértices en $[n]$, es decir, el espacio de grafos aleatorios con vértices $[n]$ tales que si uv es una arista la orientamos de manera aleatoria en cada dirección con probabilidad $\frac{1}{2}$, de manera independiente del resto de las aristas. Tenemos la variable aleatoria X tal que $X(T)$ es el número de caminos hamiltonianos en T . Para cada permutación $\sigma : [n] \rightarrow [n]$, definimos X_σ como la variable aleatoria indicadora del evento

$$\{\sigma(1), \dots, \sigma(n) \text{ es un camino Hamiltoniano en } T\}.$$

Ahora,

$$\mathbb{E}(X_\sigma) = P(\sigma(1), \dots, \sigma(n) \text{ es un camino Hamiltoniano en } T) = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Así,

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{\sigma} X_\sigma\right) = \frac{n!}{2^{n-1}}.$$

Con lo cual la Proposición 3.3.5 concluye el teorema. \square

Dado un grupo abeliano \mathcal{A} . Diremos que $A \subset \mathcal{A}$ es *libre de suma*, si no existen tres elementos $x, y, z \in A$ tales que $x + y = z$. Por ejemplo, podemos considerar $\mathcal{A} = \mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, para un primo p .

Teorema 3.3.8 (Erdős). *Sea A un conjunto de n números enteros positivos, entonces existe $B \subset A$ libre de suma tal que $|B| > \frac{n}{3}$.*

Demostración. Tomemos un número primo $p = 3k + 1$ suficientemente grande, por ejemplo $p > 2 \max A$. Sea $\mathbb{Z}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, y consideremos $C := \{i \in \mathbb{N} | k < i \leq 2k + 1\}$. Luego $|C| = k + 1 > \frac{p-1}{3}$. Luego C es libre de suma en \mathbb{Z}_p .

Tomemos $t \in \mathbb{Z}_p^\times$ de manera aleatoria y uniforme (probabilidad $\frac{1}{p-1}$). Sea $Y = t \cdot A$ mód p , notemos que para $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ tenemos la variable aleatoria Z tal que $Z(t)$ indica si $a \in Y$ o no con 1 o 0 respectivamente. Notar que

$$P(Z) = P(a \in Y) = \frac{\#A}{p-1},$$

pues $a \in Y$ si y solo si $at^{-1} \in A$ mód p , si y solo si, $t^{-1} \in a^{-1}A$ mód p , además, A mód p es un conjunto de $\#A$ elementos y multiplicar por un elemento de \mathbb{Z}_p^\times e invertir son biyecciones. Consecuentemente,

$$\mathbb{E}(\#Y \cap C) = \sum_{a \in C} P(a \in Y) = \frac{\#A \cdot \#C}{p-1} > \frac{\#A}{3} = \frac{n}{3}.$$

Luego por la Proposición 3.3.5 existe $t_0 \in \mathbb{Z}_p^\times$, tal que $\#Y \cap C \geq \frac{n}{3}$.

Así, el conjunto $B := \{a \in A | t_0 a \text{ mód } p \in C\}$ funciona. En efecto, por cómo lo tomamos, $|B| > \frac{n}{3}$, y es libre de suma: si $a, b, c \in B$ son tales que

$$a + b = c,$$

luego

$$t_0 a + t_0 b = t_0 c \text{ mód } p,$$

pero esto es imposible pues C es libre de suma. \square

Teorema 3.3.9. *Para cada grafo G se tiene que*

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{1 + d_G(v)}.$$

Demostración. Sea $n = |G|$, identifiquemos los vértices de G con $[n]$, y consideremos el espacio probabilístico de funciones biyectivas $\sigma : [n] \rightarrow [n]$ escogidas de manera aleatoria y uniforme. Sea

$$A = \{v \in V(G) \mid \sigma(v) < \min_{w \in N_G(v)} \sigma(w)\},$$

notemos que A es un conjunto independiente. Afirmamos que $P(v \in A) = \frac{1}{1+d(v)}$ para cualquier $v \in G$. En efecto, dado $v \in G$, consideremos el conjunto $X := \{x_0, \dots, x_d\}$, donde $x_0 = v$ y x_1, \dots, x_d son los $d := d_G(v)$ vecinos de v en G , entonces tenemos la variable aleatoria Y , tal que $Y(\sigma) = \min_{0 \leq i \leq d} \{\sigma(x_i)\}$, luego notar que

$$1 = \sum_{i=0}^d P(\sigma \mid Y(\sigma) = \sigma(x_i)) = (d+1)P(\sigma \mid Y(\sigma) = \sigma(x_0)),$$

pues todas las probabilidades que aparecen son iguales: la probabilidad es uniforme y por simetría los eventos tienen todos la misma cardinalidad. Como la probabilidad del extremo derecho es justamente $P(v \in A)$, concluimos la afirmación.

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}(\#A) = \sum_{v \in V(G)} P(v \in A) = \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{1 + d_G(v)},$$

con lo cual la Proposición 3.3.5 prueba el teorema. □

3.4. Erdős-Rényi

Definición 3.4.1. Sea $p_n \in [0, 1]$. Diremos que un evento E_n en $\mathcal{G}(n, p_n)$ tiene **probabilidad alta**, si

$$P(E_n) \longrightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Teorema 3.4.2 (Erdős-Rényi). *Sea $p_n \in (0, 1)$. Entonces el evento*

$$\alpha(G) \leq \frac{2 \log n}{p_n}, \quad G \in \mathcal{G}(n, p),$$

tiene probabilidad alta.

Demostración. Sea $G \in \mathcal{G}(n, p_n)$. Dado $S \subset V(G)$ de tamaño k . Entonces

$$P(e(G[S]) = 0) = (1 - p_n)^{\binom{k}{2}}.$$

Luego, por la desigualdad de la unión,

$$\begin{aligned} P(\alpha \geq k) &\leq \binom{n}{k} (1 - p_n)^{\binom{k}{2}} \\ &\leq \left(\frac{en}{k} \cdot (1 - p_n)^{\frac{k-1}{2}} \right)^k \\ &\leq \left(\frac{en}{k} \cdot e^{-\frac{p_n(k-1)}{2}} \right)^k. \end{aligned}$$

Si $p_n k \geq 2 \log(n)$, i.e., $k \geq \frac{2 \log n}{p_n}$, luego

$$\begin{aligned} \frac{e \cdot e^{\log(n)}}{k} \cdot e^{\frac{-p_n(k-1)}{2}} &\leq \frac{e^{1+\log n - \log n + \frac{p_n}{2}}}{k} \\ &\leq \frac{e^{1+p_n/2}}{k} \\ &\leq \frac{e^{\frac{3}{2}}}{k} \leq \frac{5}{k}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos tomar $k = k(n)$ de tal forma que

$$P(\alpha \geq k) \leq \left(\frac{5}{k}\right)^k \longrightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty).$$

En consecuencia,

$$P\left(\alpha < \frac{2 \log n}{p_n}\right) \leq P(\alpha < k) \longrightarrow 1, \quad (n \rightarrow \infty).$$

□

Corolario 3.4.3. Sea $p_n \in (0, 1)$. Entonces

$$\chi(G) \geq \frac{np_n}{2 \log n}, \quad G \in \mathcal{G}(n, p_n)$$

con probabilidad alta.

Demostración. Sea c una $(\chi(G) = k)$ -coloración de los vértices, y sean las partes A_1, \dots, A_k de cada color. Entonces

$$n = \sum_{i=1}^k |A_i| \leq \sum_{i=1}^k \alpha(G) = \chi(G) \cdot \alpha(G).$$

Consecuentemente,

$$\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)} \geq \frac{np_n}{2 \log n}$$

con probabilidad alta por el teorema anterior.

□

3.4.1. Método de alteración

Teorema 3.4.4. Si G es un grafo con $n \in \mathbb{N}$ vértices y $d(G) := d := 2 \frac{v(G)}{e(G)}$, entonces

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{2d}.$$

Demostración. Sea $p \in (0, 1)$ (que no depende de n). Sea A un conjunto aleatorio escogiendo vértice de $V(G)$ con probabilidad p de forma independiente. Luego $\#A \sim \text{Bin}(n, p)$, y

$$\mathbb{E}(\#A) = np.$$

Además, para cada $uv \in E(G)$,

$$P(uv \in E(G[A])) = P(\{u \in A\} \cap \{v \in A\}) = P(u \in A) \cdot P(v \in A) = p^2.$$

Con lo cual, la aditividad de la esperanza implica:

$$\mathbb{E}(e(G[A])) = e(G)p^2.$$

Ahora, notemos que

$$\mathbb{E}(|A| - e(G[A])) = pn\left(1 - \frac{pd}{2}\right).$$

Por la Proposición 3.3.5,

$$P\left(\left\{A \mid |A| - e(G[A]) \geq pn\left(1 - \frac{pd}{2}\right)\right\}\right) > 0,$$

en particular existe un conjunto A de vértices de G tal que,

$$|A| - e(G[A]) \geq pn\left(1 - \frac{pd}{2}\right),$$

y el lado de la derecha se maximiza cuando $p = \frac{1}{d}$; nos queda:

$$|A| - e(G[A]) \geq \frac{n}{2d}.$$

Tomemos ahora el subconjunto A' de A , donde por cada arista $e \in E(G[A])$, quito un extremo en e de A . Por construcción A' es un conjunto independiente de G , y además

$$|A'| \geq \frac{n}{2d}.$$

De aquí deducimos la desigualdad del teorema. \square

Como bien ilustra la demostración anterior, el *método de alteración* es la técnica de obtener un conjunto A que no cumple exactamente la propiedad que buscábamos, pero “alterándolo” a un conjunto A' , se obtiene lo que queríamos.

Teorema 3.4.5 (Erdős). *Para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \geq n_0$, existe un grafo G con n vértices y*

$$\chi(G) \geq k \quad \text{y} \quad g(G) \geq k.$$

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo. Consideremos $\mathcal{G} = \mathcal{G}(n, p_n)$ con $p_n := n^{-1+\varepsilon}$, donde $\varepsilon := \frac{1}{k}$. Consideremos la variable aleatoria X_i en \mathcal{G} que cuenta el número de ciclos de longitud $3 \leq i \leq k-1$; luego la variable aleatoria $X := \sum_{i=3}^{k-1} X_i$ cuenta el número de ciclos de longitud a lo más $k-1$. Notar que existen a lo más n^i ciclos distintos que se pueden formar con los vértices del espacio muestral \mathcal{G} , luego, como X_i es la suma de las variables aleatorias indicadoras de los ciclos C_r de longitud i ,

$$\mathbb{E}(X_i) = \sum_r (G \supset C_r) \leq \sum_{r=1}^{n^i} p^i = n^i p^i.$$

Así,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=3}^{k-1} \mathbb{E}(X_i) \leq \sum_{i=3}^{k-1} n^i p^i = \sum_{i=3}^{k-1} n^{\varepsilon i} < kn^{\varepsilon(k-1)}.$$

Con lo cual, la desigualdad de Markov 3.2.6 implica que

$$P(X \geq \frac{n}{2}) \leq \frac{2}{n} \mathbb{E}(X) \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Entonces $X < \frac{n}{2}$ con probabilidad alta.

Ahora, por el teorema anterior,

$$\alpha(G) \leq \frac{2 \log n}{p_n} = 2n^{1-\varepsilon} \log n, \quad G \in \mathcal{G}$$

con probabilidad alta. Consecuentemente, existe G en n vértices y a lo más $\frac{n}{2}$ ciclos de tamaño menor que k . Removiendo $\frac{n}{2}$ vértices, uno por cada ciclo, obtenemos G' tal que $v(G') \geq \frac{n}{2}$ y $g(G') \geq k$. Por otro lado,

$$\alpha(G') \leq \alpha(G) \leq 2n^{1-\varepsilon} \log n,$$

con lo cual,

$$\chi(G') \geq \frac{v(G')}{\alpha(G')} \geq \frac{n^\varepsilon}{4 \log n} > k,$$

para todo n lo suficientemente grande. \square

Antes, observemos que podemos interpretar el número de Ramsey $R(3, k)$ como el mínimo n tal que todo grafo G con n vértices libre de triángulos satisface $\alpha(G) \geq k$. En efecto, si $n = R(3, k)$, podemos considerar el grafo completo K_n , e incrustar G en K_n pintando las aristas de G de color rojo, y las aristas de su complemento \bar{G} de azul. Si G es libre de triángulos, K_n es libre de K_3 -rojo, pero entonces tiene un K_k -azul por definición de número de Ramsey, equivalentemente, \bar{G} contiene un K_k , i.e., G tiene un conjunto de k -vértices independientes.

Teorema 3.4.6. *Existe $c > 0$ tal que*

$$R(3, k) \geq \left(\frac{ck}{\log k} \right)^{\frac{3}{2}},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande.

Demostración. Tomemos $n_k := \left(\frac{k}{4 \log k} \right)^{\frac{3}{2}}$. Consideremos $\mathcal{G} = \mathcal{G}(n_k, p_{n_k})$ con $p_{n_k} := n_k^{-\frac{2}{3}}$. Notar que $p_{n_k} k = 4 \log k$. El teorema anterior dice que

$$\alpha(G) \leq \frac{2 \log n_k}{p_{n_k}} < k, \quad G \in \mathcal{G}$$

con probabilidad alta ($k \rightarrow \infty$).

Sea X la variable aleatoria en \mathcal{G} tal que $X(G)$ es el número de triángulos de G . Tenemos que

$$\mathbb{E}(X) = \binom{n_k}{3} p_{n_k}^3 \leq \frac{n_k^3}{6} p_{n_k}^3 = \frac{n_k}{6}.$$

Luego por la desigualdad de Markov 3.2.6,

$$P(X \geq \frac{n_k}{2}) \leq \frac{2}{n_k} \mathbb{E}(X) \leq \frac{1}{3}.$$

Por lo tanto, para k lo suficientemente grande, existe un grafo G con n_k vértices y $\alpha(G) < k$, que contiene a lo más $\frac{n_k}{2}$ triángulos. Y quitando a lo más $\frac{n_k}{2}$ vértice de G por cada triángulo, obtenemos un grafo G' con $\alpha(G') < k$, libre de triángulos y $v(G') \geq \frac{n_k}{2}$. Es decir, la constante $c = 1/2^{\frac{8}{3}}$ funciona. \square

3.5. Método del segundo momento

Definición 3.5.1. La **varianza** de una variedad aleatoria X está dada por

$$\text{Var}(X) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2).$$

Además, definimos la **desviación estándar**:

$$\sigma(X) := \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

Tenemos las siguientes propiedades de la varianza:

Proposición 3.5.2. Dada una variable aleatoria X , se tiene que:

1. $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.
2. $\text{Var}(cX) = c^2 \text{Var}(X)$ para toda constante $c \in \mathbb{R}$.
3. Si X_1, \dots, X_n son variables aleatorias independientes, entonces

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n).$$

Proposición 3.5.3 (Desigualdad de Chebyshev). Sea X una variable aleatoria y $\lambda > 0$ una constante. Entonces

$$P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \lambda) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\lambda^2}.$$

En particular, tomando $\lambda := t\sigma(X)$ para $t > 0$,

$$P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t\sigma(X)) \leq \frac{1}{t^2}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \lambda) &= P(|X - \mathbb{E}(X)|^2 \geq \lambda^2) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}{\lambda^2} \\ &= \frac{\text{Var}(X)}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Donde la desigualdad sale de la Desigualdad de Markov 3.2.6. □

Dado $A \subset \mathbb{N}$, denotamos por $\Sigma(A)$ al conjunto de todas las sumas posibles de elementos de A . Notemos que

$$\#\Sigma(A) \leq 2^{\#A}.$$

Diremos que A tiene *sumas distintas*, si

$$\#\Sigma(A) = 2^{\#A}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $A \subset [n]$. ¿Cuál será la máxima cardinalidad $f(n)$ tal que A tiene sumas distintas?

Sea $A := \{2^i \mid 0 \leq i \leq \log_2 n\} \subset [n]$. Entonces $\#A \geq 1 + \lfloor \log_2(n) \rfloor$ y todas las sumas son distintas, con lo cual

$$f(n) \geq 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor.$$

Teorema 3.5.4. Para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$f(n) \leq \log_2 n + \frac{1}{2} \log_2 \log_2 n + O(1).$$

Demostración. Consideremos $A = \{a_1, \dots, a_m\} \subset [n]$ con sumas distintas. Tomemos X_1, \dots, X_m variables aleatorias independientes con $X_i \sim \text{Ber}(\frac{1}{2})$. Se sigue que $\text{Var}(X_i) = \frac{1}{4}$. Sea $X := \sum_{i=1}^m a_i X_i$; escribamos $\mu := \mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^m a_i \mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m a_i$; similarmente, $\text{Var}(X) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^m a_i^2 \leq \frac{n^2 m}{4}$, por lo tanto $\sigma(X) \leq \frac{n\sqrt{m}}{2}$.

Tomemos $t > 1$, por la desigualdad de Chebyshev 3.5.3,

$$P(|X - \mu| \geq \underbrace{\frac{tn\sqrt{m}}{2}}_{\geq t\sigma(X)}) \leq \frac{1}{t^2}.$$

Con lo cual,

$$P(|X - \mu| < \frac{tn\sqrt{m}}{2}) \geq 1 - t^{-2}.$$

Notar que

$$P(X = x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \Sigma(A) \\ 2^{-m} & \text{si } x \in \Sigma(A). \end{cases}$$

Luego

$$P(|X - \mu| < \frac{tn\sqrt{m}}{2}) \leq \frac{tn\sqrt{m} + 1}{2^m},$$

porque las sumas son distintas. Juntando esta desigualdad con la anterior, tenemos que

$$\Omega\left(\frac{2^m}{\sqrt{m}}\right) = \frac{(1 - t^2)2^m - 1}{t\sqrt{m}} \leq n.$$

Concluamos ahora a partir de esto que

$$m \leq \log_2 n + \frac{1}{2} \log_2 \log_2 n + O(1),$$

y por lo tanto $f(n) \leq \log_2 n + \frac{1}{2} \log_2 \log_2 n + O(1)$ como queríamos.

En efecto, la cantidad se maximiza cuando tomamos $t = \sqrt{3}$ (de todas formas no es necesario tomar este t , cualquier t sirve). Tomando logaritmo, nos queda

$$\begin{aligned} \log_2 n &\geq \log_2 \left(2^m \cdot \frac{2}{3} - 1\right) - \frac{1}{2} (\log_2 m + \log_2 3) \\ &\geq \log_2 2^{m-2} - \frac{1}{2} (\log_2 m + \log_2 3) \\ &= m - 2 - \frac{1}{2} \log_2 m - \frac{1}{2} \log_2 3. \end{aligned}$$

Como $\log_2 m \leq m$,

$$\log_2 n \geq \frac{m}{2} - 2 - \frac{1}{2} \log_2 3 \geq \frac{m}{4}$$

para m lo suficientemente grande. En particular,

$$\log_2 \log_2 n + 2 \geq \log m$$

para m grande. Así, usando esta cota para acotar el $\log m$ en la desigualdad de arriba, nos queda

$$\begin{aligned} m &\leq \log_2 n + \frac{1}{2} \log_2 m + \log_2 \sqrt{3} + 2 \\ &\leq \log_2 n + \frac{1}{2} \log_2 \log_2 n + 3 + \log_2 \sqrt{3} \\ &= \log_2 n + \frac{1}{2} \log_2 \log_2 n + O(1). \end{aligned}$$

□

Conjetura 3.5.5. *Erdős ofreció una pequeña recompensa para la persona que pruebe*

$$f(n) \leq \log_2 n + O(1).$$

Sean A_1, \dots, A_t eventos en un espacio probabilístico (Ω, p) , escribamos $X_i := \mathbb{1}_{A_i}$ para las variables aleatorias indicadoras respectivas. Vamos a utilizar el símbolo $i \sim j$ si solo si A_i y A_j no son independientes e $i \neq j$. Consideremos $X := X_1 + \dots + X_t$. Luego

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^t \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i) \mathbb{E}(X_j) \\ &\leq \sum_{i \sim j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i=1}^t \mathbb{E}(X_i) \\ &= \mathbb{E}(X) + \Delta. \end{aligned}$$

Proposición 3.5.6. *Sean A_1, \dots, A_t eventos en (Ω, p) , $X_i := \mathbb{1}_{A_i}$ y $X := X_1 + \dots + X_t$. Si $\mathbb{E}(X) \rightarrow +\infty$ y $\Delta = o(\mathbb{E}(X)^2)$, entonces*

$$X > 0$$

con probabilidad alta.

Demostración. Por Chebyshev 3.5.3,

$$\begin{aligned} P(X = 0) &\leq P\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \frac{\mathbb{E}(X)}{2}\right) \\ &\leq \frac{4 \text{Var}(X)}{\mathbb{E}(X)^2}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{\text{Var}(X)}{\mathbb{E}(X)^2} \leq \frac{1}{\mathbb{E}(X)} + \frac{\Delta}{\mathbb{E}(X)^2} = o(1).$$

Por lo tanto $X > 0$ con probabilidad alta. □

Teorema 3.5.7. *Sea $\mathcal{G} = \mathcal{G}(n, \frac{1}{2})$. Entonces*

$$\alpha(G) = (2 + o(1)) \log_2 n, \quad G \in \mathcal{G}$$

con probabilidad alta.

Demostración. Fijemos $k \in [n]$, el conjunto de vértices de \mathcal{G} , y tomemos S un subconjunto de vértices con k elementos. Consideremos la variable aleatoria indicadora X_S para el evento $e(G[S]) = 0$; escribamos $X := \sum_{S \subset [n], |S|=k} X_S$. Luego

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\substack{S \subset [n] \\ |S|=k}} \mathbb{E}(X_S) = \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}}.$$

Notar que $X > 0$ implica $\alpha(G) \geq k$. Luego

- (a) $X = 0$ con probabilidad alta, si $k > (2 + \varepsilon) \log_2 n$.
- (b) $X > 0$ con probabilidad alta, si $k < (2 - \varepsilon) \log_2 n$.

Por la desigualdad de Markov 3.2.6,

(a)

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &\leq \mathbb{E}(X) \\ &= \binom{n}{k} 2^{-k(k-1)/2} \\ &\leq \left(n \cdot 2^{-(k-1)/2} \right)^k \\ &\leq \left(n \cdot n^{-1-\frac{\varepsilon}{2}} \cdot \sqrt{2} \right)^k \\ &= n^{-\frac{\varepsilon}{2} \cdot k} (\sqrt{2})^k \\ &= o(1). \end{aligned}$$

(b) Ahora,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \binom{n}{k} \cdot 2^{-\binom{k}{2}} \\ &\geq \left(\frac{n}{k} \right)^k \cdot 2^{-\binom{k}{2}} \\ &\geq \left(\frac{n}{k} \right)^k \cdot n^{-k(1-\varepsilon/2)} \\ &\geq \left(\frac{n}{k} \right)^k \cdot \frac{1}{n^{k(1-\varepsilon/2)}} \end{aligned}$$

Que tiene a infinito cuando n tiende a infinito.

Si $\Delta = \sum_{S \sim T} P(X_S X_T \geq 1)$ con S, T subconjuntos de vértices de tamaño k ; $2 \leq |S \cap T| \leq k-1$. Así

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{i=2}^{k-1} \binom{n}{k} \binom{k}{i} \binom{n-k}{k-i} 2^{\binom{i}{2} - 2\binom{k-i}{2}} \\ &= \mathbb{E}(X)^2 \sum_{i=2}^{k-1} g(i), \end{aligned}$$

donde $g(i) := \frac{\binom{n-k}{k-i} \binom{k}{i} 2^{\binom{i}{2}}}{\binom{n}{k}} = o(n^{-1})$. Consecuentemente,

$$\frac{\Delta}{\mathbb{E}(X)^2} = \sum_{i=2}^{k-1} g(i) = o((k-2)n^{-1}) = o(1),$$

y por lo tanto la proposición anterior implica que $X > 0$ con probabilidad alta.

Así, $\alpha(G) = (2 + o(1)) \log_2 n$ con probabilidad alta en $G \in \mathcal{G}$ cuando $n \rightarrow \infty$. □

Corolario 3.5.8. Sea $\mathcal{G} = \mathcal{G}(n, \frac{1}{2})$. Entonces

$$\chi(G) \geq \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) \frac{n}{\log_2 n}$$

con probabilidad alta.

Demostración. Se deduce de lo anterior junto con la identidad general para grafos

$$\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}.$$

□

3.6. Método de concentración

Proposición 3.6.1 (Desigualdad de Chernoff). Si $\varepsilon \in [0, 1]$ y X una variable aleatoria binomial con media μ . Entonces

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon \mu) \leq 2e^{-\frac{\varepsilon^2 \mu}{3}}.$$

Definición 3.6.2. $\hat{r}(H_1, H_2) = \min\{e(G) \mid G \longrightarrow (H_1, H_2)\}$. En particular, escribimos $\hat{r}(H)$ para $\hat{r}(H, H)$.

Teorema 3.6.3 (Beck, 1983). Existe una constante $c > 0$ tal que

$$\hat{r}(P_k) \leq c \cdot k$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Lema 3.6.4. Sea $c > 0$, y sea $\mathcal{G} = \mathcal{G}(n, p)$ con $p = \frac{c}{n}$ para n lo suficientemente grande. Entonces

$$P(\{G \in \mathcal{G} \mid e(G) \geq pn^2\}) \leq 2e^{-c \frac{n-1}{8}}.$$

Demostración. Sabemos que la variable aleatoria que cuenta el número de aristas $e(\cdot)$ en \mathcal{G} tiene distribución $\text{Bin}(\binom{n}{2}, p)$. Notar que su $\mu = p \binom{n}{2}$. Como $|e(G) - \mu| \geq \mu$ si y solo si $e(G) \geq 2\mu$, tenemos que por la desigualdad de Chernoff 3.6.1 con $\varepsilon = 1$:

$$\begin{aligned} P(e(\cdot) \geq pn^2) &\leq P(e(\cdot) \geq 2\mu) \\ &= P(|e(\cdot) - \mu| \geq \mu) \\ &\leq 2e^{-\frac{\mu}{3}} \\ &\leq 2e^{-p \frac{n(n-1)}{8}} \\ &= 2e^{-c \frac{n-1}{8}}. \end{aligned}$$

□

Lema 3.6.5. Sea $c > 0$, y sea $\mathcal{G} = \mathcal{G}(n, p)$ con $p = \frac{c}{n}$ y n lo suficientemente grande. Entonces con probabilidad alta,

$$e(X, Y) \geq 1$$

para cada par de subconjuntos de vértices X, Y de \mathcal{G} , disjuntos con $|X| \geq |Y| \geq 3c^{-\frac{1}{2}}n$.

Demostración. Dados X, Y subconjuntos de vértices de \mathcal{G} , disjuntos. Notar que la variable aleatoria $e(X, Y)$ (que depende de $G \in \mathcal{G}$) tiene distribución $\text{Bin}(|X||Y|, p)$, en particular $\mu = p|X||Y|$. Por la desigualdad de Chernoff 3.6.1 con $\varepsilon = 1$, si $|X| \geq |Y| \geq 3c^{-\frac{1}{2}}n$, se tiene que

$$\begin{aligned} P(e(X, Y) = 0) &\leq P(|e(X, Y) - \mu| \geq \mu) \\ &\leq 2e^{-\frac{\mu}{3}} \\ &= 2e^{-p \frac{|X||Y|}{3}} \\ &\leq 2e^{-p \frac{9c^{-1}n^2}{3}} \\ &\leq 2e^{-3n} \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Así, tenemos un total de a lo más $2^n \cdot 2^n = 4^n$ formas de escoger X e Y , con lo cual la probabilidad de que haya un par X, Y con $e(X, Y) = 0$ es a lo más

$$4^{n+1}e^{-3n} = 2e^{-n} \left(\frac{4}{e^2}\right)^n \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

De donde se sigue lo que queríamos. \square

Ahora estamos en condiciones de probar el teorema principal de esta sección:

Demostración del teorema. Sea $c > 0$ lo suficientemente grande, y luego en función de esta constante tomemos $a > 0$ lo suficientemente grande. Consideremos $n = a \cdot k$ y $C = a \cdot c$. Aplicamos ambos lemas de arriba con $p = \frac{c}{n}$. Luego existe un grafo $G \in \mathcal{G}(n, p)$ con n vértices y

$$e(G) \leq pn^2 = C \cdot k.$$

Además, por el segundo lema, para todo $X, Y \subset V(G)$ disjuntos con $|X| \geq |Y| \geq 3c^{-\frac{1}{2}}n$, se tiene que $e(X, Y) \geq 1$.

Ahora veremos que $G \longrightarrow (P_k, P_k)$ para cualquier coloración de las aristas. Supongamos por el absurdo que G no tiene una 2-coloración de aristas con un P_k monocromático. Consideremos el siguiente algoritmo, que nos permite encontrar una partición $V(G) = A \sqcup X \sqcup Y$ tal que no hay (X, Y) -aristas rojas:

1. empezamos con $A = X = \emptyset$ e $Y = V(G)$;
2. (a) si $A = \emptyset$, escogemos cualquier vértice $u \in Y$ y lo muevo a A .
(b) si $A \neq \emptyset$, tomamos $v \in A$, el último que hemos agregado a A . Si existe $u \in Y$ tal que vu es una arista azul, agregamos u a A . Si no, movemos v a X .
3. si $|X| = |Y|$ terminamos, si no volvemos al paso 2.

Eventualmente este algoritmo termina, pues en cada paso $|Y| - |X|$ disminuye en una unidad. Después, observemos que A forma un camino azul, por lo tanto $|A| \leq k$. Más aún,

$$|X| + |Y| = n - |A| \geq n - k = k(a - 1).$$

Consecuentemente, $|X| = |Y| \geq \frac{k(a-1)}{2}$.

Análogamente, podemos repetir el mismo proceso para el caso de aristas rojas: partimos $V(G) = A' \sqcup X' \sqcup Y'$ con A' conteniendo un camino rojo y por lo tanto $|A'| \leq k$, $|X'| = |Y'| \geq \frac{k(a-1)}{2}$, y no hay (X', Y') -aristas azules.

Consideremos los conjuntos

$$\mathcal{P}_1 = \{(X, X'), (Y, Y')\},$$

$$\mathcal{P}_2 = \{(X, Y'), (Y, X')\},$$

de pares de partes de $V(G)$ obtenidas arriba. Afirmamos que existe $i = 1, 2$ tal que

$$|U \cap W| \geq \frac{k(a-3)}{4}$$

para todo par (U, V) en \mathcal{P}_i . En efecto, si esto no fuera cierto, podríamos encontrar un par en \mathcal{P}_1 y otro en \mathcal{P}_2 , digamos $X \cap X'$ y $X \cap Y'$, tales que las intersecciones son menores que $\frac{k(a-3)}{4}$, con lo cual,

$$\begin{aligned} \frac{k(a-3)}{2} &> |X \cap X'| + |X \cap Y'| \geq |X| - |A'| \\ &\geq \frac{k(a-1)}{2} - k \\ &= \frac{k(a-3)}{2}, \end{aligned}$$

absurdo.

Finalmente, por la afirmación de recién, consideremos sin pérdida de generalidad, que $X \cap X'$ e $Y \cap Y'$ son subconjuntos de $V(G)$ de tamaño al menos $\frac{k(a-3)}{4}$. Notar que son disjuntos entre sí, además,

$$\frac{k(a-3)}{4} \geq 3c^{-\frac{1}{2}}n,$$

llegando a una contradicción, porque el segundo lema implica que tiene que haber al menos una arista entre ambos conjuntos, la cual es roja o azul, pero las particiones obtenidas en el algoritmo no lo permiten. \square

Comentario 3.6.6. Dedek y Pralat en 2017 probaron

$$\hat{r}(P_k) \leq 74k.$$

Por otro lado, Bal y DeBiasio probaron

$$\left(\frac{15}{4} + o(1)\right)k \leq \hat{r}(P_k).$$

3.7. Grafos aleatorios

Teorema 3.7.1. Si $p_n = o(\frac{1}{n})$, entonces

$$P(K_3 \subset \mathcal{G}(n, p_n)) \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Demostración. Consideremos la variable aleatoria X en $\mathcal{G} = \mathcal{G}(n, p_n)$ tal que $X(G)$ es el número de triángulos en G . Notar que $P(K_3 \subset \mathcal{G}) = P(X \geq 1)$. Ahora, podemos formar $\binom{n}{3}$ triángulos con los vértices V de \mathcal{G} , y la probabilidad de que uno de estos triángulos esté en $G \in \mathcal{G}$ es p_n^3 . Consecuentemente,

$$\mathbb{E}(X) = p_n^3 \binom{n}{3} \leq (p_n n)^3 \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Así, la desigualdad de Markov 3.2.6 implica

$$P(X \geq 1) \leq \mathbb{E}(X) \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

□

Teorema 3.7.2. Si $p_n \gg \frac{1}{n}$, entonces

$$P(K_3 \subset \mathcal{G}(n, p_n)) \longrightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Demostración. Escribamos $p := p_n$. Como antes consideremos la variable aleatoria X en $\mathcal{G} := \mathcal{G}(n, p)$ que cuenta la cantidad de triángulos en un grafo. Tenemos que $\mathbb{E}(X) = p^3 \binom{n}{3} \geq (\frac{pn}{3})^3 \rightarrow \infty$ cuando n tiende a infinito.

Precisamos ahora estimar la varianza de X . Para eso escribimos $X = \sum_{\tau} X_{\tau}$ como la sumatoria de todas las variables aleatorias indicadoras de los $\binom{n}{3}$ triángulos τ . Se tiene que

$$\text{Var}\left(\sum_{\tau} X_{\tau}\right) = \sum_{\tau_i, \tau_j} \text{Cov}(X_{\tau_i}, X_{\tau_j}).$$

Notar que la covarianza es cero si τ_i, τ_j no comparten aristas (las variables son independientes); si comparten una sola arista, la covarianza es:

$$\mathbb{E}(X_{\tau_1} X_{\tau_2}) - \mathbb{E}(X_{\tau_1}) \mathbb{E}(X_{\tau_2}) = p^5 - p^6;$$

y si comparten todas las aristas, la covarianza es $p^3 - p^6$. Juntando esto, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \sum_{|\tau_i \cap \tau_j|=1} p^5 - p^6 + \sum_{|\tau_i \cap \tau_j|=3} p^3 - p^6 \\ &= 2 \binom{n}{4} (p^5 - p^6) + \binom{n}{3} (p^3 - p^6) \\ &\sim n^4 (p^5 - p^6) + n^3 (p^3 - p^6). \end{aligned}$$

Finalmente, como

$$\left\{ \sum_{\tau} X_{\tau} = 0 \right\} \subset \left\{ \left| \sum_{\tau} X_{\tau} - \mathbb{E}(X) \right| \geq \mathbb{E}(X) \right\},$$

podemos deducir que

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{\tau} X_{\tau} = 0\right) &\leq P\left(\left|\sum_{\tau} X_{\tau} - \mathbb{E}(X)\right| \geq \mathbb{E}(X)\right) \\
&\leq \frac{\text{Var}(X)}{\mathbb{E}(X)^2} \quad (\text{Desigualdad de Chebyshev } 3.5.3) \\
&\sim \frac{n^4(p^5 - p^6) + n^3(p^3 - p^6)}{(pn)^6} \\
&= \frac{1}{n^2 p} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3 p^3} - \frac{1}{n^3} \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

□

3.8. Conexidad de grafos aleatorios

Teorema 3.8.1. Sea $\mathcal{G}(n, p_n) =: \mathcal{G}$ con $p_n := \frac{c \log n}{n}$, entonces

$$P(G \in \mathcal{G} | G \text{ es conexo}) = \begin{cases} 0 & \text{si } c < 1 \\ 1 & \text{si } c > 1 \end{cases} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Demostración. Sea X_{μ} la variable aleatoria indicadora de si μ es un vértice aislado. Definamos $N := \sum_{\mu \in V(G)} X_{\mu}$. Notar que si $N \geq 1$, entonces G no es conexo. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{\mu}) &= P(\mu \text{ es aislado}) = (1 - p_n)^{n-1} \\
\mathbb{E}(N) &= n(1 - p_n)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Observar que

$$\begin{aligned}
(1 - p_n)^{n-1} &= e^{(n-1) \log(1-p_n)} \\
&\sim e^{-(n-1)p_n} \quad (\log(1+x) = x + O(x^2) \text{ cuando } x \rightarrow 0) \\
&\sim e^{-np_n}
\end{aligned}$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto,

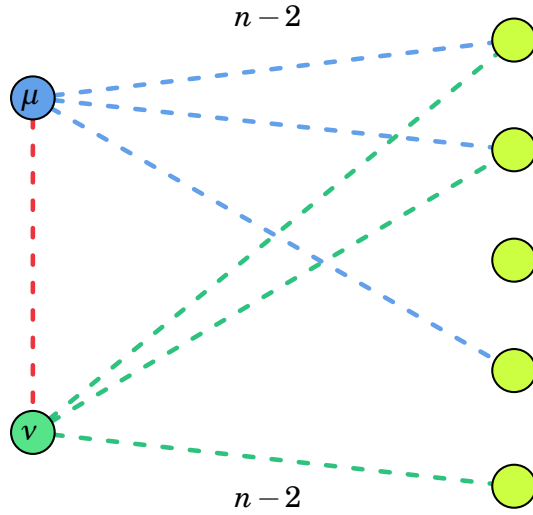
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N) &= n(1 - p_n)^{n-1} \\
&\sim n e^{-c \log n} \\
&= n e^{\log n^{-c}} \\
&= n^{1-c}
\end{aligned}$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Ahora, calculamos la varianza de N . Antes, notar que

$$\mathbb{E}(X_{\mu} \cdot X_{\nu}) = P(\mu \text{ y } \nu \text{ son aislados}) = (1 - p_n)^{2n-3},$$

pues para que sean aislados, no pueden estar las $2n - 3$ aristas incidentes a μ y ν (hay $n - 2$ vértices distintos de μ, ν y luego una arista entre ellos; ver la siguiente figura).



G

Figura 3.8.3

Si $\mu \neq v$:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X_\mu, X_v) &= \mathbb{E}(X_\mu, X_v) - \mathbb{E}(X_\mu)\mathbb{E}(X_v) \\ &= (1 - p_n)^{2n-3} - (1 - p_n)^{2(n-1)} \\ &= p_n(1 - p_n)^{2n-3}.\end{aligned}$$

Y si $\mu = v$:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X_\mu, X_v) &= \text{Var}(X_\mu) \\ &= \mathbb{E}(X_\mu^2) - \mathbb{E}(X_\mu)^2 \\ &= \mathbb{E}(X_\mu) - \mathbb{E}(X_\mu)^2 \\ &= (1 - p_n)^{n-1} - (1 - p_n)^{2(n-1)}.\end{aligned}$$

Como $p_n = \frac{c \log n}{n}$, para $\mu \neq v$:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X_\mu, X_v) &= \frac{c \log n}{n} \left(1 - \frac{c \log n}{n}\right)^{2n-3} \\ &\leq \frac{c \log n}{n} e^{-c \frac{\log n}{n} (2n-3)} \quad (1 + x \leq e^x) \\ &\sim \frac{c \log n}{n} e^{-\log(n^{-2c})} \\ &= \frac{c \log n}{n} n^{-2c} \\ &= c \log n n^{-1-2c}.\end{aligned}$$

Por otro lado (de manera similar), para $\mu = v$:

$$\text{Var}(X_\mu) = \left(1 - \frac{c \log n}{n}\right)^{n-1} - \left(1 - \frac{c \log n}{n}\right)^{2(n-1)} \sim n^{-c} - n^{-2c}.$$

Juntando todo:

$$\begin{aligned}
\text{Var}(N) &= \sum_{\mu \neq \nu} \text{Cov}(X_\mu, X_\nu) + \sum_{\mu} \text{Var}(X_\mu) \\
&\lesssim \binom{n}{2} c n^{-1-2c} \log n + n n^{-c} (1 - n^{-c}) \\
&\leq \frac{c}{2} n^{1-2c} \log n + n^{1-c} (1 - n^{-c}).
\end{aligned}$$

Gracias a esto, si $c < 1$,

$$\begin{aligned}
P(N = 0) &\leq P(|N - \mathbb{E}(N)| \geq \mathbb{E}(N)) \leq \frac{\text{Var}(N)}{\mathbb{E}(N)^2} \quad (\text{desigualdad de Chebyshev } \textcolor{red}{3.5.3}) \\
&\lesssim \frac{\frac{c}{2} n^{1-2c} \log n + n^{1-c} (1 - \frac{1}{n^c})}{n^{2-2c}} \\
&= \frac{c}{2} n^{-1} \log n + \frac{1 - n^{-c}}{n^{1-c}} \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).
\end{aligned}$$

Es decir, cuando $c < 1$, la probabilidad de que haya un vértice aislado en G tiende a 0, i.e.,

$$P(G \in \mathcal{G} | G \text{ es conexo}) \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Finalmente para probar que la probabilidad de que G sea conexo tiende a 1 cuando $c > 1$, probaremos la afirmación equivalente: la probabilidad de que exista un conjunto de k -vértices independientes, con $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, tiende a cero. Sea S_k un conjunto de k -vértices; definimos la variable aleatoria indicadora X_{S_k} que dice si S_k está aislado, i.e., $E(S_k, \overline{S_k}) = \emptyset$. Tenemos que

$$\mathbb{E}(X_{S_k}) \leq (1 - p_n)^{k(n-k)},$$

y por lo tanto,

$$P(G \text{ desconexo}) \leq \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} \mathbb{E}(X_{S_k}).$$

Como el último término ya vimos que tiende a cero cuando $c > 1$, basta estimar la sumatoria. Ahora,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} \mathbb{E}(X_{S_k}) &\leq \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\frac{ne}{k} (1 - p_n)^{n-k} \right)^k \\
&\leq \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\frac{ne}{k} e^{-p_n(n-k)} \right)^k \\
&= \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\frac{ne}{k} n^{-\frac{c}{n}(n-k)} \right)^k \\
&= \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{e^k}{k^k} n^{(1-c)k + \frac{ck^2}{n}}.
\end{aligned}$$

Para estimar esta sumatoria, notemos que como la función cuadrática $f(x) := (1-c)x - \frac{cx^2}{n}$ alcanza el máximo en $x = \frac{(1-c)n}{2c}$, luego

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{e^k}{k^k} n^{(1-c)k + \frac{ck^2}{n}} &= \frac{e^2}{2^2} n^{(1-c)2 + \frac{c2^2}{n}} + \frac{e^3}{3^3} n^{(1-c)2 + c\frac{3^3}{n}} + \sum_{k=4}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{e^k}{k^k} n^{(1-c)k + \frac{ck^2}{n}} \\ &\leq \frac{e^2}{2^2} n^{(1-c)2 + \frac{c2^2}{n}} + \frac{e^3}{3^3} n^{(1-c)2 + c\frac{3^3}{n}} + n^{\frac{3(1-c)^2}{4c}} n \sum_{k=4}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{e^k}{k^k} \\ &\leq \frac{e^2}{2^2} n^{(1-c)2 + \frac{c2^2}{n}} + \frac{e^3}{3^3} n^{(1-c)2 + c\frac{3^3}{n}} + n^{\frac{3(1-c)^2}{4c}} n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e}{4}\right)^k. \end{aligned}$$

Los primeros dos términos tienden a cero cuando n tiende a infinito; el último término también, pues la serie geométrica converge a una constante que no depende de n . □

3.9. Grafos de dependencia

Definición 3.9.1. Sea (Ω, P) un espacio probabilístico y $A \subset \mathcal{P}(\Omega)$ un subconjunto de finitos eventos $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$. Un **grafo de dependencia** es un grafo con conjunto de vértices \mathcal{A} cuyas aristas cumplen que para todo $A \in \mathcal{A}$, el complemento del vecindario $N_G(A)$ consiste de eventos mutuamente independientes respecto de P .

Lema 3.9.2 (Lovász). Sea G un grafo de dependencia para un subconjunto de eventos \mathcal{A} , tal que

$$P(A) \leq \frac{1}{e(\Delta(G) + 1)}$$

para todo $A \in \mathcal{A}$, entonces

$$P\left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^c\right) > 0.$$

Recordemos que todo hipergrafo k -uniforme es 2-coloreable si tiene menos de 2^{k-1} aristas.

Teorema 3.9.3. Si \mathcal{H} es un hipergrafo k -uniforme con $\Delta(\mathcal{H}) = d$. Entonces

$$d \leq \frac{2^{k-1}}{ek} - \frac{1}{k} \implies \chi(\mathcal{H}) = 2.$$

Demostración. Consideremos c una 2-coloración aleatoria. Para $e \in E(\mathcal{H})$, consideremos los eventos $A_e = \text{"}e \text{ es monocromático"}$. Consideremos el grafo de dependencia

$$G := \left(\bigcup_{e \in E(\mathcal{H})} A_e, \bigcup_{e, f \in E(\mathcal{H})} \{A_e A_f \mid e \cap f \neq \emptyset\} \right).$$

Observar que $\Delta(G) \leq kd$. Por hipótesis,

$$P(A_e) = 2^{1-k} \leq \frac{1}{e(kd + 1)},$$

y luego el lema anterior implica que

$$P\left(\bigcap_{e \in E(\mathcal{H})} A_e^c\right) > 0.$$

Así probamos el resultado. \square

Definición 3.9.4. Denotaremos por $\omega(r, k)$ al menor $n \in \mathbb{N}$ tal que toda r -coloración de $[n]$ tiene una k -progresión aritmética monocromática.

Observación 3.9.5.

$$\left((k-1)r^{k-1}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \omega(r, k) \leq \frac{r^2}{k-1}.$$

Teorema 3.9.6. Dados $r, k \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\omega(r, k) > \frac{(k-1)r^{k-1}}{ek^2} - \frac{k-1}{k^2}.$$

Demostración. Sea $c : [n] \rightarrow [r]$ una r -coloración aleatoria. Para una k -progresión aritmética p , definimos el evento A_p = “ p es monocromático”, luego consideremos el grafo de dependencia

$$G := \left(\bigcup_p A_p, \bigcup_{p, q} \{A_p A_q \mid p \cap q \neq \emptyset\} \right).$$

Como $\Delta(G) \leq nk^2/(k-1)$, y $P(A_p) = r^{1-k} \leq \frac{1}{e(\Delta(G)+1)}$ si $n \leq \frac{(k-1)r^{k-1}}{ek^2} - \frac{k-1}{k^2}$, el Lema local de Lovász 3.9.2 implica que

$$P\left(\bigcap_p A_p^c\right) > 0,$$

es decir, existe una r -coloración c para cualquier $n \leq \frac{(k-1)r^{k-1}}{ek^2} - \frac{k-1}{k^2}$, que es libre de k -progresiones aritméticas monocromáticas. De aquí se obtiene el resultado. \square

Teorema 3.9.7 (Spencer, 1975).

$$R(k) \geq (1 + o(1)) \frac{\sqrt{2}}{e} k 2^{\frac{k}{2}}.$$

Demostración. Tomamos K_n y una 2-coloración aleatoria. A todo $K_k \cong S \subset K_n$ le asociamos el evento A_S = “ S es monocromático”, y luego construimos el grafo de dependencia

$$G := \left(\bigcup_S A_S, \bigcup_{S, T} \{A_S A_T \mid e(S \cap T) \geq 1\} \right).$$

Notar que $P(A_S) = 2^{-\binom{k}{2}}$, y que $\Delta(G) \leq \binom{k}{2} \binom{n-2}{k-2} \leq \frac{k^4}{n^2} \binom{n}{k}$.

Si $n = (1 + \varepsilon) \frac{k\sqrt{2}}{e} 2^{\frac{k}{2}}$, se sigue que

$$\binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} \leq \left(\frac{en}{k} 2^{-\frac{k-1}{2}} \right)^k = (1 + \varepsilon)^k \ll \frac{n^2}{k^4} \quad (k \rightarrow \infty),$$

equivalentemente, $\frac{k^4}{n^2} \binom{n}{k} 2^{-\frac{k}{2}} \ll 1$. Así,

$$P(A_S) = 2^{-\binom{k}{2}} \ll \frac{1}{e^{\left(\frac{k^4}{n^2} \binom{n}{k} + 1\right)}}.$$

Finalmente, el Lema de Lovász 3.9.2 implica que lo que queremos. \square

Lema 3.9.8 (Lema local de Lovász asimétrico). *Sea G un grafo de dependencia en $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Si existen $x_i \in [0, 1]$ tales que*

$$P(A_i) \leq x_i \prod_{A_i A_j \in E(\mathcal{G})} (1 - x_j)$$

para todo $i \in [n]$, entonces

$$P\left(\bigcap_{i \in [n]} A_i^c\right) \geq \prod_{i \in [n]} (1 - x_i) > 0$$

Teorema 3.9.9. *Existe una constante $c > 0$ tal que*

$$R(3, k) \geq \frac{ck^2}{\log^2 k}, \quad \forall k \geq 3.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ lo suficientemente chico y tomemos $n = \frac{\varepsilon^{-4} k^2}{\log^2 k}$ y $p = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Para todo $S \subset K_n$ con $S \cong K_3$, definimos $A_S = \{S \subset \mathcal{G}(n, p)\}$ y para todo $T \subset K_n$, $T \cong K_r$, con $B_T := \{T \cap \mathcal{G}(n, p) = \emptyset\}$. Basta ver que

$$P\left(\bigcap_{S \cong K_3} A_S \cap \bigcap_{T \cong K_r} B_T\right) > 0.$$

Consideremos \mathcal{A} el conjunto de los K_3 en K_n y \mathcal{B} el conjunto de los K_k en K_n . Consideremos el grafo de dependencia

$$G = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}, E),$$

donde $\{A, B\} \in E$ si A y B comparten al menos una arista. Notar que todo $S \in \mathcal{A}$ tiene $\leq 3n$ vecinos en \mathcal{A} y $\leq 3n^{k-2}$ vecinos en \mathcal{B} ; por otro lado, $T \in \mathcal{B}$ tiene $\leq k^2 n$ vecinos en \mathcal{A} y $\leq k^2 n^{k-2}$ vecinos en \mathcal{B} . Tomemos las cantidades $x_S = 2p^3$ y $x_T = n^{-k}$ para $S \in \mathcal{A}$ y $T \in \mathcal{B}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} P(A_S) &= p^3 \leq 2p^3 (1 - 2p^3)^{3n} (1 - n^{-k})^{3n^{k-2}} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+) \\ &\leq x_S \prod_{SU \in E(G)} (1 - x_U), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} P(B_T) &= (1 - p)^{\binom{k}{2}} \leq \exp\left(-p \binom{k}{2}\right) = \exp(-\varepsilon^{-1} \log k (k-1)/2) \\ &= k^{-\varepsilon^{-1}(k-1)/2} \\ &< n^{-k} (1 - 2p^3)^{k^2 n} (1 - n^{-k})^{k^2 n^{k-2}} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+) \\ &\leq x_T \prod_{TU \in E(G)} (1 - x_U). \end{aligned}$$

Luego por el Lema local de Lovász asimétrico 3.9.8, existe $G \in \mathcal{G}(n, p)$ que no contiene copias de K_3 ni conjuntos independientes de más de k vértices. Por lo tanto se sigue el resultado. \square

3.10. Grafos K_3 libres

Definición 3.10.1. $E \subset \{0,1\}^n$ es **creciente** si

$$x \in E \text{ y } x \leq y \implies y \in E.$$

Donde tomamos el orden parcial \leq en los vectores dada por el orden coordenada a coordenada.

Similarmente podemos definir que E sea **decreciente**.

Lema 3.10.2 (Harris). Sean $\{x_i\}_{i \in [n]}$ e $\{y_i\}_{i \in [n]}$ muestras aleatorias de $\{0,1\}$ escogidas independientemente con probabilidad

$$P(x_i = 1) = P(y_i = 1) = p.$$

Si $E, F \subset \{0,1\}^n$ son ambas crecientes o decrecientes y $p > 0$, entonces

$$P(E \cap F) \geq P(E)P(F).$$

De manera opuesta, si una es creciente y la otra decreciente, entonces

$$P(E \cap F) \leq P(E)P(F).$$

Proposición 3.10.3. Si $c > 0$ y $p = \frac{c}{n}$,

$$P(K_3 \subset \mathcal{G}(n, p)) \leq 1 - e^{-c^3/6} + o(1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Demostración. Sean A_i los eventos indicadores asociados al i -ésimo triángulo $T_i \subset [n]$. Podemos pensar $A_i \subset \{0,1\}^{\binom{n}{2}}$. Notar que A_i es creciente, por lo tanto A_i^c es decreciente, y que $P(A_i) = p^3$. Sea $m := \binom{n}{3}$. Por el lema de arriba:

$$P(K_3 \not\subset \mathcal{G}(n, p)) = P\left(\bigcap_{i=1}^m A_i^c\right) \geq \prod_{i=1}^m P(A_i^c) = (1 - p^3)^m \longrightarrow e^{-c^3/6} \quad (n \rightarrow \infty)$$

□

3.10.1. Desigualdades de Jason

Sean $T_1, \dots, T_t \subset [N]$ y $p \in (0,1)$, y sea $R \subset [N]$ un conjunto aleatorio tal que $P(x \in R) = p$, $x \in [N]$. Definamos los eventos $A_i = \{T_i \subset R\}$. Notar que A_i es creciente. Escribamos $i \sim j$ si $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ e $i \neq j$. Observar que si $i \not\sim j$ entonces A_i y A_j son independientes entre sí. Escribamos

$$\mu = \sum_i P(A_i) \quad \text{y} \quad \Delta = \sum_{i \sim j} P(A_i \cap A_j).$$

Lema 3.10.4 (Desigualdades de Jason).

$$P\left(\bigcap_{i \in [t]} A_i^c\right) \leq \exp(-\mu + \Delta/2).$$

Además, si $\Delta \geq \mu$, entonces

$$P\left(\bigcap_{i \in [t]} A_i^c\right) \leq \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\Delta}\right).$$

Daremos otra demostración de la Proposición 3.10.3:

Demostración. Tomemos $N = \binom{n}{2}$ y una biyección entre $[N]$ y las aristas de K_n de modo que el conjunto aleatorio R sea mapeado en $\mathcal{G}(n, p)$. Si $\{T_i\}$ son los distintos triángulos en $[n]$, la primera desigualdad de Jason implica que

$$P(K_3 \not\subset \mathcal{G}(n, p)) \leq e^{-\mu + \Delta/2},$$

donde $\mu = p^3 \binom{n}{3} \rightarrow c^3/6$ y $\Delta \leq p^5 n^4 \rightarrow 0$. □

Lema 3.10.5. Si $\varepsilon > 0$ y $m \geq \frac{n}{\log_2^2 n}$, entonces

$$P(\alpha(\mathcal{G}(n, 1/2)) < (2 - \varepsilon) \log_2 n) \leq \exp\left(\frac{-n^2}{\log_2^9 n}\right)$$

para todo n lo suficientemente grande.

Teorema 3.10.6. Con probabilidad alta,

$$\chi(\mathcal{G}(n, 1/2)) = \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) \frac{n}{\log_2 n}$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Demostración. Por un lado, el Corolario 3.5.8 nos da la primera desigualdad:

$$\chi(\mathcal{G}(n, 1/2)) \geq \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) \frac{n}{\log_2 n}.$$

Por otro lado, el lema anterior implica que el número esperado de subconjuntos al menos $\frac{n}{\log_2^2 n}$ vértices en $\mathcal{G}(n, 1/2)$ con al menos $\frac{n}{\log_2^2 n}$ vértices, sin conjuntos independientes de tamaño al menos $(2 - \varepsilon) \log_2 n$, es a lo más

$$2^n \exp\left(\frac{-n^2}{\log_2^9 n}\right) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Consecuentemente, con probabilidad alta, todo subgrafo de $\mathcal{G}(n, 1/2)$ con por lo menos $\frac{n}{\log_2^2 n}$ vértices, contiene un conjunto independiente de tamaño $(2 - \varepsilon) \log_2 n$. Sea $\mathcal{G}(n, 1/2)$ con esta propiedad y entonces podemos hallar de manera golosa conjuntos independientes disjuntos $\{A_i\}_{i=1}^r$ de tamaño $(2 - \varepsilon) \log_2 n$ (hay a lo más $n/(2 - \varepsilon) \log_2 n$ de estos) hasta que

$$\sum_{i=1}^r |A_i| \geq n - \frac{n}{\log_2^2 n},$$

entonces

$$\chi(\mathcal{G}(n, 1/2)) \leq \frac{n}{(2 - \varepsilon) \log_2 n} + \frac{n}{\log_2^2 n} = \left(\frac{1}{2 - \varepsilon} + o(1)\right) \frac{n}{\log_2 n} \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

De donde se sigue la otra desigualdad deseada.

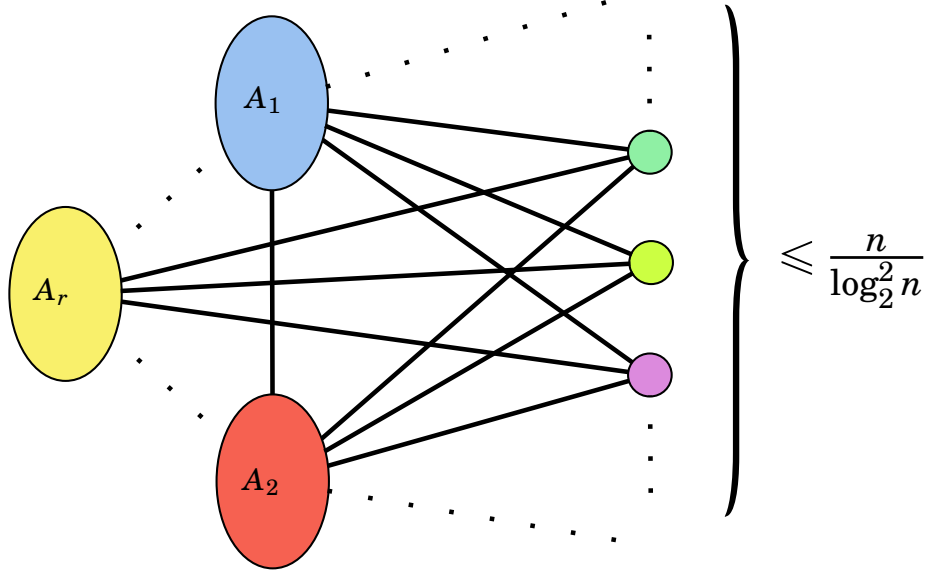


Figura 3.10.4: Coloreamos cada parte A_i ($1 \leq i \leq r \leq \frac{n}{(2-\varepsilon)\log_2 n}$), y el resto de los $\leq \frac{n}{\log_2^2 n}$ vértices de distinto color.

□

3.11. Elección aleatoria dependiente

3.11.1. El número de Ramsey-Turán

Definición 3.11.1. El **número de Ramsey-Turán** de un grafo H (límitado por una función $k(n)$) es la cantidad

$$RT(n, H, k(n)) := \max \{ e(G) \mid G \not\supset H \text{ tiene } n \text{ vértices y } \alpha(G) \leq k(n) \}.$$

Observación 3.11.2.

$$RT(n, K_3, o(n)) = o(n^2).$$

En efecto, la vecindad $N_G(v)$ de un grafo G libre de triángulos es un conjunto independiente, con lo cual $\alpha(G) = o(n)$, y por lo tanto $\Delta(G) = o(n)$. Esto implica que $e(G) = o(n^2)$.

Teorema 3.11.3 (Sudakov (2003)). *Para todo $\varepsilon > 0$,*

$$RT(n, K_4, n^{1-\varepsilon}) = o(n^2) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Demostración. La estrategia será la siguiente: supongamos que podemos encontrar un conjunto $A \subset V(G)$ de vértices de G de tamaño $k = n^{1-\varepsilon}$ de tal suerte que para todo par de vértices $u, v \in A$ hay al menos k vecinos en común. A es un conjunto independiente o contiene una arista uv . Además, la vecindad en común entre u y v tiene tamaño al menos k , o es un conjunto independiente o conteniendo una arista xy . De esta manera, si $\alpha(G) < k$, se seguirá que G contiene un K_4 , por ejemplo el grafo inducido por los vértices u, v, x, y .

G

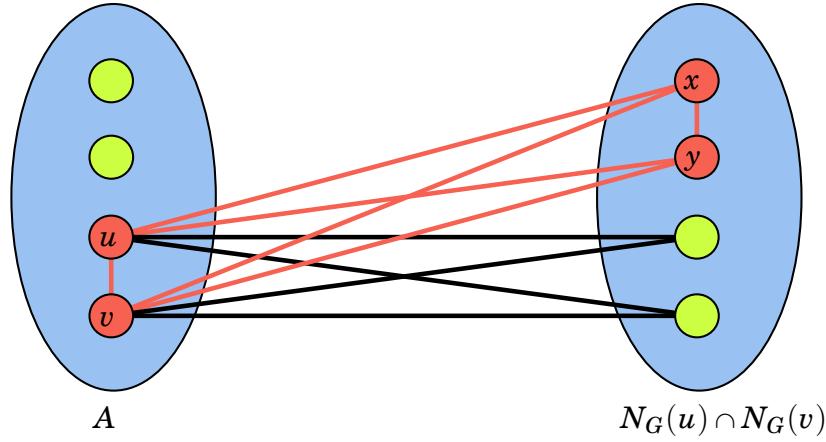


Figura 3.11.5: Ilustración de la estrategia.

El siguiente lema nos permite encontrar dicho conjunto A en cualquier grafo con densidad positiva:

Lema 3.11.4 (Lema de elección aleatoria dependiente¹). Sea G un grafo con n vértices, y sean $r, s \in \mathbb{N}$. Si existe $t \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{2^t e(G)^t}{n^{2t-1}} - \binom{n}{s} \left(\frac{r}{n}\right)^t \geq a,$$

entonces existe un subconjunto $A \subset V(G)$ tal que:

- (I) $|A| \geq a$.
- (II) Todo conjunto con s vértices de A tiene al menos r vecinos en común.

Ahora, tomemos $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño. Basta probar que todo grafo G con n vértices tal que

$$e(G) \geq \varepsilon n^2 \quad \text{y} \quad \alpha(G) \leq k = k(n) := n^{1-\varepsilon}$$

contiene una copia de K_4 . Para eso, utilizamos el Lema de elección aleatoria dependiente 3.11.4 con $s = 2$ y $a = r = k$ para encontrar un conjunto $A \subset V(G)$ de tamaño k tal que para todo par de vértices en A hay por lo menos k vecinos en común. Para eso, debemos probar que

$$\frac{2^t e(G)^t}{n^{2t-1}} - \binom{n}{2} \left(\frac{k}{n}\right)^t \geq k$$

para algún $t \in \mathbb{N}$. Como $e(G) \geq \varepsilon n^2$ y $k = n^{1-\varepsilon}$, esto se deduce de la desigualdad

$$(2\varepsilon)^t n - n^{2-\varepsilon t} \geq n^{1-\varepsilon},$$

que es verdadera si $t \geq 2/\varepsilon$ y n es lo suficientemente grande.

¹Para una demostración, ver el Lema 10.3.3 de [BCM⁺22]

Consecuentemente, el lema nos dice que existe un subconjunto de vértices A con $|A| \geq k$, tal que para todo par de vértices de A hay al menos k vecinos en común. Como $\alpha(G) \leq k$, debe existir una arista $uv \in E(G)$ en A , y como u y v tienen al menos k vecinos en común, su vecindad en común contiene una arista xy . De esta manera los vértices u, v, x, y inducen un K_4 en G , como queríamos. \square

Teorema 3.11.5. Sea $k(n) \gg \sqrt{n \log n}$, entonces

$$RT(n, K_5, k(n)) \geq \frac{n^2}{4},$$

y si $k(n) \ll \sqrt{n \log n}$, entonces

$$RT(n, K_5, k(n)) = o(n^2).$$

Demostración. Para la primera afirmación, requerimos enunciar el siguiente teorema de [BCM⁺22, Teorema 9.2.8]:

$$\left(\frac{1}{4} + o(1)\right) \frac{k^2}{\log k} \leq R(3, k) \leq (1 + o(1)) \frac{k^2}{\log k} \quad (k \rightarrow \infty).$$

De la primera desigualdad se sigue que para n lo suficientemente grande, existe un grafo libre de triángulos H con $n/2$ vértices y $\alpha(H) = O(\sqrt{n \log n})$. Ahora, para construir un grafo G con n vértices, simplemente tomamos dos copias de H y agregamos todas las $n^2/4$ aristas entre ellas. Como H es K_3 -libre, se sigue que G es libre de K_5 como queríamos.

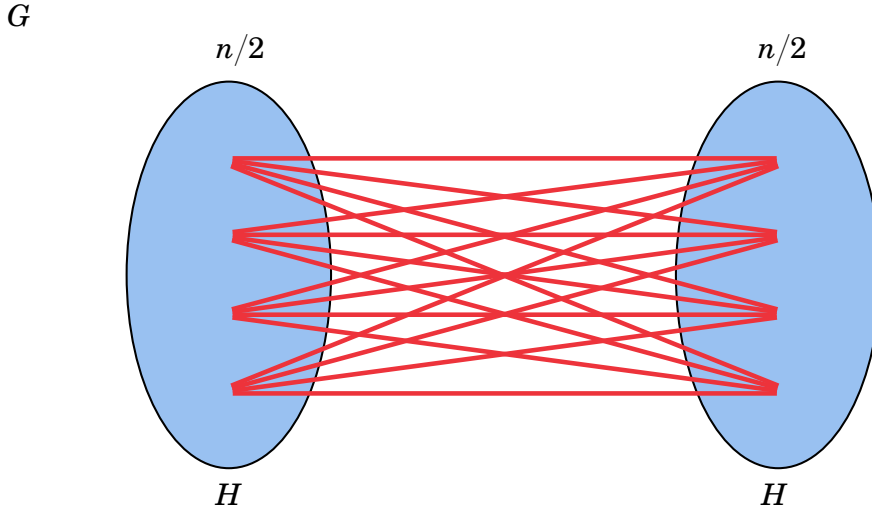


Figura 3.11.6: Grafo G formado a partir de la unión de dos copias de H unidas por todas las $n^2/4$ aristas entre ellas.

Para la segunda afirmación, sea $\varepsilon > 0$ y supongamos que G es un grafo con

$$e(G) \geq \varepsilon n^2 \quad \text{y} \quad \alpha(G) \leq k := k(n).$$

Para ver que G contiene una copia de K_5 , vamos primero a usar el Lema de elección aleatoria dependiente 3.11.4 con $s = 3$, $a = R(3, k)$ y $r = k$ para encontrar un conjunto $A \subset V(G)$ de tamaño $R(3, k)$ tal que para toda terna de vértices en A haya al menos k vecinos en común. Para esto, debemos probar previamente que

$$\frac{2^t e(G)^t}{n^{2t-1}} - \binom{n}{3} \left(\frac{k}{n}\right)^t \geq R(3, k)$$

para algún $t \in \mathbb{N}$. Como $e(G) \geq \varepsilon n^2$, $k \ll \sqrt{n \log n}$, y $R(3, k) = O(k^2 / \log k) \ll n$ por la segunda desigualdad del principio, basta ver que

$$(2\varepsilon)^t n - n^{3-t/2} (\log n)^{t/2} \geq R(3, k),$$

lo cual es cierto para $t = 6$ y n lo suficientemente grande.

Así, el lema nos provee de un conjunto de vértices A de G con $|A| \geq R(3, k)$, tal que para toda terna de vértices de A , hay al menos k vecinos en común. Como $\alpha(G) \leq k$, se sigue que existe un triángulo uvw en A , y como u, v, w tienen al menos k vecinos en común, su vecindad contiene una arista xy . Por lo tanto, los vértices u, v, w, x, y forman un K_5 en G , como queríamos.

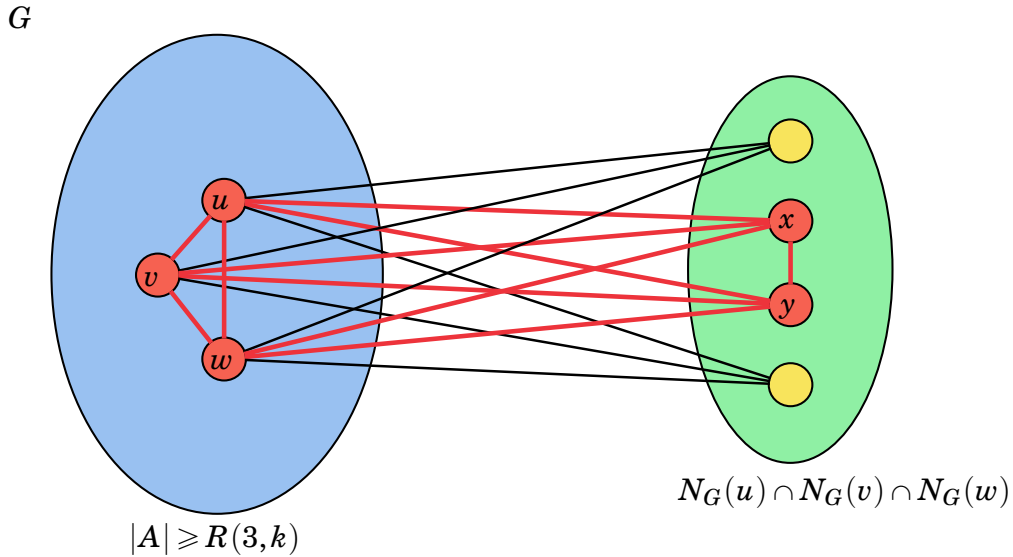


Figura 3.11.7: Ilustración del conjunto A en G con $|A| \geq R(3, k)$, el cual contiene un triángulo u, v, w con un vecindario en común conteniendo la aristas xy .

□

3.11.2. Número extremal de grafos bipartitos

Teorema 3.11.6. Sea H un grafo bipartito con partes A y B , y supongamos que cada vértice de B tiene grado máximo s . Entonces

$$\text{ex}(n, H) = O(n^{2-1/s}),$$

donde la constante implícita depende solamente de H .

Observación 3.11.7. Tomando $H = K_{s,t}$ recuperamos el Teorema 1.2.5.

Para poder probar este teorema necesitamos un lema previo:

Lema 3.11.8. Sea H un grafo bipartito con partes A y B , tal que cada vértice de B tiene a lo más grado s . Sea G un grafo tal que existe $U \subset V(G)$ de tal suerte que:

(I) $|U| = |A|$.

(II) Todos los subconjuntos de U de tamaño s tienen al menos $v(H)$ vecinos en común.

Entonces $H \subset G$.

Demostración. Usando la propiedad (i) del conjunto U , podemos biyectar los vértices de A con los de U . Vamos a mapear los vértices de B de manera golosa, tomemos $B = \{v_1, \dots, v_t\}$ y supongamos que ya hemos mapeado los vértices v_1, \dots, v_{i-1} para algún $1 \leq i \leq t$ en G . Consideremos la vecindad $N_H(v_i)$, sea S_i el conjunto de vértices correspondiente de U , observemos que $|S_i| \leq s$, pues los elementos de B tienen grado a lo más s .

Ahora, por la propiedad (ii) del conjunto U , se sigue que los vértices de S_i tienen al menos $v(H)$ vecinos en común en G . Para mapear v_i , simplemente elegimos cualquier elemento de esta vecindad en común que no haya sido utilizado. Notar que existe una posible elección, pues hemos mapeado hasta el momento menos de $v(H)$ vértices. Esto finaliza la demostración del lema.

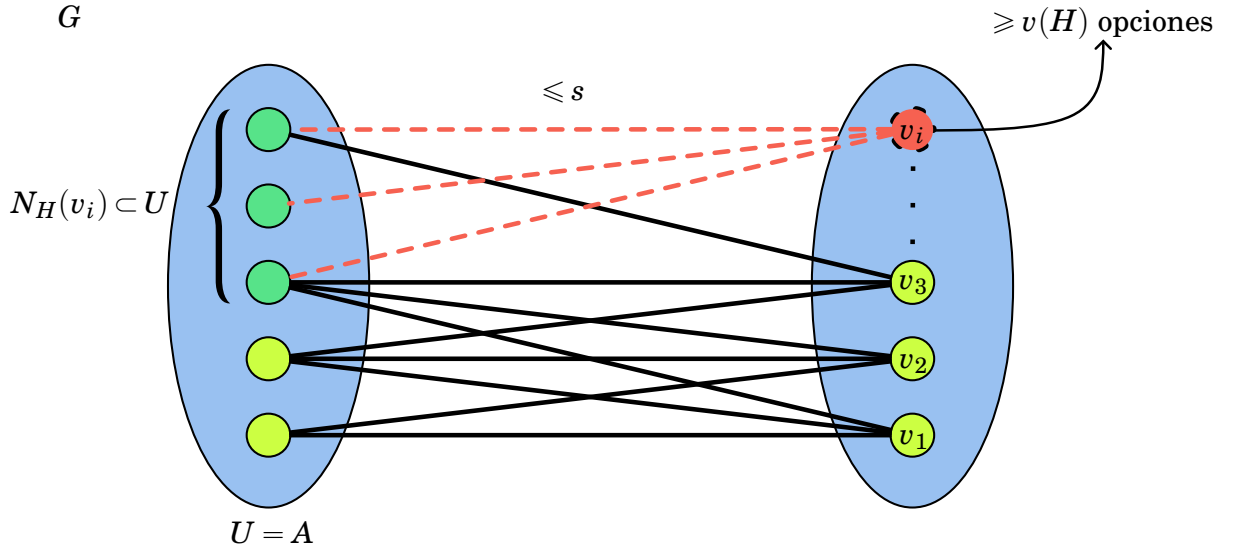


Figura 3.11.8: Ilustración del algoritmo glotón que permite incrustar H en G . Notar que en el i -ésimo paso hay que buscar un vecino en común de $N_H(v_i) \subset U$ en G , que no se haya elegido antes, para poder incrustar a v_i . Esto se puede hacer pues hay $\geq v(H)$ opciones.

□

Demostración del teorema. Ahora, sea G un grafo con n vértices tal que $e(G) \geq Cn^{2-1/s}$ para una constante $C > 0$. Para probar que G contiene una copia de H , primero utilizaremos el Lema de elección aleatoria dependiente 3.11.4 con $s = s$, $a = |A|$ y $r = v(H)$, para encontrar un conjunto $U \subset V(G)$ de tamaño $|A|$ tal que

todo subconjunto $S \subset U$ de tamaño s tiene al menos $v(H)$ vecinos en común. Previamente, debemos verificar que

$$\frac{2^t e(G)^t}{n^{2t-1}} - \binom{n}{s} \left(\frac{v(H)}{n} \right)^t \geq |A|$$

para algún $t \in \mathbb{N}$. Como $e(G) \geq Cn^{2-1/s}$ y $|A| \leq v(H)$, se sigue que

$$(2C)^t n^{1-t/s} - v(H)^t n^{s-t} \geq v(H),$$

que vale para $t = s$ si $C = C(H)$ es lo suficientemente grande. Luego se sigue que existe $U \subset V(G)$ con $|U| \geq |A|$ tal que todos los subconjuntos de U de tamaño s tienen al menos $v(H)$ vecinos en común. Pero la conclusión del lema de arriba 3.11.8 nos indica que $H \subset G$, como queríamos. \square

3.11.3. El número de Ramsey de un hipercubo

Utilizando el Lema de elección aleatoria dependiente 3.11.4 estudiaremos el número de Ramsey $r(Q_k)$ del grafo *hipercubo k -dimensional* Q_k , que más precisamente se define como:

Definición 3.11.9. Para cada $k \in \mathbb{N}$, el **hipercubo k -dimensional** Q_k es el grafo con conjunto de vértices $\{0, 1\}^k$ y conjunto de aristas

$$E(Q_k) := \{xy \mid \#\{i \in [k] : x_i \neq y_i\} = 1\}.$$

Observación 3.11.10. Notemos que Q_k es un grafo bipartito k -regular con ambas partes de tamaño 2^{k-1} .

Teorema 3.11.11 (Shi (2001)).

$$r(Q_k) \leq 2^{3k}.$$

Demostración. Sea $n := 2^{3k}$, y sea c una 2-coloración de las aristas de K_n de color rojo-azul. Supongamos sin pérdida de generalidad que al menos la mitad de las aristas son rojas. Sea G el grafo inducido por las aristas rojas. Afirmamos que $Q_k \subset G$.

En efecto, para probar que G contiene una copia de Q_k , vamos a primero usar el Lema de elección aleatoria dependiente 3.11.4 con $s = k$, $a = 2^{k-1}$ y $r = 2^k$, para encontrar un conjunto $U \subset V(G)$ de tamaño 2^{k-1} de tal suerte que todo subconjunto $S \subset U$ de tamaño k tiene al menos 2^k vecinos en común. Para esto, hay que verificar que

$$\frac{2^t e(G)^t}{n^{2t-1}} - \binom{n}{k} \left(\frac{2^k}{n} \right)^t \geq 2^{k-1}$$

para algún $t \in \mathbb{N}$. Como $e(G) \geq \binom{n}{2}/2 = n^2(1 - \frac{1}{n})/4$ y $n = 2^{3k}$, basta ver que

$$2^{3k-t} \left(1 - \frac{1}{2^{3k}}\right)^t - 2^{3k^2-2kt} \geq 2^{k-1},$$

lo cual vale para todo $3k/2 \leq t \leq 2k$ si $k \geq 2$ (el caso $k = 1$ es trivial). En efecto, basta ver que

$$2^k \left(1 - \frac{1}{2^{3k}}\right)^{2k} - 1 \geq 2^{k-1}.$$

Esto se puede probar por inducción en $k \geq 2$. El caso base vale; en general, por hipótesis inductiva tenemos que

$$\begin{aligned} 2^{k+1} \left(1 - \frac{1}{2^{3k+3}}\right)^{2k+2} &\geq 2 \left(1 - \frac{1}{2^{3k+3}}\right)^2 (2^{k-1} + 1) \\ &= 2^k + 2 - \frac{2^{k-1} + 1}{2^{3k}} + \frac{2^{k-1} + 1}{2^{6k+1}}, \end{aligned}$$

esto último es mayor o igual a $2^k + 1$ si es que probamos que

$$2^{6k+3} + 2^{k-1} + 1 \geq 2^{4k+2} + 2^{3k+3}.$$

Pero esto es claramente cierto para $k \geq 2$.

Así, el lema implica que existe un conjunto $U \subset V(G)$ con $|U| \geq 2^{k-1}$ tal que para todo subconjunto de tamaño k hay al menos 2^k vecinos en común. Pero el Lema 3.11.8 junto con la observación que hicimos antes del teorema, implican que $Q_k \subset G$, como queríamos ver. \square

Observación 3.11.12. Hemos probado un resultado de extremalidad: existe una copia de Q_k en todo grafo con al menos 2^{3k} vértices y al menos $n^2/4$ aristas (donde $n := 2^{3k}$). Es decir,

$$\text{ex}(2^{3k}, Q_k) < n^2/4 = 4^{3k-1}.$$

Comentario 3.11.13. Una mejor cota es de la forma $O(k2^{2k})$, probada por Conlon (2009), también por Fox y Sudakov (2009).

Bibliografía

- [BCM⁺22] Fábio Happ Botler, Maurício Collares, Taísa Martins, Walner Mendonça, and Guilherme Oliveira Mota. *Combinatória*. 2022.
- [Die00] Reinhard Diestel. *Graph theory*, 2000.
- [Rob55] Herbert Robbins. A remark on stirling’s formula. *The American Mathematical Monthly*, 62(1):26–29, 1955.