

Apuntes - Tópicos en matemática discreta

Enzo Giannotta

29 de septiembre de 2023

Índice general

1. Teoría extremal de grafos	2
1.1. Teoría extremal de grafos	2
1.2. Números extremales en grafos bipartitos	6
1.3. Números extremales para árboles	9
1.4. Estabilidad y supersaturación	11
1.5. Teorema de Erdős-Stone	14
1.6. Ejercicios	19
1.7. Regularidad	22

Capítulo 1

Teoría extremal de grafos

En este curso trabajaremos con grafos simples, usualmente denotados: $G = (V, E)$.

1.1. Teoría extremal de grafos

¿Cuál es la máxima cantidad de aristas que puede tener un grafo de n vértices sin que aparezca una cierta estructura?

¿Cómo lucen estos grafos maximales?

Ejemplo 1.1.1. 1. Cuando la estructura es un ciclo, la cantidad de aristas es $n - 1$ y los grafos maximales son los árboles.

2. Cuando la estructura es un ciclo impar. ¿Cómo lucen los grafos sin ciclos impares y que tienen una cantidad máxima de aristas? Son los completos balanceados $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. En efecto, para que un grafo bipartito con n vértices tenga una cantidad máxima de aristas, tiene dos partes $|X|, |Y|$ con $|X| + |Y| = n$ y si maximiza la cantidad de aristas es un grafo $K_{|X|, |Y|}$. Es decir, tiene $|X| \cdot |Y|$ aristas y si maximizamos, hay que maximizar la función $f(y) = (n - y)y$ con $1 \leq y \leq n - 1$ e y entero; esto sucede si $y = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ o $y = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Definición 1.1.2. Sean G y H dos grafos. Decimos que G es **H-libre** (o **libre de H**) si $H \not\subseteq G$. El **número extremal** de H es la cantidad

$$\text{ex}(n, H) = \max\{e(G) \mid G \text{ es un grafo de } n \text{ vértices } H\text{-libre}\},$$

donde $e(G)$ siempre denotará el número de aristas de G .

Si G es H -libre y $|G| = \text{ex}(n, H)$, decimos que G es **extremal** respecto de n y H .

Teorema 1.1.3 (Mantel, 1907). Sea $n \in \mathbb{N}$, G un grafo K_3 -libre con n vértices. Entonces, $e(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Además, $e(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \Leftrightarrow G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ ¹.

Demostración. Por inducción en n . Los casos $n = 1, n = 2$ son un vértice, un 1-camino respectivamente. Luego vale para $n = 1, 2$. Ahora, supongamos que $n \geq 3$. Sea G un grafo K_3 -libre con n vértices, y $uv \in E(G)$ (si G no tuviera aristas, podríamos agregar una arista y seguiría siendo K_3 -libre); consideremos $G' = G \setminus \{u, v\}$.

¹Cuando $n = 1, 2$ tenemos que G es el completo K_n

Tenemos que G' también es K_3 -libre y tiene $n - 2$ vértices. Por inducción, G' satisface

$$e(G') \leq \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor.$$

Más aún, como G es K_3 -libre, no existen vértices $w \in G'$ tal que sea adyacente a u y v al mismo tiempo. Luego existen a lo más $n - 2$ aristas en $E(G) \setminus E(G')$ sin contar la arista uv . Es decir,

$$e(G) \leq e(G') + n - 1 \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$



Figura 1.1.1: Ilustración

Para la segunda parte, $e(G) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \Leftrightarrow G = K_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$. Es claro que si $G = K_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$ luego $e(G) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Veamos la recíproca. Sea G con n vértices y cantidad máxima de aristas tal que es K_3 -libre. Los casos $n = 1, 2$ son triviales, luego podemos suponer que $|G| \geq 3$. Como G es K_3 -libre, existen una aristas $uv \in E(G)$ por maximalidad. Por inducción, $G' := G \setminus \{u, v\}$ es un $K_{\left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor}$, digamos con partición $X', Y' \subset V(G')$ de sus vértices. Como G es K_3 -libre, ni u ni v pueden tener vecinos en G' que estén en ambas particiones X', Y' , además, no puede haber una partición que no tenga a u y v como vecinos en G pues podríamos agregar aristas entre vértices de esa particiones: contradiciendo maximalidad. Sin pérdida de generalidad, los vecinos de u en G' están en X y los de v en Y . Más aún, por maximalidad, todos los vértices de X son vecinos con u y todos los de Y con v . Así, G es un X, Y bigrafo tomando $X := X' \cup \{v\}$ e $Y := Y' \cup \{u\}$. Notar que esto prueba que G es un $K_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$. □

Definición 1.1.4. El **grafo de Turán** $T_k(n)$ es el grafo k -partito completo con la mayor cantidad de aristas, es decir, los cardinales de las particiones difieren a lo más en 1 entre sí (por maximalidad). Notamos

$$t_k(n) := e(T_k(n)).$$

Observación 1.1.5. Podemos calcular $t_k(n)$. Sea $\alpha \in \mathbb{N}$ el cardinal más grande de una partición de $T_k(n)$. Entonces las demás particiones tienen cardinal α o $\alpha - 1$. Sea r la cantidad de particiones con cardinal $\alpha - 1$ y $k - r$ de cardinal α . Tenemos que sumando los cardinales de todas las particiones:

$$\alpha k - r = n.$$

Como $0 \leq r < k$, r es el resto de la división de n por k y α es el cociente. Despejando obtenemos que $\alpha = \frac{n+r}{k}$ es decir, $\alpha = \lceil \frac{n}{k} \rceil$. En particular $\alpha - 1 = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$. Juntado todo, tenemos que la cantidad total de aristas es:

$$\alpha^2 \binom{k-r}{2} + \alpha(\alpha-1)(k-r)r + (\alpha-1)^2 \binom{r}{2},$$

i.e.,

$$t_k(n) = \lceil \frac{n}{k} \rceil^2 \binom{k-r}{2} + \lceil \frac{n}{k} \rceil \lfloor \frac{n}{k} \rfloor (k-r)r + \lfloor \frac{n}{k} \rfloor^2 \binom{r}{2}.$$

Teorema 1.1.6 (Turán, 1941). Sean $n, k \in \mathbb{N}$, G un grafo K_{k+1} -libre con n vértice. Entonces

$$e(G) \leq t_k(n).$$

Además, $e(G) = t_k(n) \Leftrightarrow G = T_k(n)$ ².

Demostración. Hagamos inducción en n . Para $n \leq k$ es trivial. Sea ahora G con $n \geq k+1$ que a su vez es K_{k+1} -libre y arista maximal. Esto implica que agregar cualquier arista hace aparecer un K_{k+1} como subgrafo. Entonces G contiene un K_k . Sea A el conjunto de vértices de un subgrafo K_k en G . Consideremos luego $G' = G \setminus A$. El grafo G' es K_{k+1} -libre y tiene $n - k$ vértices. Cada $x \in V(G')$ tiene a lo más $k-1$ vecinos en A dentro del grafo G , pues G es K_{k+1} -libre. Luego por hipótesis inductiva:

$$e(G') \leq t_k(n-k).$$

Si juntamos esto con la hipótesis inductiva, tenemos que

$$e(G) \leq e(G') + (n-k)(k-1) + \binom{k}{2} \leq t_k(n-k) + (n-k) \cdot (k-1) + \binom{k}{2} = t_k(n),$$

donde el segundo término es la cantidad de aristas entre A y $V(G')$.

Veamos ahora la segunda afirmación. Por definición, $G = T_k(n)$ tiene $t_k(n)$ aristas. Recíprocamente, supongamos que G con n vértices y cantidad máxima de aristas $e(G)$ tal que es K_{k+1} -libre. Los casos $n \leq k$ son triviales, luego supongamos que $n \geq k+1$. Por maximalidad, G contiene un K_k como subgrafo; llamemos A a su conjunto de vértices en G y consideremos $G' := G \setminus A$. Notar que

$$e(G') \geq e(G) - \left((n-k)(k-1) + \binom{k}{2} \right) = t_k(n) - (n-k)(k-1) - \binom{k}{2} = t_k(n-k),$$

pues cada vértice de G' tiene a lo más $k-1$ vecinos en A . Como G' es K_{k+1} -libre, en realidad vale la igualdad: $e(G') = t_k(n-k)$, por la primera parte que ya demostramos. Llamemos X_1, X_2, \dots, X_k a las particiones de G' . Como vale la igualdad arriba, tenemos que cada vértice de G' tiene exactamente $k-1$ vecinos en A . Para cada $x' \in G'$ llamemos $\alpha(x')$ al único vértice de A que no es adyacente a x' en G . Más formalmente, $\alpha : V(G') \rightarrow A$ es una función; afirmamos que:

²Cuando $n = 1, 2, \dots, k-1$ tenemos que G es el completo K_n

(I) α es sobreyectiva.

(II) Si $x'_i \in X_i$ y $x'_j \in X_j$ para $i \neq j$, entonces $\alpha(x'_i) \neq \alpha(x'_j)$.

Antes de probar la afirmación, notemos que esta prueba que $\alpha|_{X_i}$ es constante para cada $i = 1, \dots, k$ (y por lo tanto tiene sentido el abuso de notación $\alpha(X_i)$ para denotar al único vértice de A que no es adyacente a ningún vértice $x' \in X_i$). Veamos entonces la afirmación:

(I) Supongamos que α no es sobreyectiva: existe un $a_0 \in A$ tal que para todo $i = 1, \dots, k$ existe $x'_i \in X_i$ adyacente a a_0 en G . Pero esto implica entonces que los vértices x'_1, \dots, x'_k, a_0 forman un K_{k+1} en G , absurdo.

(II) En efecto, si $\alpha(x'_i) = a_0 = \alpha(x'_j)$, entonces x_i, x_j y los vértices de $A \setminus \{a_0\}$ juntos forman un K_{k+1} en G , absurdo.

Así, podemos extender la partición de G' a todo G : definimos $\tilde{X}_i := X_i \cup \{\alpha(X_i)\}$. Es claro que de esta manera G es un grafo k -partito completo. Como G es maximal en su cantidad de aristas, entonces $G = T_k(n)$. \square

Teorema 1.1.7 (Erdős - segunda demostración del teorema). Sean $n, k \in \mathbb{N}$ y G un grafo K_{k+1} -libre con n vértices. Entonces existe un grafo H que es k -partito con $V(H) = V(G)$ tal que:

$$d_H(v) \geq d_G(v), \quad \forall v \in V(G).$$

Erdős. Haremos inducción en k . Para $k = 1$ no hay que hacer nada. Sea ahora $k \geq 2$. Sea $v \in V(G)$ con $d_G(v) = \Delta(G)$. La vecindad de v , $G' := G[N_G(v)]$ debe ser K_k -libre. Sea $A := G \setminus N_G(v)$. Notar que

$$d_G(u) \leq d_{G'}(u) + |A|.$$

Por hipótesis inductiva existe un grafo H' que es $(k-1)$ -partito con $V(H') = V(G')$ y

$$d_{H'}(u) \geq d_{G'}(u), \quad \forall u \in V(G').$$

Sea H el grafo obtenido a partir de H' añadiendo los vértices de A y conectando todos los vértices entre A y $V(H')$. Observar que H es $k+1$ -partito y como v tiene grado máximo en G , tenemos que para cada $u \in A$:

$$d_G(u) \leq d_G(v) = |V(H')| = d_H(u)$$

y para $u \in V(H')$ sabemos que:

$$d_G(u) \leq d_{G'}(u) + |A| \underset{H.I.}{\leq} d_{H'}(u) + |A| = d_H(u).$$

\square

Ejercicio 1.1.8. A partir de la demostración deducir que el grafo K_{k+1} -extremal es $T_k(n)$ y es único.

Solución. Sea G un grafo K_{k+1} -extremal y H el grafo r -partito obtenido por el Teorema anterior. Así, $V(H) = V(G)$ y $d_H(v) \geq d_G(v)$ para todo vértice v . Esta desigualdad implica que

$$e(H) \geq e(G),$$

y por lo tanto, H también es K_{r+1} -extremal. Pero por definición, $t_k(n) \geq e(H)$. Pero ya vimos que los grafos K_{r+1} extremales tienen $\geq t_k(n)$ aristas. Con lo cual, en realidad $e(G) = e(H)$ y más aún, $d_H(v) = d_G(v)$ para todo v .

Esto nos indica que inspeccionando la demostración más detalladamanete, se tiene que G' es un $T_{k-1}(\Delta)$ (con $\Delta := \delta(G)$) y que G es luego $T_k(n)$. \square

Observación 1.1.9. Sea H un grafo con $\chi(H) \geq 3$, es decir no bipartito, entonces

$$\text{ex}(n, H) = \Theta(n^2).$$

Demostración. En primer lugar, si G es un grafo que contiene a H , luego no puede ser bipartito. En particular, si $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, entonces es H -libre al ser bipartito; de hecho tiene n vértices y $e(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Consecuentemente

$$(n-1)^2/4 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \text{ex}(n, H).$$

Por otro lado, la cantidad de aristas maxima de G es $\binom{n}{2}$ (en general para cualquier grafo con n vértices) y por lo tanto $\text{ex}(n, H) = \Theta(n^2)$. \square

1.2. Números extremales en grafos bipartitos

Recuerdo 1.2.1 (Desigualdad de Jensen). *Vamos a usar la desigualdad de Jensen: si φ es una función convexa entonces:*

$$\varphi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(\varphi(X)).$$

Ejercicio 1.2.2. Probar las siguientes dos desigualdades elementales para el binomio de Newton:

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \stackrel{\text{Cota 1}}{\leq} \binom{n}{k} \stackrel{\text{Cota 2}}{\leq} \left(\frac{n \cdot e}{k}\right)^k.$$

Solución.

Cota 1: Notar que

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdots \frac{n-k+1}{1} \geq \left(\frac{n}{k}\right)^k,$$

pues $\frac{n}{k} \leq \frac{n-j}{k-j}$ para todo $j = 0, \dots, k$.

Cota 2: Notar que se tiene una mejor cota:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \leq \frac{n^k}{k!}.$$

Por lo tanto, como $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, se sigue que $e^k \geq \frac{k^k}{k!}$, y luego

$$\frac{n^k}{k!} \leq \frac{n^k e^k}{k^k},$$

como queríamos. \square

Teorema 1.2.3 (Erdős, 1938). *Para todo $n \in \mathbb{N}$*

$$\text{ex}(n, C_4) \leq n^{\frac{3}{2}}.$$

Definición 1.2.4. Una **cereza** es un 2-camino $x_0x_1x_2$. Llamaremos a x_1 el **centro** y a x_0, x_2 las **hojas**.



Figura 1.2.2: Dibujo de cereza.

Demostración. Sea G un grafo C_4 -libre con n vértices. Contaremos cereza en G para acotar el número de aristas $e(G)$.

Para cada vértice $v \in V(G)$ hay exactamente

$$\binom{d_G(v)}{2} \text{ cerezas con centro en } v.$$

Por lo tanto, en G hay

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{2} \text{ cerezas en } G.$$

Por la desigualdad de Jensen la sumatoria se minimiza cuando todos los grados son iguales:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{2} &\geq n \cdot \binom{2e(G)/n}{2} \\ &\stackrel{\text{Cota 1}}{\geq} n \cdot \left(\frac{e(G)}{n} \right)^2 = \frac{e(G)^2}{n}. \end{aligned}$$

Por otro lado, dado un par $\{u, v\}$ de hojas de cerezas distintas, entonces tendríamos un subgrafo C_4 en G , absurdo; por lo tanto hay a lo más

$$\binom{n}{2} \text{ cerezas en } G.$$

Juntando todo:

$$\frac{e(G)^2}{n} \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

consecuentemente $e(G)^2 \leq n^3$, i.e., $e(G) \leq n^{\frac{3}{2}}$. \square

Teorema 1.2.5 (Kövari, Sós, Turán). Sean $s, t \in \mathbb{N}$, $s \leq t$. Entonces existe una constante $c = c(s, t) > 0$ tal que

$$\text{ex}(n, K_{s,t}) \leq c \cdot n^{2 - \frac{1}{s}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definición 1.2.6. Una s -cereza es un $K_{1,s}$. Similarmente tenemos la noción de **centro** y **hojas** (las cuales son s).



Figura 1.2.3: Dibujo de s -cereza.

Demostración. Sea G un grafo $K_{s,t}$ -libre en n vértices. Para cada $v \in V(G)$ hay $\binom{d_G(v)}{s}$ s -cerezas. Por lo tanto en G hay

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{s} \quad s\text{-cerezas},$$

con lo cual

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{s} \stackrel{\text{Cota 1}}{\geq} \sum_{v \in V(G)} \frac{d_G(v)^s}{s^s} \stackrel{\text{Jensen}}{\geq} \frac{n}{s^s} \left(\frac{2e(G)}{n} \right)^s.$$

Procediendo de manera análoga a la demostración del teorema anterior, tenemos que un conjunto de s vértices del grafo puede ser conjunto de hojas de a lo más $(t-1)$ cerezas, pues de lo contrario habría una copia de $K_{s,t}$. Por lo tanto, hay en total a lo más

$$(t-1) \cdot \binom{n}{s} \quad s\text{-cerezas}.$$

Juntando todo:

$$n \left(\frac{2e(G)}{sn} \right)^s \leq (t-1) \cdot \binom{n}{s} \stackrel{\text{Cota 2}}{\leq} (t-1) \cdot \left(\frac{ne}{s} \right)^s,$$

luego

$$\frac{2e(G)}{sn} \leq \frac{(t-1)^{\frac{1}{s}}}{n^{\frac{1}{s}}} \cdot \frac{ne}{s},$$

equivalentemente,

$$e(G) \leq \frac{(t-1)^{\frac{1}{s}} se}{2s} \cdot n^{2-\frac{1}{s}} = c(s, t) \cdot n^{2-\frac{1}{s}}.$$

□

Ejercicio 1.2.7. Demostrar que

$$\text{ex}(n, H) = o(n^2) \iff H \text{ es bipartito.}$$

Solución. Como H es bipartito, existen $s, t \in \mathbb{N}$, digamos $s \leq t$, tales $H \subset K_{s,t}$. Así, por el Teorema de 1.2.5,

$$\text{ex}(n, H) \leq c(s, t) \cdot n^{2-\frac{1}{s}},$$

pues si G no contiene a H , tampoco contiene a $K_{s,t}$. Así, obtenemos que $\text{ex}(n, H) = o(n^2)$.

Recíprocamente, supongamos que H no es bipartito, luego por la Observación 1.1.9, $\text{ex}(n, H) = \Theta(n^2)$. Con lo cual, si $\text{ex}(n, H) = o(n^2)$, necesariamente H es bipartito. □

1.3. Números extremales para árboles

Teorema 1.3.1. Sean $n, k \in \mathbb{N}$ y T un árbol con $k+1$ vértices. Entonces,

$$\text{ex}(n, T) \leq (k-1) \cdot n.$$

Lema 1.3.2. Sean $k \in \mathbb{N}$ y T un árbol con $k+1$ vértices. Entonces si G es un grafo con $\delta(G) \geq k$, luego contiene a T como subgrafo.

Demostración. Haremos inducción en k . Para $k=1$ es claro, pues existe un vértice con al menos un vecino. En general, supongamos que $k \geq 2$. Sea h una hoja de T y consideremos el árbol $T' = T \setminus \{h\}$. Por hipótesis inductiva, $T' \subset G$. Sea p el único vecino de h en T , i.e. $p \in T'$. Como T tiene $k+1$ vértices, p tiene a lo más $k-1$ vecinos en T' , luego p tiene un vecino en G que no está en T' pues $\delta_G(p) \geq k$. Entonces podemos incrustar T en G considerando h como este vértice. □

Lema 1.3.3. Todo grafo G contiene un subgrafo H con $\delta(H) \geq \frac{e(G)}{n}$, donde $n = |G|$.

Demostración. Ver Diestel. □

Demostración del teorema. Sea G un grafo con $\geq (k-1) \cdot n + 1$ aristas que no contiene a T . Por el segundo lema, G contiene H con

$$\delta(H) \geq \frac{e(G)}{n} > \frac{(k-1)n}{n},$$

y por el primer lema ganamos. □

Conjetura 1.3.4 (Erdős, Sós, 1963). *Se conjetura que en el teorema anterior se tiene una mejor cota:*

$$\text{ex}(n, T) \leq \frac{1}{2}(k-1)n.$$

Notar que de ser verdadera la conjetura, entonces esta cota es tight cuando n es un múltiplo de k : Sea G el grafo obtenido al unir $\frac{n}{k}$ copias de K_k , así $e(G) = \frac{n}{k} \binom{k}{2} = \frac{n}{2}(k-1)$.

Esta conjetura es verdadera en el caso T un camino:

Teorema 1.3.5 (Erdős & Gallai, 1959). *Sean $n, k \in \mathbb{N}$. Entonces,*

$$\text{ex}(n, P_k) \leq \frac{(k-1) \cdot n}{2}$$

Ejercicio 1.3.6. A partir de la demostración de este teorema, obtenga que los grafos extremales son únicos.

Lema 1.3.7. *Todo grafo conexo G con n vértices contiene un camino de largo*

$$k := \min\{2\delta(G), n-1\}.$$

Demostración. Tomemos $P := v_0, \dots, v_l$ camino de largo máximo. Sabemos que $N_G(v_0), N_G(v_l) \subset V(P)$ por maximalidad de P . Si $V(P) = V(G)$ ganamos. Así que supongamos que no; supongamos también que $l < k \leq 2\delta(G)$. Demostraremos que existe un ciclo de longitud l contenido en $G[V(P)]$, así llegaremos a una contradicción pues al existir un vértice x fuera de $G[V(P)]$ en G , podríamos extender el ciclo a un camino de longitud al menos $k+1$ en G conectándolo con x .

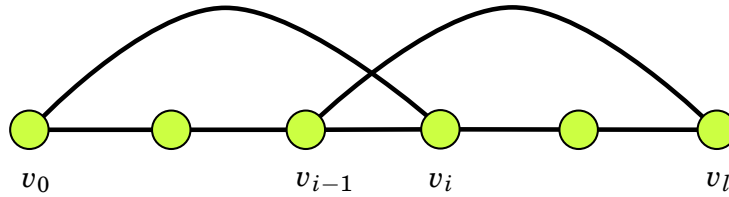


Figura 1.3.4: Notar que en este caso $v_0 P v_{i-1} v_l P v_i v_0$ es un ciclo de longitud $|P|$ en $G[V(P)]$.

En efecto, supongamos que no existe tal ciclo, luego para cada $i \in \{1, \dots, l-1\}$ se tiene que $v_{i-1}v_l \notin E(G)$ o $v_0v_i \notin E(G)$. Entonces

$$2\delta(G) \leq d_G(v_0) + d_G(v_l) \leq l < 2\delta(G),$$

absurdo. □

Demostración del teorema. Haremos inducción en n . Afirmamos que G es P_k -libre en n vértices, entonces

$$e(G) \leq \frac{(k-1) \cdot n}{2}.$$

El caso base es $n \leq k$, luego $e(G) \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{n(k-1)}{2}$. Luego supongamos que $n \geq k+1$. Si G no es conexo: sean G_1, \dots, G_r las componentes conexas, por hipótesis

$$e(G_i) \leq \frac{|G_i|(k-1)}{2},$$

entonces

$$e(G) = \sum_{i=1}^r e(G_i) \leq \frac{k-1}{2} \sum_{i=1}^r |G_i| = \frac{n(k-1)}{2}.$$

Ahora, supongamos que G es conexo. Si $n-1 \leq 2\delta(G)$, entonces por el Lema 1.3.7, G contiene un camino de largo $n-1 \geq k$, absurdo. Con lo cual, podemos asumir que $2\delta(G) \leq n-1$, y por el Lema, G contiene un camino de largo $2\delta(G)$ que debe cumplir

$$2\delta(G) < k \quad \Leftrightarrow \quad \delta(G) \leq \frac{k-1}{2}.$$

Sea v un vértice de grado $\leq \frac{k-1}{2}$, consideremos $G' := G \setminus \{v\}$. Por hipótesis inductiva

$$e(G') \leq \frac{(n-1)(k-1)}{2},$$

con lo cual,

$$e(G) \leq e(G') + \frac{k-1}{2} \leq \frac{(n-1)(k-1)}{2} + \frac{k-1}{2} = \frac{n(k-1)}{2}.$$

□

1.4. Estabilidad y supersaturación

Teorema 1.4.1 (Füredi, 2015). Sean $n, t \in \mathbb{N}$, y G con n vértices. Si G está t -**lejos** de ser bipartito³, entonces hay al menos

$$\frac{n}{6} \left(e(G) - \frac{n^2}{4} + t \right)$$

triángulos en G .

Demostración. Para cada $u \in V(G)$, definimos

$$B_u := N_G(u) \quad \text{y} \quad A_u := V(G) \setminus B_u.$$

Luego la cantidad de triángulos de G es:

$$k_3(G) = \frac{1}{3} \sum_{u \in V(G)} e(B_u).$$

³Esto significa que si H es un subgrafo bipartito de G , entonces $e(H) \leq e(G) - t$.

Para cada $u \in V(G)$, si borro las aristas de $G[B_u]$ y las de $G[A_u]$, obtengo un subgrafo bipartito de G : el (A_u, B_u) -bigrafo; luego tuvimos que haber quitado al menos t aristas porque G está t -lejos de ser bipartito, es decir:

$$e(B_u) + e(A_u) \geq t.$$

Además, para cada $u \in V(G)$

$$\sum_{v \in A_u} d_G(v) = e(B_u, A_u) + 2e(A_u).$$

Como

$$e(G) = e(A_u) + e(A_u, B_u) + e(B_u),$$

se sigue que $e(A_u) = e(B_u) - e(G) + \sum_{v \in A_u} d_G(v)$ (juntando ambas ecuaciones). Ahora, por la desigualdad $e(B_u) + e(A_u) \geq t$, se tiene que

$$e(B_u) \geq t - e(A_u) = t + e(G) - e(B_u) - \sum_{v \in A_u} d_G(v)$$

y por lo tanto

$$2e(B_u) \geq t + e(G) - \sum_{v \in A_u} d_G(v).$$

Sumando sobre todos los $u \in V(G)$ y utilizando que $k_3(G) = \frac{1}{3} \sum_{u \in V(G)} e(B_u)$, concluimos:

$$k_3(G) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} (nt + ne(G) - \sum_{u \in V(G)} \sum_{v \in A_u} d_G(v));$$

sin embargo, afirmamos que vale la siguiente igualdad:

$$\sum_{u \in V(G)} \sum_{v \in A_u} d_G(v) = \sum_{x \in V(G)} d_G(x)(n - d_G(x));$$

ya que cada término de la sumatoria se acota inferiormente por $\frac{n}{2} \cdot (n - \frac{n}{2}) = \frac{n^2}{2}$, concluimos el resultado.

Veamos la afirmación: notar que para cada $x \in V(G)$, su cantidad de aristas $d_G(x)$ es contada exactamente $|A_x| = n - d_G(x)$ veces del lado izquierdo de la sumatoria \square

Como corolario, se prueban los siguientes dos teoremas:

Teorema 1.4.2 (Estabilidad). Sean $n, t \in \mathbb{N}$, y G es K_3 -libre con n vértices. Si $e(G) \geq \frac{n^2}{4} - t$, entonces G contiene un grafo bipartito con al menos $e(G) - t$ aristas.

Demostración. Si G no tuviera un grafo bipartito con al menos $e(G) - t$ aristas, entonces G estaría $(t+1)$ -lejos de ser bipartito. Por el Teorema 1.4.1 tiene al menos

$$\frac{n}{6} \left(e(G) - \frac{n^2}{4} + (t+1) \right) \geq \frac{n}{6}$$

triángulos, i.e., al menos uno, lo cual es absurdo. \square

Teorema 1.4.3 (Supersaturación). Sean $n, t \in \mathbb{N}$, y G un grafo con n vértices. Si $e(G) \geq \frac{n^2}{4} + t$, entonces G contiene al menos $t \cdot n/3$ triángulos.

Demostración. Notar que G está t -lejos de ser bipartito, en efecto, un grafo bipartito de orden $m \leq n$ tiene a lo más $\frac{m^2}{4} \leq \frac{n^2}{4}$ aristas, pero G tiene al menos $\frac{n^2}{4} + t \geq \frac{m^2}{4} + t$ aristas. Luego por el Teorema 1.4.1, G tiene

$$\frac{n}{6} \left(e(G) - \frac{n^2}{4} + (t+1) \right) \geq \frac{n}{3} t$$

triángulos. □

Teorema 1.4.4 (Füredi, 2015 – Estabilidad). Sean $n, k \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$ y G un grafo K_{k+1} -libre en n -vértices. Si $e(G) \geq t_k(n) - t$, entonces G contiene un subgrafo generador k -partito con al menos $e(G) - t$ aristas.

Demostración. Haremos inducción en k . El caso $k = 1$ tenemos que $t_k(n) = 0$ y siempre se cumple. Entonces supongamos que $k \geq 2$. Tomemos $u \in V(G)$ con $d_G(u) = \Delta(G)$. Definamos $G' := G[B]$ con $B = N_G(u)$. Sea $A = V(G) \setminus B$. El grafo G' es K_k -libre porque G es K_{k+1} -libre, luego por el Teorema de Turán 1.1.6, $e(G') \leq t_{k-1}(d)$ con $d := |B|$ y entonces podemos definir $t' := t_{k-1}(d) - e(G') \geq 0$ y aplicar hipótesis inductiva al grafo G' . Así, G' contiene un subgrafo H' generador $(k-1)$ -partito con al menos $e(G') - t' = 2e(G') - t_{k-1}(d)$ aristas.

Probemos que

$$H := (V(H') \cup A, E(H') \cup E(A, B))$$

tiene al menos $e(G) - t$ aristas, y así H es un subgrafo k -partito generador de G con al menos $e(G) - t$ aristas. En efecto, queremos probar que

$$e(H') + e(A, B) \geq e(G) - t;$$

como $e(G) = e(A, B) + e(G') + e(A)$, la desigualdad de arriba es equivalente a

$$e(H') \geq e(G') + e(A) - t \iff e(H') - e(G') + t \geq e(A).$$

Ya que $e(H') \geq e(G') - t'$, nos queda que la última desigualdad es cierta si $e(A) \leq t - t'$.

Sabemos que

$$2e(A) + e(A, B) = \sum_{v \in A} d_G(v) \leq d \cdot (n - d),$$

donde la desigualdad sale de que la sumatoria tiene $(n - d)$ términos y cada grado $d_G(v) \leq \Delta(G) = d_G(u) = |B| = d$; y reemplacemos $e(A, B) = e(G) - e(A) - e(G')$ y nos queda

$$e(A) + e(G) - e(G') \leq d \cdot (n - d).$$

Ahora, notar que

$$t_k(n) \geq t_{k-1}(d) + d \cdot (n - d),$$

pues el lado izquierdo es la cantidad de aristas de un grafo de Turán (la cual es máxima) y el lado derecho es la cantidad de aristas de un grafo k -partito en n -vértices: el obtenido a partir del grafo de Turán $T_{k-1}(d)$ agregando $n - d$ vértices y conectándolos a las $k - 1$ particiones de $T_{k-1}(d)$. Juntando todo,

$$e(A) \leq d \cdot (n - d) - \underbrace{e(G)}_{\geq t_k(n) - t} + \underbrace{e(G')}_{= t_{k-1}(d) - t'} \leq d \cdot (n - d) - t_k(n) + t + t_{k-1}(d) - t' \leq t - t'$$

como queríamos probar. □

1.5. Teorema de Erdős-Stone

Notación 1.5.1. Notaremos por $K_s(t)$ al grafo de Turán $T_s(t \cdot s)$.

Teorema 1.5.2 (Erdős-Stone, 1946). *Sea H un grafo con $e(H) \geq 1$. Entonces*

$$\text{ex}(n, H) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + o(1)\right) \cdot \frac{n^2}{2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

Observación 1.5.3. Sea H un grafo con $e(H) \geq 1$. Entonces

$$t_{\chi(H)-1}(n) \leq \text{ex}(n, H),$$

pues todo grafo G necesita de al menos $\chi(H)$ colores para tener a H incrustado, por lo tanto $T_{\chi(H)-1}(n)$ es H -libre.

Observación 1.5.4.

$$t_{\chi(H)-1}(n) \sim \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1}\right) \frac{n^2}{2}.$$

Con lo cual, la desigualdad de Erdős-Stone es asintóticamente justa.

Demostración. En efecto, esto equivale a probar que

$$t_k(n) \sim \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2}{2} \quad (n \rightarrow \infty),$$

para $k \geq 2$ fijo. Escribiendo $n = qk + r$ con $0 \leq r < k$, tenemos que

$$t_k(qk) \leq t_k(n) \leq t_k((q+1)k),$$

pero para cualquier $q \in \mathbb{N}$ es fácil de calcular el número de aristas del grafo de Turán $T_k(qk)$:

$$t_k(qk) = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{(qk)^2}{2},$$

con lo cual $t_k(qk), t_k((q+1)k) \sim \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2}{2}$ y por lo tanto $t_k(n)$ también. \square

Lema 1.5.5. *Sea $c \in (0, 1)$ y sea $\varepsilon > 0$. Si G es un grafo con n vértices, con n lo suficientemente grande tal que*

$$e(G) \geq c \frac{n^2}{2},$$

entonces existe un subgrafo $G' \subset G$ con

$$|G'| \geq \varepsilon n \quad \text{y} \quad \delta(G') \geq (c - \varepsilon) |G'|.$$

Demostración. Sea $G_n, G_{n-1}, G_{n-2}, \dots, G_t$ la secuencia de subgrafos de G obtenida de la siguiente manera: $G_n := G$ y el grafo $G_{n-(i+1)}$ se obtiene a partir de G_{n-i} borrando un vértice $v \in V(G_{n-i})$ con $d_{G_{n-i}}(v) < (c - \varepsilon) \cdot |G_{n-i}|$; además, G_t es el último grafo de la secuencia. Notar que $|G_{n-i}| = n - i$.

Afirmamos que $t \geq \varepsilon n$ para n lo suficientemente grande, y por ende, G_t será el subgrafo que buscábamos: por construcción $\delta(G_t) \geq (c - \varepsilon) |G_t|$. Para eso, calculamos la cantidad total de aristas borradas para la obtención de G_t :

$$\sum_{i=t+1}^n d_{G_{n-i}}(v_i) < (c - \varepsilon) \sum_{i=t+1}^n i,$$

y como G_t tiene a lo más $\binom{t}{2}$ aristas, tenemos que

$$e(G) \leq (c - \varepsilon) \sum_{i=t+1}^n i + \binom{t}{2}.$$

A su vez, $e(G) \geq c \frac{n^2}{2}$.

Dado $1 > c > 0$ fijo, tomemos $\varepsilon > 0$ lo suficientemente chico, de tal suerte que $(1 - (c - \varepsilon)) \frac{\varepsilon}{2} < 1$ (\star). Supongamos por el absurdo que $t \leq \varepsilon n$. Nuestro objetivo es acotar la siguiente expresión:

$$\sum_{i=t+1}^n (c - \varepsilon)i + \binom{t}{2}.$$

Para eso, requerimos el siguiente cálculo: $\sum_{i=t+1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{t(t+1)}{2}$. Ahora, acomodamos un poco la ecuación anterior, de manera que haya cancelación:

$$\begin{aligned} \sum_{i=t+1}^n (c - \varepsilon)i + \binom{t}{2} &= (c - \varepsilon) \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{t(t+1)}{2} \right) + \binom{t}{2} \\ &= (c - \varepsilon) \left(\underbrace{\frac{n(n-1)}{2}}_{\binom{n}{2}} + n - \left(\underbrace{\frac{t(t-1)}{2}}_{\binom{t}{2}} + t \right) \right) + \binom{t}{2} \\ &= (c - \varepsilon) \binom{n}{2} + (c - \varepsilon)(n - t) + (1 - (c - \varepsilon)) \binom{t}{2}. \end{aligned}$$

Notar que los últimos dos términos son menores o iguales a $\varepsilon \frac{n(n-1)}{2}$ para n lo suficientemente grande respecto de ε y c . En efecto,

$$(c - \varepsilon)(n - t) + (1 - (c - \varepsilon)) \binom{t}{2} \leq (c - \varepsilon)(n - t) + (1 - (c - \varepsilon)) \frac{\varepsilon n}{2} (\varepsilon n - 1),$$

y el lado derecho es un polinomio cuadrático en la variable n con coeficiente principal

$$(1 - (c - \varepsilon)) \frac{\varepsilon^2}{2} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad (1 - (c - \varepsilon)) \frac{\varepsilon}{2} < 1 \quad (\text{verdadero por } (\star)),$$

y por lo tanto,

$$(c - \varepsilon)(n - t) + (1 - (c - \varepsilon)) \frac{\varepsilon n}{2} (\varepsilon n - 1) \leq \varepsilon \frac{n(n-1)}{2}$$

para n lo suficientemente grande ya que el lado derecho es un polinomio cuadrático en n con coeficiente principal más grande: ε .

Finalmente, esto nos llevaría a un absurdo y por lo tanto deberá ser que $t \geq \varepsilon n$ para n lo suficientemente grande para ε lo suficientemente chico. En efecto, achicando ε de ser necesario: para que $\varepsilon < c$, el lado derecho es menor que $c \frac{n^2}{2}$ para todo n lo suficientemente grande, sin embargo $e(G) \geq c \frac{n^2}{2}$, absurdo. \square

Lema 1.5.6. Para todo $r, t \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si G es un grafo con $n \geq n_0$ vértices y

$$\delta(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) n$$

luego $K_{r+1}(t) \subset G$.

Demostración. Procedemos por inducción en r . Para $r = 1$, tenemos que $K_2(t) = K_{t,t}$ y sabemos que en este caso $\text{ex}(n, K_{t,t}) = o(n^2)$. Como n es lo suficientemente grande, $K_{t,t} \subset G$. En efecto, se tendrá que

$$e(G) = \frac{1}{2} \sum_{v \in G} d_G(v) \geq \frac{\delta(G)n}{2} \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) \frac{n^2}{2}.$$

Ahora, supongamos que $r \geq 2$. Primero, encontraremos por hipótesis inductiva, una copia de $K_r(q)$ con $q \geq t/\varepsilon$; escribamos $A := \bigcup_{i=1}^r A_i$ a la partición de los vértices de $K_r(q)$.

Luego, definimos $X \subset B := V(G) \setminus A$, el conjunto de todos los vértices que tienen al menos t vecinos en cada A_i . Mostramos que $|X| \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. Para esto, acotamos $e(A, B)$ por abajo:

$$\begin{aligned} e(A, B) &= \sum_{v \in A} d_G(v) - 2e(A) \\ &\geq qr \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) n - 2 \frac{(qr)^2}{2}. \end{aligned}$$

Y acotamos por arriba:

$$e(A, B) \leq |X|qr + (|B| - |X|)(q(r-1) + t - 1).$$

Juntando ambas desigualdades, tenemos:

$$\underbrace{n(qr\varepsilon - t + 1)}_{>0} + \underbrace{q^2(-r^2 + r - 1) - q(t - 1)}_{>0} \leq |X| \underbrace{(q - t + 1)}_{>0}$$

Por lo tanto, se sigue lo que queremos cuando $n \rightarrow \infty$.

Finalmente, demostramos que existen conjuntos

$$B_i \subset A_i \text{ con } |B_i| = t \text{ y } t \text{ vértices } x \in X \text{ que satisfacen } N_G(x) \supset B_i,$$

de donde concluiremos que $K_{r+1}(t) \subset G$. Sea $x \in X$, existen a lo más $\binom{q}{t}$ formas de elegir B_i^x en A_i , donde B_i^x satisface $|B_i^x| = t$ y $N_G(x) \subset B_i^x$. Si $|X| > \binom{q}{t}^r \cdot (t - 1)$, entonces por el principio del palomar tenemos lo que queremos. \square

Demostración del Teorema. Observemos que H está contenido en el grafo $\chi(H)$ -partito, completo y con partes de tamaño $|H|$, es decir, en $K_{\chi(H)}(|H|)$. Con lo cual, basta probar el teorema para $H' := K_{\chi(H)}(|H|)$. De hecho, probaremos que para $r := \chi(H) - 1$, $t \in \mathbb{N}$, $\forall \varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\text{ex}(n, K_{r+1}(t)) \leq \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) \frac{n^2}{2} \quad (n \geq n_0).$$

Vamos a tomar $r = \chi(H) - 1$ y $t = |H|$ y $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño. Sea n lo suficientemente grande y G con n vértices tal que

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) \frac{n^2}{2}.$$

Aplicamos el primer lema 1.5.5 con $c = 1 - \frac{1}{r} + 2\varepsilon$. Así, obtenemos un subgrafo $G' \subset G$ con

$$|G'| \geq \varepsilon \quad \text{y} \quad \delta(G') \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) |G'|.$$

Como n es lo suficientemente grande, $\varepsilon n \geq n_0$ y por el segundo lema 1.5.6, G' contiene a $K_{r+1}(t)$, y por lo tanto G también. El resultado se sigue. \square

Definición 1.5.7. G está t -cerca de ser r -partito si existe un subgrafo r -partito de G con al menos $e(G) - t$ aristas.

Teorema 1.5.8 (Teorema de Estabilidad de Erdős-simonovits). *Para todo grafo H con $e(H) \geq 1$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que: si G es H -libre en n -vértices y*

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} - \delta\right) \binom{n}{2}.$$

Entonces G está (εn^2) -cerca de ser $(\chi(H) - 1)$ -partito.

Haremos la demostración con $H = K_{r+1}$ y para H general lo haremos con el Lema de Regularidad 1.7.5.

Para todo $\varepsilon > 0$ lo suficientemente chico, existe $\delta > 0$ tal que: si G es K_{r+1} -libre en n -vértices y

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right) \binom{n}{2},$$

entonces G está (εn^2) -cerca de ser r -partito.

Requerimos probar dos lemas previos:

Lema 1.5.9. *Sea $r \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ y n suficientemente grande. Si G es K_{r+1} -libre con n vértices y*

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} - \delta^2\right) \frac{n^2}{2},$$

entonces existe $G' \subset G$ con $|G'| \geq (1 - \delta)n$ y

$$\delta(G') \geq \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right) |G'|.$$

Demostración. De la demostración del Lema 1.5.5 se deduce un enunciado más fuerte:

Dados $r \in \mathbb{N}$ y $c \in (0, 1)$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo grafo G con $n \geq n_0$ vértices y

$$e(G) \geq c \frac{n^2}{2}$$

, existe un subgrafo $G_t \subset G$ con $|G_t| = t \geq \varepsilon n$ y $\delta(G_t) \geq (c - \varepsilon) |G_t|$; más aún,

$$e(G) \leq e(G_t) + (c - \varepsilon) \left(\binom{n+1}{2} - \binom{t+1}{2} \right).$$

Ahora, dado $\delta > 0$, el cual sin pérdida de generalidad lo podemos asumir $\delta < \frac{1}{2}$, tomamos $c := \left(1 - \frac{1}{r} - \delta^2\right) > 0$ y $\varepsilon = \delta - \delta^2 > 0$. Supongamos que G es un grafo con n vértices K_{r+1} -libre, y

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} - \delta^2\right) \frac{n^2}{2} = c \frac{n^2}{2},$$

luego existe un subgrafo $G_t \subset G$ con $t \geq (\delta - \delta^2)n$ vértices. Como en la demostración de la Observación 1.5.4 se ve que $t_r(t) \sim \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{t^2}{2}$ ($t \rightarrow \infty$), podemos suponer que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $t_r(t) \leq \left(1 - \frac{1}{r} + \gamma\right) \frac{t^2}{2}$, para $\gamma := \frac{\delta^2}{2}$.

Ahora, como G es K_{r+1} -libre, entonces G_t también y se tiene que

$$e(G_t) \leq \text{ex}(t, K_{r+1}) \leq t_r(t) \leq \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\delta^2}{2}\right) \frac{t^2}{2},$$

Por el Teorema de Turán 1.1.6. Juntando esto con lo mencionado al principio, tenemos que

$$c \frac{n^2}{2} \leq e(G) \leq e(G_t) + \binom{n+1}{2} - \binom{t+1}{2} \leq \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\delta^2}{2}\right) \frac{t^2}{2} + (c - \varepsilon) \left(\binom{n+1}{2} - \binom{t+1}{2} \right),$$

esto implica que para n lo suficientemente grande de tal suerte que $\frac{(c-\varepsilon)}{2}n \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{n^2}{2}$,

$$\varepsilon \frac{n^2}{4} \leq \left(\delta + \frac{\delta^2}{2}\right) \frac{t^2}{2}.$$

Reemplazando $\varepsilon = \delta - \delta^2$ en la última desigualdad, y despejando t :

$$\sqrt{\frac{\delta - \delta^2}{2\delta + \delta^2}} n \leq t.$$

Como la expresión de la izquierda es más grande que $(1 - \delta)n$ cuando $\delta < \frac{1}{2}$, se sigue que para todo n lo suficientemente grande,

$$|G_t| = t \geq (1 - \delta)n.$$

Es decir, G_t es el subgrafo G' de G que cumple las propiedades deseadas del enunciado. \square

Lema 1.5.10. Para todo $r \in \mathbb{N}$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si G es K_{r+1} -libre con n vértices y

$$\delta(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right)n,$$

entonces existe una partición $V(G) = A_0 \sqcup A_1 \sqcup \dots \sqcup A_r$ tal que $|A_0| \leq \varepsilon n$ y A_i son conjuntos independientes para todo $i \geq 1$.

Demostración. Si tomamos $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño, entonces G contiene una copia de K_r por el Teorema de Turán 1.1.6 (esto ocurre si $e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r-1}\right) \frac{n^2}{2}$; tomar $\delta < \frac{1}{r-1} - \frac{1}{r}$).

Sea A un conjunto de vértices que induce un K_r en G . Sean $B := V(G) \setminus A$ y $X := \{v \in V(G) \mid |N_G(v) \cap A| \leq r-2\}$, vamos a mostrar que X es pequeño.

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right)nr - r(r-1) &\leq e(A, B) & \left(2e(A) + e(A, B) = \sum_{v \in A} d_G(v) \geq r \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right)n\right) \\ &\leq (r-1)(n-r|X|) + (r-2)|X| = (r-1)(n-r) - |X|, \end{aligned}$$

manipulando la desigualdad, obtenemos:

$$|X| \leq \delta nr.$$

Tomando $\delta < \min\{\frac{\varepsilon}{r}, \frac{1}{r-1} - \frac{1}{r}\}$, el A_0 será X y los conjuntos independientes son:

$$A_u = \{u\} \cup \{v \in B \setminus X \mid vu \notin E(G)\}$$

para cada $u \in A$. □

Ahora estamos en condiciones de demostrar el Teorema de Estabilidad de Erdos-Simonovits para $H = K_{r+1}$ **1.5**:

*Demostración del Teorema de Estabilidad de Erdos-Simonovits para $H = K_{r+1}$ **1.5**.* Sea $\varepsilon > 0$ chico, tomemos $\delta = (\delta')^2$ donde δ' se obtiene del Lema **1.5.10** con $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2}$. Notar que de la demostración podemos suponer que si $\varepsilon > 0$ es chico, luego $\delta' < \frac{\varepsilon'}{2}$ también. Por hipótesis

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} - (\delta')^2\right) \frac{n^2}{2},$$

entonces por el Lema **1.5.9**: existe $G' \subset G$ con $n' := |G'| \geq (1 - \delta')n$ y $\delta(G') \geq (1 - \frac{1}{r} - \delta')|G'| = n'$. Por el Lema **1.5.10**: para $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2}$ se tiene que existe A_0, A_1, \dots, A_r partición de G' con $|A_0| < \varepsilon'n' \leq \varepsilon'n$ y A_i conjuntos independientes para todo $i \geq 1$. Así el subgrafo generado por los A_i con $i \geq 1$ es r -partito. Además, para obtener este subgrafo, hay que quitar a lo más

$$\varepsilon'n^2 + \varepsilon'n^2 < \varepsilon n^2 \quad (\delta, \delta' \ll 1)$$

aristas de G , es decir, G está εn^2 -cerca de ser r -partito. En efecto, las aristas de $G[V(G) \setminus V(G')]$ junto con $E_G(V(G'), V(G) \setminus V(G'))$ aportan $\leq \binom{\delta'n}{2} + n' \cdot (n - n') \leq \delta'n^2 + \delta'n^2 \leq \varepsilon'n^2$, y las de $G[V(A_0)]$ junto con $E_G(V(A_0), V(G) \setminus V(A_0))$ aportan

$$\leq \binom{\varepsilon'n}{2} + (\varepsilon'n) \cdot (\delta')n \leq \varepsilon'n^2.$$

□

1.6. Ejercicios

Ejercicio 1.6.1. Puebe el teorema de Mantel de manera alternativa. Considere un conjunto independiente B de tamaño máximo en un grafo K_3 -libre y la suma de los grados de los vértices que no están en B .

Solución. Sea G un grafo K_3 -libre con orden n y B un conjunto independiente de G de tamaño máximo; consideremos $A := V(G) \setminus B$. Inspeccionemos la sumatoria

$$\sum_{v \in A} d_G(v);$$

notar que $d_G(v) = |N_G(v)|$ y que $N_G(v)$ es un conjunto de vértices aislados en G : si x, y son dos vecinos de v entonces $xy \notin E(G)$ porque de lo contrario G tendría un triángulo xyv . Así, como $|B|$ es máximo, se sigue que $|N_G(v)| \leq |B|$. Esto implica que

$$\sum_{v \in A} d_G(v) \leq |A||B|.$$

Más aún, como A, B particionan $V(G)$: $|A| + |B| = n$. Luego $|A| \cdot |B|$ se maximiza cuando $|A| \cdot |B| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil = t_2(n)$. Así,

$$e(G) = e(A, B) + e(A) \leq e(A, B) + 2e(A) = \sum_{v \in A} d_G(v) \leq t_2(n),$$

como queríamos probar. \square

Comentario 1.6.2. Que $|A| \cdot |B|$ con $|A| + |B| = n$ se maximiza cuando $|A| \cdot |B| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil$ se deduce de que reemplazando $|B| = n - |A|$, el problema equivale a maximizar $|A| \cdot (n - |A|)$. Más formalmente, el problema equivale a maximizar $f(x) = x(n - x)$ con x número natural en el intervalo $[0, n]$. Simplemente notemos que $f'(x) = n - 2x$, luego f es creciente en $[0, \frac{n}{2}]$ y decreciente en $[\frac{n}{2}, n]$, pero como $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ es el mayor número entero $\leq \frac{n}{2}$, f alcanza máximo en $[0, \frac{n}{2}]$ cuando $x = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, similarmente, f alcanza máximo en $[\frac{n}{2}, n]$ cuando $x = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Como $f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) = f(\lceil \frac{n}{2} \rceil)$, se sigue que f se maximiza en $x = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y $x = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, es decir, el valor máximo de f es $f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Ejercicio 1.6.3. Demuestre que si G es un grafo con $n = 2k + 1$ vértices, entonces G contiene un camino de largo k , digamos P_k , o el complemento de G tiene un triángulo.

Solución. Supongamos por el absurdo que ninguna de las dos situaciones pasa. Por un lado, si el complemento \overline{G} de G no contiene triángulos, el Teorema de Mantel nos dice que

$$e(\overline{G}) \leq \text{ex}(n, K_3) \leq k(k + 1).$$

Como $(2k + 1)k = \binom{n}{2} = e(G) + e(\overline{G})$, deducimos que

$$k^2 \leq e(G).$$

Por otro lado, si G no contiene P_k -caminos, el Teorema de Erdős & Gallai dice que

$$e(G) \leq \text{ex}(n, P_k) \leq \frac{(k - 1)n}{2} = \frac{(k - 1)(2k + 1)}{2}.$$

Juntando ambas desigualdades, llegamos al absurdo:

$$k^2 \leq \frac{(k - 1)(2k + 1)}{2}.$$

Por lo tanto, G contiene un P_k -camino o \overline{G} un triángulo. \square

Ejercicio 1.6.4. Demuestre que si T es un árbol con k vértices, entonces $T \subseteq G$ o el complemento de G contiene un triángulo si $n := |G| = 2k - 1$.

Solución. Supongamos por el absurdo que G es un grafo con $n = 2k - 1$ vértices que no contiene a un árbol T con k vértices, y que \overline{G} , su complemento, no contiene triángulos. En particular, la primera suposición implica que $\delta(G) \leq k - 2$ por el siguiente lema, cuya demostración vimos en clase:

Sean $t \in \mathbb{N}$ y T un árbol con $t + 1$ vértices. Entonces si G es un grafo con $\delta(G) \geq t$, luego contiene a T como subgrafo.

Mientras que la segunda suposición (\overline{G} no tiene triángulos), implica que dado un vértice $w \in V(G)$, entonces para cada par de vértices w', w'' no adyacentes a w se tiene que $w'w'' \in E(G)$. En otras palabras, para todo $w \in V(G)$, el subgrafo $G[A_w]$ inducido por el conjunto $A_w := V(G) \setminus \{N_G(w) \cup \{w\}\}$ es completo; notar que como $|A_w| = n - (d_G(w) + 1)$, este grafo es isomorfo a $K_{n-d_G(w)-1}$.

Finalmente, para llegar al absurdo, consideremos $v \in V(G)$ un vértice con grado $d_G(v) = \delta(G) \leq k - 2$, entonces $G[A_v]$ es un subgrafo de G isomorfo a $K_{n-\delta(G)-1}$, i.e. un completo con al menos

$$n - \delta(G) - 1 = (2k - 1) - \delta(G) - 1 \geq (2k - 1) - (k - 2) - 1 = k$$

vértices, luego contiene una copia de T , con lo cual G también: absurdo. Consecuentemente, G contiene una copia de T o \overline{G} tiene triángulo(s). \square

Ejercicio 1.6.5. Pruebe que si $e(G) > n^2/4$, entonces G contiene al menos $\lfloor n/2 \rfloor$ triángulos.

Solución. El Teorema de Füredi (2015) dice:

Sean $n, t \in \mathbb{N}$, y G con n vértices. Si G está t -lejos de ser bipartito, entonces hay al menos

$$\frac{n}{6} \left(e(G) - \frac{n^2}{4} + t \right)$$

triángulos en G .

Sea $H \subset G$ el subgrafo bipartito con cantidad de aristas $e(H)$ máxima de G . Como $e(H) \leq \frac{n^2}{2} < e(G)$, tenemos que $H \subsetneq G$; y podemos escribir $t := e(G) - e(H) \geq 1$. En particular, como $e(H)$ es máximo, tenemos que G está t -lejos de ser bipartito. Con lo cual, el Teorema de Füredi implica que G contiene al menos

$$\frac{n}{6} \left(e(G) - \frac{n^2}{4} + t \right)$$

triángulos; en particular, si $e(G) - \frac{n^2}{4} + t \geq 3$ ganamos, pues en este caso habrían al menos $\frac{n}{2} \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ triángulos. Por otro lado, esta cantidad es menor que 3 si y solo si $t = 1$ y $H = T_2(n)$. En este caso, $H = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Tomemos una aristas $f \in E(G) \setminus E(H)$, con lo cual f tiene sus extremos en una de las dos particiones de H ; en el peor de los casos está en la partición más grande, es decir, para todo vértice v de la partición de H con menor cantidad de vértices: $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, se forma un triángulo distinto con vértices v y los extremos de f . En particular, G contiene en este caso al menos $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ triángulos. \square

Ejercicio 1.6.6. Sean G y H grafos. Demuestre que si G tiene n vértices y al menos $2 \cdot \text{ex}(n, H)$ aristas, entonces G contiene al menos $\text{ex}(n, H)$ copias de H .

Solución. Supongamos que G no contiene $e := \text{ex}(n, H)$ copias de H , luego quitando una arista por cada copia de H en G obtenemos un grafo H -libre con al menos $e(G) - (e - 1) \geq 2e - (e - 1) = e + 1$ aristas. Sin embargo, por definición de e , se sigue que este grafo tiene a lo más e aristas, absurdo. Esto prueba que G tiene al menos e copias de H . \square

Ejercicio 1.6.7. Sea $k \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Demuestre que todo grafo G con n vértices y al menos $n^2/4$ aristas contiene un grafo H con al menos k vértices y $\delta(H) \geq v(H)/2$.

Solución. Probaremos un enunciado más fuerte:

Sea $k \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Entonces todo grafo G con n vértices y al menos $\frac{n^2}{4}$ aristas contiene a $H := K_{k,k}$.

Esto prueba el ejercicio pues el grafo $H := K_{k,k}$ tiene $2k \geq k$ vértices y $\delta(H) = k = \frac{v(H)}{2}$.

Ahora probemos este enunciado más fuerte. Para eso utilizaremos el Teorema de Kövari, Sós, y Turán (abreviado “KST”):

Sean $s, t \in \mathbb{N}$, $s \leq t$. Entonces existe una constante $c = c(s, t) > 0$ tal que

$$\text{ex}(n, K_{s,t}) \leq c \cdot n^{2-\frac{1}{s}}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

lo aplicamos al caso $s = t = k$.

Así, el Teorema de KST dice que

$$\text{ex}(n, H) \leq c \cdot n^{2-\frac{1}{k}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

con $c > 0$ una constante que depende solo de k . Tomando $n_0 \in \mathbb{N}$ para que $\frac{n^2}{4} > cn^{2-\frac{1}{k}}$ valga para todo $n \geq n_0$, se sigue que G siempre debe tener a H como subgrafo: de lo contrario se llegaría al absurdo:

$$\frac{n^2}{4} \leq e(G) \leq \text{ex}(n, H) \leq cn^{2-\frac{1}{k}}.$$

□

1.7. Regularidad

Definición 1.7.1. Dada una partición de los vértices de un grafo G , digamos $V(G) = X \sqcup Y$, definimos la **densidad** del par (X, Y) como la cantidad

$$d(X, Y) := \frac{e(X, Y)}{|X||Y|}.$$

Definición 1.7.2. Dado $\varepsilon > 0$. Sean $A, B \subset V(G)$ con G un grafo. Diremos que el par (A, B) es **ε -regular** si para todo $X \subset A$, $Y \subset B$ con

$$|X| \geq \varepsilon |A| \quad \text{e} \quad |Y| \geq \varepsilon |B|$$

tenemos

$$|d(X, Y) - d(A, B)| \leq \varepsilon.$$

Definición 1.7.3. Sea G un grafo. Una partición $V(G) = V_0 \sqcup V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_k$, se dice **equipartición**, si

$$|V_0| \leq |V_1| = |V_2| = \cdots = |V_k|.$$

Al conjunto V_0 lo llamamos **conjunto excepcional**.

Definición 1.7.4. Sea G un grafo con n vértices y $\varepsilon > 0$. Diremos que una partición $V(G) = V_0 \sqcup V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_k$ es ε -**regular**, si $|V_0| \leq \varepsilon n$ y a lo más εk^2 pares (V_i, V_j) con $1 \leq i, j \leq k$ no son ε -regulares.

Teorema 1.7.5 (Lema de Regularidad de Szemerédi). *Para todo $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$, existe $M = M(\varepsilon, m) \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier grafo G con $|G| \geq M$, existe una equipartición ε -regular*

$$V(G) = V_0 \sqcup V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_k$$

con $m \leq k \leq M$.

Corolario 1.7.6. *Se puede probar el Teorema de Erdős-Stone 1.5.2:*

Dado un grafo H , para todo $\delta > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si G es un grafo con $n \geq n_0$ vértices y

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \delta\right) \frac{n^2}{2},$$

entonces $H \subset G$, donde $r = \chi(H) - 1$.

La idea de la demostración del corolario será la siguiente:

Tomemos $\delta > 0$ arbitrariamente pequeño, aplicamos el Lema de Regularidad de Szemerédi con ε lo suficientemente pequeño y $m > \frac{1}{\varepsilon}$. Así existe $M \in \mathbb{N}$, y obtenemos una equipartición ε -regular

$$V(G) = V_0 \sqcup V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_k,$$

con $M \geq k \geq m > \frac{1}{\varepsilon}$, de cualquier grafo G con $|G| \geq M$.

Borramos de G todas las aristas sobre las que “no hay control”:

- (a) Las que ven a V_0 .
- (b) Aristas dentro de las partes V_i con $i \geq 1$.
- (c) Las aristas entre pares no ε -regulares.
- (d) Aristas entre pares no densos, i.e., “tenemos menos que $\delta/2$ densidad”.

Después, obtenemos el grafo reducido R : dado por contraer cada V_i a un vértice w_i con $i \geq 1$, y borrar aristas múltiples. Así, R tiene conjunto de vértices w_1, \dots, w_r donde $w_i w_j \in E(R)$ si (V_i, V_j) es ε -regular y denso.

Aplicamos lemas de inmersión en “aristas” de grafo - grafo reducido:

$$\text{Si } H \subset R \quad \Rightarrow \quad H \subset G.$$

Lema 1.7.7. *Sea $V_0 \sqcup V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_k$ una partición ε -regular de un grafo G de n vértices, con $k \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Entonces, hay un máximo de:*

- (a) εn^2 aristas con un extremo en V_0 .
- (b) εn^2 aristas dentro de una parte V_i con $i \geq 1$.
- (c) εn^2 aristas entre pares que no son ε -regulares.

(d) δn^2 aristas entre pares que tienen densidad $< \delta$.

Demostración. (a) Como $|V_0| \leq \varepsilon n$ entonces hay a lo más

$$\varepsilon n(1 - \varepsilon)n + \binom{\varepsilon n}{2} < \varepsilon n^2 \text{ aristas en (a).}$$

(b) Cada V_i tiene $\leq \frac{n}{k}$ vértices (pues estamos en una equipartición), y entonces hay a lo más $k \cdot \binom{\frac{n}{k}}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} n^2$ aristas para (b).

(c) Hay a lo más εk^2 pares que no son ε -regulares y cada par tiene a lo más $\left(\frac{n}{k}\right)^2$ aristas entre sí. Consecuentemente, aportan a lo más $\varepsilon k^2 \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^2 = \varepsilon n^2$ aristas en (c).

(d) En el peor caso, los $\binom{k}{2}$ pares son poco densos. En este caso

$$e(V_i, V_j) \leq \delta \left(\frac{n}{k}\right)^2, \quad \forall 1 \leq i, j \leq k,$$

y entonces, hay a lo más $\delta \left(\frac{n}{k}\right)^2 \binom{k}{2} \leq \delta n^2$ aristas en pares “poco densos”, i.e., en (d). □

Lema 1.7.8. Sea $\varepsilon > 0$, y sea (A, B) un par ε -regular de un grafo G . Entonces,

$$(d(A, B) - \varepsilon) |B| \leq |N_G(v) \cap B| \leq (d(A, B) + \varepsilon) |B|$$

para todo $v \in A$, salvo a lo más $2\varepsilon |A|$.

Demostración. Consideremos el conjunto $X \subset A$ de los vértices que no cumplen alguna de las dos desigualdades. Probaremos que $|X| < 2\varepsilon |A|$ por el absurdo. Si este no fuera el caso, tendríamos que $|X| \geq 2\varepsilon |A|$ y por lo tanto hay al menos $\varepsilon |A|$ vértices que no cumplen la primera desigualdad o la segunda. Supongamos que estamos en el primer caso, el segundo caso es análogo. Es decir, supongamos que existe un conjunto $X' \subset A$ con $|X'| \geq \varepsilon |A|$ tal que para todo $v \in X'$,

$$(d(A, B) - \varepsilon) |B| > |N_G(v) \cap B|.$$

Sumando en la desigualdad anterior sobre todos los $v \in X'$, tenemos que

$$(d(A, B) - \varepsilon) |B| |A| > e(X', B),$$

por lo tanto $(d(A, B) - \varepsilon) > d(X', B)$, i.e.,

$$|d(A, B) - d(X', B)| > \varepsilon.$$

Consideremos ahora $Y' = B$, en particular $|Y'| \geq \varepsilon |B|$ si $\varepsilon > 0$ es chico. Luego por ε -regularidad del par (A, B) , tenemos que

$$|d(A, B) - d(X', B)| \leq \varepsilon,$$

absurdo. □

Lema 1.7.9 (Slicing). Sea $\alpha \geq \varepsilon > 0$, y sea (A, B) un par ε -regular en un grafo G . Para cualquier $X \subset A, Y \subset B$ con

$$|X| \geq \alpha |A| \quad \text{y} \quad |Y| \geq \alpha |B|$$

se tiene que el par (X, Y) es $\max\{\frac{\varepsilon}{\alpha}, 2\varepsilon\}$ -regular. Además, por ε -regularidad del par (A, B) , se tiene que

$$|d(X, Y) - d(A, B)| \leq \varepsilon.$$

Demostración. La última afirmación es clara. Veamos la primera, para eso consideremos $\varepsilon' = \max\{\frac{\varepsilon}{\alpha}, 2\varepsilon\}$. Sean $Z \subset X$ y $W \subset Y$ tales que $|Z| \geq \varepsilon' |X|$ y $|W| \geq \varepsilon' |Y|$, entonces $|Z| \geq \varepsilon |A|$ y $|W| \geq \varepsilon |B|$. Luego por ε -regularidad del par (A, B) , se tiene que

$$|d(Z, W) - d(A, B)| \leq \varepsilon.$$

Además, por ε -regularidad del par (A, B) , se tiene que

$$|d(X, Y) - d(A, B)| \leq \varepsilon.$$

Juntando ambas desigualdades tenemos que:

$$\begin{aligned} |d(Z, W) - d(X, Y)| &\leq |d(Z, W) - d(A, B)| + |d(X, Y) - d(A, B)| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon \leq 2\varepsilon \leq \varepsilon'. \end{aligned}$$

□

Definición 1.7.10 (Reducido). Dado un grafo H , $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon, \delta > 0$, definimos

$$\mathcal{G}(H, n, \varepsilon, \delta)$$

como la familia de grafos G , tales que existe una equipartición $V(G) = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_l$ con $|A_i|$ todos del mismo tamaño n e independiente, y un etiquetamiento de los vértices $V(H) = \{w_1, \dots, w_l\}$ tal que para cada $w_i w_j \in E(G)$, el par (A_i, A_j) es un par ε -regular y además $d(A_i, A_j) \geq \delta$.

Lema 1.7.11 (Lema de inmersión general). Para todo grafo H y todo $\delta > 0$, existen $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$G \in \mathcal{G}(H, n, \varepsilon, \delta), n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad H \subset G.$$

Demostración. Haremos inducción en $|H|$. Cuando $|H| = 1$ es trivial. Supongamos entonces que $|H| \geq 2$. Escribamos $V(H) = \{w_1, \dots, w_l\}$ y sea $V(G) = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_l$ una partición de acuerdo a la definición de $\mathcal{G}(H, n, \varepsilon, \delta)$: (A_i, A_j) ε -regular y $d(A_i, A_j) \geq \delta$ para cada $i \leq l - 1$ tal que $w_i w_l \in E(H)$.

Elijamos ε lo suficientemente pequeño y apliquemos el Lema 1.7.8 a cada (A_i, A_l) con $w_i w_l \in E(H)$: todos, excepto a lo más $2\varepsilon |A_l|$ vértices $v \in A_l$ satisfaciendo:

$$|N_G(v) \cap A_i| \geq (\delta - \varepsilon) \cdot |A_i|$$

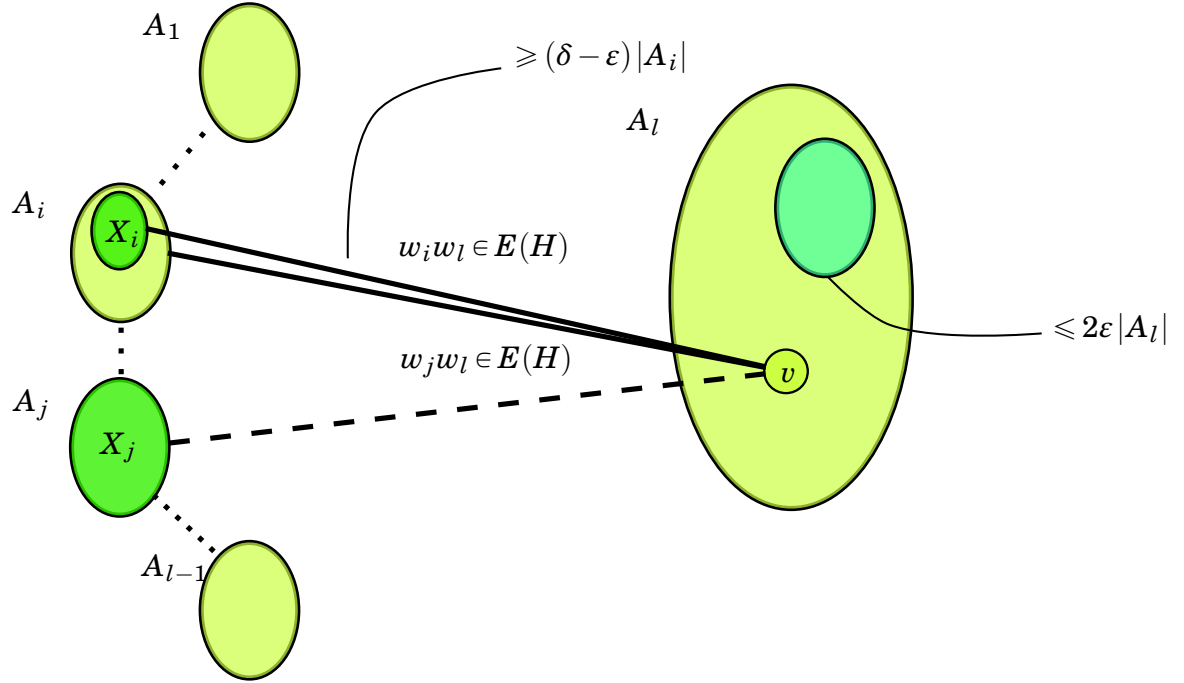


Figura 1.7.5

Como $2\epsilon |A_l| (l-1) < n$, existe $v \in A_l$ tal que

$$|N_G(v) \cap A_i| \geq (\delta - \epsilon) |A_i|, \quad \forall i \leq l-1$$

con $w_i w_l \in E(H)$. Definimos

$$\tilde{X}_i = \begin{cases} A_i \cap N_G(v) & \text{si } w_i \in N_H(w_l) \\ A_i & \text{si no,} \end{cases}$$

y por cada \tilde{X}_i construimos un subgrafo X_i , de manera que todos los X_i tengan el mismo cardinal.

Ahora, tomando $\alpha = \delta - \epsilon \geq \epsilon > 0$, podemos aplicar el Lema de Slicing 1.7.9 en X_i, X_j cuando $w_i w_j \in E(H)$ para asegurar que son pares $\max\{\frac{\epsilon}{\delta - \epsilon}, 2\epsilon\}$ -regulares y densidad al menos $\delta - \epsilon$. Luego queremos usar la hipótesis inductiva: sea $H' := H \setminus \{w_l\}$ y $G' := G[\bigcup_{i=1}^{l-1} X_i]$. Así, existen $\epsilon' > 0$ y $n'_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$G' \in \mathcal{G}(H', n', \epsilon', \delta - \epsilon), n' \geq n'_0 \Rightarrow H' \subset G'$$

Con lo cual, si escogemos ϵ tal que $\max\{\frac{2\epsilon}{\delta - \epsilon}, 2\epsilon\} < \epsilon'$ y n_0 lo suficientemente grande, de tal suerte que $(\delta - \epsilon)n_0 \geq n'_0$, tenemos por hipótesis inductiva que $H' \subset G'$. Por lo tanto, $H \subset G$. \square

Lema 1.7.12 (Lema de inmersión aplicable). Sea H un grafo y $\delta > 0$. Defina $r = \chi(H)$. Entonces, existen $\epsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$G \in \mathcal{G}(K_r, n, \epsilon, \delta), n \geq n_0 \Rightarrow H \subset G.$$

Demostración. El Lema 1.7.12 garantiza que para todo $\delta' > 0$ existen ϵ', n'_0 tales que

$$G \in \mathcal{G}(K_r(t), n', \epsilon', \delta'), n' \geq n'_0 \Rightarrow K_r(t) \subset G;$$

Como $H \subset K_r(t)$, se tiene que en este caso $H \subset G$.

Concluimos gracias al siguiente ejercicio:

Ejercicio 1.7.13.

- (1) Demostrar que para todo $\delta > 0$, $n' \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon' > 0$, existen ε y δ' tales que

$$\mathcal{G}(K_r, n't, \varepsilon, \delta) \subset \mathcal{G}(K_r(t), n', \varepsilon', \delta').$$

- (2) Demostrar que para todo $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ y $n' \in \mathbb{N}$ es lo suficientemente grande, se tiene que si

$$G \in \mathcal{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta) \quad \text{con } n't \leq n < (n' + 1)t,$$

entonces existe un subgrafo $G' \subset G$ tal que $G' \in \mathcal{G}(K_r, n't, 2\varepsilon, \delta - \varepsilon)$.

Solución.

- (1) Tomemos $n = n't$. Fijemos un etiquetamiento $K_r = \{w_1, \dots, w_r\}$ tal que $K_r(t) = \{w_i^j\}_{1 \leq j \leq t}^{1 \leq i \leq r}$ con $w_i^j w_{i'}^{j'} \in E(K_r(t))$ si y solo si $w_i w_{i'} \in E(K_r)$. Entonces si $G \in \mathcal{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta)$, con equipartición $V(G) = \coprod_{i=1}^r V_i$. Se sigue que podemos sub-dividir la partición: cada $V_i = \coprod_{j=1}^t V_i^j$ en otra equipartición con partes de cardinal n' .

Ahora busquemos ε y δ' tales que $G \in \mathcal{G}(K_r(t), n', \varepsilon', \delta')$. Pero si $w_i^j w_{i'}^{j'} \in E(K_r(t))$, entonces $w_i w_{i'} \in E(K_r)$, y por lo tanto el par $(V_i, V_{i'})$ es ε regular y como $|V_i^j| = \frac{1}{t} |V_i|$ para todo $1 \leq j \leq t$, el Lema de Slicing 1.7.9 garantiza que los pares $(V_i^j, V_{i'}^{j'})$ para $1 \leq j, j' \leq t$ son $\max\{t\varepsilon, 2\varepsilon\}$ -regulares si ε es lo suficientemente pequeño, i.e. $\frac{1}{t} > \varepsilon$. En cuanto a la densidad, nuevamente el Lema de Slicing garantiza que

$$d(A_i^j, A_{i'}^{j'}) \geq d(A_i, A_{i'}) - \varepsilon \geq \delta - \varepsilon.$$

Por lo tanto, tomamos $\varepsilon < \min\{\varepsilon'/2, \frac{1}{t}\varepsilon', \frac{1}{t}, \delta/2\}$ y $\delta' = \delta/2$ y funciona.

- (2) Sea $G \in \mathcal{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta)$. Luego $V(G) = V_1 \coprod \dots \coprod V_k$ es una equipartición de G con $|V_i| = n$. Consideremos cualquier subgrafo G' de G dado por quitar a cada conjunto V_i los suficientes elementos tales que los vértices de G' se equiparticionan en partes de tamaño $n't \geq \frac{n'}{n'+1}n = (1 - \frac{1}{n'+1})n = \left(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{t} \rceil}\right)n = \alpha n$, con $\alpha \geq \frac{1}{2}$ para n' lo suficientemente grande (t está fijo). Luego por el Lema de Slicing 1.7.9,

$$G' \in \mathcal{G}(K_r, n't, 2\varepsilon, \delta - \varepsilon).$$

□

En efecto, para todo $\delta > 0$, el primer ítem dice que

$$\mathcal{G}(K_r, n't, \varepsilon, \delta'),$$

para algún ε y todo $n' \geq n'_0$. Luego, por el segundo ítem, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande tal que si

$$G \in \mathcal{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta),$$

entonces existe un subgrafo $G' \subset G$ tal que $G' \in \mathcal{G}(K_r, n't, 2\varepsilon, \delta - \varepsilon)$. Juntando ambas cosas obtenemos que

$$G \in \mathcal{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta), n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad H \subset G.$$

□

Teorema 1.7.14 (Regularidad de Erdős-Stone). *Para todo grafo H y cada $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que para todo grafo G con $n \geq n_0$ vértices y*

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + 3\delta\right) \frac{n^2}{2},$$

entonces $H \subset G$.

Comentario 1.7.15. Como $\delta > 0$ es arbitrario, podríamos reemplazar 3δ por $\delta' > 0$ arbitrario en el enunciado.

Demostración. Tomamos $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño dado por el Lema de inmersión aplicable 1.7.12, y aplicamos Regularidad 1.7.5 para el caso $m \geq \frac{1}{\varepsilon}$ al grafo G con $r = \chi(H) - 1$ satisfaciendo la hipótesis del enunciado. Obtenemos una partición $V(G) = V_0 \sqcup V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_k$ con $m \leq k \leq M$ una equipartición ε -regular. Sea G' el grafo obtenido a partir de G borrando todas “las aristas sobre las que no hay control” con parámetro ε (regularidad) y δ (densidad). Así, tenemos que G' tiene al menos $e(G) - (3\varepsilon + \delta)n^2$ aristas por el Lema 1.7.7. Sea R el “grafo reducido”, se tiene

$$G' \in \mathcal{G}(R, n', \varepsilon, \delta)$$

con $n' := \frac{n - |V_0|}{k}$. Por lo tanto, si $K_{r+1} \subset R$, entonces por el lema de inmersión aplicable 1.7.12 tendríamos que $H \subset G'$. En efecto, quitando algunas particiones de $V(G')$, obtenemos un subgrafo $G'' \subset G'$ tal que $G'' \in \mathcal{G}(K_{r+1}, n', \varepsilon, \delta)$.

Supongamos ahora que $K_{r+1} \not\subset R$. Luego por el Teorema de Turán 1.1.6:

$$e(R) \leq t_r(k) \sim \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{k^2}{2} \quad (k \rightarrow \infty),$$

es decir, achicando ε de ser necesario para que k sea grande y $t_r(k) \leq \left(1 - \frac{1}{r} + \delta\right) \frac{k^2}{2}$. Se tiene que

$$e(G') \leq \left(1 - \frac{1}{r} + \delta\right) \frac{k^2}{2} \cdot \frac{n^2}{k^2} = \left(1 - \frac{1}{r} + \delta\right) \frac{n^2}{2}.$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} e(G) &\leq \left(1 - \frac{1}{r} + \delta\right) \frac{n^2}{2} + 2(3\varepsilon + \delta) \frac{n^2}{2} \\ &= \left(1 - \frac{1}{r} + 6\varepsilon + 2\delta\right) \frac{n^2}{2} \\ &< \left(1 - \frac{1}{r} + 3\delta\right) \frac{n^2}{2}, \end{aligned}$$

absurdo. □

Segunda aplicación del Lema de Regularidad de Szémeredi 1.7.5:

Teorema 1.7.16 (Erdős-Simonovits). *Para todo grafo H , y para todo $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que G es un grafo H -libre con $n \geq n_0$ vértices y*

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} - \delta\right) \frac{n^2}{2},$$

entonces G está $(5\delta n^2)$ -cerca de ser $(\chi(H) - 1)$ -partito.

Comentario 1.7.17. Notar que este enunciado es equivalente al enunciado que vimos antes: 1.5.8

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño (que depende de H y δ). Aplicamos el Lema de Regularidad de Szémeredi 1.7.5 para ε y $m \geq \frac{1}{\varepsilon}$; obtenemos la equipartición ε -regular $V(G) = V_0 \sqcup V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_k$ con $m \leq k \leq M$ para todo grafo con $|G| \geq M$.

Luego consideramos el “grafo reducido” R con parámetros ε y δ , y vértices w_1, \dots, w_k . Sea $r = \chi(H) - 1$. Si $K_{r+1} \subset R$, entonces $H \subset G$ por el Lema de Inmersión aplicable 1.7.12, lo cual nos lleva a una contradicción. Es decir, R es K_{r+1} -libre.

Elijamos $t = 3\delta k^2$. Si $e(R) < t_r(k) - t$, entonces por el Lema 1.7.7, tenemos:

$$\begin{aligned} e(G) &\leq (\delta + 3\varepsilon)n^2 + e(R) \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^2 \\ &< (\delta + 3\varepsilon)n^2 + \left(\left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{k^2}{2} - 3\delta k^2\right) \frac{n^2}{k^2} \\ &= \left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2} + \underbrace{(3\varepsilon - 2\delta)}_{< -\frac{\delta}{2}} n^2 \\ &< \left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2} - \frac{\delta}{2}n^2, \end{aligned}$$

contradicción.

Con lo cual, el Teorema de Estabilidad de Füredi 1.4.4 nos permite suponer que R está t -cerca de ser r -partito. Es decir, hay una r -partición

$$V(R) = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_r$$

con a lo más t aristas dentro de las partes. Utilizando nuevamente el Lema 1.7.7 para acotar las aristas despreciables de la partición de G , y acotando las aristas dentro de las partes de la partición de R , concluimos que es posible borrar a lo más

$$\underbrace{t \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^2}_{\leq 3\delta n^2} + \underbrace{(\delta + 3\varepsilon)n^2}_{\leq 2\delta n^2} \leq 5\delta n^2$$

aristas para obtener una r -partición de G . □

Lema 1.7.18 (Lema de conteo general). *Para todo grafo H , y todo $\delta > 0$, existen $\varepsilon > 0$ y $M \in \mathbb{N}$ tales que si*

$$G \in \mathcal{G}(H, n, \varepsilon, \delta)$$

para algún $n \geq M$, entonces G contiene al menos

$$\frac{\delta^{e(H)} \cdot n^{|H|}}{2}$$

copias de H .

Demostración. Haremos inducción en $|H|$, y de hecho nuestra hipótesis inductiva será más fuerte:

Para todo grafo H , y todo $\delta > 0$, existen $\varepsilon > 0$ y $M \in \mathbb{N}$, tales que si

$$G \in \mathcal{G}(H, n, \varepsilon, \delta)$$

para algún $n \geq M$, y más aún, dada una equipartición $G = V_1 \coprod \cdots \coprod V_l$ indexada según $H = \{w_1, \dots, w_l\}$ con (V_i, V_j) ε -regular y $d(v_i, V_j) \geq \delta$ siempre y cuando que $w_i w_j \in E(H)$, se tiene que hay al menos

$$\frac{\delta^{e(H)} \cdot n^{|H|}}{2}$$

copias de H , de tal forma que los vértices x_j correspondientes a un w_j vía un isomorfismo con H pertenezcan a V_j para todo $j = 1, \dots, l$.

Si $|H| = 1$, la afirmación es inmediata. Si $|H| = 2$ y no tiene aristas también es fácil. Si $|H| = 2$ y $e(H) = 1$, luego basta probar que existen al menos $\delta \frac{n^2}{2}$ aristas en $E(V_0, V_1)$. Pero tomando $\varepsilon < \min\{\delta/4, 1/8\}$, la ε -regularidad del par (V_0, V_1) junto con $d(V_0, V_1)$ implican que existen vértices $v \in V_1$ tales que

$$(\delta - \varepsilon)n \leq |N_G(v) \cap V_0|$$

salvo $2\varepsilon n$ vértices por el Lema 1.7.8. Es decir, $E(V_0, V_1)$ tiene al menos

$$(\delta - \varepsilon)(1 - 2\varepsilon)n^2 \geq \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}\right)\delta n^2 \geq \frac{1}{2}\delta n^2$$

aristas, como queríamos.

En general, supongamos que $|H| \geq 3$. Si $G \in \mathcal{G}(H, n, \varepsilon, \delta)$ para $n \geq M$, entonces $G = V_1 \coprod \cdots \coprod V_l$ con V_i todos de cardinal n y para la escritura $H = \{w_1, \dots, w_l\}$, $w_i w_j \in E(H)$ si y solo si (V_i, V_j) es ε -regular y $d(V_i, V_j) \geq \delta$.

Consideremos $H' = H \setminus \{w_l\}$ y $G' := G \setminus V_l$, entonces $G' \in \mathcal{G}(H', n, \varepsilon, \delta)$ y por hipótesis inductiva existe M' tal que si $n \geq M'$, entonces G' contiene al menos

$$\frac{\delta^{e(H')} \cdot n^{|H'|}}{2}$$

copias de H' , donde cada copia tiene su vértice correspondiente a w_j en la parte V_j para cada $j < l$. Ahora, por el Lema 1.7.8, para todo $v \in V_l$, salvo $2\varepsilon n$ vértices, se tiene que

$$(\delta - \varepsilon)n \leq |N_G(v) \cap V_j|, \quad \forall j < l.$$

Por lo tanto, tenemos al menos $(1 - 2\varepsilon(l - 1))n$ vértices en V_l , cada uno con al menos $(\delta - \varepsilon)n$ vecinos en cada V_j con $j < l$, y por lo tanto, $(\delta - \varepsilon)n(l - 1)$ vecinos en G .

En el peor de los casos, todos los vértices que no son vecinos de v en V_j pertenecen a una de estas copias de H' para cada $j < l$, luego este v forma al menos $\frac{\delta^{e(H')} \cdot n^{l-1}}{2} - (1 - (\delta - \varepsilon))n(l - 1)$ copias de H en G . Es decir, G tiene al menos

$$\left(\frac{\delta^{e(H')} \cdot n^{l-1}}{2} - (1 - (\delta - \varepsilon))n(l - 1) \right) (1 - 2\varepsilon(l - 1))n$$

copias de H , donde cada copia tiene su vértice correspondiente a w_j en la parte V_j para cada $1 \leq j \leq l$. Así, basta probar que tomando $M \gg M'$ y $\varepsilon > 0$ lo suficientemente chico, esta cantidad es $\geq \frac{\delta^{e(H)} \cdot n^l}{2}$.

En efecto, esto equivale a que

$$\left(\frac{\delta^{e(H')} \cdot n^{l-1}}{2} - (1 - (\delta - \varepsilon))n(l-1) \right) (1 - 2\varepsilon(l-1)) \geq \frac{\delta^{e(H)} \cdot n^{l-1}}{2}$$

si y solo si,

$$\frac{\delta^{e(H')} \cdot n^{l-1}(1 - 2\varepsilon(l-1))}{2} - \frac{\delta^{e(H)} \cdot n^{l-1}}{2} \geq (1 - (\delta - \varepsilon))(l-1)(1 - 2\varepsilon(l-1))n.$$

Es decir, hay que probar

$$\left(\delta^{e(H')}(1 - 2\varepsilon(l-1)) - \delta^{e(H)} \right) \frac{n^{l-2}}{2} \geq (1 - (\delta - \varepsilon))(l-1)(1 - 2\varepsilon(l-1)).$$

Pero como $l \geq 3$, se sigue que si $\varepsilon > 0$ es lo suficientemente chico (por ejemplo $\varepsilon < \frac{1 - \delta^{e(H)} - \delta^{e(H')}}{2(l-1)}$), existe M con $M \geq M'$ lo suficientemente grande, tal que si $n \geq M$, el lado izquierdo es más grande que el lado derecho (que no depende de n) pues

$$\left(\delta^{e(H')}(1 - 2\varepsilon(l-1)) - \delta^{e(H)} \right) > 0.$$

□

Apliación 3 del Lema de Regularidad de Szemerédi 1.7.5:

Teorema 1.7.19 (Teorema de Roth). *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ y $A \subset \{1, \dots, n\}$ con $|A| > \varepsilon n$, entonces A contiene una 3-progresión aritmética⁴.*

Lema 1.7.20 (Lema de remoción de triángulos). *Para todo $\alpha > 0$, existe $\beta > 0$ tal que todo grafo G con n vértices y a lo más βn^3 triángulos, puede ser K_3 -libre borrando a lo más αn^2 aristas*

Demostración. Tomemos $0 < \delta < \frac{\alpha}{3}$ y $\varepsilon < \frac{\delta}{9}$ lo suficientemente chico. Aplicamos el Lema de Regularidad de Szemerédi 1.7.5 con parámetros ε y $m \geq \frac{1}{\varepsilon}$, obteniendo una partición de un grafo G con $|G| \geq M \geq k \geq m$,

$$V(G) = V_0 \sqcup V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k.$$

Consideremos el grafo reducido R con parámetros ε y δ . Notar que el subgrafo $G' := G \setminus V_0 \subset G$ cumple que $G' \in \mathcal{G}(R, n', \varepsilon, \delta)$ con $n' \geq \frac{(1-\varepsilon)n}{k} \geq \frac{1-\varepsilon}{M}n$.

Supongamos que R tiene al menos un triángulo K_3 . Entonces G' tiene un subgrafo G'' dado por quedarnos solamente con las partes V_i, V_j, V_k correspondientes a vértices w_i, w_j, w_k que forman un triángulo en R ; en particular, $G'' \in \mathcal{G}(K_3, n', \varepsilon, \delta)$. Aplicando el Lema de conteo general 1.7.18 para $H = K_3$ y el subgrafo $G'' \in \mathcal{G}(H, n', \varepsilon, \delta)$, tenemos que G'' , y por lo tanto G , tiene al menos:

$$\delta^3 \cdot \left(\frac{(1-\varepsilon)n}{k} \right)^3 > \frac{\delta^3 (1-\varepsilon)^3}{2 M^3} \cdot n^3 > \beta n^3$$

⁴En general, una **k -progresión aritmética** es una secuencia de enteros $a, a+d, a+2d, \dots, a+(k-1)d$.

triángulos para n lo suficientemente grande, donde $\beta < \frac{\delta^3 (1-\varepsilon)^3}{2M^3}$. Achicando β de ser necesario, podemos asumir que n es arbitrario.

Con lo cual, si G tiene a lo más βn^3 triángulos, el párrafo anterior nos dice que R no tiene triángulos. Así, al remover $\leq (\delta + 3\varepsilon)n^2 < \alpha n^2$ aristas de G (ver Lema 1.7.7), nos quedamos sin triángulos. \square

Teorema 1.7.21 (Teorema de Roth). *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ y $A \subset \{1, \dots, n\}$ con $|A| > \varepsilon n$, entonces A contiene una 3-progresión aritmética.*

Demostración. Vamos a probar que si A no contiene una 3-progresión aritmética, entonces $|A| = o(n)$.

Sea $\varepsilon > 0$, y n lo suficientemente grande, supongamos que $|A| \geq \varepsilon n$ y que no contiene 3-progresiones aritméticas. Definimos un grafo G con $V(G) = X \sqcup Y \sqcup Z$, disjuntos y $|X| = |Y| = |Z| = 3n$ cada conjunto X, Y, Z es una copia de $\{1, \dots, 3n\}$.

$$E(X, Y) = \{xy \mid x \in X, y \in Y, y = x + a \text{ para algún } a \in A\}.$$

$$E(Y, Z) = \{yz \mid y \in Y, z \in Z, z = y + a \text{ para algún } a \in A\}.$$

$$E(X, Z) = \{xz \mid x \in X, z \in Z, z = x + 2a \text{ para algún } a \in A\}.$$

Si xyz es un triángulo en G , entonces existen $a, a', a'' \in A$ tales que

$$\begin{cases} y = x + a, & a \in A \\ z = y + a', & a' \in A \\ z = x + 2a'', & a'' \in A, \end{cases}$$

y esto es una 3-progresión aritmética $a, a'' = a + (a' - a''), a' = a + 2(a' - a'')$ si a, a', a'' son distintos. Como A no tiene 3-progresiones aritméticas, entonces cada triángulo en G es de la forma xyz con $y = x + a, z = x + 2a$. Lo cual implica que cada triángulo queda completamente determinado por x y a . Consecuentemente G tiene a lo más

$$3n|A| \leq 3n^2 = o(n^3)$$

triángulos.

Por el Lema de Remoción de Triángulos 1.7.20, es posible borrar $o(n^2)$ aristas de G para obtener un grafo libre de triángulos. Ahora, vamos a obtener una cota por abajo de la cantidad de triángulos arista disjunto que tiene G : consideremos el conjunto de tripletas de la forma $(x, x+a, x+2a)$, con $x \in X, a \in A$. Observar que cada tripleta corresponde con un triángulo de G y todos son arista-disjuntos entre sí, por lo tanto G contiene al menos $3n|A| > 3\varepsilon n^2$ triángulos disjuntos y por lo tanto si o si deben ser quitados para que G sea libre de triángulos. Contradiciendo el Lema de Remoción de Triángulos. \square

Bibliografía