Apuntes - Tópicos en matemática discreta

Enzo Giannotta

20 de octubre de 2023

Índice general

Capítulo 1

Teoría extremal de grafos

En este curso trabajaremos con grafos simples, usualmente denotados: $G = (V,E)$.

1.1. Teoría extremal de grafos

¿Cuál es la máxima cantidad de aristas que puede tener un grafo de n vértices sin que aparezca una cierta estructura?

¿Cómo lucen estos grafos maximales?

Ejemplo 1.1.1.

1. Cuando la estructura es un ciclo, la cantidad de aristas es $n-1$ y los grafos maximales son los árboles.

2. Cuando la estructura es un ciclo impar. ¿Cómo lucen los grafos sin ciclos impares y que tienen una cantidad máxima de aristas? Son los completos balanceados $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. En efecto, para que un grafo bipartito con n vértices tenga una cantidad máxima de aristas, tiene dos partes $|X|,|Y|$ con $|X|+|Y| = n$ y si maximiza la cantidad de aristas es un grafo $K_{|X|,|Y|}$. Es decir, tiene $|X| \cdot |Y|$ aristas y si maximizamos, hay que maximizar la función $f(y) = (n-y)y$ con $1 \leqslant y \leqslant n-1$ e y entero; esto sucede sii $y = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ o $y = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Definición 1.1.2. Sean G y H dos grafos. Decimos que G es **H**-libre (o **libre de** H) si $H \not\subset G$. El **número extremal** de H es la cantidad

$$\text{ex}(n,H) = \text{máx}\{e(G) | G \text{ es un grafo de } n \text{ vértices } H\text{-libre}\},$$

donde $e(G)$ siempre denotará el número de aristas de G.

Si G es H-libre y $||G|| = \text{ex}(n,H)$, decimos que G es **extremal** respecto de n y H.

Teorema 1.1.3 (Mantel, 1907). *Sea $n \in \mathbb{N}$, G un grafo K_3-libre con n vértices. Entonces, $e(G) \leqslant \lceil \frac{n}{2} \rceil \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Además, $e(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \Leftrightarrow G = K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$*[1].

Demostración. Por inducción en n. Los casos $n = 1, n = 2$ son un vértice, un 1-camino respectivamente. Luego vale para $n = 1,2$. Ahora, supongamos que $n \geqslant 3$. Sea G un grafo K_3-libre con n vértices, y $uv \in E(G)$ (si G no tuviera aristas, podríamos agregar una arista y seguiría siendo K_3-libre); consideremos $G' = G \backslash \{u,v\}$.

[1] Cuando $n = 1,2$ tenemos que G es el completo K_n

Tenemos que G' también es K_3-libre y tiene $n-2$ vértices. Por inducción, G' satisface

$$e(G') \leqslant \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor.$$

Más aún, como G es K_3-libre, no existen vértices $w \in G'$ tal que sea adyacente a u y v al mismo tiempo. Luego existen a lo más $n-2$ aristas en $E(G)\backslash E(G')$ sin contar la arista uv. Es decir,

$$e(G) \leqslant e(G') + n - 1 \leqslant \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

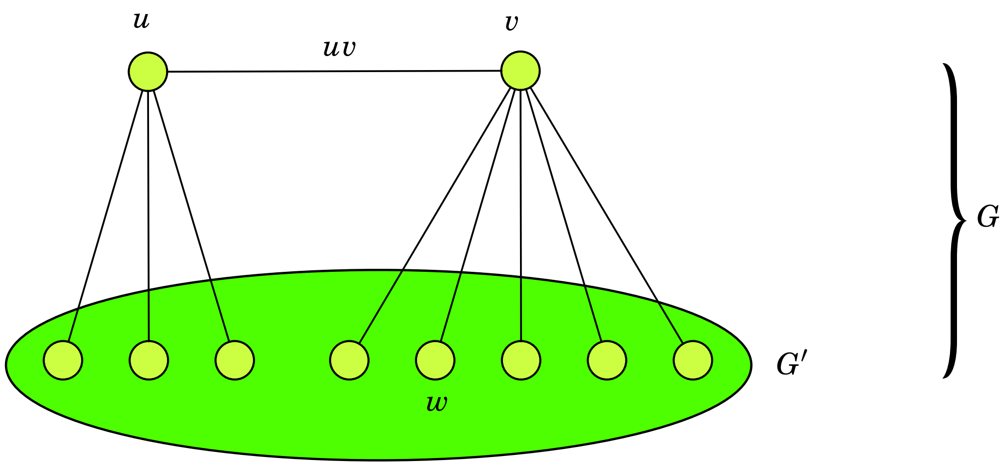


Figura 1.1.1: Ilustración

Para la segunda parte, $e(G) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \Leftrightarrow G = K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Es claro que si $G = K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ luego $e(G) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Veamos la recíproca. Sea G con n vértices y cantidad máxima de aristas tal que es K_3-libre. Los casos $n = 1, 2$ son triviales, luego podemos suponer que $|G| \geqslant 3$. Como G es K_3-libre, existen una aristas $uv \in E(G)$ por maximalidad. Por inducción, $G' := G\backslash\{u, v\}$ es un $K_{\lceil \frac{n-2}{2} \rceil, \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor}$, digamos con partición $X', Y' \subset V(G')$ de sus vértices. Como G es K_3-libre, ni u ni v pueden tener vecinos en G' que estén en ambas particiones X', Y', además, no puede haber una partición que no tenga a u y v como vecinos en G pues podríamos agregar aristas entre vértices de esa particiones: contradiciendo maximalidad. Sin pérdida de generalidad, los vecinos de u en G' están en X y los de v en Y. Más aún, por maximalidad, todos los vértices de X son vecinos con u y todos los de Y con v. Así, G es un X, Y bigrafo tomando $X := X' \cup \{v\}$ e $Y := Y' \cup \{u\}$. Notar que esto prueba que G es un $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

□

Definición 1.1.4. El **grafo de Turán** $T_k(n)$ es el grafo k-partito completo con la mayor cantidad de aristas, es decir, los cardinales de las particiones difieren a lo más en 1 entre sí (por maximalidad). Notamos

$$t_k(n) := e(T_k(n)).$$

Observación 1.1.5. Podemos calcular $t_k(n)$. Sea $\alpha \in \mathbb{N}$ el cardinal más grande de una partición de $T_k(n)$. Entonces las demás particiones tienen cardinal α o $\alpha - 1$. Sea r la cantidad de particiones con cardinal $\alpha - 1$ y $k - r$ de cardinal α. Tenemos que sumando los cardinales de todas las particiones:

$$\alpha k - r = n.$$

Como $0 \leqslant r < k$, r es el resto de la división de n por k y α es el cociente. Despejando obtenemos que $\alpha = \frac{n+r}{k}$ es decir, $\alpha = \lceil \frac{n}{k} \rceil$. En particular $\alpha - 1 = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$. Juntado todo, tenemos que la cantidad total de aristas es:

$$\alpha^2 \binom{k-r}{2} + \alpha(\alpha-1)(k-r)r + (\alpha-1)^2 \binom{r}{2},$$

i.e.,

$$\boxed{t_k(n) = \lceil \frac{n}{k} \rceil^2 \binom{k-r}{2} + \lceil \frac{n}{k} \rceil \lfloor \frac{n}{k} \rfloor (k-r)r + \lfloor \frac{n}{k} \rfloor^2 \binom{r}{2}.}$$

Teorema 1.1.6 (Turán, 1941)**.** *Sean $n, k \in \mathbb{N}$, G un grafo K_{k+1}-libre con n vértice. Entonces*

$$e(G) \leqslant t_k(n).$$

Además, $e(G) = t_k(n) \Leftrightarrow G = T_k(n)$[2].

Demostración. Hagamos inducción en n. Para $n \leqslant k$ es trivial. Sea ahora G con $n \geqslant k+1$ que a su vez es K_{k+1}-libre y arista maximal. Esto implica que agregar cualquier arista hace aparecer un K_{k+1} como subgrafo. Entonces G contiene un K_k. Sea A el conjunto de vértices de un subgrafo K_k en G. Consideremos luego $G' = G \backslash A$. El grafo G' es K_{k+1}-libre y tiene $n-k$ vértices. Cada $x \in V(G')$ tiene a lo más $k-1$ vecinos en A dentro del grafo G, pues G es K_{k+1}-libre. Luego por hipótesis inductiva:

$$e(G') \leqslant t_k(n-k).$$

Si juntamos esto con la hipotesis inductiva, tenemos que

$$e(G) \leqslant e(G') + (n-k)(k-1) + \binom{k}{2} \leqslant t_k(n-k) + (n-k)\cdot(k-1) + \binom{k}{2} = t_k(n),$$

donde el segundo término es la cantidad de aristas entre A y $V(G')$.

Veamos ahora la segunda afirmación. Por definición, $G = T_k(n)$ tiene $t_k(n)$ aristas. Recíprocamente, supongamos que G con n vértices y cantidad máxima de aristas $e(G)$ tal que es K_{k+1}-libre. Los casos $n \leqslant k$ son triviales, luego supongamos que $n \geqslant k+1$. Por maximalidad, G contiene un K_k como subgrafo; llamemos A a su conjunto de vértices en G y consideremos $G' := G \backslash A$. Notar que

$$e(G') \geqslant e(G) - \left((n-k)(k-1) + \binom{k}{2} \right) = t_k(n) - (n-k)(k-1) - \binom{k}{2} = t_k(n-k),$$

pues cada vértice de G' tiene a lo más $k-1$ vecinos en A. Como G' es K_{k+1}-libre, en realidad vale la igualdad: $e(G') = t_k(n-k)$, por la primera parte que ya demostramos. Llamemos $X_1, X_2, \ldots, X_k$ a las particiones de G'. Como vale la igualdad arriba, tenemos que cada vértice de G' tiene exactamente $k-1$ vecinos en A. Para cada $x' \in G'$ llamemos $\alpha(x')$ al único vértice de A que no es adyacente a x' en G. Más formalmente, $\alpha : V(G') \to A$ es una función; afirmamos que:

[2]Cuando $n = 1, 2, \ldots, k-1$ tenemos que G es el completo K_n

(I) α es sobreyectiva.

(II) Si $x'_i \in X_i$ y $x'_j \in X_j$ para $i \neq j$, entonces $\alpha(x'_i) \neq \alpha(x'_j)$.

Antes de probar la afirmación, notemos que esta prueba que $\alpha\big|_{X_i}$ es constante para cada $i = 1, \dots, k$ (y por lo tanto tiene sentido el abuso de notación $\alpha(X_i)$ para denotar al único vértice de A que no es adyacente a ningún vértice $x' \in X_i$). Veamos entonces la afirmación:

(I) Supongamos que α no es sobreyectiva: existe un $a_0 \in A$ tal que para todo $i = 1, \dots, k$ existe $x'_i \in X_i$ adyacente a a_0 en G. Pero esto implica entonces que los vértices $x'_1, \dots, x'_k, a_0$ forman un K_{k+1} en G, absurdo.

(II) En efecto, si $\alpha(x'_i) = a_0 = \alpha(x'_j)$, entonces x_i, x_j y los vértices de $A \setminus \{a_0\}$ juntos forman un K_{k+1} en G, absurdo.

Así, podemos extender la partición de G' a todo G: definimos $\tilde{X}_i := X_i \cup \{\alpha(X_i)\}$. Es claro que de esta manera G es un grafo k-partito completo. Como G es maximal en su cantidad de aristas, entonces $G = T_k(n)$. □

Teorema 1.1.7 (Erdös - segunda demostración del teorema)**.** *Sean $n, k \in \mathbb{N}$ y G un grafo K_{k+1}-libre con n vértices. Entonces existe un grafo H que es k-partito con $V(H) = V(G)$ tal que:*

$$d_H(v) \geqslant d_G(v), \quad \forall v \in V(G).$$

Erdös. Haremos inducción en k. Para $k = 1$ no hay que hacer nada. Sea ahora $k \geqslant 2$. Sea $v \in V(G)$ con $d_G(v) = \Delta(G)$. La vecindad de v, $G' := G[N_G(v)]$ debe ser K_k-libre. Sea $A := G \setminus N_G(v)$. Notar que

$$d_G(u) \leqslant d_{G'}(u) + |A|.$$

Por hipótesis inductiva existe un grafo H' que es $(k-1)$-partito con $V(H') = V(G')$ y

$$d_{H'}(u) \geqslant d_{G'}(u), \quad \forall u \in V(G').$$

Sea H el grafo obtenido a paratir de H' añadiendo los vértices de A y conectando todos los vértices entre A y $V(H')$. Observar que H es $k+1$-partito y como v tiene grado máximo en G, tenemos que para cada $u \in A$:

$$d_G(u) \leqslant d_G(v) = |V(H')| = d_H(u)$$

y para $u \in V(H')$ sabemos que:

$$d_G(u) \leqslant d_{G'}(u) + |A| \underset{H.I.}{\leqslant} d_{H'}(u) + |A| = d_H(u).$$

□

Ejercicio 1.1.8. A partir de la demostración deducir que el grafo K_{k+1}-extremal es $T_k(n)$ y es único.

Solución. Sea G un grafo K_{k+1}-extremal y H el grafo r-partito obtenido por el Teorema anterior. Así, $V(H) = V(G)$ y $d_H(v) \geqslant d_G(v)$ para todo vértice v. Esta desigualdad implica que

$$e(H) \geqslant e(G),$$

y por lo tanto, H también es K_{r+1}-extremal. Pero por definición, $t_k(n) \geqslant e(H)$. Pero ya vimos que los grafos K_{r+1} extremales tienen $\geqslant t_k(n)$ aritas. Con lo cual, en realidad $e(G) = e(H)$ y más aún, $d_H(v) = d_G(v)$ para todo v.

Esto nos indica que inspeccionando la demostración más detalladamanete, se tiene que G' es un $T_{k-1}(\Delta)$ (con $\Delta := \delta(G)$) y que G es luego $T_k(n)$. □

Observación 1.1.9. Sea H un grafo con $\chi(H) \geqslant 3$, es decir no bipartito, entonces

$$\mathrm{ex}(n, H) = \Theta(n^2).$$

Demostración. En primer lugar, si G es un grafo que contiene a H, luego no puede ser bipartito. En particular, si $G = K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, entonces es H-libre al ser bipartito; de hecho tiene n vértices y $e(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Consecuentemente

$$(n-1)^2/4 \leqslant \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leqslant \mathrm{ex}(n, H).$$

Por otro lado, la cantidad de aristas maxima de G es $\binom{n}{2}$ (en general para cualquier grafo con n vértices) y por lo tanto $\mathrm{ex}(n, H) = \Theta(n^2)$. □

1.2. Números extremales en grafos bipartitos

Recuerdo 1.2.1 (Desigualdad de Jensen)**.** *Vamos a usar la desigualdad de Jensen: si φ es una función convexa entonces:*

$$\boxed{\varphi(\mathbb{E}(X)) \leqslant \mathbb{E}(\varphi(X)).}$$

Ejercicio 1.2.2. Probar las siguientes dos desigualdades elementales para el binomio de Newton:

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \overset{\text{Cota 1}}{\leqslant} \binom{n}{k} \overset{\text{Cota 2}}{\leqslant} \left(\frac{n \cdot e}{k}\right)^k.$$

Solución.

Cota 1: Notar que

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdots \frac{n-k+1}{1} \geqslant \left(\frac{n}{k}\right)^k,$$

pues $\frac{n}{k} \leqslant \frac{n-j}{k-j}$ para todo $j = 0, \ldots, k$.

Cota 2: Notar que se tiene una mejor cota:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \leqslant \frac{n^k}{k!}.$$

Por lo tanto, como $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, se sigue que $e^k \geqslant \frac{k^k}{k!}$, y luego

$$\frac{n^k}{k!} \leqslant \frac{n^k e^k}{k^k},$$

como queríamos.

□

Teorema 1.2.3 (Erdös, 1938)**.** *Para todo* $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{ex}(n, C_4) \leqslant n^{\frac{3}{2}}.$$

Definición 1.2.4. Una **cereza** es un 2-camino $x_0x_1x_2$. Llamaremos a x_1 el **centro** y a x_0, x_2 las **hojas**.

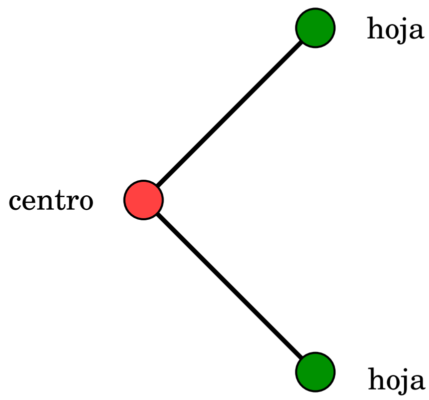


Figura 1.2.2: Dibujo de cereza.

Demostración. Sea G un grafo C_4-libre con n vértices. Contaremos cereza en G para acotar el número de aristas $e(G)$.

Para cada vértice $v \in V(G)$ hay exactamente

$$\binom{d_G(v)}{2} \text{ cerezas con centro en } v.$$

Por lo tanto, en G hay

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{2} \text{ cerezas en } G.$$

Por la desigualdad de Jensen la sumatoria se minimiza cuando todos los grados son iguales:

$$\begin{aligned}\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{2} &\geqslant n \cdot \binom{2e(g)/n}{2} \\ &\overset{Cota1}{\geqslant} n \cdot \left(\frac{e(G)}{n}\right)^2 = \frac{e(G)^2}{n}.\end{aligned}$$

Por otro lado, dado un par $\{u, v\}$ de hojas de cerezas distintas, entonces tendríamos un subgrafo C_4 en G, absurdo; por lo tanto hay a lo más

$$\binom{n}{2} \text{ cerezas en } G.$$

Juntando todo:
$$\frac{e(G)^2}{n} \leqslant \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$
consecuentemente $e(G)^2 \leqslant n^3$, i.e., $e(G) \leqslant n^{\frac{3}{2}}$. □

Teorema 1.2.5 (Kövani, Sós, Turán)**.** *Sean $s,t \in \mathbb{N}$, $s \leqslant t$. Entonces existe una constante $c = c(s,t) > 0$ tal que*
$$\mathrm{ex}(n, K_{s,t}) \leqslant c \cdot n^{2-\frac{1}{s}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definición 1.2.6. Una ***s*-cereza** es un $K_{1,s}$. Similarmente tenemos la noción de **centro** y **hojas** (las cuales son s).

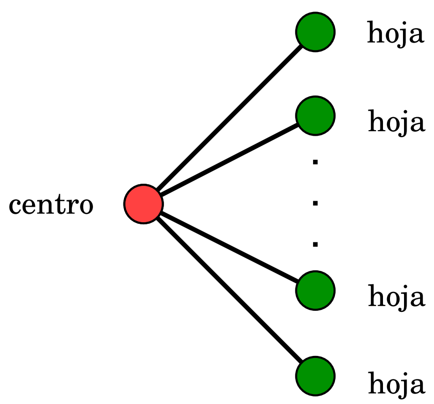


Figura 1.2.3: Dibujo de s-cereza.

Demostración. Sea G un grafo $K_{s,t}$-libre en n vértices. Para cada $v \in V(G)$ hay $\binom{d_G(v)}{s}$ s-cerezas. Por lo tanto en G hay
$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{s} \quad s\text{-cerezas},$$
con lo cual
$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{s} \overset{\text{Cota 1}}{\geqslant} \sum_{v \in V(G)} \frac{d_G(v)^s}{s^s} \overset{\text{Jensen}}{\geqslant} \frac{n}{s^s}\left(\frac{2e(G)}{n}\right)^s.$$

Procediendo de manera análoga a la demostración del teorema anterior, tenemos que un conjunto de s vértices del grafo puede ser conjunto de hojas de a lo más $(t-1)$ cerezas, pues de lo contrario habría una copia de $K_{s,t}$. Por lo tanto, hay en total a lo más
$$(t-1) \cdot \binom{n}{s} \quad s\text{-cerezas}.$$

Juntando todo:

$$n\left(\frac{2e(G)}{sn}\right)^s \leqslant (t-1)\cdot\binom{n}{s} \overset{\text{Cota 2}}{\leqslant} (t-1)\cdot\left(\frac{ne}{s}\right)^s,$$

luego

$$\frac{2e(G)}{sn} \leqslant \frac{(t-1)^{\frac{1}{s}}}{n^{\frac{1}{s}}}\cdot\frac{ne}{s},$$

equivalentemente,

$$e(G) \leqslant \frac{(t-1)^{\frac{1}{s}}se}{2s}\cdot n^{2-\frac{1}{s}} = c(s,t)\cdot n^{2-\frac{1}{s}}.$$

□

Ejercicio 1.2.7. Demostrar que

$$\mathrm{ex}(n,H) = o(n^2) \quad \Leftrightarrow \quad H \text{ es bipartito.}$$

Solución. Como H es bipartito, existen $s,t \in \mathbb{N}$, digamos $s \leqslant t$, tales $H \subset K_{s,t}$. Así, por el Teorema de 1.2.5,

$$\mathrm{ex}(n,H) \leqslant c(s,t)\cdot n^{2-\frac{1}{s}},$$

pues si G no contiene a H, tampoco contiene a $K_{s,t}$. Así, obtenemos que $\mathrm{ex}(n,H) = o(n^2)$.

Recíprocamente, supongamos que H no es bipartito, luego por la Observación 1.1.9, $\mathrm{ex}(n,H) = \Theta(n^2)$. Con lo cual, si $\mathrm{ex}(n,H) = o(n^2)$, necesariamente H es bipartito. □

1.3. Números extremales para árboles

Teorema 1.3.1. *Sean $n,k \in \mathbb{N}$ y T un árbol con $k+1$ vértices. Entonces,*

$$\mathrm{ex}(n,T) \leqslant (k-1)\cdot n.$$

Lema 1.3.2. *Sean $k \in \mathbb{N}$ y T un árbol con $k+1$ vértices. Entonces si G es un grafo con $\delta(G) \geqslant k$, luego contiene a T como subgrafo.*

Demostración. Haremos inducción en k. Para $k = 1$ es claro, pues existe un vértice con al menos un vecino. En general, supongamos que $k \geqslant 2$. Sea h una hoja de T y consideremos el árbol $T' = T\setminus\{h\}$. Por hipótesis inductiva, $T' \subset G$. Sea p el único vecino de h en T, i.e. $p \in T'$. Como T tiene $k+1$ vértices, p tiene a lo más $k-1$ vecinos en T', luego p tiene un vecino en G que no está en T' pues $\delta_G(p) \geqslant k$. Entonces podemos incrustar T en G considerando h como este vértice. □

Lema 1.3.3. *Todo grafo G contiene un subgrafo H con $\delta(H) > \varepsilon(H) \geqslant \frac{e(G)}{n}$, donde $n = |G|$.*

Demostración. Construiremos una secuencia de subgrafos de G:

$$G =: G_0 \supset G_1 \supset \cdots$$

de la siguiente manera, si $v_i \in G_i$ es un vértice con $d_{G_i}(v_i) \leqslant \varepsilon(G_i) := \frac{e(G_i)}{|G_i|}$, entonces definimos $G_{i+1} := G_i \backslash \{v_i\}$. Eventualmente esta secuencia termina, digamos en $H := G_{j_0}$.

Notar que $\varepsilon(G_{i+1}) \geqslant \varepsilon(G_i)$, y por lo tanto $\varepsilon(H) \geqslant \varepsilon(G)$. En efecto,

$$\varepsilon(G_{i+1}) = \frac{e(G_{i+1})}{|G_{i+1}|} = \frac{e(G_i) - d_{G_i}(v_i)}{|G_i| - 1},$$

que es mayor o igual que $\frac{e(G_i)}{|G_i|}$ si y solo si

$$(e(G_i) - d_{G_i}(v_i))\,|G_i| \geqslant e(G_i)(|G_i| - 1),$$

equivalentemente,

$$e(G_i) \geqslant |G_i|\, d_{G_i}(v_i),$$

i.e.,

$$\frac{e(G_i)}{|G_i|} \geqslant d_{G_i}(v_i),$$

que es cierto por construcción. Por otro lado, por minimalidad de H, se sigue que $\delta(H) > \varepsilon(H)$. $\square$

Demostración del teorema. Sea G un grafo con $\geqslant (k-1)\cdot n + 1$ aristas. Por el segundo lema, G contiene H con

$$\delta(H) \geqslant \frac{e(G)}{n} > \frac{(k-1)n}{n},$$

y por el primer lema $T \subset H \subset G$. $\square$

Conjetura 1.3.4 (Erdös, Sós, 1963). *Se conjetura que en el teorema anterior se tiene una mejor cota:*

$$\mathrm{ex}(n,T) \leqslant \frac{1}{2}(k-1)n.$$

Notar que de ser verdadera la conjetura, entonces esta cota es tight cuando n es un múltiplo de k: Sea G el grafo obtenido al unir $\frac{n}{k}$ copias de K_k, así $e(G) = \frac{n}{k}\binom{k}{2} = \frac{n}{2}(k-1)$.

Esta conjetura es verdadera en el caso <u>T un camino</u>:

Teorema 1.3.5 (Erdös & Gallai, 1959). *Sean $n,k \in \mathbb{N}$. Entonces,*

$$\mathrm{ex}(n,P_k) \leqslant \frac{(k-1)\cdot n}{2}$$

Ejercicio 1.3.6. A partir de la demostración de este teorema, obtenga que los grafos extremales son únicos.

Lema 1.3.7. *Todo grafo conexo G con n vértices contiene un camino de largo*

$$k := \min\{2\delta(G), n-1\}.$$

Demostración. Tomemos $P := v_0, \ldots, v_l$ camino de largo máximo. Sabemos que $N_G(v_0), N_G(v_l) \subset V(P)$ por maximalidad de P. Si $V(P) = V(G)$ ganamos. Así que supongamos que no; supongamos también que $l < k \leqslant 2\delta(G)$. Demostraremos que existe un ciclo de longitud l contenido en $G[V(P)]$, así llegaremos a una contradicción pues al existir un vértice x fuera de $G[V(P)]$ en G, podríamos extender el ciclo a un camino de longitud al menos $k+1$ en G conectándolo con x.

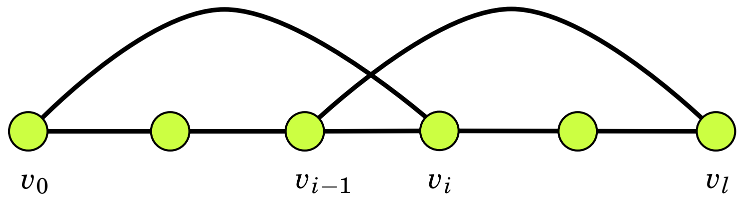


Figura 1.3.4: Notar que en este caso $v_0Pv_{i-1}v_lPv_iv_0$ es un ciclo de longitud $|P|$ en $G[V(P)]$.

En efecto, supongamos que no existe tal ciclo, luego para cada $i \in \{1,\dots,l-1\}$ se tiene que $v_{i-1}v_l \notin E(G)$ o $v_0v_i \notin E(G)$. Entonces

$$2\delta(G) \leqslant d_G(v_0) + d_G(v_l) \leqslant l < 2\delta(G),$$

absurdo. □

Demostración del teorema. Haremos inducción en n. Afirmamos que G es P_k-libre en n vérties, entonces

$$e(G) \leqslant \frac{(k-1)\cdot n}{2}.$$

El caso base es $n \leqslant k$, luego $e(G) \leqslant \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \leqslant \frac{n(k-1)}{2}$. Luego supongamos que $n \geqslant k+1$. Si G no es conexo: sean $G_1,\dots,G_r$ las componentes conexas, por hipótesis

$$e(G_i) \leqslant \frac{|G_i|(k-1)}{2},$$

entonces

$$e(G) = \sum_{i=1}^{r} e(G_i) \leqslant \frac{k-1}{2}\sum_{i=1}^{r}|G_i| = \frac{n(k-1)}{2}.$$

Ahora, supongamos que G es conexo. Si $n-1 \leqslant 2\delta(G)$, entonces por el Lema 1.3.7, G contiene un camino de largo $n-1 \geqslant k$, absurdo. Con lo cual, podemos asumir que $2\delta(G) \leqslant n-1$, y por el Lema, G contiene un camino de largo $2\delta(G)$ que debe cumplir

$$2\delta(G) < k \quad \Leftrightarrow \quad \delta(G) \leqslant \frac{k-1}{2}.$$

Sea v un vértice de grado $\leqslant \frac{k-1}{2}$, consideremos $G' := G\backslash\{v\}$. Por hipótesis inductiva

$$e(G') \leqslant \frac{(n-1)(k-1)}{2},$$

con lo cual,

$$e(G) \leqslant e(G') + \frac{k-1}{2} \leqslant \frac{(n-1)(k-1)}{2} + \frac{k-1}{2} = \frac{n(k-1)}{2}.$$

□

1.4. Estabilidad y supersaturación

Teorema 1.4.1 (Füredi, 2015)**.** *Sean $n, t \in \mathbb{N}$, y G con n vértices. Si G está **t-lejos** de ser bipartito*[3]*, entonces hay al menos*

$$\frac{n}{6}\left(e(G) - \frac{n^2}{4} + t\right)$$

triángulos en G.

Demostración. Para cada $u \in V(G)$, definimos

$$B_u := N_G(u) \quad \text{y} \quad A_u := V(G) \backslash B_u.$$

Luego la cantidad de tríangulos de G es:

$$k_3(G) = \frac{1}{3} \sum_{u \in V(G)} e(B_u).$$

Para cada $u \in V(G)$, si borro las aristas de $G[B_u]$ y las de $G[A_u]$, obtengo un subgrafo bipartito de G: el (A_u, B_u)-bigrafo; luego tuvimos que haber quitado al menos t aristas porque G está t-lejos de ser bipartito, es decir:

$$e(B_u) + e(A_u) \geqslant t.$$

Además, para cada $u \in V(G)$

$$\sum_{v \in A_u} d_G(v) = e(B_u, A_u) + 2e(A_u).$$

Como

$$e(G) = e(A_u) + e(A_u, B_u) + e(B_u),$$

se sigue que $e(A_u) = e(B_u) - e(G) + \sum_{v \in A_u} d_G(v)$ (juntando ambas ecuaciones). Ahora, por la desigualdad $e(B_u) + e(A_u) \geqslant t$, se tiene que

$$e(B_u) \geqslant t - e(A_u) = t + e(G) - e(B_u) - \sum_{v \in A_u} d_G(v)$$

y por lo tanto

$$2e(B_u) \geqslant t + e(G) - \sum_{v \in A_u} d_G(v).$$

[3] Esto significa que si H es un subgrafo bipartito de G, entonces $e(H) \leqslant e(G) - t$.

Sumando sobre todos los $u \in V(G)$ y utilizando que $k_3(G) = \frac{1}{3}\sum_{u\in V(G)} e(B_u)$, concluimos:

$$k_3(G) \geqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(nt + ne(G) - \sum_{u\in V(G)}\sum_{v\in A_u} d_G(v));$$

sin embargo, afirmamos que vale la siguiente igualdad:

$$\sum_{u\in V(G)}\sum_{v\in A_u} d_G(v) = \sum_{x\in V(G)} d_G(x)(n - d_G(x));$$

ya que cada término de la sumatoria se acota inferiormente por $\frac{n}{2}\cdot(n-\frac{n}{2}) = \frac{n^2}{2}$, concluimos el resultado.

Veamos la afirmación: notar que para cada $x \in V(G)$, su cantidad de aristas $d_G(x)$ es contada exactamente $|A_x| = n - d_G(x)$ veces del lado izquierdo de la sumatoria. □

Como corolario, se prueban los siguientes dos teoremas:

Teorema 1.4.2 (Estabilidad)**.** *Sean $n, t \in \mathbb{N}$, y G es K_3-libre con n vértices. Si $e(G) \geqslant \frac{n^2}{4} - t$, entonces G contiene un grafo bipartito con al menos $e(G) - t$ aristas.*

Demostración. Si G no tuviera un grafo bipartito con al menos $e(G) - t$ aristas, entonces G estaría $(t+1)$-lejos de ser bipartito. Por el Teorema 1.4.1 tiene al menos

$$\frac{n}{6}\left(e(G) - \frac{n^2}{4} + (t+1)\right) \geqslant \frac{n}{6}$$

triángulos, i.e., al menos uno, lo cual es absurdo. □

Teorema 1.4.3 (Supersaturación)**.** *Sean $n, t \in \mathbb{N}$, y G un grafo con n vértices. Si $e(G) \geqslant \frac{n^2}{4} + t$, entonces G contiene al menos $t \cdot n/3$ triángulos.*

Demostración. Notar que G está t-lejos de ser bipartito, en efecto, un grafo bipartito de orden $m \leqslant n$ tiene a lo más $\frac{m^2}{4} \leqslant \frac{n^2}{4}$ aristas, pero G tiene al menos $\frac{n^2}{4} + t \geqslant \frac{m^2}{4} + t$ aristas. Luego por el Teorema 1.4.1, G tiene

$$\frac{n}{6}\left(e(G) - \frac{n^2}{4} + (t+1)\right) \geqslant \frac{n}{3}t$$

triángulos. □

Teorema 1.4.4 (Füredi, 2015 – Estabilidad)**.** *Sean $n, k \in \mathbb{N}$, $t \geqslant 0$ y G un grafo K_{k+1}-libre en n-vértices. Si $e(G) \geqslant t_k(n) - t$, entonces G contiene un subgrafo generador k-partito con al menos $e(G) - t$ aristas.*

Demostración. Haremos inducción en k. El caso $k = 1$ tenemos que $t_k(n) = 0$ y siempre se cumple. Entonces supongamos que $k \geqslant 2$. Tomemos $u \in V(G)$ con $d_G(u) = \Delta(G)$. Definamos $G' := G[B]$ con $B = N_G(u)$. Sea $A = V(G)\backslash B$. El grafo G' es K_k-libre porque G es K_{k+1}-libre, luego por el Teorema de Turán 1.1.6, $e(G') \leqslant t_{k-1}(d)$ con $d := |B|$ y entonces podemos definir $t' := t_{k-1}(d) - e(G') \geqslant 0$ y aplicar hipótesis inductiva al grafo G'. Así, G' contiene un subgrafo H' generador $(k-1)$-partito con al menos $e(G')-t' = 2e(G')-t_{k-1}(d)$ aristas.

Probemos que

$$H := \Big(V(H') \cup A, E(H') \cup E(A,B)\Big)$$

tiene al menos $e(G)-t$ aristas, y así H es un subgrafo k-partito generador de G con al menos $e(G)-t$ aristas. En efecto, queremos probar que

$$e(H') + e(A,B) \geqslant e(G) - t;$$

como $e(G) = e(A,B) + e(G') + e(A)$, la desigualdad de arriba es equivalente a

$$e(H') \geqslant e(G') + e(A) - t \quad \Leftrightarrow \quad e(H') - e(G') + t \geqslant e(A).$$

Ya que $e(H') \geqslant e(G') - t'$, nos queda que la última desigualdad es cierta si $e(A) \leqslant t - t'$.

Sabemos que

$$2e(A) + e(A,B) = \sum_{v \in A} d_G(v) \leqslant d \cdot (n-d),$$

donde la desigualdad sale de que la sumatoria tiene $(n-d)$ términos y cada grado $d_G(v) \leqslant \Delta(G) = d_G(u) = |B| = d$; y reemplacemos $e(A,B) = e(G) - e(A) - e(G')$ y nos queda

$$e(A) + e(G) - e(G') \leqslant d \cdot (n-d).$$

Ahora, notar que

$$t_k(n) \geqslant t_{k-1}(d) + d \cdot (n-d),$$

pues el lado izquierdo es la cantidad de aristas de un grafo de Turán (la cual es máxima) y el lado derecho es la cantidad de aristas de un grafo k-partito en n-vértices: el obtenido a patir del grafo de turán $T_{k-1}(d)$ agregando $n-d$ vértices y conectándolos a las $k-1$ particiones de $T_{k-1}(d)$. Juntando todo,

$$e(A) \leqslant d \cdot (n-d) - \overbrace{e(G)}^{\geqslant t_k(n)-t} + \overbrace{e(G')}^{=t_{k-1}(d)-t'} \leqslant d \cdot (n-d) - t_k(n) + t + t_{k-1}(d) - t' \leqslant t - t'$$

como queríamos probar. □

1.5. Teorema de Erdös-Stone

Notación 1.5.1. Notaremos por $K_s(t)$ al grafo de Turán $T_s(t \cdot s)$.

Teorema 1.5.2 (Erdös-Stone, 1946). *Sea H un grafo con $e(H) \geqslant 1$. Entonces*

$$\mathrm{ex}(n,H) \leqslant \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + o(1)\right) \cdot \frac{n^2}{2} \quad (n \to \infty).$$

Observación 1.5.3. Sea H un grafo con $e(H) \geqslant 1$. Entonces

$$t_{\chi(H)-1}(n) \leqslant \mathrm{ex}(n,H),$$

pues todo grafo G necesita de al menos $\chi(H)$ colores para tener a H incrustado, por lo tanto $T_{\chi(H)-1}(n)$ es H-libre.

Observación 1.5.4.
$$t_{\chi(H)-1}(n) \sim \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1}\right)\frac{n^2}{2}.$$
Con lo cual, la desigualdad de Erdös-Stone es asintóticamente justa.

Demostración. En efecto, esto equivale a probar que
$$t_k(n) \sim \left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{n^2}{2} \quad (n \to \infty),$$
para $k \geqslant 2$ fijo. Escribiendo $n = qk + r$ con $0 \leqslant r < k$, tenemos que
$$t_k(qk) \leqslant t_k(n) \leqslant t_k((q+1)k),$$
pero para cualquier $q \in \mathbb{N}$ es fácil de calcular el número de aristas del grafo de Turán $T_k(qk)$:
$$t_k(qk) = \left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{(qk)^2}{2},$$
con lo cual $t_k(qk), t_k((q+1)k) \sim \left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{n^2}{2}$ y por lo tanto $t_k(n)$ también. $\square$

Lema 1.5.5. *Sea $c \in (0,1)$ y sea $\varepsilon > 0$. Si G es un grafo con n vértices, con n lo suficientemente grande tal que*
$$e(G) \geqslant c\frac{n^2}{2},$$
entonces existe un subgrafo $G' \subset G$ con
$$|G'| \geqslant \varepsilon n \quad y \quad \delta(G') \geqslant (c-\varepsilon)\,|G'|.$$

Demostración. Sea $G_n, G_{n-1}, G_{n-2}, \dots, G_t$ la secuencia de subgrafos de G obtenida de la siguiente manera: $G_n := G$ y el grafo $G_{n-(i+1)}$ se obtiene a partir de G_{n-i} borrando un vértice $v \in V(G_{n-i})$ con $d_{G_{n-i}}(v) < (c-\varepsilon)\cdot|G_{n-i}|$; además, G_t es el último grafo de la secuencia. Notar que $|G_{n-i}| = n-i$.

Afirmamos que $t \geqslant \varepsilon n$ para n lo suficientemente grande, y por ende, G_t será el subgrafo que buscabamos: por construcción $\delta(G_t) \geqslant (c-\varepsilon)\,|G_t|$. Para eso, calculamos la cantidad total de aristas borradas para la obtención de G_t:
$$\sum_{i=0}^{n-(t+1)} d_{G_{n-i}}(v_i) < (c-\varepsilon)\sum_{i=0}^{n-(t+1)} n-i = (c-\varepsilon)(n-t)(n+t+1)/2,$$
y como G_t tiene a lo más $\binom{t}{2}$ aristas, tenemos que
$$e(G) \leqslant (c-\varepsilon)(n-t)(n+t+1)/2 + \binom{t}{2}.$$

Supongamos por el absurdo que $t \leqslant \varepsilon n$. Nuestro objetivo es acotar el lado derecho:
$$\begin{aligned} e(G) \leqslant (c-\varepsilon)(n-t)(n+t+1)/2 + \binom{t}{2} &= (c-\varepsilon)\frac{(n^2+n-(t^2+t))}{2} + \frac{t(t-1)}{2} \\ &\leqslant (c-\varepsilon)\frac{n^2+n}{2} + \frac{\varepsilon n(\varepsilon n-1)}{2} \\ &= (c-\varepsilon+\varepsilon^2)\frac{n^2}{2} + (c-2\varepsilon)\frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Notar que el lado derecho es un polinomio cuadrático en la variable n con coeficiente principal $\frac{c-\varepsilon+\varepsilon^2}{2} < \frac{c}{2}$ y por lo tanto para n lo suficientemente grande, se contradice la desigualdad $c\frac{n^2}{2} \leqslant e(G)$. Así, $t \geqslant \varepsilon n$. $\square$

Lema 1.5.6. *Para todo $r,t \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si G es un grafo con $n \geqslant n_0$ vértices y*

$$\delta(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) n$$

luego $K_{r+1}(t) \subset G$.

Demostración. Procedemos por inducción en r. Para $r = 1$, tenemos que $K_2(t) = K_{t,t}$ y sabemos que en este caso $\text{ex}(n,K_{t,t}) = o(n^2)$. Como n es lo suficientemente grande, $K_{t,t} \subset G$. En efecto, se tendrá que

$$e(G) = \frac{1}{2}\sum_{v\in G} d_G(v) \geqslant \frac{\delta(G)n}{2} \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right)\frac{n^2}{2}.$$

Ahora, supongamos que $r \geqslant 2$. Primero, encontraremos por hipótesis inductiva, una copia de $K_r(q)$ con $q \geqslant t/\varepsilon$; escribamos $A := \bigcup_{i=1}^{r} A_i$ a la partición de los vértices de $K_r(q)$.

Luego, definimos $X \subset B := V(G)\backslash A$, el conjunto de todos los vértices que tienen al menos t vecinos en cada A_i. Mostramos que $|X| \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Para esto, acotamos $e(A,B)$ por abajo:

$$\begin{aligned} e(A,B) &= \sum_{v\in A} d_G(v) - 2e(A) \\ &\geqslant qr\left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right)n - 2\frac{(qr)^2}{2}. \end{aligned}$$

Y acotamos por arriba:

$$e(A,B) \leqslant |X|qr + (|B| - |X|)(q(r-1) + t - 1).$$

Juntando ambas desigualdades, tenemos:

$$n\underbrace{(qr\varepsilon - t + 1)}_{>0} + q^2(-r^2 + r - 1) - q(t-1) \leqslant |X|\underbrace{(q - t + 1)}_{>0}$$

Por lo tanto, se sigue lo que queremos cuando $n \to \infty$.

Finalmente, demostramos que existen conjuntos

$$B_i \subset A_i \text{ con } |B_i| = t \text{ y } t \text{ vértices } x \in X \text{ que satisfacen } N_G(x) \supset B_i,$$

de donde concluiremos que $K_{r+1}(t) \subset G$. Sea $x \in X$, existen a lo más $\binom{q}{t}$ formas de elegir B_i^x en A_i, donde B_i^x satisface $\left|B_i^x\right| = t$ y $N_G(x) \subset B_i^x$. Si $|X| > \binom{q}{t}^r \cdot (t-1)$, entonces por el principio del palomar tenemos lo que queremos. $\square$

Demostración del Teorema. Observemos que H está contenido en el grafo $\chi(H)$-partito, completo y con partes de tamaño $|H|$, es decir, en $K_{\chi(H)}(|H|)$. Con lo cual, basta probar el teorema para $H' := K_r(t)$ con $r := \chi(H)$ y $t := |H|$. De hecho, probaremos que para cualquier $r \geqslant 2$, $t \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\mathrm{ex}(n, K_r(t)) \leqslant \left(1 - \frac{1}{r-1} + \varepsilon\right)\frac{n^2}{2} \quad (n \geqslant n_0).$$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño. Sea n lo suficientemente grande, y G con n vértices tal que

$$e(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{r-1} + \varepsilon\right)\frac{n^2}{2}.$$

Aplicamos el primer lema 1.5.5 con $c = 1 - \frac{1}{r-1} + \varepsilon$ y $\frac{\varepsilon}{2}$. Así, obtenemos un subgrafo $G' \subset G$ con

$$|G'| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}n \quad \text{y} \quad \delta(G') \geqslant \left(1 - \frac{1}{r-1} + \frac{\varepsilon}{2}\right)|G'|.$$

Como n es lo suficientemente grande: $\frac{\varepsilon}{2}n \geqslant n_0$, y por el segundo lema 1.5.6, G' contiene a $K_r(t)$, y por lo tanto G también. El resultado se sigue. □

Definición 1.5.7. G está ***t*-cerca** de ser r-partito si existe un subgrafo r-partito de G con al menos $e(G) - t$ aristas.

Teorema 1.5.8 (Teorema de Estabilidad de Erdös-simonovits)**.** *Para todo grafo H con $e(H) \geqslant 1$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que: si G es H-libre en n-vertices y*

$$e(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} - \delta\right)\binom{n}{2}.$$

Entonces G está (εn^2)-cerca de ser $(\chi(H)-1)$-partito.

Haremos la demostración con $H = K_{r+1}$ y para H general lo haremos con el Lema de Regularidad 1.7.5.

> Para todo $\varepsilon > 0$ lo suficientemente chico, existe $\delta > 0$ tal que: si G es K_{r+1}-libre en n-vértices y
>
> $$e(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right)\overbrace{\binom{n}{2}}^{\sim \frac{n^2}{2}},$$
>
> entonces G está (εn^2)-cerca de ser r-partito.

Requerimos probar dos lemas previos:

Lema 1.5.9. *Sea $r \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ y n suficientemente grande. Si G es K_{r+1}-libre con n vértices y*

$$e(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} - \delta^2\right)\frac{n^2}{2},$$

entonces existe $G' \subset G$ con $|G'| \geqslant (1-\delta)n$ y

$$\delta(G') \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right)|G'|.$$

Demostración. De la demostración del Lema 1.5.5 se deduce un enunciado más fuerte:

> Dados $r \in \mathbb{N}$ y $c \in (0,1)$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo grafo G con $n \geqslant n_0$ vértices y
> $$e(G) \geqslant c\frac{n^2}{2},$$
> existe un subgrafo $G_t \subset G$ con $|G_t| = t \geqslant \varepsilon n$ y $\delta(G_t) \geqslant (c-\varepsilon)|G_t|$; más aún,
> $$e(G) \leqslant e(G_t) + (c-\varepsilon)(n-t)(n+t+1)/2.$$

Ahora, dado $\delta > 0$, el cual sin pérdida de generalidad lo podemos asumir $\delta < \frac{1}{2}$, tomamos $c := \left(1 - \frac{1}{r} - \delta^2\right) > 0$ y $\varepsilon = \delta - \delta^2 > 0$. Supongamos que G es un grafo con n vértices K_{r+1}-libre, y

$$e(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} - \delta^2\right)\frac{n^2}{2} = c\frac{n^2}{2},$$

luego existe un subgrafo $G_t \subset G$ con $t \geqslant (\delta - \delta^2)n$ vértices. Como en la demostración de la Observación 1.5.4 se ve que $t_r(t) \sim \left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{t^2}{2}$ $(t \to \infty)$, podemos suponer que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$, entonces $t_r(t) \leqslant \left(1 - \frac{1}{r} + \gamma\right)\frac{t^2}{2}$, para $\gamma := \frac{\delta^2}{2}$.

Ahora, como G es K_{r+1}-libre, entonces G_t también y se tiene que

$$e(G_t) \leqslant \mathrm{ex}(t, K_{r+1}) \leqslant t_r(t) \leqslant \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\delta^2}{2}\right)\frac{t^2}{2},$$

por el Teorema de Turán 1.1.6. Juntando esto con lo mencionado al principio, tenemos que

$$\begin{aligned} c\frac{n^2}{2} \leqslant e(G) &\leqslant e(G_t) + (c-\varepsilon)(n-t)(n+t+1)/2 \\ &\leqslant \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\delta^2}{2}\right)\frac{t^2}{2} + (c-\varepsilon)(n-t)(n+t+1)/2 \\ &= \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\delta^2}{2}\right)\frac{t^2}{2} + (c-\varepsilon)\frac{(n^2+n-t^2-t)}{2}, \end{aligned}$$

esto implica que para n lo suficientemente grande de tal suerte que $\frac{(c-\varepsilon)}{2}n \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\frac{n^2}{2}$,

$$\varepsilon\frac{n^2}{4} \leqslant (\delta + \frac{\delta^2}{2})\frac{t^2}{2}.$$

Reemplazando $\varepsilon = \delta - \delta^2$ en la última desigualdad, y despejando t:

$$\sqrt{\frac{\delta - \delta^2}{2\delta + \delta^2}}\,n \leqslant t.$$

Como la expresión de la izquierda es más grande que $(1-\delta)$ cuando $\delta < \frac{1}{2}$, se sigue que para todo n lo suficientemente grande,

$$|G_t| = t \geqslant (1-\delta)n.$$

Es decir, G_t es el subgrafo G' de G que cumple las propiedades deseadas del enunciado. $\square$

Lema 1.5.10. *Para todo $r \in \mathbb{N}$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si G es K_{r+1}-libre con n vértices y*

$$\delta(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right) n,$$

entonces existe una partición $V(G) = A_0 \coprod A_1 \coprod \cdots \coprod A_r$ tal que $|A_0| \leqslant \varepsilon n$ y A_i son conjuntos independientes para todo $i \geqslant 1$.

Demostración. Si tomamos $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño, entonces G contiene una copia de K_r por el Teorema de Turán 1.1.6 (esto ocurre si $e(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{r-1}\right) \frac{n^2}{2}$; tomar $\delta < \frac{1}{r-1} - \frac{1}{r}$ y notar que en la demostración de la Observación 1.5.4 se ve que $t_r(t) \sim \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{t^2}{2}$ $(t \to \infty)$).

Sea A un conjunto de vértices que induce un K_r en G. Sean $B := V(G) \backslash A$ y $X := \{v \in V(G) \mid |N_G(v) \cap A| \leqslant r-2\}$, vamos a mostrar que X es pequeño.

$$\left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right) nr - r(r-1) \leqslant e(A,B) \qquad \left(2e(A) + e(A,B) = \sum_{v \in A} d_G(v) \geqslant r\left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right) n\right)$$
$$\leqslant (r-1)((n-r) - |X|) + (r-2)|X| = (r-1)(n-r) - |X|,$$

manipulando la desigualdad, obtenemos:

$$|X| \leqslant \delta n r.$$

Tomando $\delta < \text{mín}\{\frac{\varepsilon}{r}, \frac{1}{r-1} - \frac{1}{r}\}$, el A_0 será X y los consjuntos independientes son:

$$A_u = \{u\} \cup \{v \in B \backslash X | vu \notin E(G)\}$$

para cada $u \in A$. □

Ahora estamos en condiciones de demostrar el Teorema de Estabilidad de Erdos-Simonovits para $H = K_{r+1}$ 1.5:

Demostración del Teorema de Estabilidad de Erdos-Simonovits para $H = K_{r+1}$ 1.5. Sea $\varepsilon > 0$ chico, tomemos $\delta = (\delta')^2$ donde δ' se obtiene del Lema 1.5.10 con $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2}$. Notar que de la demostración podemos suponer que si $\varepsilon > 0$ es chico, luego $\delta' < \frac{\varepsilon'}{2}$ también. Por hipótesis

$$e(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} - (\delta')^2\right) \frac{n^2}{2},$$

entonces por el Lema 1.5.9: existe $G' \subset G$ con $n' := |G'| \geqslant (1-\delta')n$ y $\delta(G') \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} - \delta'\right)|G'| = n'$. Por el Lema 1.5.10: para $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2}$ se tiene que existe $A_0, A_1, \ldots, A_r$ partición de G' con $|A_0| < \varepsilon' n' \leqslant \varepsilon' n$ y A_i conjuntos independientes para todo $i \geqslant 1$. Así el subgrafo generado por los A_i con $i \geqslant 1$ es r-partito. Además, para obtener este subgrafo, hay que quitar a lo más

$$\varepsilon' n^2 + \varepsilon' n^2 < \varepsilon n^2 \qquad (\delta, \delta' \ll 1)$$

aristas de G, es decir, G está εn^2-cerca de ser r-partito. En efecto, las aristas de $G[V(G) \backslash V(G')]$ junto con $E_G(V(G'), V(G) \backslash V(G'))$ aportan $\leqslant \binom{\delta' n}{2} + n' \cdot (n - n') \leqslant \delta' n^2 + \delta' n^2 \leqslant \varepsilon' n^2$, y las de $G[V(A_0)]$ junto con $E_G(V(A_0), V(G) \backslash V(A_0))$ aportan

$$\leqslant \binom{\varepsilon' n}{2} + (\varepsilon' n) \cdot (\delta') n \leqslant \varepsilon' n^2.$$

□

1.6. Ejercicios

Ejercicio 1.6.1. Puebe el teorema de Mantel de manera alternativa. Considere un conjunto independiente B de tamaño máximo en un grafo K_3-libre y la suma de los grados de los vértices que no están en B.

Solución. Sea G un grafo K_3-libre con orden n y B un conjunto independiente de G de tamaño máximo; consideremos $A := V(G)\backslash B$. Inspeccionemos la sumatoria

$$\sum_{v\in A} d_G(v);$$

notar que $d_G(v) = |N_G(v)|$ y que $N_G(v)$ es un conjunto de vértices aislados en G: si x, y son dos vecinos de v entonces $xy \notin E(G)$ porque de lo contrario G tendría un triángulo xyv. Así, como $|B|$ es máximo, se sigue que $|N_G(v)| \leqslant |B|$. Esto implica que

$$\sum_{v\in A} d_G(v) \leqslant |A|\,|B|.$$

Más aún, como A,B particionan $V(G)$: $|A|+|B| = n$. Luego $|A|\cdot|B|$ se maximiza cuando $|A|\,|B| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = t_2(n)$. Así,

$$e(G) = e(A,B) + e(A) \leqslant e(A,B) + 2e(A) = \sum_{v\in A} d_G(v) \leqslant t_2(n),$$

como queríamos probar. □

Comentario 1.6.2. Que $|A|\cdot|B|$ con $|A|+|B| = n$ se maximiza cuando $|A|\cdot|B| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ se deduce de que reemplazando $|B| = n-|A|$, el problema equivale a maximizar $|A|\cdot(n-|A|)$. Más formalmente, el problema equivale a maximizar $f(x) = x(n-x)$ con x número natural en el intervalo $[0,n]$. Simplemente notemos que $f'(x) = n-2x$, luego f es creciente en $[0,\frac{n}{2}]$ y decreciente en $[\frac{n}{2},n]$, pero como $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ es el mayor número entero $\leqslant \frac{n}{2}$, f alcanza máximo en $[0,\frac{n}{2}]$ cuando $x = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, similarmente, f alcanza máximo en $[\frac{n}{2},n]$ cuando $x = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Como $f(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) = f(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil)$, se sigue que f se maximiza en $x = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ y $x = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, es decir, el valor máximo de f es $f(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Ejercicio 1.6.3. Demuestre que si G es un grafo con $n = 2k+1$ vértices, entonces G contiene un camino de largo k, digamos P_k, o el complemento de G tiene un triángulo.

Solución. Supongamos por el absurdo que ninguna de las dos situaciones pasa. Por un lado, si el complemento $\overline{G}$ de G no contiene triángulos, el Teorema de Mantel nos dice que

$$e(\overline{G}) \leqslant \mathrm{ex}(n,K_3) \leqslant k(k+1).$$

Como $(2k+1)k = \binom{n}{2} = e(G) + e(\overline{G})$, deducimos que

$$k^2 \leqslant e(G).$$

Por otro lado, si G no contiene P_k-caminos, el Teorema de Erdös & Gallai dice que

$$e(G) \leqslant \mathrm{ex}(n,P_k) \leqslant \frac{(k-1)n}{2} = \frac{(k-1)(2k+1)}{2}.$$

Juntando ambas desigualdades, llegamos al absurdo:

$$k^2 \overset{!!!}{\leqslant} \frac{(k-1)(2k+1)}{2}.$$

Por lo tanto, G contiene un P_k-camino o $\overline{G}$ un triángulo. □

Ejercicio 1.6.4. Demuestre que si T es un árbol con k vértices, entonces $T \subseteq G$ o el complemento de G contiene un triángulo si $n := |G| = 2k-1$.

Solución. Supongamos por el absurdo que G es un grafo con $n = 2k-1$ vértices que no contiene a un árbol T con k vértices, y que $\overline{G}$, su complemento, no contiene triángulos. En particular, la primera suposición implica que $\delta(G) \leqslant k-2$ por el siguiente lema, cuya demostración vimos en clase:

> *Sean $t \in \mathbb{N}$ y T un árbol con $t+1$ vértices. Entonces si G es un grafo con $\delta(G) \geqslant t$, luego contiene a T como subgrafo.*

Mientras que la segunda suposición ($\overline{G}$ no tiene triángulos), implica que dado un vértice $w \in V(G)$, entonces para cada par de vértices w', w'' no adyacentes a w se tiene que $w'w'' \in E(G)$. En otras palabras, para todo $w \in V(G)$, el subgrafo $G[A_w]$ inducido por el conjunto $A_w := V(G)\backslash\{N_G(w) \cup \{w\}\}$ es completo; notar que como $|A_w| = n - (d_G(w)+1)$, este grafo es isomorfo a $K_{n-d_G(w)-1}$.

Finalmente, para llegar al absurdo, consideremos $v \in V(G)$ un vértice con grado $d_G(v) = \delta(G) \leqslant k-2$, entonces $G[A_v]$ es un subgrafo de G isomorfo a $K_{n-\delta(G)-1}$, i.e. un completo con al menos

$$n - \delta(G) - 1 = (2k-1) - \delta(G) - 1 \geqslant (2k-1) - (k-2) - 1 = k$$

vértices, luego contiene una copia de T, con lo cual G también: absurdo. Consecuentemente, G contiene una copia de T o $\overline{G}$ tiene triángulo(s). □

Solución. [Segunda solución] Otra manera de resolver el ejercicio es haciendo inducción $k \geqslant 1$: supongamos que G es un grafo de orden $2k-1$ con $\overline{G}$ libre de triángulos, probaremos que $T \subset G$ para cualquier árbol T de orden k. El caso $k = 1$ es trivial.

En general, supongamos que $k \geqslant 2$ y tomemos una hoja h de T, consideremos $T' := T\backslash\{h\}$ y escribamos $p \in T'$ para el padre de h en T. Ahora, si G es completo ya ganamos, pues $K_{2k-1} \supset T$, con lo cual podemos suponer que existen $v, w \in V(G)$ tales que $vw \notin G$, y consideremos $G' := G\backslash\{v, w\}$. Notar que $\overline{G}'$ es K_3-libre y G' tiene orden $2(k-1)-1$, luego por hipótesis inductiva G' contiene a T'. Por otro lado, $p \in T'$ tiene que ser vecino de w o de v en G, de lo contrario $\overline{G}$ tendría un triángulo! Esto prueba que $T \subset G$. □

Ejercicio 1.6.5. Pruebe que si $e(G) > n^2/4$, entonces G contiene al menos $\lfloor n/2 \rfloor$ triángulos.

Solución. El Teorema de Füredi (2015) dice:

> *Sean $n, t \in \mathbb{N}$, y G con n vértices. Si G está t-lejos de ser bipartito, entonces hay al menos*
> $$\frac{n}{6}\left(e(G) - \frac{n^2}{4} + t\right)$$
> *triángulos en G.*

Sea $H \subset G$ el subgrafo bipartito con cantidad de aristas $e(H)$ máxima de G. Como $e(H) \leqslant \frac{n^2}{2} < e(G)$, tenemos que $H \subsetneq G$; y podemos escribir $t := e(G) - e(H) \geqslant 1$. En particular, como $e(H)$ es máximo, tenemos que G está t-lejos de ser bipartito. Con lo cual, el Teorema de Füredi implica que G contiene al menos

$$\frac{n}{6}\left(e(G) - \frac{n^2}{4} + t\right)$$

triángulos; en particular, si $e(G) - \frac{n^2}{4} + t \geqslant 3$ ganamos, pues en este caso habrían al menos $\frac{n}{2} \geqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ triángulos. Por otro lado, esta cantidad es menor que 3 si y solo si $t = 1$ y $H = T_2(n)$. En este caso, $H = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$. Tomemos una aristas $f \in E(G) \backslash E(H)$, con lo cual f tiene sus extremos en una de las dos particiones de H; en el peor de los casos está en la partición más grande, es decir, para todo vértice v de la partición de H con menor cantidad de vértices: $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, se forma un triángulo distinto con vértices v y los extremos de f. En particular, G contiene en este caso al menos $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ triángulos. □

Ejercicio 1.6.6. Sean G y H grafos. Demuestre que si G tiene n vértices y al menos $2 \cdot \text{ex}(n,H)$ aristas, entonces G contiene al menos $\text{ex}(n,H)$ copias de H.

Solución. Supongamos que G no contiene $e := \text{ex}(n,H)$ copias de H, luego quitando una arista por cada copia de H en G obtenemos un grafo H-libre con al menos $e(G) - (e-1) \geqslant 2e - (e-1) = e+1$ aristas. Sin embargo, por definición de e, se sigue que este grafo tiene a lo más e aristas, absurdo. Esto prueba que G tiene al menos e copias de H. □

Ejercicio 1.6.7. Sea $k \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Demuestre que todo grafo G con n vértices y al menos $n^2/4$ aristas contiene un grafo H con al menos k vértices y $\delta(H) \geqslant \frac{|H|}{2}$.

Solución. Probaremos un enunciado más fuerte:

> *Sea $k \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Entonces todo grafo G con n vértices y al menos $\frac{n^2}{4}$ aristas contiene a $H := K_{k,k}$.*

Esto prueba el ejercicio pues el grafo $H := K_{k,k}$ tiene $2k \geqslant k$ vértices y $\delta(H) = k = \frac{v(H)}{2}$.

Ahora probemos este enunciado más fuerte. Para eso utilizaremos el Teorema de Kövani, Sós, y Turán (abreviado "KST"):

> *Sean $s,t \in \mathbb{N}$, $s \leqslant t$. Entonces existe una constante $c = c(s,t) > 0$ tal que*
>
> $$\text{ex}(n, K_{s,t}) \leqslant c \cdot n^{2-\frac{1}{s}}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$
>
> lo aplicamos al caso $s = t = k$.
>
> Así, el Teorema de KST dice que
>
> $$\text{ex}(n,H) \leqslant c \cdot n^{2-\frac{1}{k}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

con $c>0$ una constante que depende solo de k. Tomando $n_0 \in \mathbb{N}$ para que $\frac{n^2}{4} > cn^{2-\frac{1}{k}}$ valga para todo $n \geqslant n_0$, se sigue que G siempre debe tener a H como subgrafo: de lo contrarío se llegaría al absurdo:

$$\frac{n^2}{4} \leqslant e(G) \leqslant \mathrm{ex}(n,H) \leqslant cn^{2-\frac{1}{k}}.$$

□

Solución. [Segunda solución] Por el Lema 1.3.3, G contiene un subgrafo H' tal que

$$\delta(H') > \varepsilon(H') \geqslant \varepsilon(G).$$

Como $\varepsilon(G) = \frac{e(G)}{|G|} \geqslant \frac{n}{4}$, se tiene que para n lo suficientemente grande, H' contiene a $K_{1,k}$, y por lo tanto $H := K_{1,k}$ sirve. En efecto,

$$\delta(H) = k \geqslant \frac{k+1}{2} = \frac{|H|}{2}.$$

□

1.7. Regularidad

Definición 1.7.1. Dada una partición de los vértices de un grafo G, digamos $V(G) = X \coprod Y$, definimos la **densidad** del par (X,Y) como la cantidad

$$d(X,Y) := \frac{e(X,Y)}{|X||Y|}.$$

Definición 1.7.2. Dado $\varepsilon > 0$. Sean $A,B \subset V(G)$ con G un grafo. Diremos que el par (A,B) es ε-**regular** si para todo $X \subset A$, $Y \subset B$ con

$$|X| \geqslant \varepsilon|A| \quad \text{e} \quad |Y| \geqslant \varepsilon|B|$$

tenemos

$$|d(X,Y) - d(A,B)| \leqslant \varepsilon.$$

Definición 1.7.3. Sea G un grafo. Una partición $V(G) = V_0 \coprod V_1 \coprod \cdots \coprod V_k$, se dice **equipartición**, si

$$|V_0| \leqslant |V_1| = |V_2| = \cdots = |V_k|.$$

Al conjunto V_0 lo llamamos **conjunto excepcional**.

Definición 1.7.4. Sea G un grafo con n vértices y $\varepsilon > 0$. Diremos que una partición $V(G) = V_0 \coprod V_1 \coprod \cdots \coprod V_k$ es ε-**regular**, si $|V_0| \leqslant \varepsilon n$ y a lo más εk^2 pares (V_i, V_j) con $1 \leqslant i,j \leqslant k$ no son ε-regulares.

Teorema 1.7.5 (Lema de Regularidad de Szemerédi)**.** *Para todo $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$, existe $M = M(\varepsilon, m) \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier grafo G con $|G| \geqslant M$, existe una equipartición ε-regular*

$$V(G) = V_0 \coprod V_1 \coprod \cdots \coprod V_k$$

con $m \leqslant k \leqslant M$.

Demostración.

Definición 1.7.6. Dado un grafo G con n vértices y partición de sus vértices $\mathscr{P} = \{V_1,\dots,V_k\}$, definimos la **media cuadrática** del par (V_i,V_j) para cada $i \neq j$ como

$$d_2(V_i,V_j) := \frac{e(V_i,V_j)^2}{|V_i||V_j|n^2},$$

y la **media cuadrática** de la partición $\mathscr{P}$ como

$$d_2(\mathscr{P}) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} d_2(V_i,V_j) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} \frac{|V_i||V_j|}{n^2} d(V_i,V_j)^2 \leqslant 1.$$

Definición 1.7.7. Una partición $\mathscr{P}'$ de G se dice que **refina** a una partición $\mathscr{P}$ (o que es un **refinamiento** de $\mathscr{P}$) si cada parte de $\mathscr{P}$ es una unión de algunas partes de $\mathscr{P}'$.

Lema 1.7.8. *Si $\mathscr{P}'$ es un refinamiento de $\mathscr{P}$, entonces*

$$d_2(\mathscr{P}') \geqslant d_2(\mathscr{P}).$$

Lema 1.7.9. *Sea G un grafo y $\mathscr{P}$ una partición de $V(G)$. Si (X,Y) es un par no ε-regular en $\mathscr{P}$. Entonces, existen particiones $\{X_1,X_2\}$ de X y particiones $\{Y_1,Y_2\}$ de Y tales que*

$$\sum_{1\leqslant r,s\leqslant 2} \frac{|X_r||Y_s|}{n^2} \cdot d(X_r,Y_s)^2 \geqslant d(X,Y)^2 + \varepsilon^4.$$

Lema 1.7.10. *Sea G un grafo con n vértices y $\mathscr{P}$ partición de G que no es ε-regular. Entonces existe un refinamiento $\mathscr{P}'$ de $\mathscr{P}$ tal que:*

(I) $d_2(\mathscr{P}') \geqslant d_2(\mathscr{P}) + \varepsilon^5$.

(II) $\#\mathscr{P}' \leqslant k \cdot 2^{k-1}$.

Ahora, veamos la demostración del teorema. Sea $\mathscr{P}_0 = \{V_0,V_1,\dots,V_m\}$ una partición de G con $\underbrace{|V_0|}_{1\leqslant|V_0|\leqslant m-1} = n - n\left\lfloor \frac{n}{m}\right\rfloor$ y $|V_i| = \left\lfloor \frac{n}{m}\right\rfloor$ para todo $i = 1,\dots,m$. Si $\mathscr{P}_0$ no es ε-regular, existe $\mathscr{P}_1$ refinamiento de $\mathscr{P}_0$ tal que $d_2(\mathscr{P}_1) \geqslant d_2(\mathscr{P}_0) + \varepsilon^5$ y

$$|\mathscr{P}_1| \leqslant m \cdot 2^m.$$

Ahora, obtenemos una equipartición de $\mathscr{P}_1'$ a partir de $\mathscr{P}_1$: particionando cada parte de $\mathscr{P}_1$ en conjuntos de tamaño

$$\frac{\frac{\varepsilon^6}{2}n}{\#\mathscr{P}_1},$$

y un conjunto despreciable de tamaño $< \frac{\frac{\varepsilon^6}{2}n}{\#\mathscr{P}_1}$. En total, el conjunto de los vértices despreciados lo agregamos al *conjunto excepcional* V_0, es decir, agregamos $< \frac{\varepsilon^6}{2}n$ vértices. Afirmamos que $\mathscr{P}_1'$ está acotado por arriba por algo que depende de ε y m:

$$\#\mathscr{P}_1' \leqslant \frac{n}{\frac{\varepsilon^6 n}{2}} \Big/ \#\mathscr{P}_1 = \frac{2\#\mathscr{P}_1}{\varepsilon^6} \leqslant \frac{m2^{m+1}}{\varepsilon^6}.$$

Por el primer lema, $d_2(\mathscr{P}'_1) \geqslant d_2(\mathscr{P}_1) \geqslant d_2(\mathscr{P}_0) + \varepsilon^5$.

Si no obtenemos una partición ε-regular, entonces continuamos refinando, para así obtener una secuencia de equiparticiones:

$$\mathscr{P}_0, \mathscr{P}'_1, \mathscr{P}'_2, \ldots, \mathscr{P}'_k.$$

Como $d_(\mathscr{Q}) \leqslant 1$ para cualquier partición $\mathscr{Q}$ de G, y $d_2(\mathscr{P}_{i+1}) \geqslant d_2(\mathscr{P}'_i) + \varepsilon^5$, tenemos que $k \leqslant \varepsilon^{-5}$. Entonces, luego de a lo más ε^{-5} iteraciones, habremos encontrado una partición ε-regular con una cantidad de partes acotada por M que solamente depende de m y ε. Por último, el conjunto excepcional de dicha partición es

$$\leqslant (m-1) + \frac{\varepsilon^6 n}{2}\varepsilon^{-5} < \varepsilon n.$$

□

Corolario 1.7.11. *Se puede probar el Teorema de Erdös-Stone 1.5.2:*

> *Dado un grafo H, para todo $\delta > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si G es un grafo con $n \geqslant n_0$ vértices y*
>
> $$e(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} + \delta\right)\frac{n^2}{2},$$
>
> *entonces $H \subset G$, donde $r = \chi(H) - 1$.*

La idea de la demostración del corolario será la siguiente:

Tomemos $\delta > 0$ arbitrariamente pequeño, aplicamos el Lema de Regularidad de Szemeredi con ε lo suficientemente pequeño y $m > \frac{1}{\varepsilon}$. Así existe $M \in \mathbb{N}$, y obtenemos una equipartición ε-regular

$$V(G) = V_0 \coprod V_1 \coprod \cdots \coprod V_k,$$

con $M \geqslant k \geqslant m > \frac{1}{\varepsilon}$, de cualquier grafo G con $|G| \geqslant M$.

Borramos de G todas las aristas sobre las que "no hay control":

(a) Las que ven a V_0.

(b) Aristas dentro de las partes V_i con $i \geqslant 1$.

(c) Las aristas entre pares no ε-regulares.

(d) Aristas entre pares no densos, i.e., "tenemos menos que $\delta/2$ densidad".

Después, obtenemos el gafo reducido R: dado por contraer cada V_i a un vértice w_i con $i \geqslant 1$, y borrar aristas múltiples. Así, R tiene conjunto de vértices $w_1, \ldots, w_r$ donde $w_i w_j \in E(R)$ sii (V_i, V_j) es ε-regular y denso.

Aplicamos lemas de inmersión en "aristas" de grafo - grafo reducido:

$$\text{Si } H \subset R \quad \Rightarrow \quad H \subset G.$$

Lema 1.7.12. *Sea $V_0 \coprod V_1 \coprod \cdots \coprod V_k$ una partición ε-regular de un grafo G de n vértices, con $k \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$. Entonces, hay un máximo de:*

(a) εn^2 *aristas con un extremo en* V_0.

(b) εn^2 *aristas dentro de una parte* V_i *con* $i \geqslant 1$.

(c) εn^2 *aristas entre pares (con* $i,j \neq 0$*) que no son* ε*-regulares.*

(d) δn^2 *aristas entre pares (con* $i,j \neq 0$*) de densidad* $< \delta$.

Demostración. (a) Como $|V_0| \leqslant \varepsilon n$ entonces hay a lo más

$$\varepsilon n(1-\varepsilon)n + \binom{\varepsilon n}{2} < \varepsilon n^2 \text{ aristas en (a).}$$

(b) Cada V_i tiene $\leqslant \frac{n}{k}$ vértices (pues estamos en una equipartición), y entonces hay a lo más $k \cdot \binom{\frac{n}{k}}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} n^2$ aristas para (b).

(c) Hay a lo más εk^2 pares que no son ε-regulares y cada par tiene a lo más $\left(\frac{n}{k}\right)^2$ aristas entre sí. Consecuentemente, aportan a lo más $\varepsilon k^2 \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^2 = \varepsilon n^2$ aristas en (c).

(d) En el peor caso, los $\binom{k}{2}$ pares son poco densos. En este caso, por definiciónde densidad:

$$e(V_i, V_j) \leqslant \delta \left(\frac{n}{k}\right)^2, \quad \forall 1 \leqslant i,j \leqslant k,$$

y entonces, hay a lo más $\delta \left(\frac{n}{k}\right)^2 \binom{k}{2} \leqslant \delta n^2$ aristas en pares “poco densos”, i.e., en (d).

□

Lema 1.7.13. *Sea* $\varepsilon > 0$*, y sea* (A,B) *un par* ε*-regular de un grafo* G*. Entonces,*

$$\big(d(A,B) - \varepsilon\big)\,|B| \leqslant |N_G(v) \cap B| \leqslant \big(d(A,B) + \varepsilon\big)\,|B|$$

para todo $v \in A$*, salvo a lo más* $2\varepsilon\,|A|$.

Demostración. Consideremos el conjunto $X \subset A$ de los vértices que no cumplen alguna de las dos desigualdades. Probaremos que $|X| < 2\varepsilon\,|A|$ por el absurdo. Si este no fuera el caso, tendríamos que $|X| \geqslant 2\varepsilon\,|A|$ y por lo tanto hay al menos $\varepsilon\,|A|$ vértices que no cumplen la primera desigualdad o la segunda. Supongamos que estamos en el perimer caso, el segundo caso es análogo. Es decir, supongamos que existe un conjunto $X' \subset A$ con $|X'| \geqslant \varepsilon\,|A|$ tal que para todo $v \in X'$,

$$\big(d(A,B) - \varepsilon\big)\,|B| > |N_G(v) \cap |B||.$$

Sumando en la desigualdad anterior sobre todos los $v \in X'$, tenemos que

$$\big(d(A,B) - \varepsilon\big)\,|B|\,|A| > e(X', B),$$

por lo tanto $\big(d(A,B) - \varepsilon\big) > d(X', B)$, i.e.,

$$|d(A,B) - d(X', B)| > \varepsilon.$$

Consideremos ahora $Y' = B$, en particular $|Y'| \geqslant \varepsilon\,|B|$ si $\varepsilon > 0$ es chico. Luego por ε-regularidad del par (A,B), tenemos que

$$|d(A,B) - d(X', B)| \leqslant \varepsilon,$$

absurdo. □

Lema 1.7.14 (Slicing). *Sea $\alpha \geqslant \varepsilon > 0$, y sea (A,B) un par ε-regular en un grafo G. Para cualquier $X \subset A, Y \subset B$ con*

$$|X| \geqslant \alpha|A| \quad y \quad |Y| \geqslant \alpha|B|$$

se tiene que el par (X,Y) es $\text{máx}\{\frac{\varepsilon}{\alpha}, 2\epsilon\}$-regular. Además, por ε-regularidad del par (A,B), se tiene que

$$|d(X,Y) - d(A,B)| \leqslant \varepsilon.$$

Demostración. La última afirmación es clara. Veamos la primera, para eso consideremos $\varepsilon' = \text{máx}\{\frac{\varepsilon}{\alpha}, 2\varepsilon\}$. Sean $Z \subset X$ y $W \subset Y$ tales que $|Z| \geqslant \varepsilon'|X|$ y $|W| \geqslant \varepsilon'|Y|$, entonces $|Z| \geqslant \varepsilon|A|$ y $|W| \geqslant \varepsilon|B|$. Luego por ε-regularidad del par (A,B), se tiene que

$$|d(Z,W) - d(A,B)| \leqslant \varepsilon.$$

Además, por ε-regularidad del par (A,B), se tiene que

$$|d(X,Y) - d(A,B)| \leqslant \varepsilon.$$

Juntando ambas desigualdades tenemos que:

$$\begin{aligned} |d(Z,W) - d(X,Y)| &\leqslant |d(Z,W) - d(A,B)| + |d(X,Y) - d(A,B)| \\ &\leqslant \varepsilon + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon \leqslant \varepsilon'. \end{aligned}$$

□

Definición 1.7.15 (Reducido). Dado un grafo H, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon, \delta > 0$, definimos

$$\mathscr{G}(H,n,\varepsilon,\delta)$$

como la familia de grafos G, tales que existe una equipartición $V(G) = A_1 \coprod \cdots \coprod A_l$ con A_i de cardinal n e independiente, y un etiquetamiento de los vértices $V(H) = \{w_1, \ldots, w_l\}$ tal que para cada $w_i w_j \in E(G)$, el par (A_i, A_j) es un par ε-regular y además $d(A_i, A_j) \geqslant \delta$.

Lema 1.7.16 (Lema de inmersión general). *Para todo grafo H y todo $\delta > 0$, existen $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que*

$$G \in \mathscr{G}(H,n,\varepsilon,\delta), n \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad H \subset G.$$

Demostración. Haremos inducción en $|H|$. Cuando $|H| = 1$ es trivial. Supongamos entonces que $|H| \geqslant 2$. Escribamos $V(H) = \{w_1, \ldots, w_l\}$ y sea $V(G) = A_1 \coprod \cdots \coprod A_l$ una partición de acuerdo a la definición de $\mathscr{G}(H,n,\varepsilon,\delta)$: (A_i, A_j) ε-regular y $d(A_i, A_j) \geqslant \delta$ para cada $i \leqslant l-1$ tal que $w_i w_l \in E(H)$.

Elijamos ε lo suficientemente pequeño y apliquemos el Lema 1.7.13 a cada (A_i, A_l) con $w_i w_l \in E(H)$: todos, excepto a lo más $2\varepsilon|A_l|$ vértices $v \in A_l$ satisfaciendo:

$$|N_G(v) \cap A_i| \geqslant (\delta - \varepsilon) \cdot |A_i|$$

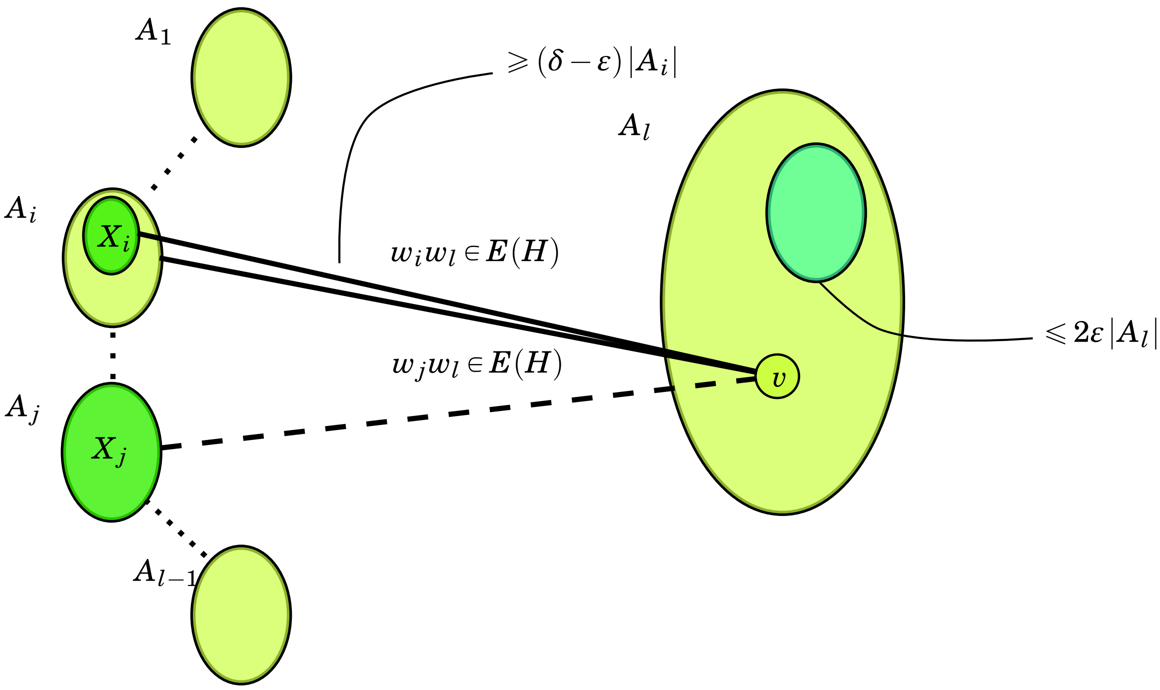


Figura 1.7.5

Como $2\varepsilon\,|A_l|\,(l-1) < n$, existe $v \in A_l$ tal que

$$|N_G(v) \cap A_i| \geqslant (\delta-\varepsilon)\,|A_i|, \quad \forall i \leqslant l-1$$

con $w_iw_l \in E(H)$. Definimos

$$\tilde{X}_i = \begin{cases} A_i \cap N_G(v) & \text{si } w_i \in N_H(w_l) \\ A_i & \text{si no,} \end{cases}$$

y por cada $\tilde{X}_i$ construimos un subgrafo X_i, de manera que todos los X_i tengan el mismo cardinal.

Ahora, tomando $\alpha = \delta - \varepsilon \geqslant \varepsilon > 0$, podemos aplicar el Lema de Slicing 1.7.14 en X_i, X_j cuando $w_iw_j \in E(H)$ para asegurar que son pares $\text{máx}\{\frac{\varepsilon}{\delta-\varepsilon}, 2\varepsilon\}$-regulares y densidad al menos $\delta-\varepsilon$. Luego queremos usar la hipótesis inductiva: sea $H' := H\backslash\{w_l\}$ y $G' := G[\bigcup_{i=1}^{l-1} X_i]$. Así, existen $\varepsilon' > 0$ y $n_0' \in \mathbb{N}$ tales que

$$G' \in \mathscr{G}(H', n', \varepsilon', \delta-\varepsilon), n' \geqslant n_0' \quad \Rightarrow \quad H' \subset G'$$

Con lo cual, si escogemos ε tal que $\text{máx}\{\frac{2\varepsilon}{\delta-\varepsilon}, 2\varepsilon\} < \varepsilon'$ y n_0 lo suficientemente grande, de tal suerte que $(\delta-\varepsilon)n_0 \geqslant n_0'$, tenemos por hipótesis inductiva que $H' \subset G'$. Por lo tanto, $H \subset G$. □

Lema 1.7.17 (Lema de inmersión aplicable)**.** *Sea H un grafo y $\delta > 0$. Defina $r = \chi(H)$. Entonces, existen $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que*

$$G \in \mathscr{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta), n \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad H \subset G.$$

Demostración. El Lema 1.7.16 garantiza que para todo $\delta' > 0$ existen ε', n_0' tales que

$$G \in \mathscr{G}(K_r(t), n', \varepsilon', \delta'), n' \geqslant n_0' \quad \Rightarrow \quad K_r(t) \subset G,$$

donde $t := |H|$. Como $H \subset K_r(t)$, se tiene que en este caso $H \subset G$.

Concluimos gracias al siguiente ejercicio:

Ejercicio 1.7.18.

(1) Demostrar que para todo $\delta > 0$, $n' \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon' > 0$, existen ε y δ' tales que

$$\mathscr{G}(K_r, n't, \varepsilon, \delta) \subset \mathscr{G}(K_r(t), n', \varepsilon', \delta').$$

(2) Demostrar que para todo $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ y $n' \in \mathbb{N}$ es lo suficientemente grande, se tiene que si

$$G \in \mathscr{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta) \quad \text{con } n't \leqslant n < (n'+1)t,$$

entonces existe un subgrafo $G' \subset G$ tal que $G' \in \mathscr{G}(K_r, n't, 2\varepsilon, \delta - \varepsilon)$.

Solución.

(1) Tomemos $n = n't$. Fijemos un etiquetamiento $K_r = \{w_1, \ldots, w_r\}$ tal que $K_r(t) = \{w_i^j\}_{1\leqslant i\leqslant r}^{1\leqslant j\leqslant t}$ con $w_i^j w_{i'}^{j'} \in E(K_r(t))$ si y solo si $w_i w_{i'} \in E(K_r)$. Entonces si $G \in \mathscr{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta)$, con equipartición $V(G) = \coprod_{i=1}^r V_i$. Se sigue que podemos subdividir la partición: cada $V_i = \coprod_{j=1}^t V_i^j$ en otra equipartición con partes de cardinal n'.

Ahora busquemos ε y δ' tales que $G \in \mathscr{G}(K_r(t), n', \varepsilon', \delta')$. Pero si $w_i^j w_{i'}^{j'} \in E(K_r(t))$, entonces $w_i w_{i'} \in E(K_r)$, y por lo tanto el par $(V_i, V_{i'})$ es ε regular y como $\left|V_i^j\right| = \frac{1}{t}|V_i|$ para todo $1 \leqslant j \leqslant t$, el Lema de Slicing 1.7.14 garantiza que los pares $(V_i^j, V_{i'}^{j'})$ para $1 \leqslant j, j' \leqslant t$ son $\max\{t\varepsilon, 2\varepsilon\}$-regularaes si ε es lo suficientemente pequeño, i.e. $\frac{1}{t} > \varepsilon$. En cuanto a la densidad, nuevamente el Lema de Slicing garantiza que

$$d(A_i^j, A_{i'}^{j'}) \geqslant d(A_i, A_{i'}) - \varepsilon \geqslant \delta - \varepsilon.$$

Por lo tanto, tomamos $\varepsilon < \min\{\varepsilon'/2, \frac{1}{t}\varepsilon', \frac{1}{t}, \delta/2\}$ y $\delta' = \delta/2$ y funciona.

(2) Sea $G \in \mathscr{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta)$. Luego $V(G) = V_1 \coprod \cdots \coprod V_k$ es una equipartición de G con $|V_i| = n$. Consiederemos cualquier subgrafo G' de G dado por quitar a cada conjunto V_i los suficientes elementos tales que los vértices de G' se equiparticionan en partes de tamaño $n't \geqslant \frac{n'}{n'+1}n = (1 - \frac{1}{n'+1})n = \left(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{t} \rceil}\right) n = \alpha n$, con $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$ para n' lo suficientemente grande (t está fijo). Luego por el Lema de Slicing 1.7.14,

$$G' \in \mathscr{G}(K_r, n't, 2\varepsilon, \delta - \varepsilon).$$

□

En efecto, para todo $\delta > 0$, el primer ítem dice que

$$\mathscr{G}(K_r, n't, \varepsilon, \delta'),$$

para algún ε y todo $n' \geqslant n_0'$. Luego, por el segundo ítem, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ lo sufientemente grande tal que si

$$G \in \mathscr{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta),$$

entonces existe un subgrafo $G' \subset G$ tal que $G' \in \mathscr{G}(K_r, n't, 2\varepsilon, \delta - \varepsilon)$. Juntando ambas cosas obtenemos que

$$G \in \mathscr{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta), n \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad H \subset G.$$

□

Teorema 1.7.19 (Regularidad de Erdös-Stone)**.** *Para todo grafo H con $e(H) \geqslant 1$ y cada $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que para todo grafo G con $n \geqslant n_0$ vértices y*

$$e(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + 4\delta\right)\frac{n^2}{2},$$

entonces $H \subset G$.

Comentario 1.7.20. Como $\delta > 0$ es arbitrario, podríamos reemplazar 4δ por $\delta' > 0$ arbitrario en el enunciado.

Demostración. Tomamos $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño dado por el Lema de inmersión aplicable 1.7.17, y aplicamos Regularidad 1.7.5 para el caso $m \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$ al grafo G con $r = \chi(H) - 1$ satisfaciendo la hipótesis del enunciado. Obtenemos una partición $V(G) = V_0 \coprod V_1 \coprod \cdots \coprod V_k$ con $m \leqslant k \leqslant M$ una equipartición ε-regular. Sea G' el grafo obtenido a partir de G borrando todas "las aristas sobre las que no hay control" con parámetro ε (regularidad) y δ (densidad). Así, tenemos que G' tiene al menos $e(G) - (3\varepsilon + \delta)n^2$ aristas por el Lema 1.7.12. Sea R el "grafo reducido", se tiene

$$G' \in \mathcal{G}(R, n', \varepsilon, \delta)$$

con $n' := \frac{n-|V_0|}{k}$. Por lo tanto, si $K_{r+1} \subset R$, entonces por el lema de inmersión aplicable 1.7.17 tendríamos que $H \subset G'$. En efecto, quitando algunas particiones de $V(G')$, obtenemos un subgrafo $G'' \subset G'$ tal que $G'' \in \mathcal{G}(K_{r+1}, n', \varepsilon, \delta)$.

Supongamos ahora que $K_{r+1} \not\subset R$. Luego por el Teorema de Turán 1.1.6:

$$e(R) \leqslant t_r(k) \sim \left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{k^2}{2} \quad (k \to \infty),$$

es decir, achicando ε de ser necesario para que k sea grande y $t_r(k) \leqslant \left(1 - \frac{1}{r} + \delta\right)\frac{k^2}{2}$. Se tiene que

$$e(G') \leqslant \left(1 - \frac{1}{r} + \delta\right)\frac{k^2}{2} \cdot \frac{n^2}{k^2} = \left(1 - \frac{1}{r} + \delta\right)\frac{n^2}{2}.$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} e(G) &\leqslant \left(1 - \frac{1}{r} + \delta\right)\frac{n^2}{2} + 2(3\varepsilon + \delta)\frac{n^2}{2} \\ &= \left(1 - \frac{1}{r} + 6\varepsilon + 3\delta\right)\frac{n^2}{2} \\ &< \left(1 - \frac{1}{r} + 4\delta\right)\frac{n^2}{2}, \end{aligned}$$

absurdo. □

Segunda aplicación del Lema de Regularidad de Szémeredi 1.7.5:

Teorema 1.7.21 (Erdös-Simonovits)**.** *Para todo grafo H, y para todo $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que G es un grafo H-libre con $n \geqslant n_0$ vértices y*

$$e(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} - \delta\right)\frac{n^2}{2},$$

entonces G está $(5\delta n^2)$-cerca de ser $(\chi(H) - 1)$-partito.

Comentario 1.7.22. Notar que este enunciado es equivalente al enunciado que vimos antes: 1.5.8.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño (que depende de H y δ). Aplicamos el Lema de Regularidad de Székeredi 1.7.5 para ε y $m \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$; obtenemos la equipartición ε-regular $V(G) = V_0 \coprod V_1 \coprod \cdots \coprod V_k$ con $m \leqslant k \leqslant M$ para todo grafo con $|G| \geqslant M$.

Luego consideramos el "grafo reducido" R con parámetros ε y δ, y vértices $w_1, \ldots, w_k$. Sea $r = \chi(H) - 1$. Si $K_{r+1} \subset R$, entonces $H \subset G$ por el Lema de Inmersión aplicable 1.7.17, lo cual nos lleva a una contradicción. Es decir, R es K_{r+1}-libre.

Elijamos $t = 3\delta k^2$. Si $e(R) < t_r(k) - t$, entonces por el Lema 1.7.12, tenemos:

$$\begin{aligned} e(G) &\leqslant (\delta + 3\varepsilon)n^2 + e(R) \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^2 \\ &< (\delta + 3\varepsilon)n^2 + \left((1 - \frac{1}{r})\frac{k^2}{2} - 3\delta k^2\right)\frac{n^2}{k^2} \\ &= (1 - \frac{1}{r})\frac{n^2}{2} + \underbrace{(3\varepsilon - 2\delta)}_{< -\frac{\delta}{2}} n^2 \\ &< (1 - \frac{1}{r})\frac{n^2}{2} - \frac{\delta}{2} n^2, \end{aligned}$$

contradicción.

Con lo cual, el Teorema de Estabilidad de Füredi 1.4.4 nos permite suponer que R está t-cerca de ser r-partito. Es decir, hay una r-partición

$$V(R) = A_1 \coprod \cdots \coprod A_r$$

con a lo más t aristas dentro de las partes. Utilizando nuevamente el Lema 1.7.12 para acotar las aristas despeciables de la partición de G, y acotando las aristas dentro de las partes de la partición de R, concluimos que es posible borrar a lo más

$$\underbrace{t \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^2}_{\leqslant 3\delta n^2} + \underbrace{(\delta + 3\varepsilon)n^2}_{\leqslant 2\delta n^2} \leqslant 5\delta n^2$$

aristas para obtener una r-partición de G. $\square$

Lema 1.7.23 (Lema de conteo general)**.** *Para todo grafo H, y todo $\delta > 0$, existen $\varepsilon > 0$ y $M \in \mathbb{N}$ tales que si*

$$G \in \mathscr{G}(H, n, \varepsilon, \delta)$$

para algún $n \geqslant M$, entonces G contiene al menos

$$\frac{\delta^{e(H)} \cdot n^{|H|}}{2}$$

copias de H.

Demostración. Haremos inducción en $|H|$, y de hecho nuestra hipótesis inductiva será más fuerte:

> Para todo grafo H, y todo $\delta > 0$, existen $\varepsilon > 0$ y $M \in \mathbb{N}$, tales que si
>
> $$G \in \mathscr{G}(H, n, \varepsilon, \delta)$$
>
> para algún $n \geqslant M$, y más aún, dada una equipartición $G = V_1 \coprod \cdots \coprod V_l$ indexada según $H = \{w_1, \ldots, w_l\}$ con (V_i, V_j) ε-regular y $d(v_i, V_j) \geqslant \delta$ siempre y cuando que $w_i w_j \in E(H)$, se tiene que hay al menos
>
> $$\frac{\delta^{e(H)} \cdot n^{|H|}}{2}$$
>
> copias de H, de tal forma que los vértices x_j correspondientes a un w_j vía un isomorfismo con H pertenezcan a V_j para todo $j = 1, \ldots, l$.

Si $|H| = 1$, la afirmación es inmediata. Si $|H| = 2$ y no tiene aristas también es fácil. Si $|H| = 2$ y $e(H) = 1$, luego basta probar que existen al menos $\delta \frac{n^2}{2}$ aristas en $E(V_0, V_1)$. Pero tomando $\varepsilon < \min\{\delta/4, 1/8\}$, la ε-regularidad del par (V_0, V_1) junto con $d(V_0, V_1)$ implican que existen vértices $v \in V_1$ tales que

$$(\delta - \varepsilon)n \leqslant |N_G(v) \cap V_0|$$

salvo $2\varepsilon n$ vértices por el Lema 1.7.13. Es decir, $E(V_0, V_1)$ tiene al menos

$$(\delta - \varepsilon)(1 - 2\varepsilon)n^2 \geqslant (\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4})\delta n^2 \geqslant \frac{1}{2}\delta n^2$$

aristas, como queríamos.

En general, supongamos que $|H| \geqslant 3$. Si $G \in \mathscr{G}(H, n, \varepsilon, \delta)$ para $n \geqslant M$, entonces $G = V_1 \coprod \cdots \coprod V_l$ con V_i todos de cardinal n y para la escritura $H = \{w_1, \ldots, w_l\}$, $w_i w_j \in E(H)$ si y solo si (V_i, V_j) es ε-regular y $d(V_i, V_j) \geqslant \delta$.

Consideremos $H' = H \backslash \{w_l\}$ y $G' := G \backslash V_l$, entonces $G' \in \mathscr{G}(H', n, \varepsilon, \delta)$ y por hipótesis inductiva existe M' tal que si $n \geqslant M'$, entonces G' contiene al menos

$$\frac{\delta^{e(H')} \cdot n^{|H'|}}{2}$$

copias de H', donde cada copia tiene su vértice correspondiente a w_j en la parte V_j para cada $j < l$. Ahora, por el Lema 1.7.13, para todo $v \in V_l$, salvo $2\varepsilon n$ vértices, se tiene que

$$(\delta - \varepsilon)n \leqslant |N_G(v) \cap V_j|, \quad \forall j < l.$$

Por lo tanto, tenemos al menos $(1 - 2\varepsilon(l-1))n$ vértices en V_l, cada uno con al menos $(\delta - \varepsilon)n$ vecinos en cada V_j con $j < l$, y por lo tanto, $(\delta - \varepsilon)n(l-1)$ vecinos en G.

En el peor de los casos, todos los vértices que no son vecinos de v en V_j pertenecen a una de estas copias de H' para cada $j < l$, luego este v forma al menos $\frac{\delta^{e(H')} \cdot n^{l-1}}{2} - (1 - (\delta - \varepsilon))n(l-1)$ copias de H en G. Es decir, G tiene al menos

$$\left(\frac{\delta^{e(H')} \cdot n^{l-1}}{2} - (1 - (\delta - \varepsilon))n(l-1)\right)(1 - 2\varepsilon(l-1))n$$

copias de H, donde cada copia tiene su vértice correspondiente a w_j en la parte V_j para cada $1 \leqslant j \leqslant l$. Así, basta probar que tomando $M \gg M'$ y $\varepsilon > 0$ lo suficientemente chico, esta cantidad es $\geqslant \frac{\delta^{e(H)} \cdot n^l}{2}$.

En efecto, esto equivale a que

$$\left(\frac{\delta^{e(H')} \cdot n^{l-1}}{2} - (1-(\delta-\varepsilon))n(l-1)\right)(1-2\varepsilon(l-1)) \geqslant \frac{\delta^{e(H)} \cdot n^{l-1}}{2}$$

si y solo si,

$$\frac{\delta^{e(H')} \cdot n^{l-1}(1-2\varepsilon(l-1))}{2} - \frac{\delta^{e(H)} \cdot n^{l-1}}{2} \geqslant (1-(\delta-\varepsilon))(l-1)(1-2\varepsilon(l-1))n.$$

Es decir, hay que probar

$$\left(\delta^{e(H')}(1-2\varepsilon(l-1)) - \delta^{e(H)}\right)\frac{n^{l-2}}{2} \geqslant (1-(\delta-\varepsilon))(l-1)(1-2\varepsilon(l-1)).$$

Pero como $l \geqslant 3$, se sigue que si $\varepsilon > 0$ es lo suficientemente chico (por ejemplo $\varepsilon < \frac{1-\delta^{e(H)-e(H')}}{2(l-1)}$), existe M con $M \geqslant M'$ lo suficientemente grande, tal que si $n \geqslant M$, el lado izquierdo ess más grande que el lado derecho (que no depende de n) pues

$$\left(\delta^{e(H')}(1-2\varepsilon(l-1)) - \delta^{e(H)}\right) > 0.$$

□

Apliación 3 del Lema de Regularidad de Szemeredi 1.7.5:

Teorema 1.7.24 (Teorema de Roth). *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$ y $A \subset \{1, \ldots, n\}$ con $|A| > \varepsilon n$, entonces A contiene una 3-progresión aritmética*[4].

Lema 1.7.25 (Lema de remoción de triángulos). *Para todo $\alpha > 0$, existe $\beta > 0$ tal que todo grafo G con n vértices y a lo más βn^3 triángulos, puede ser K_3-libre borrando a lo más αn^2 aristas*

Demostración. Tomemos $0 < \delta < \frac{\alpha}{3}$ y $\varepsilon < \frac{\delta}{9}$ lo suficientemente chico. Aplicamos el Lema de Regularidad de Szémeredi 1.7.5 con parámetros ε y $m \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$, obteniendo una partición de un grafo G con $|G| \geqslant M \geqslant k \geqslant m$,

$$V(G) = V_0 \coprod V_1 \coprod \cdots \coprod V_k.$$

Consideremos el grafo reducido R con parámetros ε y δ. Notar que el subgrafo $G' := G \backslash V_0 \subset G$ cumple que $G' \in \mathscr{G}(R, n', \varepsilon, \delta)$ con $n' \geqslant \frac{(1-\varepsilon)n}{k} \geqslant \frac{1-\varepsilon}{M} n$.

Supongamos que R tiene al menos un triángulo K_3. Entonces G' tiene un subgrafo G'' dado por quedarnos solamente con las partes V_i, V_j, V_k correspondientes a vértices w_i, w_j, w_k que forman un triángulo en R; en particular, $G'' \in \mathscr{G}(K_3, n', \varepsilon, \delta)$. Aplicando el Lema de conteo general 1.7.23 para $H = K_3$ y el subgrafo $G'' \in \mathscr{G}(H, n', \varepsilon, \delta)$, tenemos que G'', y por lo tanto G, tiene al menos:

$$\delta^3 \cdot \left(\frac{(1-\varepsilon)n}{k}\right)^3 > \frac{\delta^3}{2}\frac{(1-\varepsilon)^3}{M^3} \cdot n^3 > \beta n^3$$

[4]En general, una k-**progresión aritmética** es una secuencia de enteros $a, a+d, a+2d, \ldots, a+(k-1)d$.

triángulos para n lo suficientemente grande, donde $\beta < \frac{\delta^3}{2}\frac{(1-\varepsilon)^3}{M^3}$. Achicando β de ser necesario, podemos asumir que n es arbitrario.

Con lo cual, si G tiene a lo más βn^3 triángulos, el párrafo anterior nos dice que R no tiene triángulos. Así, al remover $\leqslant (\delta+3\varepsilon)n^2 < \alpha n^2$ aristas de G (ver Lema 1.7.12), nos quedamos sin triángulos. □

Teorema 1.7.26 (Teorema de Roth)**.** *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$ y $A \subset \{1,\ldots,n\}$ con $|A| > \varepsilon n$, entonces A contiene una 3-progresión aritmética.*

Demostración. Vamos a probar que si A no contiene una 3-progresión aritmética, entonces $|A| = o(n)$.

Sea $\varepsilon > 0$, y n lo suficientemente grande, supongamos que $|A| \geqslant \varepsilon n$ y que no contiene 3-progresiones aritméticas. Definimos un grafo G con $V(G) = X\coprod Y\coprod Z$, disjuntos y $|X| = |Y| = |Z| = 3n$ cada conjunto X, Y, Z es una copia de $\{1,\ldots,3n\}$.

$$E(X,Y) = \{xy \mid x\in X, y\in Y, y = x+a \text{ para algún } a\in A\}.$$
$$E(Y,Z) = \{yz \mid y\in Y, z\in Z, z = y+a \text{ para algún } a\in A\}.$$
$$E(X,Z) = \{xz \mid x\in X, z\in Z, z = x+2a \text{ para algún } a\in A\}.$$

Si xyz es un triángulo en G, entonces existen $a, a', a'' \in A$ tales que

$$\begin{cases} y = x+a, & a\in A \\ z = y+a', & a'\in A \\ z = x+2a'', & a''\in A, \end{cases}$$

y esto es una 3-progresión aritmética $a, a'' = a+(a'-a''), a' = a+2(a'-a'')$ si a, a', a'' son distintos. Como A no tiene 3-progresiones aritméticas, entonces cada triángulo en G es de la forma xyz con $y = x+a$, $z = x+2a$. Lo cual implica que cada triángulo queda completamente determinado por x y a. Consecuentemente G tiene a lo más

$$3n|A| \leqslant 3n^2 = o(n^3)$$

triángulos.

Por el Lema de Remoción de Triángulos 1.7.25, es posible borrar $o(n^2)$ aristas de G para obtener un grafo libre de triángulos. Ahora, vamos a obtener una cota por abajo de la cantidad de triángulos arista disjunto que tiene G: consideremos el conjunto de tripletas de la forma $(x, x+a, x+2a)$, con $x\in X, a\in A$. Observar que cada tripleta corresponde con un triángulo de G y todos son arista-disjuntos entre sí, por lo tanto G contiene al menos $3n|A| > 3\varepsilon n^2$ triángulos disjuntos y por lo tanto si o si deben ser quitados para que G sea libre de triángulos. Contradiciendo el Lema de Remoción de Triángulos. □

Capítulo 2

Teoría de Ramsey

Notación 2.0.1. Cuando nos refiramos a una r-**coloración** de un grafo G, será una función $c : E(G) \to \{1,\dots,r\}$ que a cada arista $e \in E(G)$, le asigna un **color** $c(e)$ (No necesariamente la coloración es *propia*, es decir, pueden existir aristas adyacentes con el mismo color).

Notación 2.0.2. Sea G un grafo con una coloración c. Entonces dado un vértice $v \in V(G)$, podemos considerar los vecinos w de v tales que $c(vw) = i$. Notaremos a este subconjunto de vecinos de v como $N_G^i(v)$, o simplemente $N^i(v)$ cuando el contexto sea claro.

La teoría de Ramsey se motiva mediante el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.0.3. Toda 2-coloración de K_6 genera un triángulo monocromático.

Demostración. Sea $v \in V(K_6)$. Hay al menos 3 aristas incidentes a v que tienen el mismo color, digamos rojo, por el principio del palomar. Si en $N^{\text{rojo}}(v)$ hay aristas rojas, entonces hay un triángulo rojo. Si no, todas las aristas entre vértices de $N^{\text{rojo}}(v)$ son azules. Como, $\left|N^{\text{rojo}}(v)\right| \geqslant 3$, entonces hay un triángulo azul en $K_6[N^{\text{rojo}}(v)]$, y por lo tanto había un triángulo azul en K_6. $\square$

Teorema 2.0.4 (Teorema de Ramsey (1930))**.** *Para todo $k, r \in \mathbb{N}$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que toda r-coloración de K_n genera un K_k monocromático.*

Demostración. Sea $v_1 \in V(K_n)$. Existe algún color $c_1 \in \{1,\dots,r\}$ tal que las aristas incidentes a v_1 de color c_1 son al menos

$$\frac{n-1}{r},$$

escribamos $A_1 := N_{K_n}^{c_1}(v_1)$. Similarmente, sea $v_2 \in K_n[A_1]$, existe un color $c_2 \in \{1,\dots,r\}$ tal que las aristas incidentes a v_2 en $K_n[A_1]$ son de color c_2 y por lo menos hay

$$\frac{|A_1|-1}{r},$$

escribamos $A_2 := N_{K_n[A_1]}^{c_2}(v_2)$. Continuando este procedimiento, para n lo suficientemente grande, obtenemos una secuencia

$$v_1, c_1, v_2, c_2, v_3, c_3, \dots, v_t, c_t,$$

en donde si $t \geqslant rk$, se sigue que existe un color que se repite al menos k veces en esta secuencia, y por lo tanto, sus vértices $v_{i_1},\dots,v_{i_k}$ correspondientes forman un K_k monocromático de se color. $\square$

Ejercicio 2.0.5. Calcular una cota inferior para n.

Solución. Escribamo $a_1, a_2, \ldots$ para la secuencia de cardinales de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots$. Inspeccionando la demostración anterior, vemos que $a_1 \geqslant \frac{n-1}{r}$ y que recursivamente $a_{t+1} \geqslant \frac{a_t - 1}{r}$, $t \geqslant 1$. Por lo tanto, tenemos que inductivamente:

$$a_{t+1} \geqslant \frac{n}{r^{t+1}} - \sum_{i=1}^{t+1} \frac{1}{r^i} = \frac{n}{r^{t+1}} - \frac{1}{r} \frac{1 - r^{t+1}}{1 - r}, \quad t \geqslant 0.$$

Con lo cual, si $t \geqslant rk$ como en la demostración de arriba, se sigue que

$$n \geqslant a_{rk} \geqslant \frac{n}{r^{rk}} - \frac{1}{r} \frac{1 - r^{rk}}{1 - r},$$

y consecuentemente,

$$\boxed{n \geqslant \frac{r^{rk-1}}{1-r}.}$$

□

2.1. Números de Ramsey

Definición 2.1.1. El número de Ramsey $R(k)$, es el mínimo n tal que cualquier 2-coloración de K_n contiene una copia monocromática de K_k.

Ejemplo 2.1.2. En el Ejemplo 2.0.3 vimos que $R(3) \leqslant 6$. Pero de hecho, es fácil encontrar una 2-coloración de K_5 que no contiene triángulos monocromáticos, y por lo tanto, $R(3) = 6$:

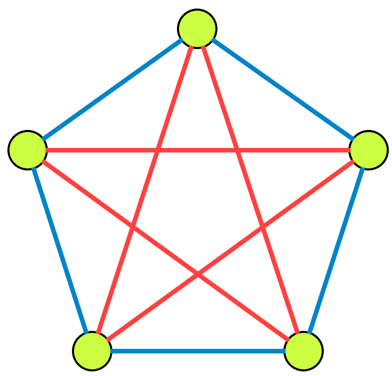


Figura 2.1.1: 2-coloración de K_5 libre de triángulos monocromáticos.

Definición 2.1.3. Sean G, H_1 y H_2 grafos, escribimos $G \to (H_1, H_2)$ si toda 2-coloración de G con rojo-azul de E(G) contiene una copia de H_1 rojo o una copia de H_2 azul.

Para $s,t \in \mathbb{N}$ definimos

$$R(s,t) := \text{mín}\{n \in \mathbb{N} | K_n \to (K_s, K_t)\}.$$

(En particular, $R(k) = R(k,k)$).

Teorema 2.1.4 (Erdös-Szekeres (1935)). *Para todo $k \geqslant 1$, se tiene que*

$$R(k) \leqslant \binom{2k-2}{k-1} \leqslant \frac{4^{k-1}}{\sqrt{\pi(k-1)}}.$$

Demostración. La segunda desigualdad se deduce de una aplicación inmediata de las desigualdades probadas en [Rob55]. Concentrémonos en la primera desigualdad, y de hecho, probaremos una versión un poco más general:

$$R(s,t) \leqslant \binom{s+t-2}{s-1}.$$

Notar que tomando $s = t = k$ se prueba la primera desigualdad del teorema.

Para eso, necesitamos un lema previo:

Lema 2.1.5. *Para todo $s,t \geqslant 2$, se tiene*

$$R(s,t) \leqslant R(s-1,t) + R(s,t-1).$$

Demostración. En efecto, sea c una coloración de $E(K_n)$ con $n = R(s-1,t) + R(s,t-1)$. Queremos probar que hay una copia roja de K_s o una copia azul de K_t. Sea $v \in K_n$, entones hay dos casos:

Caso 1: Existen al menos $R(s-1,t)$ aristas rojas incidentes a v, o

Caso 2: Existen al menos $R(s,t-1)$ aristas azules incidentes a v.

En cualquier caso extendemos completos monocromáticos en el vecindario de v a un K_s rojo o un K_t azul, respectivamente. □

Ahora, probemos la desigualdad por inducción en $s+t$, el caso base es $R(1,t) = R(s,1) = 1$. En general, si $\text{mín}\{s,t\} \geqslant 2$, tenemos que por el lema de arriba

$$\begin{aligned} R(s,t) &\leqslant R(s-1,t) + R(s,t-1) \\ &\leqslant \binom{s+t-3}{s-2} + \binom{s+t-3}{s-1} = \binom{s+t-2}{s-1}. \end{aligned}$$

□

Observación 2.1.6. Existe una cota inferior muy mala, para valores de k grandes, del número de Ramsey:

$$R(k) \geqslant 2(k-1), \quad k \geqslant 2.$$

Demostración. Supongamos $k > 3$, pues el caso $k = 2$ es trivial.

En efecto, sea $n = 2(k-1)$, entonces particionando los vértices de K_n en dos conjuntos A_1, A_2 de tamaño $k-1$, y pintando las aristas de $K_n[A_1]$ y $K_n[A_2]$ de azul, pero las aristas entre A_1 y A_2 de rojo, obtenemos una coloración libre de K_k monocromáticos. En efecto, si existiera un K_k monocromático, entonces no puede ser azul porque cada A_i tiene $k-1$ vértices; por otro lado no puede ser rojo porque en una partición hay almenos un vértice y en otra almenos 2 (estamos en el caso $k > 3$), digamos en A_1 y A_2 respectivamente, entonces en $K_n[A_2]$ debería haber una arista color rojo, absurdo. □

El siguiente teorema confirma que la cota anterior es *muy poco óptima*.

Teorema 2.1.7 (Erdös (1947))**.**

$$R(k) \geqslant 2^{k/2}, \quad \forall k \geqslant 2.$$

Demostración. Consideremos K_n con $n = \lceil 2^{k/2} \rceil$ y supongamos que $k \geqslant 6$, notar que los casos $k = 2, \ldots, 5$ valen por la cota de la Observación anterior 2.1.6 (que es mejor para k chico).

Tenemos exactamente

$$2^{\binom{n}{2}}$$

2-coloraciónes de $E(K_n)$. Vamos a mostrar que la cantidad de 2-coloraciones de $E(K_n)$ que contienen a K_k monocromático es $< 2^{\binom{m}{2}}$. Para eso, notar que en este caso tenemos $\binom{n}{k}$ formas de elegir una copia de K_k y luego $2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}+1}$ formas de colorear el resto de las aristas. Por lo tanto, la cantidad de 2-coloraciones que contienen un K_k monocromático es menor o igual que

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}+1} &\leqslant \left(\frac{en}{k}\right)^k 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}+1} \\ &\leqslant \left(\frac{e(2^{k/2}+1)}{k}\right)^k 2^{-\frac{k(k-1)}{2}} 2 \cdot 2^{\binom{n}{2}}, \end{aligned}$$

pero notar que si $k \geqslant 6$, entonces

$$\left(\frac{e(2^{k/2}+1)}{k}\right)^k 2^{\frac{k(k-1)}{2}} \cdot 2 \leqslant \left(\frac{2^{k/2}+1}{2}\right)^k 2^{-\frac{k(k-1)}{2}} \cdot 2 < 1,$$

de donde se sigue lo que queríamos. En efecto, se puede realizar un estudio cualitativo de la función para $k \in \mathbb{R}_{\geqslant 6}$ utilizando cálculo elemental. $\square$

Definición 2.1.8. En general, el **número de Ramsey con r colores** $R_r(k)$ es el mínimo n tal que todo r-coloreo de K_n tiene un K_r monocromático.

Teorema 2.1.9. *Para todo $r \geqslant 2$, se tiene que*

$$2^r \leqslant R_r(3) \leqslant 3 \cdot r!.$$

Demostración. Primero veamos la cota inferior, para eso consideremos $n := 2^r$ y encontraremos una r-coloración de K_n sin triángulos monocromáticos. Haremos inducción en r, si $r = 2$ vale, pues podemos considerar la siguiente coloración:

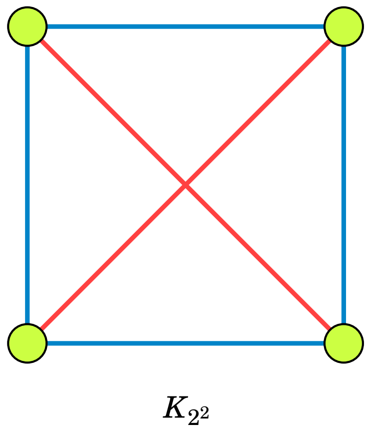


Figura 2.1.2

Para el paso inductivo, consideremos una partición en dos partes de 2^{r-1} vértices, donde el conjunto A y el B tienen $(r-1)$-coloraciones sin triángulos monocromáticos, por hipótesis inductiva, y luego pintamos las aristas entre A y B de color r que nunca fue utilizado.

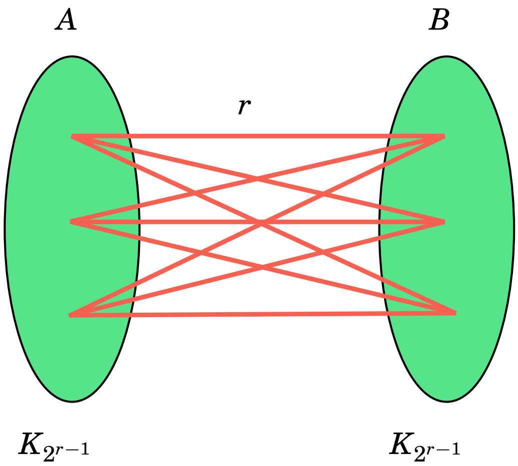


Figura 2.1.3

Ahora veamos la cota superior. En el Ejemplo 2.0.3 vimos que $R_2(3) \leqslant 6 = 3 \cdot 2!$, así vale el caso $r = 2$. Supongamos ahora que $r \geqslant 3$, y que $n = 3 \cdot r!$, sea $v_0 \in K_n$ fijo, y c una r-coloración de K_n. Entonces existe un color $i \in \{1, \ldots, r\}$ tal que

$$E_i^0 = |\{\, uv_0 \in K_n \mid c(uv) = i \,\}| \geqslant \frac{3 \cdot r!}{r} = 3 \cdot (r-1)!$$

y sea $A := N_{K_n}^i(v_0)$. Pueden ocurrir dos casos:

Caso 1: El color i aparece en una arista de $K_n[A]$, luego tenemos un triángulo de color i.

Caso 2: En $K_n[A]$ no aparece el color i, entonces la coloración c inducida en $K_n[A]$ es una $(r-1)$-coloración, con lo cual por hipótesis inductiva existe un triángulo monocromático en $K_n[A]$, en particular en K_n.

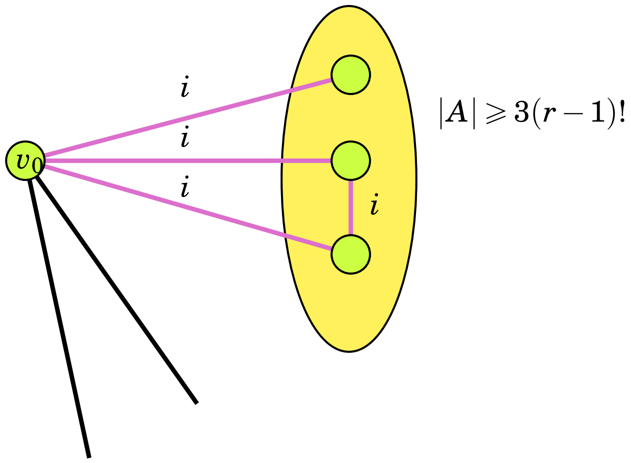


Figura 2.1.4: Ilustración del Caso 1.

□

Definición 2.1.10. El **número de Ramsey de** H_1 **versus** H_2 está definido por:

$$r(H_1,H_2) = \text{mín}\{n | K_n \to (H_1,H_2)\}.$$

En particular, escribimos $r(H) := r(H,H)$.

Teorema 2.1.11.

$$r(K_3,P_k) = 2k+1.$$

Demostración. Primero acotaremos por abajo: sea $n = 2k$, consideramos la siguiente coloración de K_n:

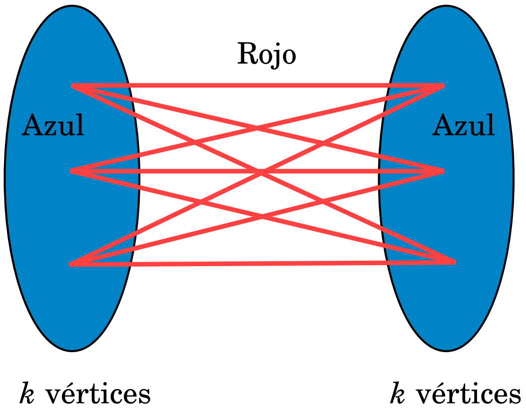


Figura 2.1.5

Particionamos K_n en dos partes de k vértices cada uno y pintamos las aristas de color azúl, y las aristas entre ambas particiones las pintamos de rojo. Claramente no hay caminos de longitud k de color azul porque las particiones tienen k vértices y no hay triángulos rojos porque las aristas rojas inducen un grafo bipartito.

Para la cota superior, consideremos K_n con $n = 2k+1$. Sea P un camino maximal de color azul; supongamos que $|V(P)| \leqslant k$ y entonces $B := V(K_n) \backslash V(P)$ tiene al menos $k+1$ vértices. Sea v_0 un extremo de P, por maximalidad v_0 está conectado a cada vértice de B por aristas rojas. Tenemos dos casos:

Caso 1: Si en $K_n[B]$ hay aristas rojas entonces hay un triángulo de color rojo (con un vértice v_0).

Caso 2: Si en $K_n[B]$ no hay aristas rojas, entonces todas las aristas son azules y por lo tanto hay una copia de K_{k+1} azul, y por lo tanto contiene a P_k de color azul.

□

Teorema 2.1.12. *Sea T_k un árbol con k aristas (i.e., $k+1$ vértices). Entonces*

$$r(K_3, T_k) = 2k+1.$$

Demostración. Para la primera desigualdad se puede aplicar un razonamieneto similar a la demostración del teorema anterior. Veamos entonces solo la cota superior.

Sea $n = 2k+1$ y consideremos K_n con una coloración. Supongamos entonces que existe un vértice v de grado rojo al menos $k+1$. Entonces la vecindad $N^{\text{rojo}}(v)$ induce un K_{k+1} que si tiene alguna arista roja entonces existe un triángulo rojo en K_n, y si no, K_n contiene un K_{k+1} con aristas azules y en particular contiene un T_k azul.

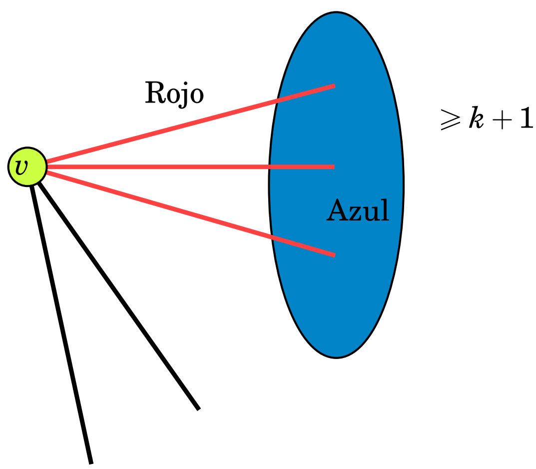


Figura 2.1.6

Ahora, supongamos que todo vértice tiene grado rojo $\leqslant k$. Esto implica que el grado mínimo del subgrafo azul inducido es $\geqslant k$, y por lo tanto el Lema 1.3.2 nos permite encontrar una copia de T_k en el subgrafo azul inducido, en particular K_n tiene una copia azul de T_k. □

Teorema 2.1.13 (Chvátal (1977))**.** *Sea T_k un árbol con k aristas, y sea $s \geqslant 2$. Entonces*

$$r(K_{s+1}, T_k) = s \cdot k + 1.$$

Demostración. Primero veamos la cota inferior: sea $n = s \cdot k$, consideremos la siguiente coloración de K_n: el grafo azul consiste de s copias de K_k y las aristas rojas son las aristas entre los vértices de las copias de K_k.

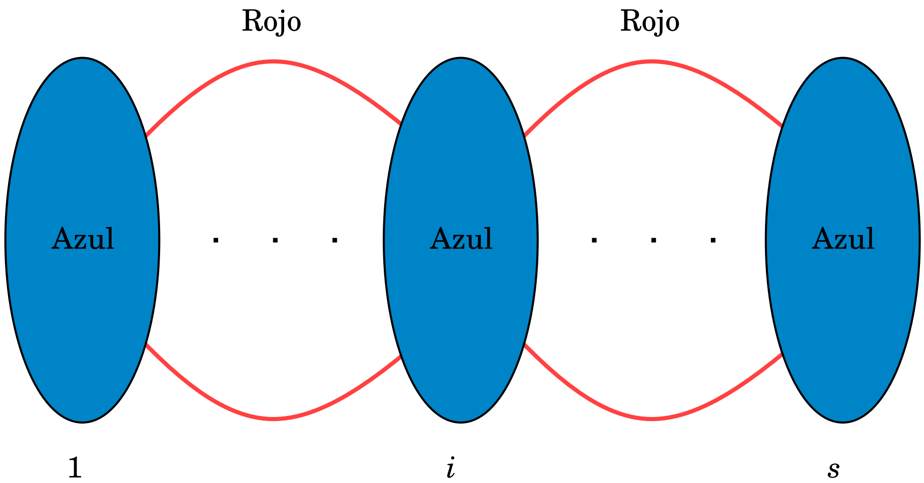


Figura 2.1.7

Para la cota superior, haremos inducción en $s \geqslant 2$. Si $s = 2$, tenemos que $r(K_3, T_k) \leqslant 2k + 1$ por el teorema anterior. Supongamos ahora que $s \geqslant 3$. Sea $n = s \cdot k + 1$. Sea v un vértice con grado rojo $\geqslant (s-1)k + 1$, y sea A la vecindad roja de v. Por hipótesis inductiba en $K_n[A]$, hay una copia de K_s rojo, o una copia de T_k azul y ganamos. Así, podemos asumir que el grado rojo de cada vértice es $\leqslant (s-1)k$. Esto implica que el grafo azul tendrá grado mínimo $\geqslant (s \cdot k + 1) - 1 - (s+1)k \geqslant k$. Con lo cual contiene una copia de T_k por el Lema 1.3.2. $\square$

Teorema 2.1.14. *Para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que*

$$\boxed{r(P_k) = \left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil}.$$

Demostración. Veamos primero la cota inferior. Sea $n := \left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil - 1$. Consideremos un K_k azul en K_n y escribamos A al conjunto de sus vértices; el resto de las aristas las pintamos de rojo. Notar que $B := V(K_n) \backslash V(K_k)$ cumple

$$|B| < \frac{k}{2}.$$

Así, K_n no tiene un P_k azul. Veamos que tampoco tiene un rojo:

Tomemos un camino rojo P, luego no puede tener dos vértices adyacentes de A (pues $K_n[A]$ es un completo azul). Por lo tanto en el peor de los casos P tiene $|B|$

vértices de B tales que entre cada par consecutivos de estos hay un vértice de A. O sea,

$$|P| \leqslant 2|B|+1 < k+1.$$

Es decir, tampoco tiene un P_k rojo.

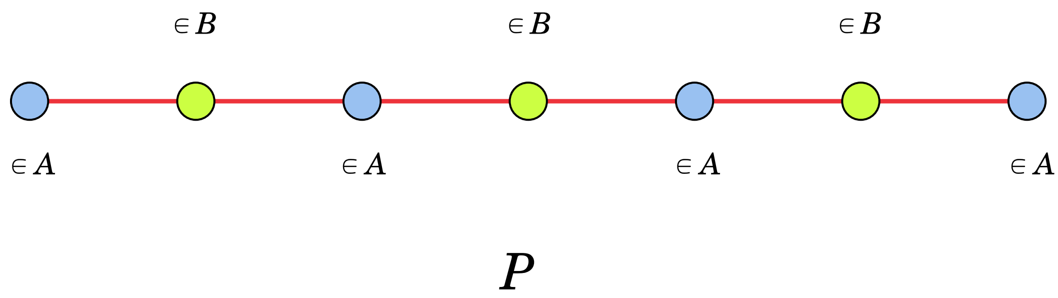


Figura 2.1.8: Ilustración de esta situación.

Veamos ahora la cota superior. Vamos a probar un resultado un poco más general haciendo inducción en k:

Sea $k \geqslant l \geqslant 1$ y sea $n = k + \left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil$, entonces

$$K_n \longrightarrow (P_k, P_l)$$

Notar que el caso $k = l$ implica la cota superior.

Consideremos una coloración de K_n. Sea P un camino rojo maximal y supongamos que $|P| \leqslant k$. Por maximalidad, cada extremo forma aristas azules con cada vértice de $V(G) \backslash V(P)$.

Nuestro caso base es $1 \leqslant l \leqslant k \leqslant 3$, donde vale la afirmación:

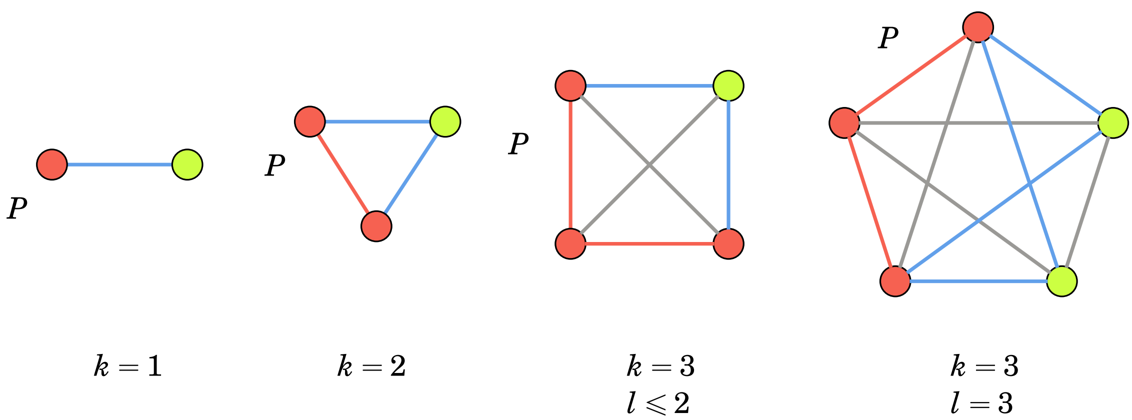


Figura 2.1.9

Ahora veamos el paso inductivo. Supongamos que $4 \leqslant l < k$. Por hipótesis inductiva, tenemos que $K_n \longrightarrow (P_{k-1}, P_l)$ y por lo tanto sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe un $(k-1)$-camino rojo en K_n, digamos $P = v_1 v_2 \cdots v_k$. Escribamos $U := V(K_n) \backslash V(P)$; sabemos que $|U| = \lceil \frac{l}{2} \rceil$. Notemos lo siguiente:

(I) Las aristas entre v_1, v_k y U son azules.

(II) Para cada par de vértices consecutivos $v_i v_{i+1}$ en P y cada $u \in U$, existe una arista azul en $\{v_i u, v_{i+1} u\}$, pues de lo contrario habríamos encontrado un P_k rojo.

Sean Q_1 y Q_2 caminos azules vértice-disjuntos de longitud impar (i.e., cantidad par de vértices) que alternan vértices de $v_2, \ldots, v_k$ y U. Tomemos Q_1 maximal, y sujeto a esto, tomemos Q_2 maximal. Por paridad de la longitud de Q_1 y Q_2, ambos tienen exactamente un extremo en U, digamos x e y, respectivamente. Tenemos dos casos:

Caso 1: Q_1 y Q_2 cubren U, es decir, $U \subset Q_1 \cup Q_2$. Con lo cual, podemos construir un l-camino rojo considerando $Q_1 x v_1 y Q_2$. Luego supongamos que estamos en:

Caso 2: Existe $z \in U \backslash (Q_1 \cup Q_2)$.

Observemos que $v_k \in Q_1$, de lo contrario podríamos extender Q_1 con las aristas azules $v_k z$ y $v_k x$. Notemos que $Q_1 \cup Q_2$ contiene a lo más $|U|-1$ vértices de P, y

$$|U| - 1 < \frac{k-1}{2}.$$

Con lo cual, en $\{v_2, \ldots, v_{k-1}\}$ hay $\frac{k-1}{2} - 2 < \lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor$ vértices de $Q_1 \cup Q_2$. Así, existe un par de vértices consecutivos v_i, v_{i+1} con $2 \leqslant i \leqslant k-2$ tales que $v_i, v_{i+1} \notin Q_1 \cup Q_2$. Sin embargo, por el ítem (ii), existen existen dos aristas azules entre v_i o v_{i+1} y alguno de los siguientes conjuntos: $\{x,y\}$; $\{y,z\}$; o $\{x,z\}$. Esto contradice la maximalidad de Q_1 y Q_2, ya que podríamos extender algunos de estos caminos, y por ende el caso 2 no puede ocurrir.

Finalmente veamos el caso $k = l \geqslant 4$. Por hipótesis inductiva, tenemos que $K_n \longrightarrow (P_k, P_{k-1})$ y y por simetría se tiene $K_n \longrightarrow (P_{k-1}, P_k)$. Con lo cual, existe un $(k-1)$-camino rojo, digamos $P_r = v_1 \cdots v_k$, y un $(k-1)$-camino azul, digamos $P_a = w_1 \cdots w_k$. Si alguno de estos caminos se pudiera extender monocromáticamente habríamos terminado, con lo cual supongamos que son maximales monocromáticos. Notar que por maximalidad, debe ser que $\{v_1, v_k\} = \{w_1, w_k\}$, de lo contrario podríamos extender monocromáticamente alguno de los dos caminos; digamos que $v_1 = w_1$ y $v_k = w_k$.

Ahora bien, tenemos que

$$n = k + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \geqslant |V(P_r) \cup V(P_a)| = |V(P_r)| + |V(P_a)| - |V(P_r) \cap V(P_a)| = 2k - |V(P_r) \cap V(P_a)|.$$

Consecuentemente, $|V(P_r) \cap V(P_a)| \geqslant \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. Hay dos opciones:

Opción 1: $|V(P_r) \cap V(P_a)| > \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. En este caso existe $z \in V(K_n) \backslash (V(P_r) \cup V(P_a))$, y por lo tanto $z v_1 = z w_1$ es una arista de color rojo o azul, y en cualquier caso podemos extender P_r o P_a monocromáticamente, contradiciendo la maximalidad de los caminos.

Opción 2: $|V(P_r) \cap V(P_a)| = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. En este caso $P_r \cup P_a = K_n$ y de hecho, deben existir dos vértices interiores consecutivos de P_r, digamos $v_i v_{i+1}$ con $1 < i < k$, tales que no son vértices de P_a; similarmente, existen dos vértices interiores consecutivos de P_a, digamos $w_j w_{j+1}$ con $1 < j < k$, tales que no son vértices de P_r.

Más aún, la arista $v_1 v_k = w_1 w_k$ es de color rojo o azul, digamos rojo (el otro caso es análogo). Con lo cual, tenemos un ciclo rojo $C_r := v_1 P_r v_k v_1$ de longitud k, y por lo tanto, podemos suponer que todas las aristas incidentes a C_r tienen que ser azules, si no habríamos encontrado un k-camino rojo. Pero luego las aristas $w_j v_i$ y $w_{j+1} v_i$ son azules, y podemos alargar P_a a un k-camino azul:

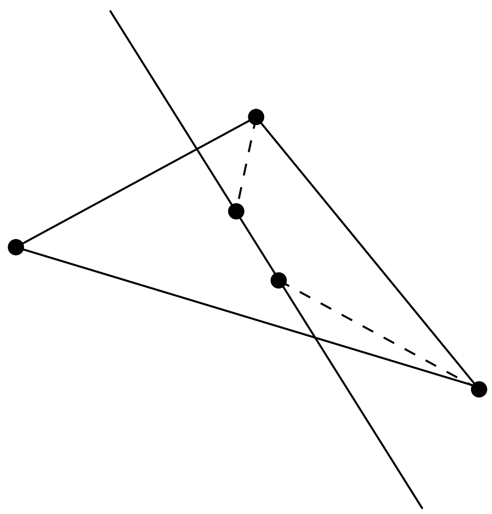
$$w_1 \cdots w_j v_i w_{j+1} \cdots w_k,$$

contradiciendo la maximalidad de P_a. Como hemos agotado todos los casos, se concluye la demostración. □

2.2. El problema con un final feliz

Proposición 2.2.1 (El problema de E. Klein (1930))**.** *Para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $n = n(k) \in \mathbb{N}$ tal que dados n puntos en posición general del plano (i.e. no hay 3 puntos colineales). Entonces el conjunto de puntos contiene k puntos en posición convexa.*

Demostración del caso $k = 4$ y $n = 5$. Ella probó este caso[1]. Consideramos la cápsula convexa de los 5 puntos, si los vértices son 4 o 5 de estos puntos ya ganamos, si no, existen dos puntos que están contenidos en el interior del triángulo convexo (formado por 3 de estos puntos como vértices). Luego simplemente consideramos la recta que une a estos dos puntos interiores, la cual interseca a dos lados distintos del triángulo, y por lo tanto hay 4 puntos en posición convexa:



□

El caso general se resolvió utilizando el *Teorema de Ramsey Generalizado*, que enunciamos luego de algunas definiciones:

[1]El cual fue bautizado como "El problema con un final feliz" por Paul Erdős, debido a que llevó al casamiento de George Szekeres y Esther Klein.

Notación 2.2.2. Dado $n \in \mathbb{N}$, notamos al conjunto $[n] := \{1, \ldots, n\}$.

Notación 2.2.3. Sea A un conjunto arbitrario, y $s \in \mathbb{N}$, notamos al conjunto:

$$\binom{A}{s} := \{ S \subset A \mid |S| = s \}.$$

Definición 2.2.4. Una r**-coloración de subconjuntos** de $[n]$ de tamaño s, es una función

$$c : \binom{[n]}{s} \longrightarrow \{1, \ldots, r\}.$$

Diremos que $A \in \binom{[n]}{s}$ es **monocromático** (respecto de c), si $c(S) = c(S')$ para todo $S \in \binom{A}{s}$.

Teorema 2.2.5 (Teorema de Ramsey Generalizado)**.** *Para todo $k, r, s \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que toda r-coloración de $\binom{[n]}{s}$ contiene un conjunto monocromático de tamaño k.*

Comentario 2.2.6. Nosotros probamos el caso K_n en lugar de $\binom{[n]}{s}$ con $s = 2$ y K_k monocromático.

Continuación de la demostración del problema de E. Klein. Falta probar el caso $k \geqslant 5$. Tomemos una coloración rojo-azul c del conjunto $\binom{[n]}{4}$. Y coloreemos $c(S)$ de rojo si y solo si los puntos de S están en posición convexa. Por el Teorema de Ramsey Generalizado 2.2.5, existe n tal que $B \subset [n]$ es monocromático y $|B| = k$. Hay dos casos:

Caso 1: B es rojo, y por lo tanto todos los subconjuntos de tamaño 4 de B tienen color rojo, i.e., están en posición convexa. Ahora, los puntos de B están en posición convexa, de lo contrario, podríamos encontrar un punto de B en el interior de un triángulo con vértices de B (notar que esto vale por no-colinealidad: trazamos las diagonales entre vértices del polígono convexo; el punto no puede estar en ninguna de estas rectas, i.e., está dentro de un triángulo), absurdo.

Caso 2: B es azul, como $k \geqslant 5$, por el resultado preliminar de Klein, existen 4 puntos en posición convexa, absurdo.

□

Teorema 2.2.7 (Seidenberg)**.** *Toda secuencia de $k^2 + 1$ números reales contiene una subsecuencia monótona de largo $k + 1$.*

Demostración. Sea $a_1, \ldots, a_n$ una secuencia de números reales con $n = k^2 + 1$. Para cada $i \in [n]$, definimos un par:

$$(x_i, y_i),$$

donde x_i es el largo de la subsecuencia no decreciente más larga que termina en a_i; y_i es el largo de la subsecuencia no creciente más larga que termina en a_i.

Para $i \neq j$, veamos que $(x_i, y_i) \neq (x_j, y_j)$. Para eso, sin pérdida de generalidad, supongamos que $i < j$. Tenemos dos casos:

Caso 1: $a_i \leqslant a_j$. Acá se tiene que $x_i < x_j$.

Caso 2: $a_j \leqslant a_i$. Acá se tiene que $y_i < y_j$.

Ahora por contradicción, si $x_i, y_i \leqslant k$ para todo $i \in [n]$, entonces hay a lo más k^2 pares distintos, sin embargo $n = k^2 + 1$, por lo que hay almenos un par repetido, absurdo. $\square$

El siguiente ejercicio dice que el teorema anterior es preciso:

Ejercicio 2.2.8. Encontrar secuencia de números reales de largo k^2 sin subsecuencias monótonas de largo $k+1$.

Teorema 2.2.9 (Chrátal, Rödl, Szemeredi & Trotter (1983))**.** *Para todo $\Delta \in \mathbb{N}$, existe una constante $c = c(\Delta) > 0$ tal que todo grafo H con $\Delta(H) \leqslant \Delta$, satisface*

$$r(H) \leqslant c(\Delta) \cdot |H|.$$

En particular, para $n \geqslant c(\Delta) \cdot |H|$, toda 2-coloración de K_n contiene un H monocromático.

Demostración. La idea será aplicar el Lema de Regularidad de Szémeredi 1.7.5 y el siguiente lema de inmersión:

Lema 2.2.10 (Un lema de inmersión)**.** *Dados $d \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ y $\gamma > 0$ tales que si $n \in \mathbb{N}$ y H es un grafo con $\Delta(H) \leqslant d$ y $|H| \leqslant \gamma n$, entonces*

$$G \in \mathscr{G}(K_{d+1}, n, \varepsilon, \delta) \quad \Longrightarrow \quad H \subset G.$$

Sea $\Delta > 0$ y H con $\Delta(H) \leqslant \Delta$. Aplicamos este lema de inmersión con $d = \Delta$ y $\delta = \frac{1}{2}$, y obtenemos parámetros ε y γ, tales que se cumple la conclusión del enunciado. Consideremos K_n con $n \geqslant c(\Delta) \cdot |H|$ donde $c(\delta)$ es lo suficientemente grande.

Tomemos una coloración con rojo y azul de K_n, y sean G_r y G_a los subgrafos inducidos de color rojo y azul, respectivamente. Sea $m := r(K_{d+1})$. Aplicamos el Lema de Regularidad de Szémeredi 1.7.5 en G_r con parámetro m y ε. Obtenemos una partición ε-regular

$$V(G_r) = V_0 \coprod V_1 \coprod \cdots \coprod V_k,$$

con $m \leqslant k \leqslant M$. Notar que esta partición también es $\varepsilon regular$ para G_a **TAREA**.

Sea R el grafo reducido con parámetros ε y densidad 0 (no nos interesa la densidad). Entonces,

$$e(R) \geqslant \binom{k}{2} - \varepsilon k^2 > t_{m-1}(k) = \left(1 - \frac{1}{m-1} + o(1)\right)\frac{k^2}{2} \quad (k \longrightarrow 1),$$

y por lo tanto el Teorema de Turán 1.1.6, $R \supset K_m$. Sean ahora $A_1, \ldots, A_m$ las partes que corresponden a los vértices de K_m en R. Vamos a definir una 2-coloración f de las aristas de K_m:

$$f(ij) = \text{rojo} \quad \Leftrightarrow \quad d_{G_r}(V_i, V_j) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Como $m = r(K_{d+1})$, existe un K_{d+1} rojo o azul, sin pérdida de generalidad supongamos que es rojo en K_m. Reindexando los A_i, podemos suponer que $A_1, \ldots, A_{d+1}$ corresponden a las partes de K_{d+1} de K_m. El grafo inducido

$$G' = G_r[A_1 \cup \cdots \cup A_{d+1}]$$

satisface que $G' \in \mathscr{G}(K_{d+1}, n', \varepsilon, \delta)$, con

$$n' = |V_1| = \cdots, |V_k| \geqslant \frac{n}{M}.$$

Así, elegimos $c = c(\Delta)$ suficientemente grande (en particular, $c \geqslant M/\gamma$), entonces

$$|(|H) \leqslant \frac{n}{c(\Delta)} \leqslant \frac{\gamma n}{M} \leqslant \gamma n',$$

con lo cual se tiene la conclusión del teorema por el lema de inmersión de arriba. $\square$

Bibliografía

[Rob55] Herbert Robbins. A remark on stirling's formula. *The American Mathematical Monthly*, 62(1):26–29, 1955.