Apuntes - Tópicos en matemática discreta

Enzo Giannotta

7 de septiembre de 2023

Índice general

1. Teoría extremal de grafos **2**
1.1. Teoría extremal de grafos 2
1.2. Números extremales en grafos bipartitos 6
1.3. Números extremales para árboles 8
1.4. Estabilidad y supersaturación 10
1.5. Teorema de Erdös-Stone 13
1.6. Ejercicios 18
1.7. Regularidad 21

Capítulo 1

Teoría extremal de grafos

En este curso trabajaremos con grafos simples, usualmente denotados: $G = (V,E)$.

1.1. Teoría extremal de grafos

¿Cuál es la máxima cantidad de aristas que puede tener un grafo de n vértices sin que aparezca una cierta estructura?

¿Cómo lucen estos grafos maximales?

Ejemplo 1.1.1.

1. Cuando la estructura es un ciclo, la cantidad de aristas es $n-1$ y los grafos maximales son los árboles.
2. Cuando la estructura es un ciclo impar. ¿Cómo lucen los grafos sin ciclos impares y que tienen una cantidad máxima de aristas? Son los completos balanceados $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. En efecto, para que un grafo bipartito con n vértices tenga una cantidad máxima de aristas, tiene dos partes $|X|,|Y|$ con $|X|+|Y| = n$ y si maximiza la cantidad de aristas es un grafo $K_{|X|,|Y|}$. Es decir, tiene $|X|\cdot|Y|$ aristas y si maximizamos, hay que maximizar la función $f(y) = (n-y)y$ con $1 \leqslant y \leqslant n-1$ e y entero; esto sucede sii $y = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ o $y = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Definición 1.1.2. Sean G y H dos grafos. Decimos que G es **H**-libre (o **libre de** H) si $H \not\subset G$. El **número extremal** de H es la cantidad

$$\mathrm{ex}(n,H) = \text{máx}\{e(G) | G \text{ es un grafo de } n \text{ vértices } H\text{-libre}\},$$

donde $e(G)$ siempre denotará el número de aristas de G.

Si G es H-libre y $||G|| = \mathrm{ex}(n,H)$, decimos que G es **extremal** respecto de n y H.

Teorema 1.1.3 (Mantel, 1907). *Sea $n \in \mathbb{N}$, G un grafo K_3-libre con n vértices. Entonces, $e(G) \leqslant \lceil \frac{n}{2} \rceil \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Además, $e(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \Leftrightarrow G = K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$*[1].

Demostración. Por inducción en n. Los casos $n = 1, n = 2$ son un vértice, un 1-camino respectivamente. Luego vale para $n = 1,2$. Ahora, supongamos que $n \geqslant 3$. Sea G un grafo K_3-libre con n vértices, y $uv \in E(G)$ (si G no tuviera aristas, podríamos agregar una arista y seguiría siendo K_3-libre); consideremos $G' = G \backslash \{u,v\}$.

[1]Cuando $n = 1,2$ tenemos que G es el completo K_n

Tenemos que G' también es K_3-libre y tiene $n-2$ vértices. Por inducción, G' satisface

$$e(G') \leqslant \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor.$$

Más aún, como G es K_3-libre, no existen vértices $w \in G'$ tal que sea adyacente a u y v al mismo tiempo. Luego existen a lo más $n-2$ aristas en $E(G) \backslash E(G')$ sin contar la arista uv. Es decir,

$$e(G) \leqslant e(G') + n - 1 \leqslant \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

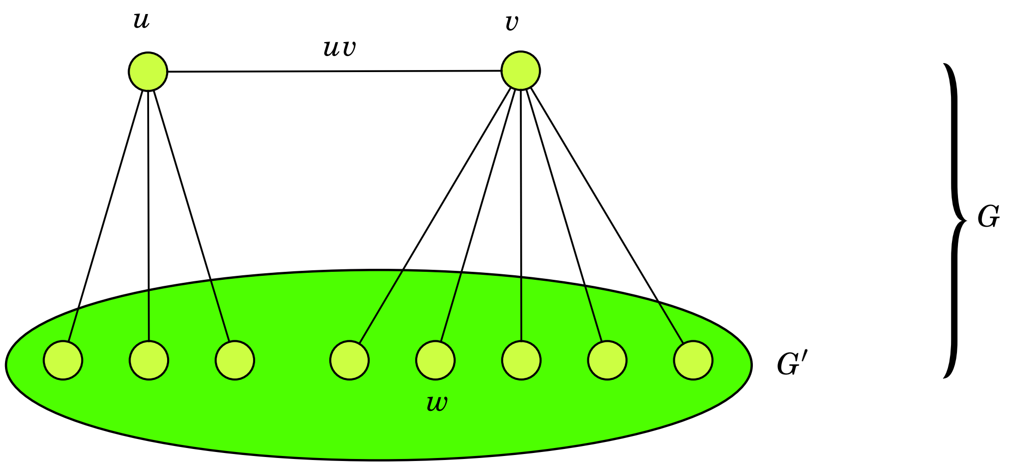

Figura 1.1.1: Ilustración

Para la segunda parte, $e(G) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \Leftrightarrow G = K_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$. Es claro que si $G = K_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$ luego $e(G) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Veamos la recíproca. Sea G con n vértices y cantidad máxima de aristas tal que es K_3-libre. Los casos $n = 1, 2$ son triviales, luego podemos suponer que $|G| \geqslant 3$. Como G es K_3-libre, existen una aristas $uv \in E(G)$ por maximalidad. Por inducción, $G' := G \backslash \{u, v\}$ es un $K_{\left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor}$, digamos con partición $X', Y' \subset V(G')$ de sus vértices. Como G es K_3-libre, ni u ni v pueden tener vecinos en G' que estén en ambas particiones X', Y', además, no puede haber una partición que no tenga a u y v como vecinos en G pues podríamos agregar aristas entre vértices de esa particiones: contradiciendo maximalidad. Sin pérdida de generalidad, los vecinos de u en G' están en X y los de v en Y. Más aún, por maximalidad, todos los vértices de X son vecinos con u y todos los de Y con v. Así, G es un X, Y bigrafo tomando $X := X' \cup \{v\}$ e $Y := Y' \cup \{u\}$. Notar que esto prueba que G es un $K_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$.

$\square$

Definición 1.1.4. El **grafo de Turán** $T_k(n)$ es el grafo k-partito completo con la mayor cantidad de aristas, es decir, los cardinales de las particiones difieren a lo más en 1 entre sí (por maximalidad). Notamos

$$t_k(n) := e(T_k(n)).$$

Observación 1.1.5. Podemos calcular $t_k(n)$. Sea $\alpha \in \mathbb{N}$ el cardinal más grande de una partición de $T_k(n)$. Entonces las demás particiones tienen cardinal α o $\alpha-1$. Sea r la cantidad de particiones con cardinal $\alpha-1$ y $k-r$ de cardinal α. Tenemos que sumando los cardinales de todas las particiones:

$$\alpha k - r = n.$$

Como $0 \leqslant r < k$, r es el resto de la división de n por k y α es el cociente. Despejando obtenemos que $\alpha = \frac{n+r}{k}$ es decir, $\alpha = \lceil \frac{n}{k} \rceil$. En particular $\alpha - 1 = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$. Juntado todo, tenemos que la cantidad total de aristas es:

$$\alpha^2 \binom{k-r}{2} + \alpha(\alpha-1)(k-r)r + (\alpha-1)^2 \binom{r}{2},$$

i.e.,

$$\boxed{t_k(n) = \lceil \frac{n}{k} \rceil^2 \binom{k-r}{2} + \lceil \frac{n}{k} \rceil \lfloor \frac{n}{k} \rfloor (k-r)r + \lfloor \frac{n}{k} \rfloor^2 \binom{r}{2}.}$$

Teorema 1.1.6 (Turán, 1941)**.** *Sean $n,k \in \mathbb{N}$, G un grafo K_{k+1}-libre con n vértice. Entonces*

$$e(G) \leqslant t_k(n).$$

Además, $e(G) = t_k(n) \Leftrightarrow G = T_k(n)$[2].

Demostración. Hagamos inducción en n. Para $n \leqslant k$ es trivial. Sea ahora G con $n \geqslant k+1$ que a su vez es K_{k+1}-libre y arista maximal. Esto implica que agregar cualquier arista hace aparecer un K_{k+1} como subgrafo. Entonces G contiene un K_k. Sea A el conjunto de vértices de un subgrafo K_k en G. Consideremos luego $G' = G \backslash A$. El grafo G' es K_{k+1}-libre y tiene $n-k$ vértices. Cada $x \in V(G')$ tiene a lo más $k-1$ vecinos en A dentro del grafo G, pues G es K_{k+1}-libre. Luego por hipótesis inductiva:

$$e(G') \leqslant t_k(n-k).$$

Si juntamos esto con la hipotesis inductiva, tenemos que

$$e(G) \leqslant e(G') + (n-k)(k-1) + \binom{k}{2} \leqslant t_k(n-k) + (n-k)\cdot(k-1) + \binom{k}{2} = t_k(n),$$

donde el segundo término es la cantidad de aristas entre A y $V(G')$.

Veamos ahora la segunda afirmación. Por definición, $G = T_k(n)$ tiene $t_k(n)$ aristas. Recíprocamente, supongamos que G con n vértices y cantidad máxima de aristas $e(G)$ tal que es K_{k+1}-libre. Los casos $n \leqslant k$ son triviales, luego supongamos que $n \geqslant k+1$. Por maximalidad, G contiene un K_k como subgrafo; llamemos A a su conjunto de vértices en G y consideremos $G' := G \backslash A$. Notar que

$$e(G') \geqslant e(G) - \left((n-k)(k-1) + \binom{k}{2}\right) = t_k(n) - (n-k)(k-1) - \binom{k}{2} = t_k(n-k),$$

pues cada vértice de G' tiene a lo más $k-1$ vecinos en A. Como G' es K_{k+1}-libre, en realidad vale la igualdad: $e(G') = t_k(n-k)$, por la primera parte que ya demostramos. Llamemos $X_1, X_2, \ldots, X_k$ a las particiones de G'. Como vale la igualdad arriba, tenemos que cada vértice de G' tiene exactamente $k-1$ vecinos en A. Para cada $x' \in G'$ llamemos $\alpha(x')$ al único vértice de A que no es adyacente a x' en G. Más formalmente, $\alpha : V(G') \to A$ es una función; afirmamos que:

[2] Cuando $n = 1, 2, \ldots, k-1$ tenemos que G es el completo K_n

(I) α es sobreyectiva.

(II) Si $x_i' \in X_i$ y $X_j' \in X_j$ para $i \neq j$, entonces $\alpha(x_i') \neq \alpha(x_j')$.

Antes de probar la afirmación, notemos que esta prueba que $\alpha\big|_{X_i}$ es constante para cada $i = 1,\dots,k$ (y por lo tanto tiene sentido el abuso de notación $\alpha(X_i)$ para denotar al único vértice de A que no es adyacente a ningún vértice $x' \in X_i$). Veamos entonces la afirmación:

(I) Supongamos que α no es sobreyectiva: existe un $a_0 \in A$ tal que para todo $i = 1,\dots,k$ existe $x_i' \in X_i$ adyacente a a_0 en G. Pero esto implica entonces que los vértices $x_1',\dots,x_k',a_0$ forman un K_{k+1} en G, absurdo.

(II) En efecto, si $\alpha(x_i') = a_0 = \alpha(x_j')$, entonces x_i, x_j y los vértices de $A\backslash\{a_0\}$ juntos forman un K_{k+1} en G, absurdo.

Así, podemos extender la partición de G' a todo G: definimos $\tilde{X}_i := X_i \cup \{\alpha(X_i)\}$. Es claro que de esta manera G es un grafo k-partito completo. Como G es maximal en su cantidad de aristas, entonces $G = T_k(n)$. □

Teorema 1.1.7 (Erdös - segunda demostración del teorema)**.** *Sean $n,k \in \mathbb{N}$ y G un grafo K_{k+1}-libre con n vértices. Entonces existe un grafo H que es k-partito con $V(H) = V(G)$ tal que:*

$$d_H(v) \geqslant d_G(v), \quad \forall v \in V(G).$$

Erdös. Haremos inducción en k. Para $k = 1$ no hay que hacer nada. Sea ahora $k \geqslant 2$. Sea $v \in V(G)$ con $d_G(v) = \Delta(G)$. La vecindad de v, $G' := G[N_G(v)]$ debe ser K_k-libre. Sea $A := G\backslash N_G(v)$. Notar que

$$d_G(u) \leqslant d_{G'}(u) + |A|.$$

Por hipótesis inductiva existe un grafo H' que es $(k-1)$-partito con $V(H') = V(G')$ y

$$d_{H'}(u) \geqslant d_{G'}(u), \quad \forall u \in V(G').$$

Sea H el grafo obtenido a paratir de H' añadiendo los vértices de A y conectando todas las aristas entre A y $V(H')$. Observar que H es $k+1$-partito y como v tiene grado máximo en G, tenemos que para cada $u \in A$:

$$d_G(u) \leqslant d_G(v) = |V(H')| = d_H(u)$$

y para $u \in V(H')$ sabemos que:

$$d_G(u) \leqslant d_{G'}(u) + |A| \underset{H.I.}{\leqslant} d_{H'}(u) + |A| = d_H(u).$$

□

Ejercicio 1.1.8. A partir de la demostración deducir que el grafo K_{k+1}-extremal es $T_k(n)$ y es único.

Observación 1.1.9. Sea H un grafo con $\chi(H) \geqslant 3$, es decir no bipartito, entonces

$$\mathrm{ex}(n,H) = \Theta(n^2).$$

Demostración. En primer lugar, si G es un grafo que no contiene a H luego no puede ser bipartito; en particular si $G = K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ entonces tiene n vértices y $e(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Consecuentemente

$$(n-1)^2/4 \leqslant \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leqslant \mathrm{ex}(n,H).$$

Por otro lado, la cantidad de aristas maxima de G es $\binom{n}{2}$ (en general para cualquier grafo con n vértices) y por lo tanto $\mathrm{ex}(n,H) = \Theta(n^2)$. □

1.2. Números extremales en grafos bipartitos

Recuerdo 1.2.1 (Desigualdad de Jensen)**.** *Vamos a usar la desigualdad de Jensen: si φ es una función convexa entonces:*

$$\boxed{\varphi(\mathbb{E}(X)) \leqslant \mathbb{E}(\varphi(X)).}$$

Ejercicio 1.2.2. Probar las siguientes dos desigualdades elementales para el binomio de Newton:

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \overset{\text{Cota 1}}{\leqslant} \binom{n}{k} \overset{\text{Cota 1}}{\leqslant} \left(\frac{n \cdot e}{k}\right)^k.$$

*Solución.*Cota 1: Recordar que el binomio de Newton tiene la siguiente identidad recursiva: $\binom{n}{k} =$

Cota 2:

□

n/k <n-1 /k-1 si y solo si n k-1 <n -1 k sii -n <-k sii k <n

Teorema 1.2.3 (Erdös, 1938)**.** *Para todo $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathrm{ex}(n, C_4) \leqslant n^{\frac{3}{2}}.$$

Definición 1.2.4. Una **cereza** es un 2-camino $x_0x_1x_2$. Llamaremos a x_1 el **centro** y a x_0, x_2 las **hojas**.

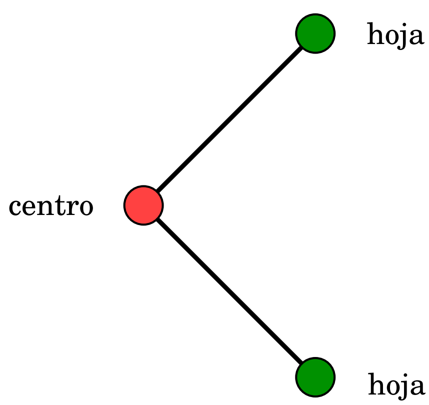

Figura 1.2.2: Dibujo de cereza.

Demostración. Sea G un grafo C_4-libre con n vértices. Contaremos cereza en G para acotar el número de aristas $e(G)$.

Para cada vértice $v \in V(G)$ hay exactamente

$$\binom{d(v)}{2} \text{ cerezas con centro en } v.$$

Por lo tanto, en G hay

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d(v)}{2} \text{ cerezas en } G.$$

Por la desigualdad de Jensen la sumatoria se minimiza cuando todos los grados son iguales:

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d(v)}{2} \geqslant n \cdot \binom{2e(g)/n}{2}$$
$$\overset{Cota 1}{\geqslant} n \cdot \left(\frac{e(G)}{n}\right)^2 = \frac{e(G)^2}{n}.$$

Por otro lado, dado un par $\{u,v\}$ de hojas de cerezas distintas, entonces tendríamos un subgrafo C_4 en G, absurdo; por lo tanto hay a lo más

$$\binom{n}{2} \text{ cerezas en } G.$$

Juntando todo:

$$\frac{e(G)^2}{n} \leqslant \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

consecuentemente $e(G)^2 \leqslant n^3$, i.e., $e(G) \leqslant n^{\frac{3}{2}}$. □

Teorema 1.2.5 (Kövani, Sós, Turán)**.** *Sean $s,t \in \mathbb{N}$, $s \leqslant t$. Entonces existe una constante $c = c(s,t) > 0$ tal que*

$$\text{ex}(n, K_{s,t}) \leqslant c \cdot n^{2-\frac{1}{s}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definición 1.2.6. Una **s-cereza** es un $K_{1,s}$. Similarmente tenemos la noción de **centro** y **hojas** (las cuales son s).

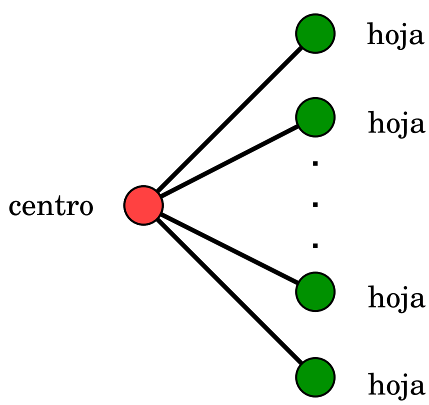

Figura 1.2.3: Dibujo de s-cereza.

Demostración. Sea G un grafo $K_{s,t}$-libre en n vértices. Para cada $v \in V(G)$ hay $\binom{d(v)}{s}$ s-cerezas. Por lo tanto en G hay

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d(v)}{s} \text{ } s\text{-cerezas,}$$

con lo cual

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d(v)}{s} \overset{Jensen}{\geqslant} n \binom{2e(G)/n}{s} \overset{Cota1}{\geqslant} n \left(\frac{2e(G)}{sn}\right)^2.$$

Procediendo de manera análoga a la demostración del teorema anterior, tenemos que un conjunto de s vértices del grafo puede ser conjunto de hojas de a lo más $(t-1)$ cerezas, pues de lo contrario habría una copia de $K_{s,t}$. Por lo tanto, hay en total a lo más

$$(t-1) \cdot \binom{n}{s} \text{ } s\text{-cerezas.}$$

Juntando todo:

$$n\left(\frac{2e(G)}{sn}\right)^s \leqslant (t-1) \cdot \binom{n}{s} \overset{Cota2}{\leqslant} (t-1) \cdot \left(\frac{ne}{s}\right)^s,$$

luego

$$\frac{2e(G)}{sn} \leqslant \frac{(t-1)^{\frac{1}{s}}}{n^{\frac{1}{s}}} \cdot \frac{ne}{s},$$

equivalentemente,

$$e(G) \leqslant \frac{(t-1)^{\frac{1}{s}} se}{2s} \cdot n^{2-\frac{1}{s}} = c(s,t) \cdot n^{2-\frac{1}{s}}.$$

□

Ejercicio 1.2.7. Demostrar que

$$\mathrm{ex}(n,H) = o(n^2) \quad \Leftrightarrow \quad H \text{ es bipartito.}$$

1.3. Números extremales para árboles

Teorema 1.3.1. *Sean $n,k \in \mathbb{N}$ y T un árbol con $k+1$ vértices. Entonces,*

$$\mathrm{ex}(n,T) \leqslant (k-1) \cdot n.$$

Lema 1.3.2. *Sean $k \in \mathbb{N}$ y T un árbol con $k+1$ vértices. Entonces si G es un grafo con $\delta(G) \geqslant k$, luego contiene a T como subgrafo.*

Demostración. Haremos inducción en k. Para $k=1$ es claro, pues existe un vértice con al menos un vecino. En general, supongamos que $k \geqslant 2$. Sea h una hoja de T y consideremos el árbol $T' = T \backslash \{h\}$. Por hipótesis inductiva, $T' \subset G$. Sea p el único vecino de h en T, i.e. $p \in T'$. Como T tiene $k+1$ vértices, p tiene a lo más $k-1$ vecinos en T', luego p tiene un vecino en G que no está en T' pues $\delta_G(p) \geqslant k$. Entonces podemos incrustar T en G considerando h como este vértice. □

Lema 1.3.3. *Todo grafo G contiene un subgrafo H con $\delta(H) \geqslant \frac{e(G)}{n}$, donde $n = |G|$.*

Demostración. Ver Diestel. □

Demostración del teorema. Sea G un grafo con $\geqslant (k-1)\cdot n+1$ aristas que no contiene a T. Por el segundo lema, G contiene H con

$$\delta(H) \geqslant \frac{e(G)}{n} > \frac{(k-1)n}{n},$$

y por el primer lema ganamos. □

Conjetura 1.3.4 (Erdös, Sós, 1963)**.** *Se conjetura que en el teorema anterior se tiene una mejor cota:*

$$\mathrm{ex}(n,T) \leqslant \frac{1}{2}(k-1)n.$$

Notar que de ser verdadera la conjetura, entonces esta cota es tight cuando n es un múltiplo de k: Sea G el grafo obtenido al unir $\frac{n}{k}$ copias de K_k, así $e(G) = \frac{n}{k}\binom{k}{2} = \frac{n}{2}(k-1)$.

Esta conjetura es verdadera en el caso T un camino:

Teorema 1.3.5 (Erdös & Gallai, 1959)**.** *Sean $n,k \in \mathbb{N}$. Entonces,*

$$\mathrm{ex}(n,P_k) \leqslant \frac{(k-1)\cdot n}{2}$$

Ejercicio 1.3.6. A partir de la demostración de este teorema, obtenga que los grafos extremales son únicos.

Lema 1.3.7. *Todo grafo conexo G con n vértices contiene un camino de largo*

$$k := \min\{2\delta(G), n-1\}.$$

Demostración. Tomemos $P := v_0,\ldots,,v_l$ camino de largo máximo. Sabemos que $N_G(v_0), N_G(v_l) \subset V(P)$ por maximalidad de P. Si $V(P) = V(G)$ ganamos. Así que supongamos que no; supongamos también que $l < k \leqslant 2\delta(G)$. Demostraremos que existe un ciclo de longitud l contenido en $G[V(P)]$, así llegaremos a una contradicción pues al existir un vértice x fuera de $G[V(P)]$ en G, podríamos extender el ciclo a un camino de longitud al menos $k+1$ en G conectándolo con x.

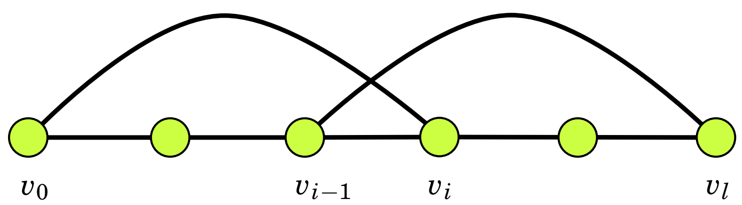

Figura 1.3.4: Notar que en este caso $v_0 P v_{i-1} v_l P v_i v_0$ es un ciclo de longitud $|P|$ en $G[V(P)]$.

En efecto, supongamos que no existe tal ciclo, luego para cada $i \in \{1, \dots, l-1\}$ se tiene que $v_{i-1}v_l \notin E(G)$ o $v_0 v_i \notin E(G)$. Entonces

$$2\delta(G) \leqslant d_G(v_0) + d_G(v_l) \leqslant l < 2\delta(G),$$

absurdo. □

Demostración del teorema. Haremos inducción en n. Afirmamos que G es P_k-libre en n vérties, entonces

$$e(G) \leqslant \frac{(k-1)\cdot n}{2}.$$

El caso base es $n \leqslant k$, luego $e(G) \leqslant \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \leqslant \frac{n(k-1)}{2}$. Luego supongamos que $n \geqslant k+1$. Si G no es conexo: sean $G_1, \dots, G_r$ las componentes conexas, por hipótesis

$$e(G_i) \leqslant \frac{|G_i|(k-1)}{2},$$

entonces

$$e(G) = \sum_{i=1}^{r} e(G_i) \leqslant \frac{k-1}{2} \sum_{i=1}^{r} |G_i| = \frac{n(k-1)}{2}.$$

Ahora, supongamos que G es conexo. Si $n-1 \leqslant 2\delta(G)$, entonces por el Lema 1.3.7, G contiene un camino de largo $n-1 \geqslant k$, absurdo. Con lo cual, podemos asumir que $2\delta(G) \leqslant n-1$, y por el Lema, G contiene un camino de largo $2\delta(G)$ que debe cumplir

$$2\delta(G) < k \quad \Leftrightarrow \quad \delta(G) \leqslant \frac{k-1}{2}.$$

Sea v un vértice de grado $\leqslant \frac{k-1}{2}$, consideremos $G' := G \setminus \{v\}$. Por hipótesis inductiva

$$e(G') \leqslant \frac{(n-1)(k-1)}{2},$$

con lo cual,

$$e(G) \leqslant e(G') + \frac{k-1}{2} \leqslant \frac{(n-1)(k-1)}{2} + \frac{k-1}{2} = \frac{n(k-1)}{2}.$$

□

1.4. Estabilidad y supersaturación

Teorema 1.4.1 (Füredi, 2015). *Sean $n, t \in \mathbb{N}$, y G con n vértices. Si G está **t-lejos** de ser bipartito*[3]*, entonces hay al menos*

$$\frac{n}{6}\left(e(G) - \frac{n^2}{4} + t\right)$$

triángulos en G.

[3] Esto significa que si H es un subgrafo bipartito de G, entonces $e(H) \leqslant e(G) - t$.

Demostración. Para cada $u \in V(G)$, definimos

$$B_u := N_G(u) \quad \text{y} \quad A_u := V(G) \backslash B_u.$$

Luego la cantidad de tríangulos de G es:

$$k_3(G) = \frac{1}{3} \sum_{u \in V(G)} e(B_u).$$

Para cada $u \in V(G)$, si borro las aristas de $G[B_u]$ y las de $G[A_u]$, obtengo un subgrafo bipartito de G: el (A_u, B_u)-bigrafo; luego tuvimos que haber quitado al menos t aristas porque G está t-lejos de ser bipartito, es decir:

$$e(B_u) + e(A_u) \geqslant t.$$

Además, para cada $u \in V(G)$

$$\sum_{v \in A_u} d_G(v) = e(B_u, A_u) + 2e(A_u).$$

Como

$$e(G) = e(A_u) + e(A_u, B_u) + e(B_u),$$

se sigue que $e(A_u) = e(B_u) - e(G) + \sum_{v \in A_u} d_G(v)$ (juntando ambas ecuaciones). Ahora, por la desigualdad $e(B_u) + e(A_u) \geqslant t$, se tiene que

$$e(B_u) \geqslant t - e(A_u) = t + e(G) - e(B_u) - \sum_{v \in A_u} d_G(v)$$

y por lo tanto

$$2e(B_u) \geqslant t + e(G) - \sum_{v \in A_u} d_G(v).$$

Sumando sobre todos los $u \in V(G)$ y utilizando que $k_3(G) = \frac{1}{3} \sum_{u \in V(G)} e(B_u)$, concluimos:

$$k_3(G) \geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} (nt + ne(G) - \sum_{u \in V(G)} \sum_{v \in A_u} d_G(v));$$

sin embargo, afirmamos que vale la siguiente igualdad:

$$\sum_{u \in V(G)} \sum_{v \in A_u} d_G(v) = \sum_{x \in V(G)} d_G(x)(n - d_G(x));$$

ya que cada término de la sumatoria se acota inferiormente por $\frac{n}{2} \cdot (n - \frac{n}{2}) = \frac{n^2}{2}$, concluimos el resultado.

Veamos la afirmación: notar que para cada $x \in V(G)$, su cantidad de aristas $d_G(x)$ es contada exactamente $|A_x| = n - d_G(x)$ veces del lado izquierdo de la sumatoria □

Como corolario, se prueban los siguientes dos teoremas:

Teorema 1.4.2 (Estabilidad)**.** *Sean $n, t \in \mathbb{N}$, y G es K_3-libre con n vértices. Si $e(G) \geqslant \frac{n^2}{4} - t$, entonces G contiene un grafo bipartito con al menos $e(G) - t$ aristas.*

Demostración. Si G no tuviera un grafo bipartito con al menos $e(G)-t$ aristas, entonces G estaría $(t+1)$-lejos de ser bipartito. Por el Teorema 1.4.1 tiene al menos

$$\frac{n}{6}\left(e(G)-\frac{n^2}{4}+(t+1)\right)\geqslant\frac{n}{6}$$

triángulos, i.e., al menos uno, lo cual es absurdo. □

Teorema 1.4.3 (Supersaturación)**.** *Sean $n,t\in\mathbb{N}$, y G un grafo con n vértices. Si $e(G)\geqslant\frac{n^2}{4}+t$, entonces G contiene al menos $t\cdot n/3$ triángulos.*

Demostración. Notar que G está t-lejos de ser bipartito, en efecto, un grafo bipartito de orden $m\leqslant n$ tiene a lo más $\frac{m^2}{4}\leqslant\frac{n^2}{4}$ aristas, pero G tiene al menos $\frac{n^2}{4}+t\geqslant\frac{m^2}{4}+t$ aristas. Luego por el Teorema 1.4.1, G tiene

$$\frac{n}{6}\left(e(G)-\frac{n^2}{4}+(t+1)\right)\geqslant\frac{n}{3}t$$

triángulos. □

Teorema 1.4.4 (Füredi, 2015 – Estabilidad)**.** *Sean $n,k\in\mathbb{N}$, $t\geqslant 0$ y G un grafo K_{k+1}-libre en n-vértices. Si $e(G)\geqslant t_k(n)-t$, entonces G contiene un subgrafo generador k-partito con al menos $e(G)-t$ aristas.*

Demostración. Haremos inducción en k. El caso $k=1$ tenemos que $t_k(n)=0$ y siempre se cumple. Entonces supongamos que $k\geqslant 2$. Tomemos $u\in V(G)$ con $d_G(u)=\Delta(G)$. Definamos $G':=G[B]$ con $B=N_G(u)$. Sea $A=V(G)\backslash B$. El grafo G' es K_k-libre porque G es K_{k+1}-libre, luego por el Teorema de Turán 1.1.6, $e(G')\leqslant t_{k-1}(d)$ con $d:=|B|$ y entonces podemos definir $t':=t_{k-1}(d)-e(G')\geqslant 0$ y aplicar hipótesis inductiva al grafo G'. Así, G' contiene un subgrafo H' generador $(k-1)$-partito con al menos $e(G')-t'=2e(G')-t_{k-1}(d)$ aristas.

Probemos que

$$H:=\Big(V(H')\cup A,E(H')\cup E(A,B)\Big)$$

tiene al menos $e(G)-t$ aristas, y así H es un subgrafo k-partito generador de G con al menos $e(G)-t$ aristas. En efecto, queremos probar que

$$e(H')+e(A,B)\geqslant e(G)-t;$$

como $e(G)=e(A,B)+e(G')+e(A)$, la desigualdad de arriba es equivalente a

$$e(H')\geqslant e(G')+e(A)-t\quad\Leftrightarrow\quad e(H')-e(G')+t\geqslant e(A).$$

Ya que $e(H')\geqslant e(G')-t'$, nos queda que la última desigualdad es cierta si $e(A)\leqslant t-t'$.

Sabemos que

$$2e(A)+e(A,B)=\sum_{v\in A}d_G(v)\leqslant d\cdot(n-d),$$

donde la desigualdad sale de que la sumatoria tiene $(n-d)$ términos y cada grado $d_G(v)\leqslant\Delta(G)=d_G(u)=|B|=d$; y reemplacemos $e(A,B)=e(G)-e(A)-e(G')$ y nos queda

$$e(A)+e(G)-e(G')\leqslant d\cdot(n-d).$$

Ahora, notar que

$$t_k(n) \geqslant t_{k-1}(d) + d\cdot(n-d),$$

pues el lado izquierdo es la cantidad de aristas de un grafo de Turán (la cual es máxima) y el lado derecho es la cantidad de aristas de un grafo k-partito en n-vértices: el obtenido a patir del grafo de turán $T_{k-1}(d)$ agregando $n-d$ vértices y conectándolos a las $k-1$ particiones de $T_{k-1}(d)$. Juntando todo,

$$e(A) \leqslant d\cdot(n-d) - \overbrace{e(G)}^{\geqslant t_k(n)-t} + \overbrace{e(G')}^{=t_{k-1}(d)-t'} \leqslant d\cdot(n-d) - t_k(n) + t + t_{k-1}(d) - t' \leqslant t - t'$$

como queríamos probar. □

1.5. Teorema de Erdös-Stone

Notación 1.5.1. Notaremos por $K_s(t)$ al grafo de Turán $T_s(t\cdot s)$.

Teorema 1.5.2 (Erdös-Stone, 1946)**.** *Sea H un grafo con $e(H)\geqslant 1$. Entonces*

$$\mathrm{ex}(n,H) \leqslant \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + o(1)\right)\cdot\frac{n^2}{2} \quad (n\to\infty)$$

Observación 1.5.3. Sea H un grafo con $e(H)\geqslant 1$. Entonces

$$t_{\chi(H)-1}(n) \leqslant \mathrm{ex}(n,H),$$

pues todo grafo G necesita de al menos $\chi(H)$ colores para tener a H incrustado, por lo tanto $T_{\chi(H)-1}(n)$ es H-libre.

Observación 1.5.4.

$$t_{\chi(H)-1}(n) \sim \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1}\right)\frac{n^2}{2}.$$

Con lo cual, la desigualdad de Erdös-Stone es asintóticamente justa.

Demostración. En efecto, esto equivale a probar que

$$t_k(n) \sim \left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{n^2}{2} \quad (n\to\infty),$$

para $k\geqslant 2$ fijo. Escribiendo $n = qk + r$ con $0\leqslant r < k$, tenemos que

$$t_k(qk) \leqslant t_k(n) \leqslant t_k((q+1)k),$$

pero para cualquier $q\in\mathbb{N}$ es fácil de calcular el número de aristas del grafo de Turán $T_k(qk)$:

$$t_k(qk) = \left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{(qk)^2}{2},$$

con lo cual $t_k(qk), t_k((q+1)k) \sim \left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{n^2}{2}$ y por lo tanto $t_k(n)$ también. □

Lema 1.5.5. *Sea $c \in (0,1)$ y sea $\varepsilon > 0$. Si G es un grafo con n vértices, con n lo suficientemente grande tal que*

$$e(G) \geqslant c\frac{n^2}{2},$$

entonces existe un subgrafo $G' \subset G$ con

$$v(G') \geqslant \varepsilon n \quad y \quad \delta(G') \geqslant (c-\varepsilon)\,|G'|\,.$$

Demostración. Sea $G_n, G_{n-1}, G_{n-2}, \ldots, G_t$ la secuencia de subgrafos de G obtenida de la siguiente manera: $G_n := G$ y el grafo $G_{n-(i+1)}$ se obtiene a partir de G_{n-i} borrando un vértice $v \in V(G_{n-i})$ con $d_{G_{n-i}}(v) < (c-\varepsilon)\cdot|G_{n-i}|$; además, G_t es el último grafo de la secuencia. Notar que $|G_{n-i}| = n-i$.

Afirmamos que $t \geqslant \varepsilon n$ para n lo suficientemente grande, y por ende, G_t será el subgrafo que buscabamos: por construcción $\delta(G_t) \geqslant (c-\varepsilon)\,|G_t|$. Para eso, calculamos la cantidad total de aristas borradas para la obtención de G_t:

$$\sum_{i=t+1}^{n} d_{G_{n-i}}(v_i) < (c-\varepsilon)\sum_{i=t+1}^{n} i,$$

y como G_t tiene a lo más $\binom{t}{2}$ aristas, tenemos que

$$e(G) \leqslant (c-\varepsilon)\sum_{i=t+1}^{n} i + \binom{t}{2}.$$

A su vez, $e(G) \geqslant c\frac{n^2}{2}$.

Dado $1 > c > 0$ fijo, tomemos $\varepsilon > 0$ lo suficientemente chico, de tal suerte que $(1-(c-\varepsilon))\frac{\varepsilon}{2} < 1$ $(\star)$. Supongamos por el absurdo que $t \leqslant \varepsilon n$. Nuestro objetivo es acotar la siguiente expresión:

$$\sum_{i=t+1}^{n}(c-\varepsilon)i + \binom{t}{2}.$$

Para eso, requerimos el siguiente cálculo: $\sum_{i=t+1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{t(t+1)}{2}$. Ahora, acomodamos un poco la ecuación anterior, de manera que haya cancelación:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=t+1}^{n}(c-\varepsilon)i + \binom{t}{2} &= (c-\varepsilon)\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{t(t+1)}{2}\right) + \binom{t}{2}\\
&= (c-\varepsilon)\left(\underbrace{\frac{n(n-1)}{2}}_{\binom{n}{2}} + n - \left(\underbrace{\frac{t(t-1)}{2}}_{\binom{t}{2}} + t\right)\right) + \binom{t}{2}\\
&= (c-\varepsilon)\binom{n}{2} + (c-\varepsilon)(n-t) + (1-(c-\varepsilon))\binom{t}{2}.
\end{aligned}$$

Notar que los últimos dos términos son menores o iguales a $\varepsilon\frac{n(n-1)}{2}$ para n lo suficientemente grande respecto de ε y c. En efecto,

$$(c-\varepsilon)(n-t) + (1-(c-\varepsilon))\binom{t}{2} \leqslant (c-\varepsilon)(n-t) + (1-(c-\varepsilon))\frac{\varepsilon n}{2}(\varepsilon n - 1),$$

y el lado derecho es un polinomio cuadrático en la variable n con coeficiente principal

$$(1-(c-\varepsilon))\frac{\varepsilon^2}{2}<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad (1-(c-\varepsilon))\frac{\varepsilon}{2}<1 \quad \text{(verdadero por } (\star)\text{)},$$

y por lo tanto,

$$(c-\varepsilon)(n-t)+(1-(c-\varepsilon))\frac{\varepsilon n}{2}(\varepsilon n-1) \leqslant \varepsilon\frac{n(n-1)}{2}$$

para n lo suficientemente grande ya que el lado derecho es un polinomio cuadrático en n con coeficiente principal más grande: ε.

Finalmente, esto nos llevaría a un absurdo y por lo tanto deberá ser que $t \geqslant \varepsilon n$ para n lo suficientemente grande para ε lo suficientemente chico. En efecto, achicando ε de ser necesario: para que $\varepsilon < c$, el lado derecho es menor que $c\frac{n^2}{2}$ para todo n lo suficientemente grande, sin embargo $e(G) \geqslant c\frac{n^2}{2}$, absurdo. □

Lema 1.5.6. *Para todo $r,t \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si G es un grafo con $n \geqslant n_0$ vértices y*

$$\delta(G) \geqslant \left(1-\frac{1}{r}+\varepsilon\right)n$$

luego $K_{r+1}(t) \subset G$.

Demostración. Procedemos por inducción en r. Para $r=1$, tenemos que $K_2(t)=K_{t,t}$ y sabemos que en este caso $\text{ex}(n,K_{t,t})=o(n^2)$. Como n es lo suficientemente grande, $K_{t,t} \subset G$. En efecto, se tendrá que

$$e(G)=\frac{1}{2}\sum_{v\in G} d_G(v) \geqslant \frac{\delta(G)n}{2} \geqslant \left(1-\frac{1}{r}+\varepsilon\right)\frac{n^2}{2}.$$

Ahora, supongamos que $r \geqslant 2$. Primero, encontraremos por hipótesis inductiva, una copia de $K_r(q)$ con $q \geqslant t/\varepsilon$; escribamos $A := \bigcup_{i=1}^r A_i$ a la partición de los vértices de $K_r(q)$.

Luego, definimos $X \subset B := V(G)\backslash A$, el conjunto de todos los vértices que tienen al menos t vecinos en cada A_i. Mostramos que $|X| \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Para esto, acotamos $e(A,B)$ por abajo:

$$\begin{aligned} e(A,B) &= \sum_{v\in A} d_G(v) - 2e(A) \\ &\geqslant qr\left(1-\frac{1}{r}+\varepsilon\right)n - 2\frac{(qr)^2}{2}. \end{aligned}$$

Y a cotamos por arriba:

$$e(A,B) \leqslant |X|qr + (|B|-|X|)(q(r-1)+t-1).$$

Juntando ambas desigualdades, tenemos:

$$n\underbrace{(qr\varepsilon - t+1)}_{>0} + q^2r^2 - q^2r - qr + qrt \leqslant |X|\underbrace{(q-k+1)}_{>0}$$

Por lo tanto, se sigue lo que queremos cuando $n \to \infty$.

Finalmente, demostramos que existen conjuntos

$$B_i \subset A_i \text{ con } |B_i| = t \text{ y } t \text{ vértices } x \in X \text{ que satisfacen } N_G(x) \supset B_i,$$

de donde concluiremos que $K_{r+1}(t) \subset G$. Sea $x \in X$, existen a lo más $\binom{q}{t}$ formas de elegir B_i^x en A_i, donde B_i^x satisface $\left|B_i^x\right| = t$ y $N_G(x) \subset B_i^x$. Si $|X| > \binom{q}{t}^r \cdot (t-1)$, entonces por el principio del palomar tenemos lo que queremos. $\square$

Demostración del Teorema. Observemos que H está contenido en el grafo $\chi(H)$-partito, completo y con partes de tamaño $|H|$, es decir, en $K_{\chi(H)}(|H|)$. Con lo cual, basta probar el teorema para $H' := K_{\chi(H)}(|H|)$. De hecho, probaremos que para $r := \chi(H) - 1$, $t \in \mathbb{N}$, $\forall \varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\operatorname{ex}(n, K_{r+1}(t)) \leqslant \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) \frac{n^2}{2} \quad (n \geqslant n_0).$$

Vamos a tomar $r = \chi(H) - 1$ y $t = |H|$ y $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño. Sea n lo suficientemente grande y G con n vértices tal que

$$e(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) \frac{n^2}{2}.$$

Aplicamos el primer lema 1.5.5 con $c = 1 - \frac{1}{r} + 2\varepsilon$. Así, obtenemos un subgrafo $G' \subset G$ con

$$|G'| \geqslant \varepsilon \quad \text{y} \quad \delta(G') \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) |G'|.$$

Como n es lo suficientemente grande, $\varepsilon n \geqslant n_0$ y por el segundo lema 1.5.6, G' contiene a $K_{r+1}(t)$, y por lo tanto G también. El resultado se sigue. $\square$

Definición 1.5.7. G está **t-cerca** de ser r-partito si existe un subgrupo r-partito de G con al menos $e(G) - t$ aristas.

Teorema 1.5.8 (Teorema de Estabilidad de Erdös-simonovits)**.** *Para todo grafo H con $e(H) \geqslant 1$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que: si G es H-libre en n-vertices y*

$$e(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} - \delta\right) \binom{n}{2}.$$

Entonces G está (εn^2)-cerca de ser $(\chi(H) - 1)$-partito.

Demostración. Haremos la demostración con $H = K_{r+1}$ y para H general lo haremos con el Lema de regularidad: $\square$

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que: si G es K_{r+1}-libre en n-vértices y

$$e(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right) \overbrace{\binom{n}{2}}^{\sim \frac{n^2}{2}},$$

entonces G está (εn^2)-cerca de ser r-partito.

Lema 1.5.9. *Sea $r \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ y n suficientemente grande. Si G es K_{r+1}-libre con n vértices y*

$$e(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} - \delta^2\right) \frac{n^2}{2},$$

entonces existe $G' \subset G$ con $v(G') \geqslant (1-\delta)n$ y

$$\delta(G') \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right) |G'|.$$

Demostración. □

Lema 1.5.10. *Para todo $r \in \mathbb{N}$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si G es K_{r+1}-libre con n vértices y*

$$\delta(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right) n,$$

entonces existe una partición $V(G) = A_0 \coprod A_1 \coprod \cdots \coprod A_r$ tal que $|A_0| \leqslant \varepsilon n$ y A_i son conjuntos independientes para todo $i \in \{0, \ldots, r\}$.

Demostración. Si tomamos $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño, entonces G contiene una copia de K_r por el Teorema de Turán 1.1.6 (esto ocurre si $e(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{r-1}\right) \frac{n^2}{2}$; tomar $\delta < \frac{1}{r-1} - \frac{1}{r}$).

Sea A un conjunto de vértices que induce un K_r en G. Sean $B := V(G) \setminus A$ y $X := \{v \in V(G) \mid |N_G(v) \cap A| \leqslant r - 2\}$, vamos a mostrar que X es pequeño.

$$\left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right) nr - r(r-1) \leqslant e(A,B) \leqslant (r-1)(n-r) - |X| \quad \Big(\sum_{v \in A} d_G(v) = e(A,B) + 2|A|\Big),$$

manipulando la desigualdad, obtenemos:

$$|X| \leqslant \delta nr.$$

Tomando $\delta < \text{mín}\{\frac{\varepsilon}{r}, \frac{1}{r-1} - \frac{1}{r}\}$, los consjuntos independientes son:

$$A_u = \{u\} \cup \{v \in B | vu \notin E(G)\}$$

para cada $u \in A$. □

Ejercicio 1.5.11. Utilizando los lemas 1 y 2, probar el teorema de estabilidad de Erdös-Simonits para $H = K_{r+1}$.

Sea $\varepsilon > 0$, tomar $\delta = (\delta')^2$ donde δ' se obtiene del Lema 2 con $\varepsilon' > \frac{\varepsilon}{2}$. Por hipótesis

$$e(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} - (\delta')^2\right) \frac{n^2}{2},$$

entonces por el Lema 1: existe $G' \subset G$ con $n' := v(G') \geqslant (1-\delta')n$ y $\delta(G') \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} - \delta'\right) v(G') = n'$. Por el Lema 2: para $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2}$ se tiene que $A_0, A_1, \ldots, A_r$ partición con $|A_0| < \varepsilon' n' \leqslant \varepsilon' n$ y A_i conjunto independiente para todo $i = 0, \ldots, r$. Así, se pierden en total a lo más

$$\delta' n^2 + \varepsilon' n^2 < \varepsilon n^2$$

aristas.

1.6. Ejercicios

Ejercicio 1.6.1. Puebe el teorema de Mantel de manera alternativa. Considere un conjunto independiente B de tamaño máximo en un grafo K_3-libre y la suma de los grados de los vértices que no están en B.

Solución. Sea G un grafo K_3-libre con orden n y B un conjunto independiente de G de tamaño máximo; consideremos $A := V(G)\backslash B$. Inspeccionemos la sumatoria

$$\sum_{v\in A} d_G(v);$$

notar que $d_G(v) = |N_G(v)|$ y que $N_G(v)$ es un conjunto de vértices aislados en G: si x,y son dos vecinos de v entonces $xy \notin E(G)$ porque de lo contrario G tendría un triángulo xyv. Así, como $|B|$ es máximo, se sigue que $|N_G(v)| \leqslant |B|$. Esto implica que

$$\sum_{v\in A} d_G(v) \leqslant |A|\,|B|.$$

Más aún, como A,B particionan $V(G)$: $|A|+|B| = n$. Luego $|A|\cdot|B|$ se maximiza cuando $|A|\,|B| = \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil = t_2(n)$. Así,

$$e(G) = e(A,B) + e(A) \leqslant e(A,B) + 2e(A) = \sum_{v\in A} d_G(v) \leqslant t_2(n),$$

como queríamos probar. $\square$

Comentario 1.6.2. Que $|A|\cdot|B|$ con $|A|+|B| = n$ se maximiza cuando $|A|\cdot|B| = \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil$ se deduce de que reemplazando $|B| = n-|A|$, el problema equivale a maximizar $|A|\cdot(n-|A|)$. Más formalmente, el problema equivale a maximizar $f(x) = x(n-x)$ con x número natural en el intervalo $[0,n]$. Simplemente notemos que $f'(x) = n-2x$, luego f es creciente en $[0,\frac{n}{2}]$ y decreciente en $[\frac{n}{2},n]$, pero como $\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor$ es el mayor número entero $\leqslant \frac{n}{2}$, f alcanza máximo en $[0,\frac{n}{2}]$ cuando $x = \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor$, similarmente, f alcanza máximo en $[\frac{n}{2},n]$ cuando $x = \left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil$. Como $f(\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor) = f(\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil)$, se sigue que f se maximiza en $x = \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor$ y $x = \left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil$, es decir, el valor máximo de f es $f(\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor) = \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil$.

Ejercicio 1.6.3. Demuestre que si G es un grafo con $n = 2k+1$ vértices, entonces G contiene un camino de largo k, digamos P_k, o el complemento de G tiene un triángulo.

Solución. Supongamos por el absurdo que ninguna de las dos situaciones pasa. Por un lado, si el complemento $\overline{G}$ de G no contiene triángulos, el Teorema de Mantel nos dice que

$$e(\overline{G}) \leqslant \mathrm{ex}(n,K_3) \leqslant k(k+1).$$

Como $(2k+1)k = \binom{n}{2} = e(G) + e(\overline{G})$, deducimos que

$$k^2 \leqslant e(G).$$

Por otro lado, si G no contiene P_k-caminos, el Teorema de Erdös & Gallai dice que

$$e(G) \leqslant \mathrm{ex}(n,P_k) \leqslant \frac{(k-1)n}{2} = \frac{(k-1)(2k+1)}{2}.$$

Juntando ambas desigualdades, llegamos al absurdo:

$$k^2 \overset{!!!}{\leqslant} \frac{(k-1)(2k+1)}{2}.$$

Por lo tanto, G contiene un P_k-camino o $\overline{G}$ un triángulo. □

Ejercicio 1.6.4. Demuestre que si T es un árbol con k vértices, entonces $T \subseteq G$ o el complemento de G contiene un triángulo si $n := |G| = 2k-1$.

Solución. Supongamos por el absurdo que G es un grafo con $n = 2k-1$ vértices que no contiene a un árbol T con k vértices, y que $\overline{G}$, su complemento, no contiene triángulos. En particular, la primera suposición implica que $\delta(G) \leqslant k-2$ por el siguiente lema, cuya demostración vimos en clase:

> *Sean $t \in \mathbb{N}$ y T un árbol con $t+1$ vértices. Entonces si G es un grafo con $\delta(G) \geqslant t$, luego contiene a T como subgrafo.*

Mientras que la segunda suposición ($\overline{G}$ no tiene triángulos), implica que dado un vértice $w \in V(G)$, entonces para cada par de vértices w', w'' no adyacentes a w se tiene que $w'w'' \in E(G)$. En otras palabras, para todo $w \in V(G)$, el subgrafo $G[A_w]$ inducido por el conjunto $A_w := V(G) \setminus \{N_G(w) \cup \{w\}\}$ es completo; notar que como $|A_w| = n - (d_G(w)+1)$, este grafo es isomorfo a $K_{n-d_G(w)-1}$.

Finalmente, para llegar al absurdo, consideremos $v \in V(G)$ un vértice con grado $d_G(v) = \delta(G) \leqslant k-2$, entonces $G[A_v]$ es un subgrafo de G isomorfo a $K_{n-\delta(G)-1}$, i.e. un completo con al menos

$$n - \delta(G) - 1 = (2k-1) - \delta(G) - 1 \geqslant (2k-1) - (k-2) - 1 = k$$

vértices, luego contiene una copia de T, con lo cual G también: absurdo. Consecuentemente, G contiene una copia de T o $\overline{G}$ tiene triángulo(s). □

Ejercicio 1.6.5. Pruebe que si $e(G) > n^2/4$, entonces G contiene al menos $\lfloor n/2 \rfloor$ triángulos.

Solución. El Teorema de Füredi (2015) dice:

> *Sean $n, t \in \mathbb{N}$, y G con n vértices. Si G está t-lejos de ser bipartito, entonces hay al menos*
> $$\frac{n}{6}\left(e(G) - \frac{n^2}{4} + t\right)$$
> *triángulos en G.*

Sea $H \subset G$ el subgrafo bipartito con cantidad de aristas $e(H)$ máxima de G. Como $e(H) \leqslant \frac{n^2}{2} < e(G)$, tenemos que $H \subsetneq G$; y podemos escribir $t := e(G) - e(H) \geqslant 1$. En particular, como $e(H)$ es máximo, tenemos que G está t-lejos de ser bipartito. Con lo cual, el Teorema de Füredi implica que G contiene al menos

$$\frac{n}{6}\left(e(G) - \frac{n^2}{4} + t\right)$$

triángulos; en particular, si $e(G) - \frac{n^2}{4} + t \geqslant 3$ ganamos, pues en este caso habrían al menos $\frac{n}{2} \geqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ triángulos. Por otro lado, esta cantidad es menor que 3 si y solo si

$t = 1$ y $H = T_2(n)$. En este caso, $H = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$. Tomemos una aristas $f \in E(G) \backslash E(H)$, con lo cual f tiene sus extremos en una de las dos particiones de H; en el peor de los casos está en la partición más grande, es decir, para todo vértice v de la partición de H con menor cantidad de vértices: $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, se forma un triángulo distinto con vértices v y los extremos de f. En particular, G contiene en este caso al menos $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ triángulos. □

Ejercicio 1.6.6. Sean G y H grafos. Demuestre que si G tiene n vértices y al menos $2 \cdot \mathrm{ex}(n,H)$ aristas, entonces G contiene al menos $\mathrm{ex}(n,H)$ copias de H.

Solución. Supongamos que G no contiene $e := \mathrm{ex}(n,H)$ copias de H, luego quitando una arista por cada copia de H en G obtenemos un grafo H-libre con al menos $e(G) - (e-1) \geqslant 2e - (e-1) = e + 1$ aristas. Sin embargo, por definición de e, se sigue que este grafo tiene a lo más e aristas, absurdo. Esto prueba que G tiene al menos e copias de H. □

Ejercicio 1.6.7. Sea $k \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Demuestre que todo grafo G con n vértices y al menos $n^2/4$ aristas contiene un grafo H con al menos k vértices y $\delta(H) \geqslant v(H)/2$.

Solución. Probaremos un enunciado más fuerte:

> *Sea $k \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Entonces todo grafo G con n vértices y al menos $\frac{n^2}{4}$ aristas contiene a $H := K_{k,k}$.*

Esto prueba el ejercicio pues el grafo $H := K_{k,k}$ tiene $2k \geqslant k$ vértices y $\delta(H) = k = \frac{v(H)}{2}$.

Ahora probemos este enunciado más fuerte. Para eso utilizaremos el Teorema de Kövani, Sós, y Turán (abreviado "KST"):

> *Sean $s,t \in \mathbb{N}$, $s \leqslant t$. Entonces existe una constante $c = c(s,t) > 0$ tal que*
>
> $$\mathrm{ex}(n, K_{s,t}) \leqslant c \cdot n^{2-\frac{1}{s}}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$
>
> lo aplicamos al caso $s = t = k$.
>
> Así, el Teorema de KST dice que

$$\mathrm{ex}(n,H) \leqslant c \cdot n^{2-\frac{1}{k}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

con $c > 0$ una constante que depende solo de k. Tomando $n_0 \in \mathbb{N}$ para que $\frac{n^2}{4} > cn^{2-\frac{1}{k}}$ valga para todo $n \geqslant n_0$, se sigue que G siempre debe tener a H como subgrafo: de lo contrarío se llegaría al absurdo:

$$\frac{n^2}{4} \leqslant e(G) \leqslant \mathrm{ex}(n,H) \leqslant cn^{2-\frac{1}{k}}.$$

□

1.7. Regularidad

Definición 1.7.1. Una partición de un grafo G, $X,Y \subset V(G)$, entonces definimos la **densidad** de (X,Y) como la cantidad

$$d(X,Y) = \frac{e(X,Y)}{|X||Y|}.$$

Definición 1.7.2. Dado $\varepsilon > 0$. Sea una partición $A,B \subset V(G)$ de los vértices de un grafo G. Diremos que el par (A,B) es **ε-regular** si para todo $X \subset A$, $Y \subset B$ con

$$|X| \geqslant \varepsilon A \quad \text{e} \quad |Y| \geqslant \varepsilon |B|$$

tenemos

$$|d(X,Y) - d(A,B)| \leqslant \varepsilon.$$

Definición 1.7.3. Sea G un grafo. Una partición $V(G) = V_0 \coprod V_1 \coprod \cdots \coprod V_k$ es una **equipartición**, si

$$|V_0| \leqslant |V_1| = |V_2| = \cdots = |V_k|.$$

Al conjunto V_0 lo llamamos **conjunto excepcional**.

Definición 1.7.4. Sea G un grafo con n vértices y $\varepsilon > 0$. Diremos que una partición $V(G) = V_0 \coprod V_1 \coprod \cdots \coprod V_k$ es **ε-regular**, si $|V_0| \leqslant \varepsilon n$ y a lo más εk^2 pares (V_i, V_j) con $1 \leqslant i,j \leqslant k$ no son ε-regulares.

Teorema 1.7.5 (Lema de Regularidad de Szemerédi)**.** *Para todo $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$, existe $M = M(\varepsilon, m)$ tal que para cualquier grafo, existe una partición ε-regular*

$$V(G) = V_0 \coprod V_1 \coprod \cdots \coprod V_k$$

con $m \leqslant k \leqslant M$.

Corolario 1.7.6. *Se puede probar el Teorema de Erdös-Stone: para todo $\delta > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si*

$$e(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} + \delta\right) \frac{n^2}{2},$$

entonces $H \subset G$, donde $r = \chi(H) - 1$.

Tomemos $\delta > 0$ arbitrariamente pequeño, aplicar regularidad de Szemeredi con ε lo suficientemente pequeño y $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Así, obtenemos una equipartición ε-regular

$$v(G) = V_0 \coprod V_1 \coprod \cdots \coprod V_k.$$

Borramos de G todas las aristas sobre las que "no hay control":

- Las que ven a V_0.
- Las aristas entre pares no ε-regulares.
- Aristas entre pares no densos, i.e., "tenemos menos que $\delta/2$ densidad".
- Aristas dentro las partes.

Después, obtenemos el gafo reducido R: dado por contraer cada V_i a un vértice w_i y borrar aristas múltiples. Así, R tiene cconjunto de vértices $w_1,\dots,w_r$ donde $w_{iw_j \in E(R)}$ sii (V_i,V_j) es ε-regular y denso.

Aplicamos lemas de inmersión en "aristas" de grafo - grafo reducido:

$$\text{Si } H \subset R_{\text{¸}}quad \Rightarrow H \subset G.$$

Lema 1.7.7. *Sea $V_0 \coprod V_1 \coprod \cdots \coprod V_k$ una partición ε-regular de un grafo G con $k \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$. Entonces, hay un máximo de:*

(a) εn^2 aristas con un extremo en V_0.

(b) εn^2 aristas dentro de una parte V_i con $i \geqslant 1$.

(c) εn^2 aristas entre pares que no son ε-regulares.

(d) δn^2 aristas entre pares que tienen densidad $< \delta$.

Demostración. (a) Como $|V_0| \leqslant \varepsilon n$ entonces hay a lo más

$$\varepsilon n(1-\varepsilon)n + \binom{\varepsilon n}{2} < \varepsilon n^2 \text{ aristas en (a).}$$

(b) Cada V_i tiene $\leqslant \frac{n}{k}$ vértices, y entonces hay a lo más $K \cdot \binom{\frac{n}{k}}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} n^2$ aristas para (b).

(c) Hay a lo más εk^2 pares que no son ε-regulares y cada par tiene a lo más $\binom{n}{k}^2 < \varepsilon n^2$ aristas.

(d) En el peor caso, los $\binom{r}{2}$ pares son poco densos. En este caso

$$e(V_i,V_j) \leqslant \delta \left(\frac{n}{k}\right)^2, \quad \forall i,j < \delta n^2,$$

y entonces, hay a lo más $\delta \left(\frac{n}{k}\right)^2 \binom{k}{n}$ aristas en pares "poco densos".

□

Lema 1.7.8. *Sea $\varepsilon > 0$, (A,B) un par ε-regular de un grafo G. Entonces,*

$$(d(A,B)-\varepsilon)|B| \leqslant |N_G(v) \cap B| \leqslant (d(A,B))|B|$$

para todos, excepto a lo más $2\varepsilon|A|$ vértices $v \in A$.

Demostración. Tarea: tomar Y = los v qu eno funcionan y Y = B. y aplicar la epsilon regularidad de (A,B) □

Lema 1.7.9 (Slicing)**.** *Sea $\alpha \geqslant \varepsilon > 0$, y sea (A,B) un par ε-regular en un grafo G. Para cualquier $X \subset A, Y \subset B$ con*

$$|X| \geqslant d|A| \quad y \quad |Y| \geqslant \alpha|B|$$

se tiene que el par (X,Y) es $\frac{2\varepsilon}{\alpha}$-regular y

$$d(X,Y) \geqslant d(A,B) - \varepsilon \quad (\textit{por definición de } \varepsilon\textit{-regular}).$$

Bibliografía