

# Volatilidad realizada y el riesgo de mercado: Aplicación del Value-at-Risk (VaR) en el índice GOBIXDR

Superintendencia de Bancos, Departamento de Estudios Económicos

Stefan Bolta, FRM.

Primer borrador: Enero 17, 2024

## Abstract

En esta investigación estudiamos la volatilidad realizada (RV) del portafolio representativo de bonos gubernamentales (GOBIXDR) con el fin de inferir sobre el nivel de riesgo de mercado. Aplicamos el Value-at-Risk (VaR) utilizando la metodología híbrida GARCH bajo el procedimiento de Simulación Histórica Filtrada (FHS) y el método de Monte-Carlo. En el proceso de búsqueda del modelo óptimo, realizamos calibraciones de distintas familias GARCH variando los parámetros de manera iterativa dentro de un amplio universo de configuraciones. El grupo de modelos que minimiza el criterio de selección es sometido a las pruebas y, posteriormente, a la fase de validación. A partir de las estimaciones realizadas en el año 2022, aplicamos criterios para formular un escenario de Stress-VaR y estimar el potencial consumo de riesgo del portafolio *benchmark*. Los resultados indican que, para un tenedor del portafolio *benchmark* en tiempos normales que utiliza el método de la Simulación Histórica Filtrada (FHS), el consumo por riesgo del portafolio de Trading se estima entre el 3.19% y 6.10% de su valor de mercado. Para los portafolios Disponible Para la Venta (Available-For-Sale) y Valores Hasta el Vencimiento (Hold-To-Maturity), la carga correspondiente se estima entre el 6.64% y 16.60%. En tiempos de turbulencia financiera, las cargas por Stress-VaR incrementan en el rango entre el 9.17% y 19.42% en Trading, y entre el 22.77% y 62.14% para los demás portafolios. El uso del método Monte-Carlo ha mostrado capacidad para reducir estas estimaciones, sin embargo, su aplicación presenta algunos costos implícitos en el riesgo de modelo inherente.

## Motivación

El principal objetivo de la medición de riesgos es caracterizar exitosamente el comportamiento en los factores de riesgos, con el fin de evaluar de manera probabilística la magnitud en sus movimientos potenciales y, a partir de ello, estimar el potencial impacto económico<sup>1</sup>. Desde su creación, la serie GOBIXDR ha capturado los ciclos de política monetaria, incluyendo la reciente respuesta restrictiva al choque inflacionario post-COVID, proporcionando evidencias tempranas de su impacto y reflejando características de estrés altamente informativas para fines de realizar la estimación de riesgos. Esta investigación se enfoca en analizar el riesgo de mercado inherente en el portafolio de inversiones *benchmark* compuesto de bonos gubernamentales de la República Dominicana. El propósito es expandir la literatura existente con estimaciones de volatilidad que permitan contextualizar el desempeño ajustado el riesgo potencial. En segundo lugar, se busca informar sobre el consumo de capital necesario para soportar el riesgo de mercado correspondiente.

## Parte I: Revisión teórica

En el contexto de mercados financieros, cuando se menciona el concepto de “volatilidad”, suele referirse a la volatilidad realizada (RV) o la volatilidad implícita (IV). La primera comprende mediciones de la variabilidad

<sup>1</sup>La estimación del impacto económico es un componente elemental en el rompecabezas tradicional de las finanzas: la evaluación de la rentabilidad ajustada al riesgo.

en el nivel de precio de un activo, indicador o factor de riesgo que fue registrado en el pasado y es conocido a-priori. En el caso de la segunda definición, se refiere exclusivamente a la variabilidad futura esperada<sup>2</sup>, extraída y cuantificada a partir de los precios pactados en el mercado de opciones, donde las contrapartes asumen posiciones de riesgo con respecto al comportamiento futuro del activo subyacente<sup>3</sup>. Para fines de esta investigación siempre nos referiremos a la volatilidad realizada.

El estudio de la volatilidad permite inferir acerca de las condiciones en los mercados, el impacto que estas generan sobre las actividades de asunción de riesgos (líneas de negocio) y finalmente, cómo impacta de manera agregada a una entidad particular o el mercado en conjunto.

La importancia que tiene la estimación de la volatilidad en mercados financieros radica en dos aspectos: en primer lugar, se utiliza para evaluar el desempeño de portafolios y estrategias de inversiones, estudiando el vínculo entre los retornos obtenidos y el riesgo incurrido, siendo uno de los pilares en la construcción del perfil de riesgo. En segundo lugar, permite costear adecuadamente el consumo de capital por las exposiciones en el portafolio. Este ha sido un elemento tradicional en la gestión microprudencial incorporado ampliamente dentro de los estándares regulatorios para robustecer la solvencia de las entidades financieras<sup>4</sup>. Conocer de manera continua el desenvolvimiento de los elementos señalados mejora la capacidad de respuesta al riesgo en condiciones cambiantes y reduce el riesgo de experimentar estrés financiero (Duffie y Pan, 1997).

## La intuición conceptual detrás de la volatilidad realizada

$$r(t, T) = \frac{\partial P_t}{P} \sim \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \quad (1)$$

El origen de la volatilidad en las finanzas puede ser rastreado a la física y la teoría del movimiento brauniano<sup>5</sup><sup>6</sup> que describe el comportamiento de movimientos aleatorios en el espacio (*random walk*). En términos del mercado financiero, se trata del patrón temporal en las variaciones de una serie de precios ( $P_t$ )<sup>7</sup>. Las propiedades estocásticas de las mediciones de una variable aleatoria  $f(x)$  en intervalo de tiempo  $(t, T)$  se pueden describir en términos de una distribución estadística caracterizada por el espacio muestral que consiste de eventos  $\xi$  y la probabilidad  $P(d)$ . Meucci<sup>8</sup> plantea que la situación se puede presentar de tres formas: la distribución de la densidad marginal, la distribución de la densidad cumulativa y, la función característica  $\phi_x$ <sup>9</sup>. En su forma más simple, la función generadora se puede describir con dos parámetros: los primeros dos momentos de una distribución Normal, media ( $\mu$ ) y la desviación estándar ( $\sigma$ ).

$$r(t, T + \delta T) = \mu_t \delta T + \sigma_t \delta Z(t) \quad (2)$$

Donde, desde la perspectiva de la densidad cumulativa, el retorno del activo  $r(t, T + \delta T) = \frac{\partial P_t}{P}$  se compone del cambio en la secuencia de precios  $P$ , observados en el intervalo de tiempo  $\delta T$ . Estos son modelados mediante una combinación de la tendencia determinista (primer término) y el componente estocástico que refleja las variaciones (segundo término). Tomando en cuenta que la volatilidad por definición es diferenciada y, por lo tanto, centrada en cero, nuestro interés se enfoca a la evolución del segundo término de la ecuación. Concretamente, se trata de la difusión en el tiempo que presenta él mismo.

<sup>2</sup>Curiosamente, la volatilidad implícita se estima con derivaciones directas o indirectas de los insumos históricos.

<sup>3</sup>Canina, L., and Figlewski, S. (1993). The informational content of implied volatility. *The Review of Financial Studies*, 6(3), 659-681.

<sup>4</sup>Basel Committee on Banking Supervision. "Minimum capital requirements for market risk." (2016).

<sup>5</sup>Ornstein, L. S. (1930). On the theory of the Brownian motion. *Physical review*, 36, 823-841.

<sup>6</sup>Wang, M. C., Uhlenbeck, G. E. (1945). On the theory of the Brownian motion II. *Reviews of modern physics*, 17(2-3), 323.

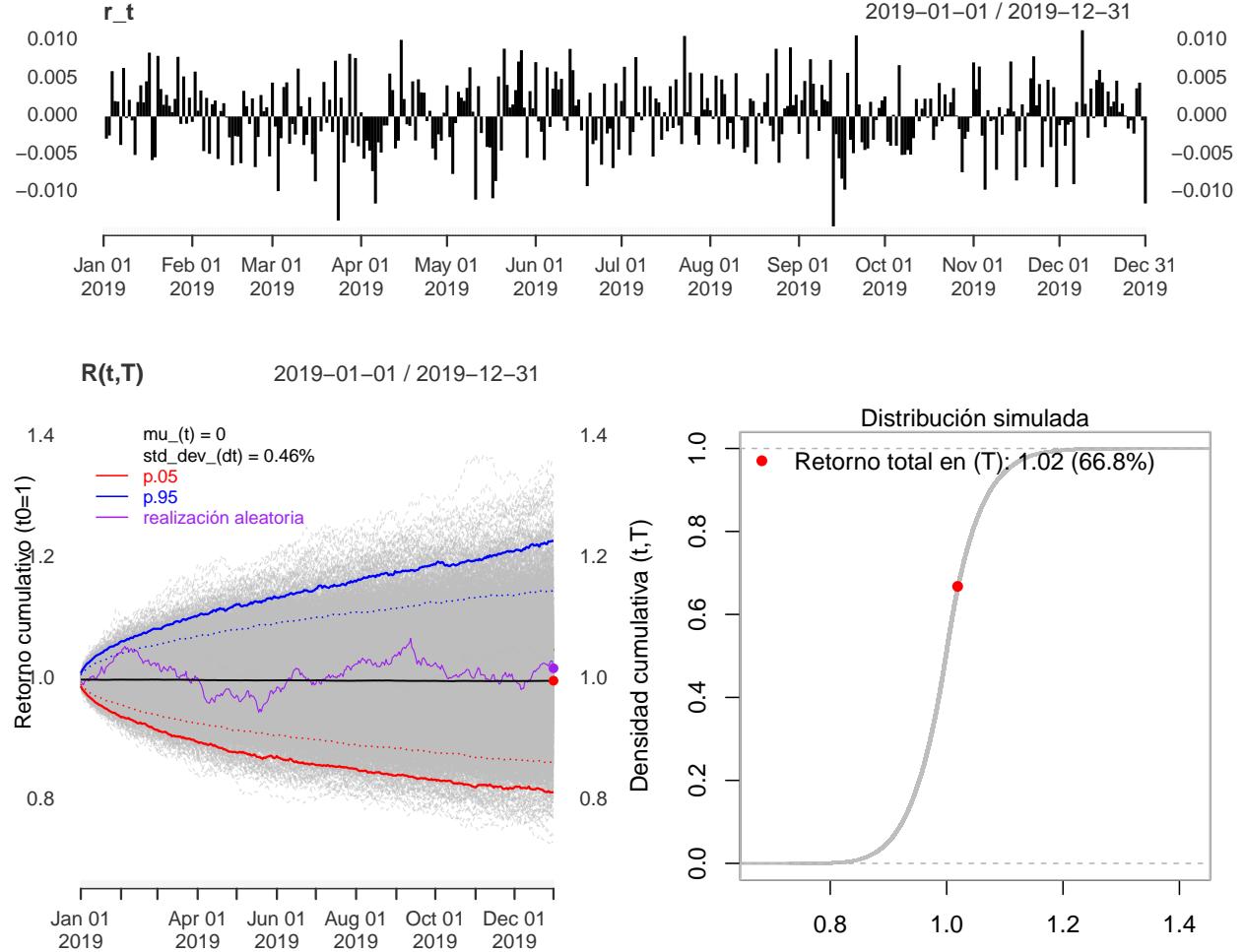
<sup>7</sup>El uso de los retornos logarítmicos se debe a algunas propiedades deseables. Se destacan dos, el retorno cumulativo de un activo en un intervalo de tiempo es la suma continua de retornos compuestos de períodos individuales; su uso evita que los precios de activos financieros alcancen valores negativos en el proceso de modelación. Para una revisión comprensiva ver Hudson, R. S., and Gregoriou, A. (2015). Calculating and comparing security returns is harder than you think: A comparison between logarithmic and simple returns. *International Review of Financial Analysis*, 38, 151-162.

<sup>8</sup>Meucci, A. (2005). *Risk and asset allocation* (Vol. 1). New York: Springer.

<sup>9</sup>La función característica se puede convertir en cualquiera de las anteriores con la aplicación de la transformación de Fourier. Para mas detalles ver Cuppens (1975).

$$r(t, T + \delta T) = \sigma_t Z(t) \sqrt{\delta_t} \quad (3)$$

El choque se presenta en las variables  $\sigma_t$  y  $Z(t)$  que capturan la distancia en la dispersión, siendo  $\sqrt{\delta_t}$  indicativo del proceso de difusión que sigue el proceso de agregación en el tiempo utilizando la regla de la raíz cuadrada<sup>10</sup>. Veamos un ejemplo de simulación del proceso  $N(0, \sigma)$ :



### Principales características de la volatilidad

Las regularidades empíricas de la volatilidad fueron extensamente estudiadas en la literatura<sup>11 12 13</sup>. Sus propiedades más ampliamente estudiadas son: reversión hacia la media, comportamiento diferenciado por regímenes, el clustering y la persistencia, la asimetría y, la propensión a experimentar saltos y discontinuidades<sup>14</sup>.

<sup>10</sup>Esta es una propiedad conveniente para traducir las mediciones a distintas escalas de tiempo. Ver: Danielsson, J., Zigrand, J. P. (2006). On time-scaling of risk and the square-root-of-time rule. *Journal of Banking and Finance*, 30(10), 2701-2713.

<sup>11</sup>Mandelbrot, B. (1967). The variation of some other speculative prices. *The Journal of Business*, 40(4), 393-413.

<sup>12</sup>Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative finance*, 1(2), 223.

<sup>13</sup>Bouchaud, J. P., Potters, M. (2003). Theory of financial risk and derivative pricing: from statistical physics to risk management. Cambridge university press.

<sup>14</sup>Este contrasta al compararse con el modelo matemático de la caminata aleatoria (Random Walk) que hace tres supuestos fundamentales acerca del comportamiento de la variación en precios: 1) condición de martingala (el proceso no tiene memoria), 2) independencia en los retornos (el movimiento en  $T$  es totalmente independiente de aquél que sucedió en  $T_{t-1}$ ) y; 3) condición de normalidad (las variaciones de precio se ajustan a la distribución Normal).

**Reversión hacia la media.** La volatilidad nunca es cero, incluso cuando los mercados permanecen cerrados (la prima por salto es una función creciente de  $T$ ), y a pesar de no tener un límite superior (*cap*) que pueda alcanzar, la volatilidad eventualmente tiende a retornar hacia sus niveles históricos<sup>15</sup>. Esta regularidad es razonablemente predecible; su principal incertidumbre se encuentra en el nivel esperado y tiempo de convergencia.

**Clustering y persistencia.** Los movimientos que van en dirección, ya sea hacia la contracción o expansión, serán seguidos por variaciones que se alinean en continuación con la tendencia más reciente. Con el tiempo, la volatilidad presenta contracciones y expansiones periódicas, y en cada ciclo, permanece por cierto tiempo hasta encontrar un nuevo elemento catalizador que cambie su curso. Esta propiedad puede ser observada en el comportamiento de la función de autocorrelación entre las variaciones con distintos rezagos, con un nivel típicamente decreciente en el tiempo.

**Asimetría, apalancamiento y retroacción.** El impacto sobre la volatilidad es más pronunciado en los movimientos adversos. Específicamente, los declives en precios tienden a expandir la volatilidad en mayor grado de lo que esta tiende a contraerse cuando ocurre lo contrario. Black<sup>16</sup> propuso una explicación fundamental para este fenómeno al estudiar el mercado de acciones. Su teoría argumenta que las contracciones en los precios de acciones reducen la valoración de una empresa y, como resultado, tienden a incrementar el apalancamiento financiero. En consecuencia, se eleva el riesgo de la firma. Este hecho suele disgustar a los inversionistas incrementando presiones para vender, y siendo el catalizador del incremento en la volatilidad<sup>17</sup>. A pesar de que las teorías comunes se centran en buscar explicaciones en mercados de acciones con elementos exógenos, consideramos la dinámica descrita puede funcionar también en el mercado de bonos. Esto se debe a un elemento inherente al funcionamiento de los mercados de capitales: el financiamiento de posiciones y el ciclo de apalancamiento donde los bonos libres del riesgo son el principal colateral que respalda las demás posiciones de riesgo en los portafolios de inversiones<sup>18</sup>. El incremento en la volatilidad en el mercado puede afectar tanto a las posiciones financiadas como la fuente del fondeo (por medio de la revaluación de la garantía), contribuyendo al aumento en el riesgo de contraparte percibido. En el primer caso, viene por el lado de deterioro en el balance dadas las pérdidas en el activo, situación que eleva el apalancamiento. En cambio, si incrementa la volatilidad del colateral, también se reduce su valor y, en consecuencia, también incrementa el apalancamiento. En situaciones de estrés, las dos posibilidades no son mutuamente excluyentes, su ocurrencia contribuye a la formación de eventos de liquidación.

**Regímenes, saltos y discontinuidades.** Anteriormente, nos hemos referido a las características de clustering y persistencia en cada estado como fundamentales para describir el comportamiento de la volatilidad. También es necesario mencionar que el cambio entre distintos tipos de regímenes ocurre precisamente a través de saltos y discontinuidades en los patrones temporales de la volatilidad<sup>19</sup>. La dinámica cambiante se altera entre estados donde los incrementos son grandes y muy poco frecuentes, y aquellos donde las reducciones son pequeñas y frecuentes por períodos prolongados. De esto se desprende que la volatilidad tiene un sesgo positivo inherente, mientras que los retornos presentan la característica contraria.

**Otros que destacar.** Las publicaciones de informaciones altamente anticipadas se asocian con niveles de volatilidad elevados ex-ante. En términos de la distribución estadística que presenta, se define como la “cola gruesa” (*fat tail*), y se caracteriza por la varianza histórica que tiende a representar de manera desproporcional unas pocas observaciones extremas. El exceso de curtosis decrece con la agregación<sup>20</sup>. De otra forma, la volatilidad de largo plazo es predecible con mucho mejor precisión que en el corto plazo.

<sup>15</sup>Este supuesto debe interpretarse con cierta precaución. Los mercados siguen un proceso evolutivo, pudiendo experimentar cambios estructurales, y por lo tanto, el futuro puede siempre tener diferentes características de los regímenes observados en el pasado.

<sup>16</sup>Black, F. (1976). Studies of stock market volatility changes. Proceedings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section, 1976.

<sup>17</sup>Algunos autores sostienen que el mecanismo de transmisión funciona bajo una dinámica distinta: el aumento en la volatilidad incrementa el costo del capital, lo cual reduce la valoración, y ese efecto (en retroacción) impulsa una relación inversa entre la volatilidad y la correlación serial en precios.

<sup>18</sup>Existen varias razones para explicar esto: alto nivel de confianza en el crédito, bajo nivel de volatilidad, liquidez y profundidad de mercado. También, debe mencionarse el trato preferencial regulatorio como colateral por excelencia

<sup>19</sup>Usualmente, se registra cuando ocurre un choque informativo (el mercado absorbiendo nueva información, la interacción entre el ruido y el equilibrio), pero en ocasiones también puede suceder sin razones claras a priori.

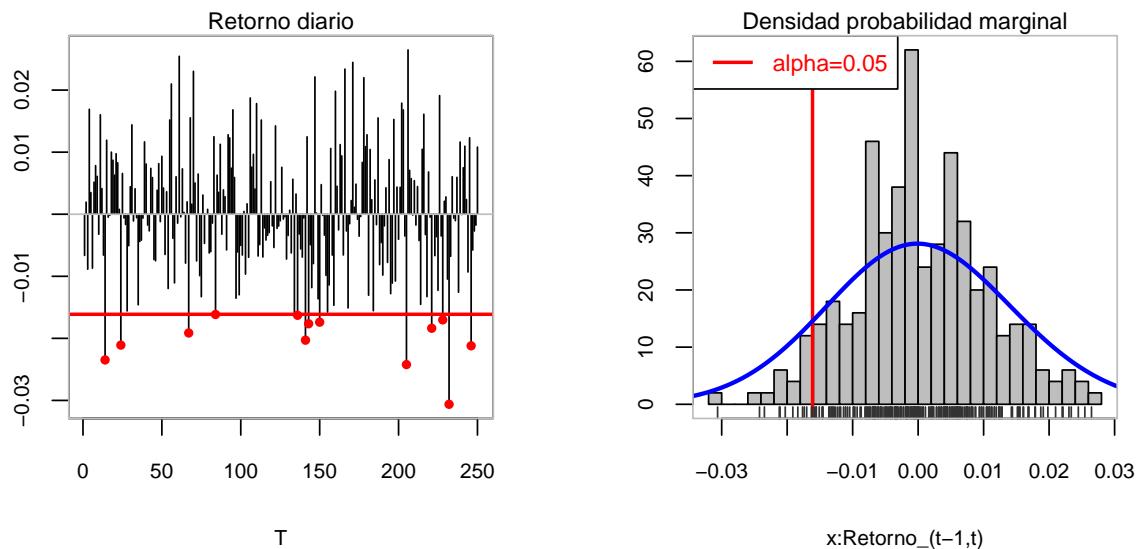
<sup>20</sup>Si se hace la agregación de la data en el tiempo reduciendo la frecuencia del periodo observado también se reducirá de manera sustancial el nivel de curtosis.

## Value-at-Risk (VaR)

$$VaR_{1-\alpha(x)} := \inf[t : (x \leq t) > (1 - \alpha)]; t \in R \quad (4)$$

El Value-at-Risk (VaR) puede ser interpretado como la distancia esperada al percentil recorte  $P_{1-\alpha(x)}$  de la dispersión en el retorno  $x$  al momento  $T$ . En términos prácticos, nos indica “la probabilidad al momento  $T$  que la pérdida incurrida ( $x$ ) no exceda cierto nivel fijado” acorde con la confianza estadística requerida. La utilidad de esta perspectiva ha sido transformacional para la industria financiera dado que, a partir de la invención del VaR, los riesgos financieros pueden ser modelados y expresados con cierta exactitud. Esto ha impactado profundamente la forma de gestión de riesgos financieros.

Duffie y Pan<sup>21</sup> proponen seis objetivos organizacionales para la gestión del riesgo de mercado: 1) Medir la exposición en cada posición dentro del portafolio, el centro de rentabilidad acorde con un nivel adecuado de agregación. 2) Gestionar el presupuesto de riesgos asignando el consumo de capital por concepto de riesgo de mercado a cada posición. 3) Distribuir el uso del capital y fijar los límites de riesgos para las Unidades Tomadoras de Riesgos. 4) Proveer información sobre la integridad financiera y la tecnología utilizada en la gestión de riesgos de la firma a sus contrapartes contractuales, reguladores, auditores, agencias calificadoras de riesgos u otros, según corresponda. 5) Medir y evaluar los resultados logrados de los centros de rentabilidad en el contexto del nivel de riesgo asumido (en vez de retornos absolutos). 6) Proteger la firma del estrés financiero.



La utilidad de las estimaciones del VaR ha sido reconocida ampliamente por reguladores<sup>22</sup>, supervisores<sup>23</sup> y académicos<sup>24</sup>. En un estudio importante, Jorion<sup>25</sup> evaluó el nivel informativo que presentan las publicaciones del VaR en los informes trimestrales de bancos comerciales en los Estados Unidos. Encontró una relación altamente relevante entre las mediciones del VaR y la variabilidad futura en los ingresos por *trading*. Las entidades financieras que registraron mediciones comparativamente bajas mostraron exposición al riesgo limitada, independientemente del tamaño de su balance y la magnitud del libro de derivados. El autor sugiere que los inversionistas pueden aplicar esta información para fines de comparar los perfiles de riesgo entre instituciones y estimar futuros ingresos con mayor precisión.

<sup>21</sup>DUFFIE, Darrell; PAN, Jun. An overview of value at risk. Journal of derivatives, 1997, vol. 4, no 3, p. 7-49.

<sup>22</sup>Ver: Board of Governors of the Federal Reserve System (2009). Application of the Market Risk Rule in Bank Holding Companies and State Member Banks. Office of the Comptroller of the Currency (2012). Federal Register, Vol. 77, No. 169, Rules and Regulations

<sup>23</sup>Adrian, T. (2018). Risk management and regulation. International Monetary Fund.

<sup>24</sup>Jorion, P. (2007). Value at risk: the new benchmark for managing financial risk. McGraw-Hill. Dowd, K. (2007). Measuring market risk. John Wiley and Sons

<sup>25</sup>Jorion, P. (2002). How informative are value-at-risk disclosures?. The Accounting Review, 77(4), 911-931.

Las críticas al VaR se dividen en dos grupos: en primer lugar, críticas que relacionan la medición con el ambiente de control en una firma y los aspectos correspondientes al marco de gobierno corporativo (riesgo moral)<sup>26</sup>. Específicamente, ha sido demostrado<sup>27</sup> que bajo el marco de gestión basado en el VaR existe el incentivo para asumir mayores exposiciones al riesgo de lo que sería deseable<sup>28</sup> en un mundo sin el VaR y, en consecuencia, experimentando mayores pérdidas cuando estas ocurren. El segundo grupo se enfoca a los aspectos técnicos relacionados con la estimación de la volatilidad y el error matemático inherente<sup>29</sup><sup>30</sup>. Algunos autores se centran en la discusión sobre cuál área de la distribución debería ser el enfoque de la información proporcionada por la medición<sup>31</sup>. Otros centran su interés en qué tratamiento proporcionar a las observaciones atípicas y cómo adaptar al marco de modelación el “efecto de cola gruesa” (*fail tail*). El avance progresivo ha convertido el concepto en una familia de modelos: c-VaR (también conocido como Expected Shortfall, ver más abajo), EVT VaR<sup>32</sup>, Worst-Case VaR<sup>33</sup>, s-VaR<sup>34</sup>, entre otros.

Un elemento importante en la elección del modelo para estimar el VaR se vincula con el concepto de coherencia. Artzner et al<sup>35</sup> han definido cuatro condiciones necesarias para cumplir con el criterio de considerar una medida de riesgo como coherente:

1. *Monotonicidad*: Si un portafolio registra valoración mas elevada en distintas condiciones del mercado, tiene que implicar un mayor nivel de riesgo.
2. *Subaditividad*: El riesgo del portafolio es menor que la suma de riesgos individuales.
3. *Invariante transicional*: Adicionar el efectivo K al portafolio debería reducir el riesgo en la misma magnitud.
4. *Homogeniedad*: Incrementar el portafolio por el monto B debería escalar la medida de riesgo por la misma magnitud.

Los autores probaron que el VaR no satisface la condición de subaditividad, además de presentar ciertas limitaciones desde el punto de vista de la convexidad, por lo cual, concluyen que el uso del VaR (sólo) podría desincentivar la diversificación y sufrir de importantes errores en la estimación.

El VaR Condicional (c-VaR) nace con el propósito de informar sobre qué se espera en malos estados del mundo y presenta criterios deseables desde el punto de vista de la coherencia. Responde la pregunta “dado que se registra un exceso en el VaR, ¿cuál es mi pérdida esperada?”.

$$cVaR_{1-\alpha(x)} := \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR_{1-\gamma(x)} \delta Y \quad (5)$$

A diferencia del VaR, el c-VaR es una medida que cumple con los cuatro criterios citados. A pesar de esto, no es considerada la medida más coherente. De hecho, Yamai y Yoshiha<sup>36</sup> encontraron que el c-VaR tiende

<sup>26</sup>TALEB, Nassim N.; INVESTMENTS, L. P. Report on the risks of financial modeling, VaR and the economic breakdown. En United States Congress, Testimony (Subcommittee). 2009.

<sup>27</sup>Basak, S., and Shapiro, A. (2001). Value-at-risk-based risk management: optimal policies and asset prices. The review of financial studies, 14(2), 371-405.

<sup>28</sup>Esto se debe al hecho que en términos matemáticos puede resultar óptimo asumir un mayor nivel de riesgo dadas las condiciones de mercado vigentes que se espera permanezcan en el futuro cercano.

<sup>29</sup>GOLDSTEIN, Daniel G.; TALEB, Nassim Nicholas. We don't quite know what we are talking about when we talk about volatility. Journal of Portfolio Management, 2007, vol. 33, no 4.

<sup>30</sup>Jorion, P. (1996). Risk2: Measuring the risk in value at risk. Financial analysts journal, 52(6), 47-56.

<sup>31</sup>Estadísticamente, definir que tan lejos en la cola de la distribución marginal sería deseable estimar, y cuál debería ser el enfoque de su interpretación probabilística dado el nivel de confianza elegido.

<sup>32</sup>EMBRECHTS, Paul. Extreme value theory: Potential and limitations as an integrated risk management tool. Derivatives Use, Trading and Regulation, 2000, vol. 6, no 1, p. 449-456.

<sup>33</sup>Ghaoui, L. E., Oks, M., and Oustry, F. (2003). Worst-case value-at-risk and robust portfolio optimization: A conic programming approach. Operations research, 51(4), 543-556.

<sup>34</sup>COSTE, Cyril; DOUADY, Raphael; ZOVKO, Ilija I. The stressvar: A new risk concept for extreme risk and fund allocation. The Journal of Alternative Investments, 2010, vol. 13, no 3, p. 10-23.

<sup>35</sup>Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., and Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. Mathematical finance, 9(3), 203-228

<sup>36</sup>Yamai, Y., and Yoshiha, T. (2002). Comparative analyses of expected shortfall and value-at-risk: their estimation error, decomposition, and optimization. Monetary and economic studies, 20(1), 87-121.

a registrar un mayor error estándar que el VaR cuando es evaluado bajo las distribuciones de la cola gruesa, y este tiende a empeorar a medida que incrementa la presencia de grandes pérdidas que son poco frecuentes.

## Taxonomía de los modelos de riesgo

Al igual que la definición conceptual de la volatilidad, las estimaciones del VaR también se dividen en dos grupos: métodos históricos e implícitos. El primer grupo utiliza la data histórica para determinar la distribución de probabilidad y modelar el riesgo de mercado. Comúnmente, se ordenan de la siguiente forma:

Table 1: Métodos Paramétricos

Clasificación	
Normal	$VaR_\alpha = \mu_t - \sigma_t Z_\alpha$
LogNormal	$VaR_\alpha = 1 - e^{(\mu_t - \sigma_t Z_\alpha)}$
Valor Extremo (EVT)	Generalized-Extreme-Value (GEV) Peaks-Over-Threshold (POT)

Table 2: Métodos No Paramétricos

Clasificación	
Simulación Histórica	Simple Bootstrap Densidad no paramétrica
Simulación Histórica Ponderada	Ponderada por el tiempo Ponderada por volatilidad Ponderada por correlación Filtrada

**Métodos Paramétricos:** Imponen supuestos acerca de la distribución condicional en los retornos. Ofrecen una solución cerrada y elegante desde el punto de vista matemático. Su principal ventaja es la facilidad con la que permiten realizar las estimaciones, su explicación intuitiva y, finalmente, el bajo costo computacional. La debilidad proviene del sesgo que puede existir entre la distribución real en la data versus la distribución modelada. Las estimaciones pueden resultar muy sensibles a los parámetros utilizados. Esto es especialmente cierto en el caso del EVT VaR<sup>37</sup>

**Métodos No-Paramétricos:** No imponen supuestos acerca de la distribución condicional de los retornos, mas bien la replican desde la muestra utilizando distintas técnicas. Son capaces de soportar las características de la volatilidad que los métodos paramétricos no pueden acomodar: efectos de cola gruesa y el sesgo distribucional. Pueden resultar computacionalmente intensos y, en ocasiones, difíciles de explicar. Enfrentan la dificultad en la elección de la ventana del tiempo apropiada para fines de calibración dado que las estimaciones pueden resultar sensibles a pequeñas variaciones en la longitud de la serie.

**Métodos Híbridos:** Combinan los paramétricos y no paramétricos. La simulación de Monte Carlo pertenece a esta categoría. La principal ventaja de estos métodos: tienen la capacidad para producir resultados que superan los malos estados del mercado reflejados en el pasado, revelando la posibilidad que futuras pérdidas superen las históricas. Suelen ser computacionalmente intensos y técnicamente demandantes.

<sup>37</sup>Ver: Embrechts, P., Kluppelberg, C., and Mikosch, T. (1999). Modelling extremal events. British actuarial journal, 5(2), 465-465. Hauksson, H. A., Dacorogna, M., Domenig, T., Mller, U., and Samorodnitsky, G. (2001). Multivariate extremes, aggregation and risk estimation.

A continuación el esquema de Jorion<sup>38</sup> adaptado:

Table 3: Resumen Comparativo Métodos de Estimación VaR

Características	Delta-Normal (Parámetrico)	Simulación Histórica (No-Parámetrico)	Simulación Monte Carlo (Híbrido)
<b>Método de Estimación</b>	Lineal	Completo	Completo
<b>Distribución</b>			
Tipo	Normal/Lognormal	Actual	General
Eventos	Probabilidad baja	Solo si existe en la data	Possible
Extremos			
<b>Implementación</b>			
Facilidad estimación	Alta	Media	No
Facilidad comunicación	Media	Baja	Difícil
Precisión	Alta	Baja (si la ventana de tiempo es corta)	Adeuada (con suficientes iteraciones)
<b>Mayores deficiencias</b>	Efectos no-lineales, cola gruesa	Variación en el tiempo, eventos atípicos	Riesgo de modelo

## Modelos estocásticos de volatilidad realizada

Para fines de acomodar las propiedades empíricas inherentes en la volatilidad y producir las estimaciones de riesgos se utiliza ampliamente la familia de los modelos GARCH (Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity)<sup>39</sup>. Por definición, esta pertenece al grupo de modelos híbridos. Permite modelar sus predicciones tomando en cuenta el comportamiento en el término del error ( $\varepsilon$ ) y la varianza ( $\sigma$ ) en el tiempo, siguiendo un proceso autoregresivo con media móvil<sup>40</sup>. Su formulación (genérica) es como sigue:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (6)$$

Donde,  $\alpha$  es la ponderación del retorno registrado sobre el esperado (al cuadrado) en el periodo anterior  $\varepsilon_{t-1}^2$ ,  $\beta$  es la estimación de la volatilidad realizada previamente  $\sigma_{t-1}$ ,  $\omega$  funge como la ponderación de la varianza de largo plazo, el nivel esperado en la convergencia. La varianza de largo plazo se define como  $V_L = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$ . La condición necesaria para lograr estabilidad numérica consistente con el proceso estocástico esperado: la persistencia ( $\alpha + \beta$ ) debería ser menor a 1.

La especificación GARCH (p,q) tiene que entretenir dos cuestiones: primero, la descripción del proceso que gobierna el comportamiento del retorno medio considerado autoregresivo con media móvil (m,n) en su interacción con valores pasados de sí mismo y los choques ocurridos en el tiempo y, posteriormente, el proceso debe capturar el comportamiento en la variabilidad del proceso generador. La última parte se logra optimizando el control del rezago en el orden autoregresivo de la varianza  $\sigma^2$  (q) y su término de error  $\varepsilon$  (p).

<sup>38</sup>Global Association of Risk Professionals. (2007). Financial risk manager handbook. John Wiley and Sons.

<sup>39</sup>Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. Econometrica: Journal of the econometric society, 987-1007.

<sup>40</sup>Existe una considerable variedad de modelos GARCH. Ver: Bollerslev, T. (2008). Glossary to arch (garch). CREATES Research paper, 49.

## **Parte II: Índice GOBIXDR, un proxy para el riesgo de mercado**

### **Características mercado de renta fija de la República Dominicana**

Los estudios iniciales sobre la composición y la estructura del mercado de renta fija indican que se encuentra dominado por inversionistas institucionales y emisores estatales, con alto nivel de concentración en los títulos del Ministerio de Hacienda y Banco Central. Los valores se negocian en dos mercados: el mercado organizado (~5%) y el mercado OTC (~95%). Ambos se caracterizan por baja profundidad y escasa liquidez, oportunidades de arbitraje, presencia de asimetrías de información entre contrapartes y altos costos de intermediación<sup>41</sup>.

Existen dos estudios sobre el riesgo de mercado. Es importante señalar que ambos estudios son previos a la pandemia del COVID-19. En el primero<sup>42</sup>, se examinó el riesgo de mercado y riesgo de liquidez con frecuencia diaria en las 10 emisiones más líquidas del Ministerio de Hacienda (MH). Proporcionó evidencia que muestra que el VaR total se compone aproximadamente en un 40% de riesgo de mercado puro (volatilidad mid point) y un 60% del riesgo de liquidez (volatilidad en el spread)<sup>43</sup>.

En un estudio más reciente<sup>44</sup>, utilizando datos de cotizaciones del mercado profesional, los autores encontraron que la pérdida esperada del portafolio representativo de la banca, en un periodo de un mes con el 99% de confianza, oscila entre (-3.72%) y (-5.44%) para instrumentos emitidos por MH, mientras que para los instrumentos de BCRD esta pérdida oscila entre (-1.82%) y (-2.06%).

### **Características GOBIXDR**

El GOBIXDR es una metodología de índice retorno-precio creada y publicada diariamente por la Bolsa de Valores (BVRD). Sus componentes son los títulos de renta fija emitidos localmente por el Banco Central y el Ministerio de Hacienda. Algunos criterios<sup>45</sup> para la inclusión en su estimación:

- Solo se consideran los títulos con una estructura “Bullet”; se excluyen los títulos con características de opcionalidad, amortización y tasas flotantes.
- No se incluyen los títulos que tengan menos de 60 días desde su fecha de emisión, ni menos de 540 días hasta el vencimiento. Las ponderaciones se asignan por participación en el monto total emitido.
- Los criterios de liquidez utilizados para determinar la inclusión y exclusión de los títulos se basan en el Índice de Bursatilidad publicado diariamente por la Proveedora de Precios. Este abarca la actividad de negociación en los Sistemas Electrónicos de Negociación Directa, y captura también la porción institucional en el mercado *Over-The-Counter* ejecutado a través de la plataforma Bloomberg.

Consideramos que el es índice útil como una variable *proxy* para informar sobre la dirección y condiciones de mercado de renta fija tomando en cuenta que reduce la dimensionalidad del universo de instrumentos, y en su estado simplificado, refleja el comportamiento de la curva de rendimientos en una sola serie representativa<sup>46</sup> que posteriormente puede ser modelada estadísticamente.

<sup>41</sup>Bolta, S. Morales, P. (2015). El Mercado de Renta Fija en República Dominicana: Un Análisis de la Eficiencia de Mercado Secundario.

<sup>42</sup>Bolta, S. Morales, P. (2016). Valor en Riesgo Ajustado por Riesgo de Liquidez en Valores de Renta Fija emitidos por el Ministerio de Hacienda (2014-2015).

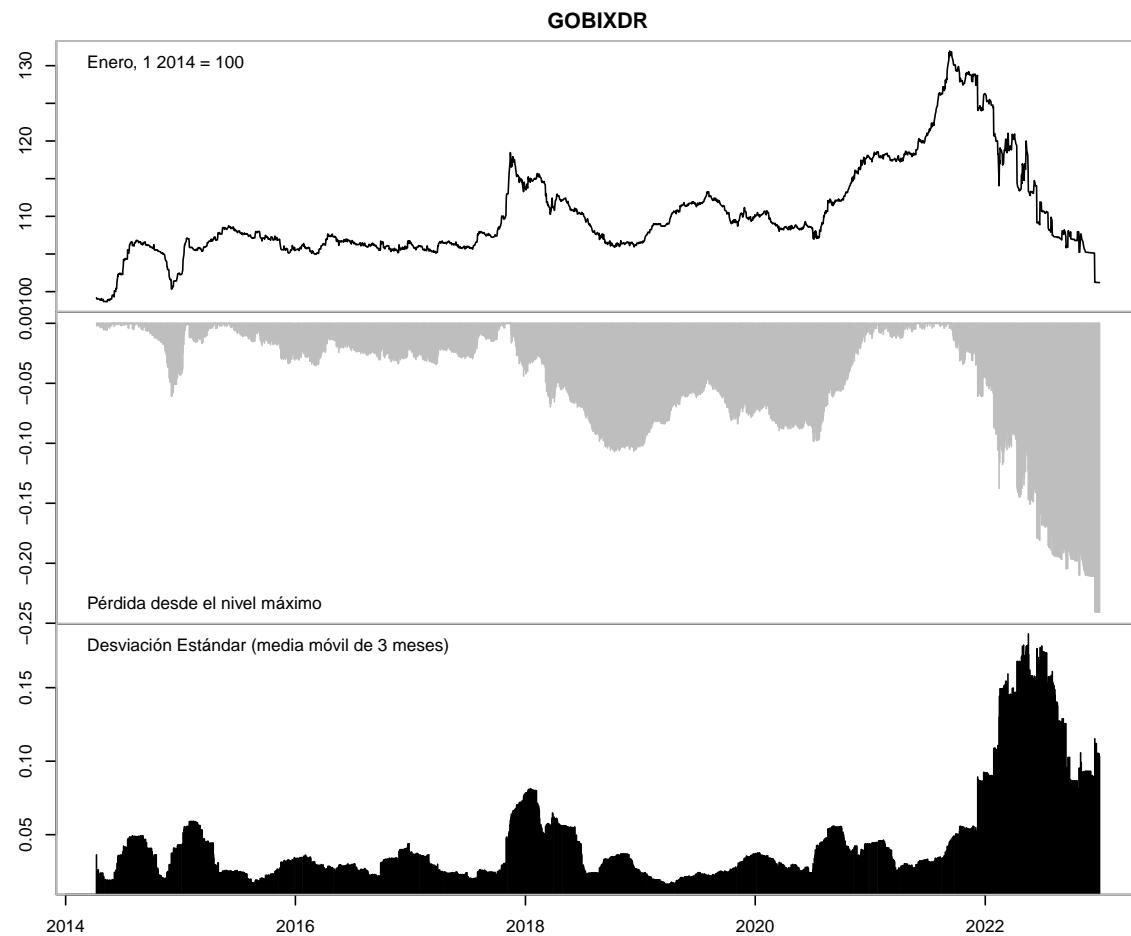
<sup>43</sup>La información utilizada procedió de dos fuentes: Proveedora de precios RDVAL, y tanto los pactos como las posturas de las plataformas Market Makers de Bloomberg y la Bolsa de Valores de la República Dominicana (BVRD).

<sup>44</sup>Pimentel, A. Reyes, V (2020). Caracterización del riesgo de tasa de interés de la cartera de inversión de los bancos múltiples y su importancia en el análisis de Estabilidad Financiera en la República Dominicana.

<sup>45</sup>Metodología Índice de Deuda Gubernamental de la República Dominicana GOBIXDR. BVRD (2014). <https://bvr.com.do/indice/Data/metodologia-gobix.pdf>

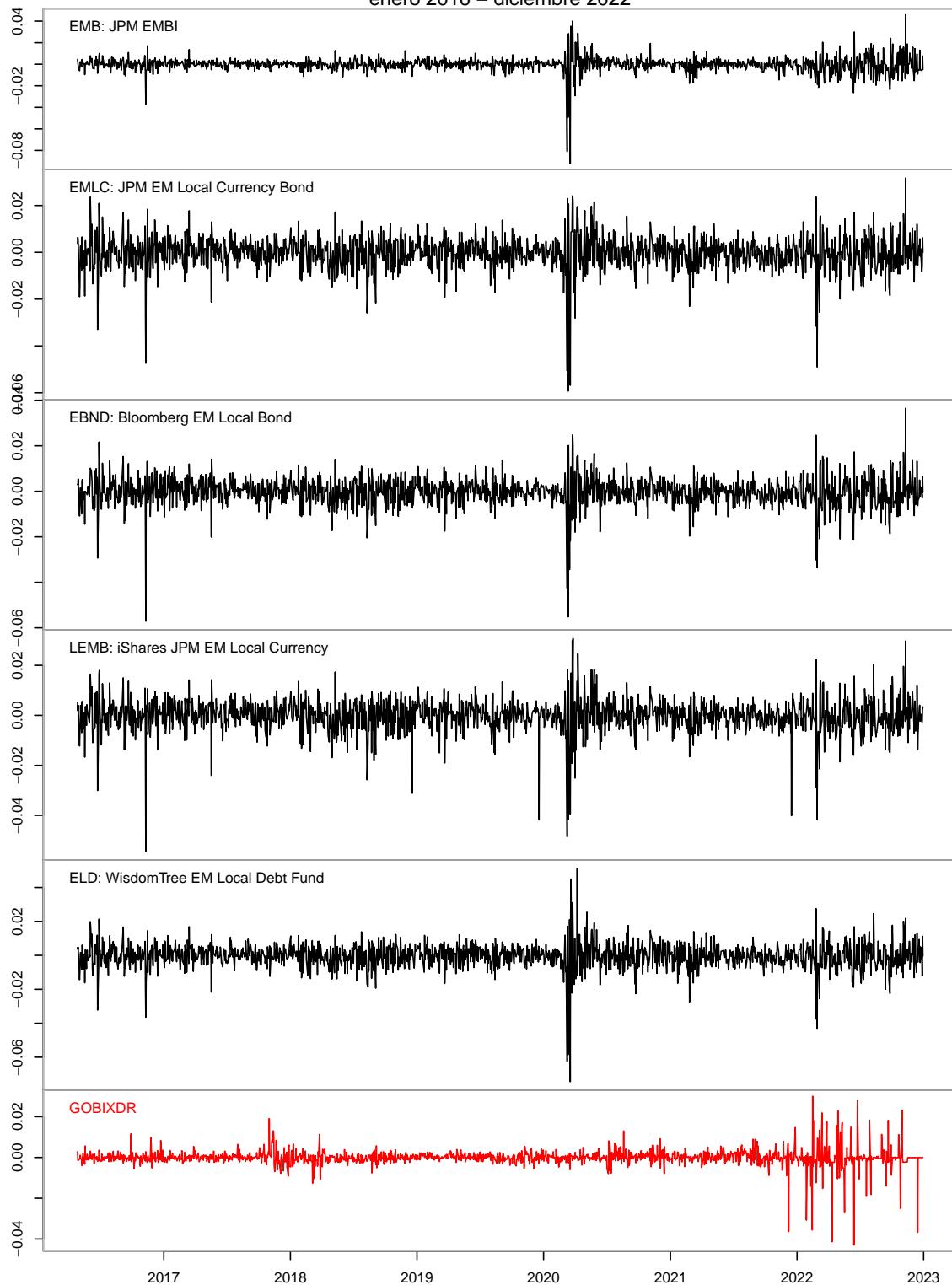
<sup>46</sup>Su principal limitación es que su composición cambia en el tiempo acorde con el patrón de emisiones y negociaciones en el mercado. Para fines de aplicar el análisis de riesgos a portafolio individuales, es necesario realizar ajustes en la duración.

El análisis de los retornos muestra que el GOBIXDR tiende a seguir la dirección del ciclo de política monetaria global y reflejar el impacto agregado en condiciones financieras<sup>47</sup>. En particular, durante el reciente ciclo de subida en las tasas de interés ha actuado de manera consistente con las decisiones de política monetaria y coherente con sus pares internacionales. Ha registrado ajustes de precio por impacto acumulativo muy cercano al índice EMBI y fondos de inversiones en mercados emergentes con calificación crediticia comparable, por debajo del US Treasury (benchmark) e instrumentos con calificación superior.



<sup>47</sup>El mecanismo de transmisión que vincula mercados internacionales con el mercado financiero nacional se centra en el concepto de Paridad Descubierta de Tasas. Este establece que existe una relación entre el atractivo que proporcionan las tasas libre de riesgos en un país, el valor relativo de su moneda y el balance en el flujo de capitales. La principal característica del mismo: las discrepancias en el valor relativo tienden a desaparecer con las actuaciones de los participantes del mercado. Ver más: LOTHIAN, James R.; WU, Liuren. Uncovered interest-rate parity over the past two centuries. *Journal of International Money and Finance*, 2011, vol. 30, no 3, p. 448-473. BEKAERT, Geert; WEI, Min; XING, Yuhang. Uncovered interest rate parity and the term structure. *Journal of International Money and Finance*, 2007, vol. 26, no 6, p. 1038-1069.

**Variación diaria fondos de Renta Fija GOBIXDR versus Mercados Emergentes en moneda local**  
 enero 2016 – diciembre 2022



Fuentes: Yahoo Finance, BVRD.

Table 4: Retorno cumulativo desde el máximo histórico del GOBIX (septiembre 9, 2021)

GOBIX	EMB	HYG	AGG	BND	EMLC	EBND	LEMB	EMHY	ELD	VWOB	EMTL
-0.23	-0.252	-0.164	-0.164	-0.169	-0.217	-0.21	-0.202	-0.234	-0.199	-0.24	-0.215

El índice GOBIXDR ha declinado -23.0% desde el nivel máximo alcanzado en septiembre 2021. Esto se compara con declives del -25.2%, -21.7%, -20.2%, y -19.9% en los fondos ETF<sup>48</sup> que invierten en bonos locales de mercados emergentes administrados por JP Morgan, Bloomberg, iShares y WisdomTree, respectivamente.

Al comparar el comportamiento en los retornos, la correlación entre retornos diarias muestra ausencia de una relación estable. En el período estudiado, el mercado local no presenta correlación estadísticamente significativa con sus benchmarks naturales y sus pares de mercados emergentes. Esta disparidad en la relación continúa cuando se analiza el rendimiento ajustado al riesgo versus el US Treasury (vencimiento entre 7 y 10 años) en calidad de benchmark. Las diferencias sugieren mayor presencia en el componente de riesgo idiosincrático correspondiente a la dinámica particular en el mercado dominicano que la explicación de los retornos locales por el lado del riesgo sistémico (global).

La tabla 6 resume el *performance* relativo de todos los activos. Destacamos niveles más bajos en la máxima caída experimentada<sup>49</sup>, menor desviación estándar en movimientos hacia la baja, y VaR/cVaR histórico. Junto con esto, se observa inexistencia en el exceso de retornos (Alpha), el Beta cercano a cero, el más bajo poder explicativo versus el US Treasury, Information Ratio (IR) y Treynor positivos<sup>50</sup>.

Table 5: Correlación Pearson versus GOBIXDR (retornos diarios)

	ETF	coeficiente	p.value
1	EMB	-0.0354	0.1530
2	HYG	-0.0420	0.0892
4	AGG	0.0134	0.5891
7	BND	0.0075	0.7626
11	EMLC	-0.0361	0.1447
16	EBND	-0.0440	0.0750
22	LEMB	-0.0300	0.2256
29	EMHY	-0.0264	0.2855
37	ELD	-0.0122	0.6209
46	VWOB	-0.0298	0.2283
56	EMTL	0.0178	0.4732

<sup>48</sup>Los ETF, tal y como señala su nombre Exchange Tradable Funds, son vehículos de inversión colectiva (fondos abiertos) que transan de manera continua en las bolsas de valores y son de acceso público.

<sup>49</sup>Es necesario tener en cuenta que el GOBIXDR es el activo con historia más reciente y que, por lo tanto, ha tenido el menor tiempo para revelar sus verdaderas propiedades. En ese sentido, el nivel de caída reciente (Tabla 4) es más informativo.

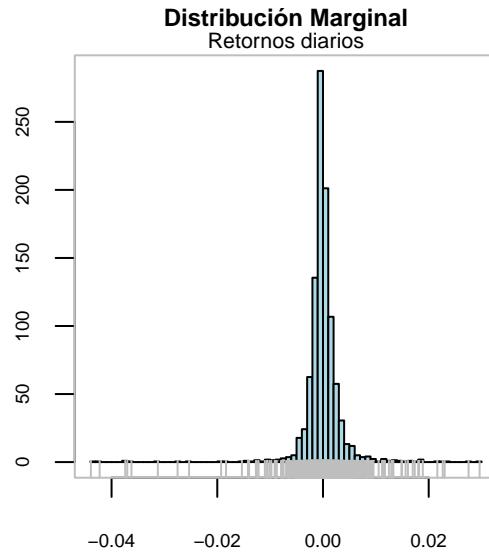
<sup>50</sup>Estas características particulares pudieran plantear la pregunta si, aunque sea en términos teóricos, el GOBIXDR pudiera ser considerado una clase de activos de inversión con capacidad de diversificación. La literatura financiera propone que el mismo se encuentra sujeto a una serie de limitaciones que posiblemente reducen ese atractivo. Además de esto, existen otras consideraciones que deben ser tomados en cuenta respecto a los conceptos de eficiencia de mercado, profundidad y liquidez, sería necesario analizar y atribuir el rol potencial del ruido estadístico sobre el performance relativo registrado. Por consiguiente, sería sensato asumir si el GOBIXDR fuera una clase de activos disponible para negociar, su comportamiento cambiaria en respuesta a la oportunidad teórica que presenta en su perfil de riesgos.

Table 6: Performance y riesgo histórico - benchmark US Treasury 10A (IEF)

	GOBIX	EMB	HYG	AGG	BND	EMLC	EBND	LEMB	EMHY	ELD	VWOB	EMTL
Semi Deviation	0.0028	0.0049	0.0040	0.0023	0.0024	0.0051	0.0045	0.0050	0.0057	0.0053	0.0045	0.0030
Gain Deviation	0.0031	0.0041	0.0043	0.0020	0.0022	0.0040	0.0037	0.0039	0.0045	0.0043	0.0039	0.0021
Loss Deviation	0.0035	0.0059	0.0046	0.0026	0.0028	0.0054	0.0048	0.0053	0.0071	0.0056	0.0056	0.0038
Downside Deviation (MAR=105%)	0.0054	0.0072	0.0065	0.0051	0.0052	0.0077	0.0071	0.0074	0.0078	0.0078	0.0068	0.0056
Downside Deviation (Rf=42%)	0.0036	0.0057	0.0049	0.0032	0.0033	0.0062	0.0055	0.0059	0.0064	0.0063	0.0053	0.0038
Downside Deviation (0%)	0.0028	0.0049	0.0040	0.0023	0.0024	0.0053	0.0046	0.0050	0.0057	0.0054	0.0046	0.0030
Maximum Drawdown	0.2304	0.3704	0.2927	0.2199	0.2272	0.5651	0.4358	0.4098	0.4398	0.5280	0.3477	0.3039
Historical VaR (95%)	-0.0036	-0.0083	-0.0077	-0.0043	-0.0045	-0.0105	-0.0089	-0.0098	-0.0088	-0.0104	-0.0074	-0.0050
Historical ES (95%)	-0.0084	-0.0152	-0.0133	-0.0071	-0.0072	-0.0163	-0.0141	-0.0160	-0.0167	-0.0163	-0.0143	-0.0092
Modified VaR (95%)	-0.0051	-0.0087	-0.0068	-0.0044	-0.0027	-0.0123	-0.0105	-0.0117	-0.0080	-0.0119	-0.0082	-0.0050
Modified ES (95%)	-0.0051	-0.0087	-0.0068	-0.0044	-0.0027	-0.0298	-0.0258	-0.0276	-0.0080	-0.0312	-0.0082	-0.0050
Alpha	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Beta	0.0290	0.4260	-0.0150	0.6520	0.6480	0.1790	0.1860	0.1260	0.1290	0.1700	0.4020	0.3170
Beta+	-0.0100	0.1450	-0.3060	0.6360	0.6360	-0.1890	-0.1360	-0.2180	-0.2820	-0.0390	0.1670	0.1710
Beta-	0.0960	0.8530	0.4030	0.7660	0.7330	0.5960	0.5690	0.5100	0.5880	0.5030	0.8050	0.6050
R-squared	0.0010	0.0700	0.0000	0.7060	0.6410	0.0100	0.0150	0.0060	0.0050	0.0090	0.0730	0.1180
Annualized Alpha	0.0040	-0.0250	-0.0260	-0.0080	-0.0090	-0.0700	-0.0380	-0.0360	-0.0370	-0.0610	-0.0230	-0.0270
Correlation	0.0300	0.2650	-0.0100	0.8400	0.8010	0.1020	0.1210	0.0760	0.0710	0.0940	0.2700	0.3430
Correlation p-value	0.1640	0.0000	0.6200	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0010	0.0000	0.0000	0.0000
Tracking Error	0.0850	0.1030	0.1080	0.0340	0.0370	0.1190	0.1080	0.1170	0.1250	0.1230	0.0960	0.0700
Active Premium	0.0080	-0.0260	-0.0230	-0.0050	-0.0070	-0.0700	-0.0370	-0.0350	-0.0370	-0.0610	-0.0230	-0.0130
Information Ratio	0.0970	-0.2490	-0.2140	-0.1540	-0.1890	-0.5870	-0.3450	-0.3030	-0.2990	-0.4970	-0.2360	-0.1910
Treynor Ratio	0.0810	-0.0750	1.9890	-0.0180	-0.0210	-0.4260	-0.2330	-0.3300	-0.3370	-0.3960	-0.0720	-0.1090

## Distribución y propiedades autoregresivas GOBIXDR

La data revela un proceso generador con distribución leptocúrtica, heterocedasticidad, asimetría y propensión a experimentar saltos. Las estadísticas diarias del período completo examinado del GOBIXDR registran la media centrada sobre cero, desviación estándar en 0.37%, equivalente a la volatilidad incondicional anualizada de 5.9%, curtosis que supera 40.50, y sesgo negativo de -2.27.



Al examinar la autocorrelación para la serie completa, el índice GOBIXDR muestra residuos con presencia de correlación serial (LB test < 0.09). Sin embargo, cuando la evaluación se realiza de manera separada sobre los períodos de entrenamiento, prueba de modelo y validación, se observan diferencias importantes a lo largo del tiempo. En el caso de los primeros dos períodos que abarcan los años 2014-2021, no podemos rechazar independencia en los residuos ( $p$  value < 0.01), mientras que durante el año 2022, correspondiente a un ciclo de subida de tasas, se evidencia presencia de correlación serial ( $p$ -value = 0.35).

Al observar los signos y los coeficientes individuales en los rezagos, se presentan dos variaciones: en el período 2014-2018, la autocorrelación es positiva para cada uno de los primeros 6 rezagos, y estadísticamente significativa en los rezagos 2 y 5, sugiriendo características de un mercado propenso a continuar la tendencia reciente. Para el 2019-2021, el GOBIXDR se muestra negativamente correlacionado en los rezagos 1, 2 y 5, tomando valores estadísticamente significativos en los últimos dos, una reacción opuesta a lo anterior. Durante el año 2022, la autocorrelación se mantiene negativa en los rezagos 1, 3, 5 y 6, sugiriendo continuación en el patrón de choques pero con una diferencia importante: ahora la correlación serial es indicativa de un menor nivel de aleatoriedad en los movimientos diarios.

Table 7: Tabla autocorrelación diaria

	periodo.completo	entrenamiento	prueba.de.modelo	validacion
rho1	-0.0303	0.1048	-0.0640	-0.0856
rho2	0.0180	0.0167	-0.0422	0.0245
rho3	-0.0256	0.0686	0.0192	-0.0900
rho4	0.0643	0.0971	0.1641	0.0078
rho5	-0.0313	0.0384	-0.0136	-0.0756
rho6	0.0011	0.0696	0.0461	-0.0522
Q(6) p-value	0.0172	0.0000	0.0001	0.3944

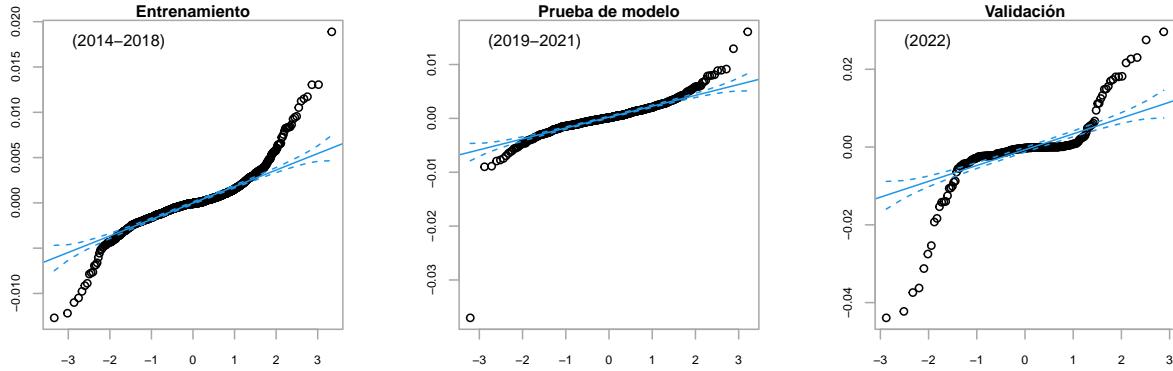
Table 8: Estadística Ljung-Box

	periodo.completo	entrenamiento	prueba.de.modelo	validacion
p-value	0.0087	0	1e-04	0.3514

Table 9: Tabla prueba ARCH (LM-stat)

Lag	periodo.completo	entrenamiento	prueba.de.modelo	validacion
1	12.4890	33.8135	0.0031	0.1300
2	16.3569	46.2885	0.8725	0.1869
3	25.1947	54.0132	0.8898	0.2716
4	25.1998	56.6275	2.8655	1.3711
5	25.8330	67.2650	2.8733	1.7400

Examinamos los efectos ARCH utilizando la prueba LM sobre diferentes períodos. Encontramos que en la muestra completa y el período de entrenamiento se identifican efectos ARCH, mientras que en los períodos de prueba y validación, los resultados rechazan la existencia de los mismos. Es decir, cuando se observa la volatilidad diaria en el GOBIXDR, la presencia del ruido estadístico se traduce a propiedades cambiantes en el tiempo. Analíticamente, este efecto se puede descomponer en dos elementos: los factores idiosincráticos del mercado local, y factores exógenos producto del ciclo monetario y económico global<sup>51</sup>. En retrospectiva, el conjunto de validación presenta un proceso percibido cualitativamente desde el punto de vista de la función generadora. Esto es observable en ambas colas de la distribución estadística presentada en el gráfico *Q-Q*.



Desde el nivel tope alcanzado, la volatilidad diaria anualizada (corrida de 3 meses) incrementó de 3.5% en agosto de 2021 a 18.7% en mayo de 2022. A partir de marzo de 2022, la distribución en los movimientos diarios refleja un patrón de cambios anómalos. Entre estos, 21 días (8.4% de días laborales), el GOBIXDR no ha reflejado ninguna actividad. Esto contrasta con 55 días totales en la misma condición para el período 2015-2021. Previo al año 2022, el GOBIX experimentó solo 2 movimientos diarios más lejanos de  $\pm 2\%$ . Durante el año 2022 se han producido 12 movimientos mayores de  $\pm 2\%$ . En total, entre el estado de mercado sin movimiento alguno y movimientos extremos, se registraron 33 instancias (13.2% de días laborales). Esto refleja características de un mercado en condiciones de estrés, que suele ser acompañado por baja liquidez y profundidad reducida.

<sup>51</sup>Numéricamente, también es posible realizar dicha atribución; sin embargo, este análisis se encuentra fuera del alcance nuestro alcance.

## Metodología

### GARCH VaR

Las medidas utilizadas en este estudio para estimar el nivel de riesgo de mercado serán el VaR y el c-VaR. El método que seguimos es híbrido, con el uso combinado de la simulación histórica filtrada GARCH y el método de Monte Carlo. El procedimiento es como sigue. En el entrenamiento se ejecutan calibraciones de 6 modelos ARMA + GARCH (ar,pq) con 625 configuraciones (cada parámetro presenta hasta 5 rezagos), y 7 distribuciones para acomodar el término de error: Normal, Skew Normal, Generalized Error Distribution (GED), Student-T, Skewed-Student, y Johnson SU<sup>52</sup>. Utilizamos la librería *rugarch*<sup>53</sup>.

Table 10: Modelos evaluados

Familia	
sGARCH	$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma  \varepsilon_{t-1} $
csGARCH	$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma  \varepsilon_{t-1}  + \delta (\varepsilon_{t-1} - \mu_{t-1})^2$
iGARCH	$\sigma_t^2 = \omega + \varepsilon_{t-1}^2 + (\varepsilon_{t-1}^2 - \varepsilon_{t-1}^2) + \beta (\sigma_{t-1}^2 - \varepsilon_{t-1}^2)$
eGARCH	$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \alpha \left( \left  \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right  - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2)$
gjrGARCH	$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 I_{\{\varepsilon_{t-1} < 0\}} + \beta \sigma_{t-1}^2$
apARCH	$\sigma_t^\delta = \omega + \alpha ( \varepsilon_{t-1}  - \lambda \varepsilon_{t-1})^\delta + \beta \sigma_{t-1}^\delta$

Donde:

- $\sigma_t^2$  representa la varianza condicional en el momento  $t$ .
- $\omega$  es un término constante correspondiente al nivel de varianza de largo plazo.
- $\alpha$  es el coeficiente de ponderación cuadrática del residuo  $\varepsilon_{t-1}^2$  en el momento  $t-1$  representando el impacto de la volatilidad pasada.
- $\beta$  es el coeficiente de ponderación en la varianza condicional  $\sigma_{t-1}^2$  en el momento  $t-1$  representando el nivel de persistencia de la volatilidad pasada.
- $\lambda$  es el coeficiente de ponderación del valor absoluto en el residuo  $|\varepsilon_{t-1}| - \varepsilon_{t-1}$  que toma en cuenta el efecto de asimetría y apalancamiento (*leverage effect*).
- $\delta$  es el coeficiente que pondera por la diferencia cuadrática entre el residuo rezagado y su media.
- $I_{\{\varepsilon_{t-1} < 0\}}$  es una función que asigna valor 1 si  $\varepsilon_{t-1}$  es negativo, y 0 en el caso contrario.

### Criterios de información

Para fines de selección del modelo, la configuración y sus parámetros, se toma en cuenta aquel que minimiza los criterios AIC y BIC.

$$AIC = e^{\frac{2k}{n}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i| \quad (7)$$

$$BIC = N^{\frac{k}{n}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i| \quad (8)$$

<sup>52</sup>Ver caso de aplicación en Alexander, C., Lazar, E., and Stanescu, S. (2013). Forecasting VaR using analytic higher moments for GARCH processes. International Review of Financial Analysis, 30, 36-45.

<sup>53</sup>Ghalanos, A. (2020). Introduction to the rugarch package.(Version 1.3-1). Manuscript, <http://cran.r-project.org/web/packages/rugarch>. Accessed, 11.

## Backtesting y validación de modelo

Los resultados se someten al proceso de comparación sistemática en las estimaciones del VaR y los retornos realizados para fines de realizar el *backtesting* de modelo. Si la pérdida ( $x$ ) del día  $T$  supera la estimación VaR, el evento se registra como un exceso. Se evalúa el número de excepciones en la ventana de tiempo  $(t, T)$  para determinar si son producto de mala suerte o de un modelo inadecuado.

Table 11: Riesgo de Modelo.

Error de modelo	Interpretación
Error Tipo 1	Probabilidad de rechazar el modelo correcto, por mala suerte.
Error Tipo 2	Probabilidad de no rechazar el modelo incorrecto.

**Prueba de Kupiec (UC):** El test estándar de cobertura (incondicional) se enfoca a comparar el número registrado de rebases en la banda de volatilidad versus su expectativa teórica atendiendo la probabilidad de cometer el Error Tipo 2.

$$LR = -2\log[(1 - \hat{p})^{n-x} \hat{p}^x] + 2\log[(1 - [\frac{x}{n}])^{n-x} (\frac{x}{n})^x] \quad (9)$$

Donde:  $\hat{p}$  es la probabilidad de excepciones bajo hipótesis nula.  $n$  es el tamaño de la muestra.  $x$  es el número de excepciones en la muestra.

$H_0$ : La probabilidad de excepción es igual al nivel de significancia del VaR y la proporción de fallos sigue la distribución Chi-cuadrada con 1 grado de libertad.

**Prueba de Christoffersen (CC):** Este test condicional toma en consideración el número de días que transcurren entre los rebases de la banda de estimación. Particularmente, examina si la probabilidad de registrar el rebase depende del resultado del día anterior. El indicador toma valores  $I_t = \{0, 1\}$ , donde 0 corresponde a la observación particular cuando el VaR no registra violación, y 1 en el caso de lo contrario.

Table 12: Tabla de contingencia Christoffersen (1998)

		$I_{n-1} = 0$	$I_{n-1} = 1$	
$I_n = 0$	$N_{0,0}$	$N_{1,0}$	$N_{0,0} + N_{1,0}$	
$I_n = 1$	$N_{0,1}$	$N_{1,1}$	$N_{0,1} + N_{1,1}$	
		$N_{0,0} + N_{0,1}$	$N_{1,0} + N_{1,1}$	N

$N_{i,j}$  es el registro del número de días en los cuales ocurrió el estado  $j$  condicional al estado  $i$  en el momento anterior. El resultado es resumido en una matriz markoviana 2x2. Donde  $\pi_0$  es la probabilidad condicional de ocurrencia (0, 1) cuando el día previo fue marcado como 0, y  $\pi_1$  es la probabilidad condicional de ocurrencia (1, 1) cuando el día previo fue marcado como 1.

$$\pi_0 = \frac{N_{0,1}}{N_{0,0} + N_{0,1}}; \pi_1 = \frac{N_{1,1}}{N_{1,0} + N_{1,1}}; \pi = \pi_0 + \pi_1$$

$$LR = -2\log[(1 - \pi)^{N_{0,0}+N_{0,1}} \pi^{N_{0,1}+N_{1,1}}] + 2\log[(1 - \pi_0)^{N_{0,0}} \pi_0^{N_{0,1}} 1 - \pi_1^{N_{1,0}} \pi_1^{N_{1,1}}] \quad (10)$$

Al igual que la prueba Kupiec, Christoffersen asume distribución que sigue es Chi-cuadrada con 1 grado de libertad. Se espera que bajo  $H_0$  las probabilidades deberían converger hacia  $\pi_0 = \pi_1$ .

## Procedimiento

Nuestro objetivo es describir la función generadora de volatilidad en el GOBIXDR con la combinación de un proceso Autoregresivo con Media Móvil (ARMA) para fines de modelar la media, y el GARCH con el fin de describir el comportamiento de la varianza en la serie.

La muestra se divide en tres partes: entrenamiento (2014-2018), prueba de modelo (2019-2021) y validación (2022). Tomando en cuenta que experimentamos con 32,400 variaciones potenciales en las configuraciones de los modelos (ARMA-GARCH + distribución en el error) y sus respectivos parámetros, se seleccionó el grupo que minimiza los criterios de información AIC y BIC en el periodo de entrenamiento. Considerando la probabilidad de obtener falsos positivos en una escala de optimización de esta magnitud es real y no puede ser negada, evaluamos el 1% del total con el mejor criterio informativo (324 modelos) para someterlos a las pruebas de cobertura condicional e incondicional *Out-of-Sample*.

Las configuraciones de modelos que, a-priori y en términos relativos minimizaron el error; y posteriormente, lograron pasar las pruebas de cobertura correspondientes avanzan hacia la fase da validación. De este grupo depurado, se elige un único modelo por cada familia GARCH que optimiza los criterios de información. La validación se ejecuta sobre la data del año 2022, realizando la estimación corrida del VaR (percentil 99.0) al día  $t+1$  con recalibración a cada 30 días. Los excesos en las caídas se evalúan utilizando el nivel de confianza 0.99. Se mide la cantidad de rebases sobre la banda estimada, su nivel de independencia y el tiempo de duración. En esta configuración, el modelo GARCH responde instantáneamente a los cambios de condiciones.

- 1) **Simulación Histórica Filtrada (FHS):** Siguiendo el proceso anterior, realizamos la estimación media del período de estrés, caracterizado por un mayor nivel de volatilidad y que contiene (por lo menos) un ciclo completo de subida en las tasas y política monetaria restrictiva. La media filtrada se anualiza sobre un horizonte de 10 días y 250 días para representar el impacto del Riesgo de Mercado en el *trading book* y el efecto sobre la posición patrimonial.

$$VaR_{trading} = \sigma_t \sqrt{10} \quad (11)$$

$$VaR_{capital} = \sigma_t \sqrt{250} \quad (12)$$

- 2) **Stress-VaR:** Estimamos el percentil 5 de la FHS y luego se anualiza sobre un periodo de 250 días laborales. Para fines de estimar el Stress-VaR, la agregación se ejecuta tomando como referencia la estimación mediana de cada período. En términos de escenario, el procedimiento refleja permanencia de un tiempo prolongado de estrés, simulando condiciones de un evento con baja probabilidad de ocurrencia pero estadísticamente posible.
- 3) **Simulación Monte-Carlo (MC):** A partir del proceso ARMA-GARCH, se estiman 10,000 simulaciones diarias del proceso durante el período. Este proceso se repite aleatoriamente 1000 veces. Luego, se procede con la agregación en el tiempo para obtener el impacto acumulativo. Finalmente, se realiza el bootstrap teniendo en cuenta los percentiles de recorte de 97.5 y 99.0 sobre la estimación realizada. Ambos resultados se comparan con la realización del GOBIXDR en 2022.

Los métodos son complementarios y ofrecen una perspectiva interesante ya que permiten contrastar los riesgos revelados en la serie financiera del GOBIXDR en cada fase respectiva del proceso ejecutado, contra la propiedad real de la función generadora de volatilidad. Nuestro objetivo es apreciar qué nivel de información existía acerca del potencial estado de estrés en el GOBIXDR previo al inicio del ciclo de ajuste global (y local) de tasas, qué probabilidad empírica asignaba a-priori y cómo se caracteriza la realización ex-post. ¿Pudo el modelo ARMA-GARCH capturar la posibilidad del cambio estructural que se produjo y que no era evidente en la data histórica hasta ese punto<sup>54</sup>?

Segundo, nos interesa conocer si se pueden considerar suficientemente robustos para sostener una aplicación práctica y aproximarnos hacia la determinación del potencial consumo de capital en el portafolio de inversiones.

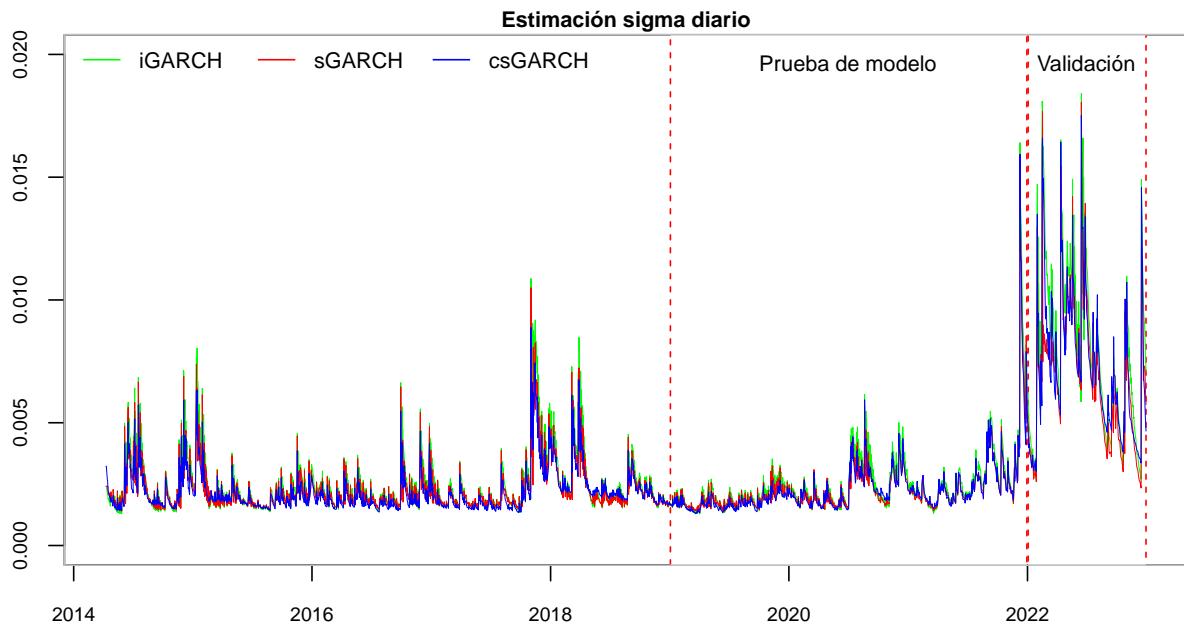
<sup>54</sup>Esta pregunta tiene importantes implicaciones prácticas que definen los tipos de usos y aplicaciones potenciales que se puedieran realizar. Ej: modelación y predicción, stress testing, u otros.

## Resultados

La selección de modelos que mostraron el mayor éxito en la fase de entrenamiento se encuentra predominada por el iGARCH (48.1% de la muestra), seguido por sGARCH, eGARCH, gjrGARCH, y en el último lugar, el csGARCH con 28.7%, 12.4%, 8.9%, y 1.0% respectivamente.

Observando el comportamiento autoregresivo, el 64.6% de todas las configuraciones presenta 2 rezagos o menos en los parámetros ( $a, r$ ) siendo el (0,0) más frecuente, seguido por (0,1), (1,0) y (1,1) respectivamente. En el contexto de las propiedades que presenta el comportamiento de la varianza, surgen algunas sorpresas. La más relevante es que el modelo GARCH (p,q) con 1 solo rezago en la varianza condicional y la innovación (término de error) es apenas el sexto con mayor representación, a pesar de que el mismo sea un estándar en la literatura financiera<sup>55</sup> y la configuración más frecuente en las herramientas comerciales de gestión de riesgos<sup>56</sup>. Entre las configuraciones GARCH que registraron el mayor poder predictivo para describir la función generadora, el primer lugar es ocupado por el modelo (1,2) con 17.8% de presencia, seguido por (1,3), (2,2) y (1,4), que registran 17.2%, 9.9% y 8.3% respectivamente. Las configuraciones (1,1), (1,5) y (3,3) se encuentran distantes. Evaluando la distribución del término de error en el proceso GARCH, la Distribución de Error Generalizado (GED) presenta selección por unanimidad con 98.4% de representación. En la tabla 24 se presenta el resumen de la selección que ha superado la prueba de modelo de Cobertura Incondicional (UC-Kupiec) y la Cobertura Condicional (CC-Christoffersen). Entre estos, existen diez configuraciones de iGARCH, cuatro sGARCH y un csGARCH.

En la fase de validación, se procedió con tres modelos, una configuración que minimiza los criterios AIC y BIC por cada familia GARCH: 1) ARMA(0,1) + iGARCH(2,2); 2) ARMA(0,0) + sGARCH(1,5) y; 3) ARMA(0,0) + csGARCH(1,5). A continuación, se presentan las observaciones de la evaluación.



La prueba de estabilidad de parámetros de Nybloom revela consistencia en los parámetros. Se rechaza la condición de normalidad. Para evaluar la presencia de la asimetría, los modelos fueron sometidos a tres pruebas: evaluación generalizada de la existencia en el sesgo (*Sign Bias Test*), y las evaluaciones restringidas para identificar el sesgo negativo (*Negative Sign Bias Test*) y el sesgo positivo (*Positive Sign Bias Test*). El propósito del primero fue observar el impacto de los choques tanto positivos como negativos en la varianza

<sup>55</sup>Hansen, P. R., and Lunde, A. (2005). A forecast comparison of volatility models: does anything beat a GARCH (1, 1)?. *Journal of applied econometrics*, 20(7), 873-889.

<sup>56</sup>Longstaey, J., and Spencer, M. (1996). Riskmetricstm—technical document. Morgan Guaranty Trust Company of New York: New York, 51, 54.

condicional que no es predecida por el modelo. El procedimiento consiste en aplicar la regresión lineal de la variable dummy representando la asimetría sobre el término de error cuadrado ajustado por la varianza condicional, arrojando la estadística t como resultado. Las dos pruebas direccionales introducen variedad con la distinción entre los choques pequeños y grandes para fines de examinar el grado de linealidad. Finalmente, se evaluó el efecto conjunto de las tres pruebas (*Joint Effect*). Los resultados muestran que la presencia de los efectos de asimetría no es estadísticamente significativa en ningún caso.

Table 13: Resumen pruebas relevantes

	iGARCH	sGARCH	csGARCH
Akaike	-9.7550	-9.7551	-9.7493
Bayes	-9.7251	-9.7166	-9.7151
Shibata	-9.7551	-9.7552	-9.7494
Hannan-Quinn	-9.7438	-9.7406	-9.7364
Likelihood	5796.6186	5798.6610	5794.2064
Individual Critical Values.10%	0.3530	0.3530	0.3530
Individual Critical Values.5%	0.4700	0.4700	0.4700
Individual Critical Values.1%	0.7480	0.7480	0.7480
Joint Critical Values.10%	1.6900	2.1000	1.8900
Joint Critical Values.5%	1.9000	2.3200	2.1100
Joint Critical Values.1%	2.3500	2.8200	2.5900
Sign Bias (t-value)	0.4533	0.7013	0.7014
Negative Sign Bias (t-value)	0.4822	0.3560	0.2433
Positive Sign Bias (t-value)	0.3012	0.3102	0.1064
Joint Effect (t-value)	0.8462	1.1395	1.0320
Goodness of Fit.10 (p-value)	0.0044	0.0237	0.0218
Goodness of Fit.20 (p-value)	0.0059	0.0300	0.0010
Goodness of Fit.30 (p-value)	0.0112	0.1247	0.0000
Goodness of Fit.40 (p-value)	0.0332	0.2337	0.0000
Goodness of Fit.50 (p-value)	0.0091	0.0007	0.0000

El primer hallazgo importante es la debilidad en el desempeño de los modelos asimétricos. Esto no es sorprendente cuando se toma en consideración que la serie no presenta ese efecto. Acompañando ese hecho con las características ya identificadas en relación a la autocorrelación y los efectos ARCH cambiantes en el tiempo, que se traducen a dependencia serial en fluctuación de movimientos direccionales<sup>57</sup>, consideramos que explica el desempeño del iGARCH. Algunos autores argumentan en contra del uso de iGARCH para modelar series con alta persistencia<sup>58</sup>. Este tiende a capturar las propiedades en aquellos casos donde el proceso generador de volatilidad presenta la varianza condicional con características de heterocedasticidad cambiante por régimen, y alto nivel de persistencia en cada uno, siendo indicativo de cambios estructurales a lo largo de la serie (Morana, 2002). Se caracteriza por poseer varianza incondicional infinita y ausencia de reversión (persistencia  $\sum \alpha_i + \sum \beta_i = 1$ )<sup>59</sup>. Este suele ser atribuido a la memoria de largo plazo (*Long Range Dependency-LRD*)<sup>60</sup>, incorrecta especificación de modelo o efectos espurios<sup>61</sup>.

<sup>57</sup>Esto es interesante: la ausencia del ruido en una escala (falta de reversión consistente en movimiento consecutivos diarios), cuando es agregada a nivel del proceso generador, propaga mayor ruido dado que incrementa la distancia en el movimiento potencial ya que existe una mayor probabilidad de sufrir secuencias corridas de días en una misma dirección. Esto hace que la función sea propensa a recorrer mayores distancias antes de revertirse.

<sup>58</sup>Diebold, F.X. and Lopez, J.A. (1996). Modeling Volatility Dynamics. In K. Hoover, editor, Macroeconomics: Developments, Tensions and Prospects.

<sup>59</sup>Zivot, E. (2009). Practical issues in the analysis of univariate GARCH models. In Handbook of financial time series (pp. 113-155). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

<sup>60</sup>Lamoureux, C.G., and Lastrapes, W.D. (1990a). Heteroskedasticity in Stock Return Data: Volume versus GARCH Effects. The Journal of Finance, 45, 221- 229.

<sup>61</sup>Mikosch, T., and Starica, C. (2004). Non-stationarities in Financial Time Series, the Long-Range Dependence and the IGARCH Effects. Review of Economics and Statistics, 86, 378-384.

Centrando nuestra atención en el período de prueba de modelo en el ejercicio de la Simulación Histórica Filtrada (FHS), podemos destacar lo siguiente. El iGARCH ha registrado 7 excepciones en la estimación del VaR al 1% (8 esperadas), para una probabilidad empírica del 0.93%. La estimación del VaR al 99% ha presentado 10 excesos (8 esperados), correspondiente a la probabilidad observada del 1.19%. El sGARCH ha registrado 10 excepciones en la estimación del VaR al 1% para una probabilidad empírica de 1.32%. La estimación del VaR al 99% ha presentado 11 excesos correspondientes a la probabilidad observada del 1.46%. Finalmente, el csGARCH ha registrado 9 excepciones tanto para la estimación del VaR al 1% como al 99%, ambos para una probabilidad empírica del 1.19%. En todos los casos, la prueba de modelo de Cobertura Incondicional (Kupiec) no rechaza la hipótesis nula que indica que el número de rebases sobre la estimación se considera correcto. La prueba de Cobertura Condicional (Christoffersen) presenta el mismo resultado indicando que la frecuencia de excesos y su independencia no pueden ser consideradas incorrectas.

En el período de validación, los resultados de las evaluaciones son mixtos. El iGARCH marcó 8 excesos y 4 excesos sobre las estimaciones del VaR al 1% y 99%, respectivamente (2 esperadas), correspondiente a la probabilidad empírica de 3.2% y 1.6%. En consecuencia, ha fallado en ambas pruebas de cobertura, aunque no se descarta la independencia en los rebases de la estimación. Al evaluar la duración en el tiempo de los excesos, según Christoffersen y Pelletier, se rechaza la inexistencia de la memoria en el proceso. Exactamente el mismo resultado se repite para el sGARCH. En el caso del csGARCH, el resultado es distinto. Este modelo marcó 7 excesos y 4 excesos sobre las estimaciones del VaR al 1% y 99%, respectivamente, correspondiente a la probabilidad empírica de 2.8% y 1.6%. Con esto, ha logrado pasar ambas pruebas, incluyendo la verificación de la duración en el tiempo de los excesos. Tomando en cuenta que los excesos son discretos, el resultado se encuentra sobre la línea de rechazo<sup>62</sup>. En el GOBIXDR se destaca el comportamiento atípico presentado por períodos prolongados en el año 2022, que ha alterado la función generadora visiblemente, complicando la evaluación del modelo.

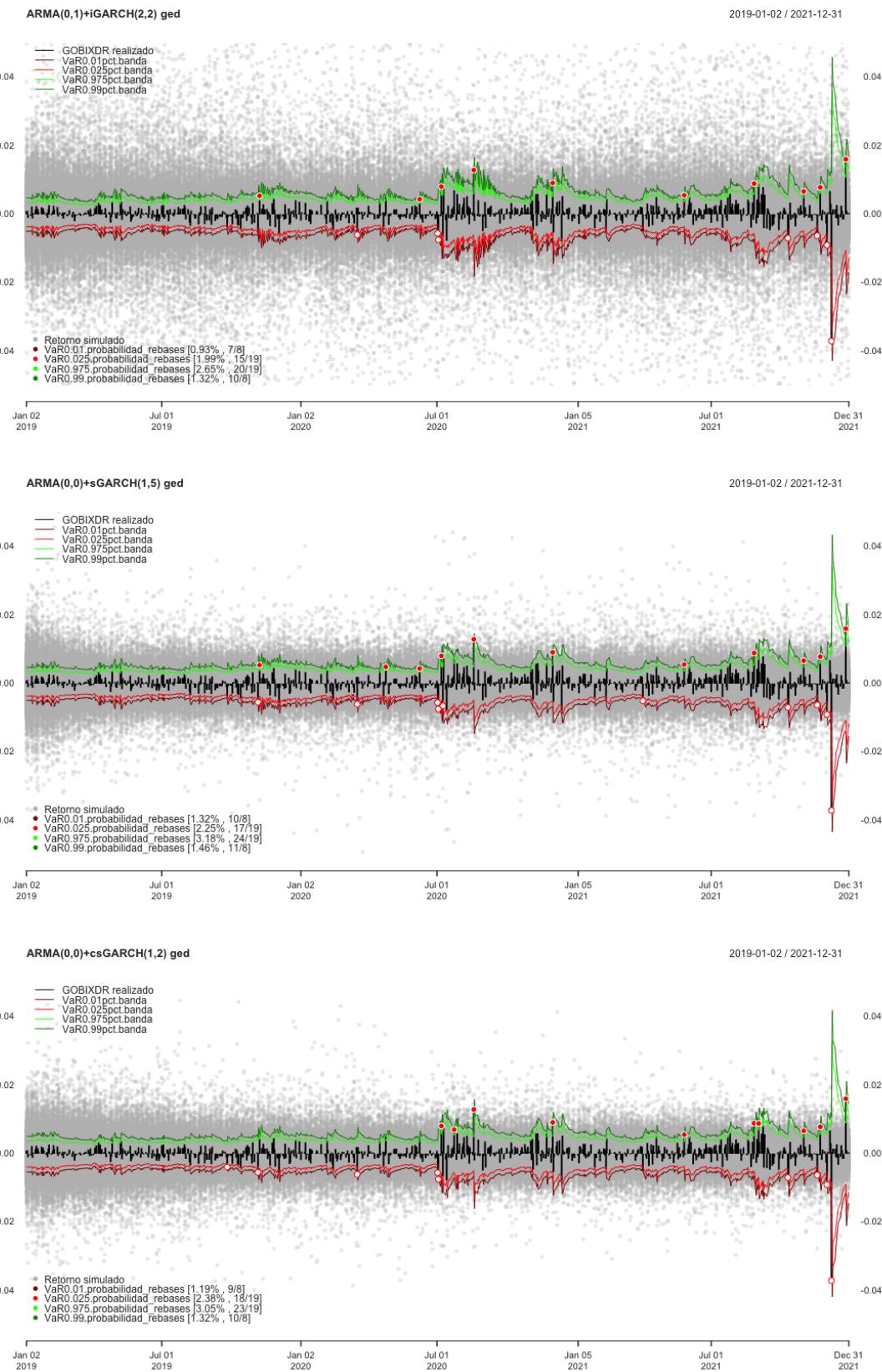
En los gráficos se muestra el rendimiento de los tres modelos en los dos períodos (prueba de modelo y validación) contrastando las estimaciones del VaR, la volatilidad realizada y un proceso de simulación que presenta varianza constante y no contiene memoria. También, se presenta el conteo junto con la probabilidad teórica de ocurrencia en los excesos. Visualmente, se pueden destacar algunas propiedades mencionadas en la literatura:

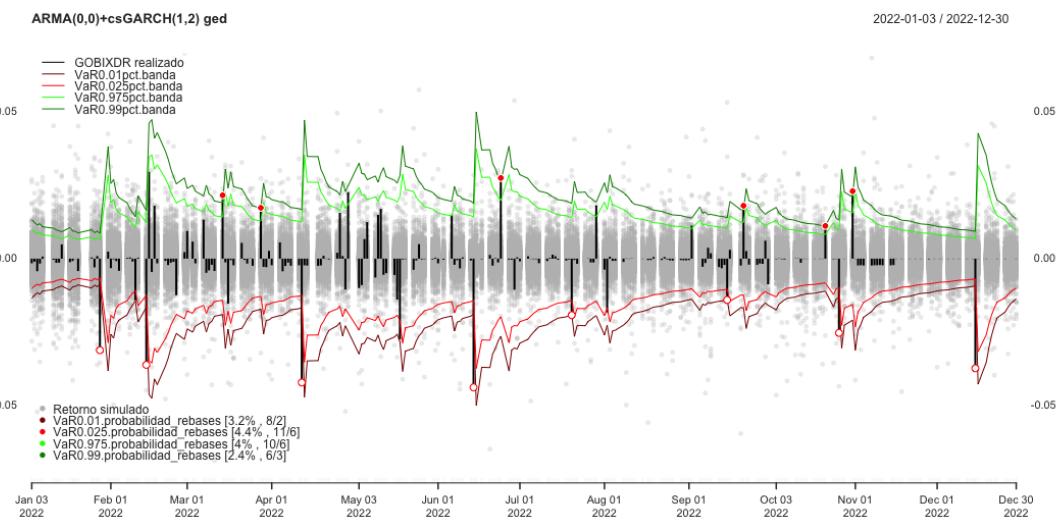
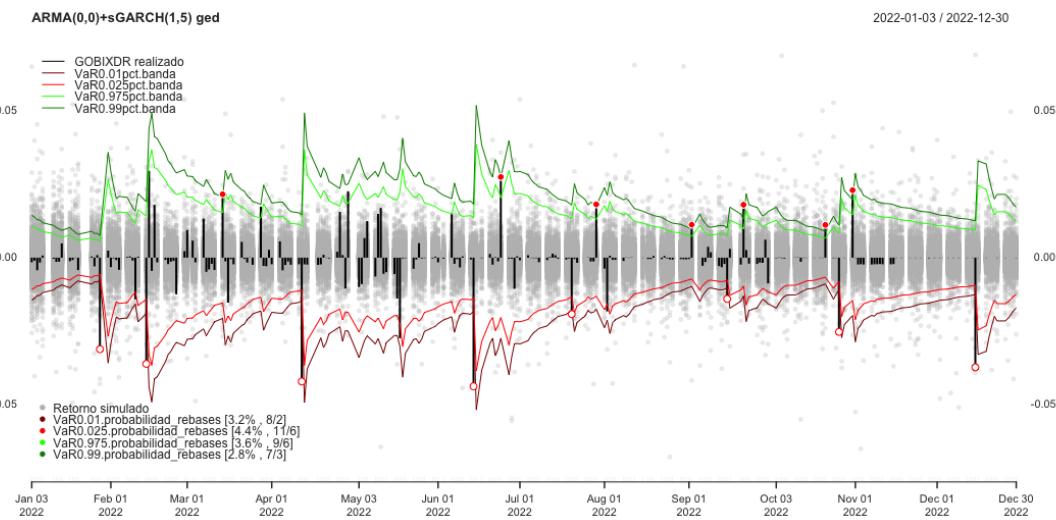
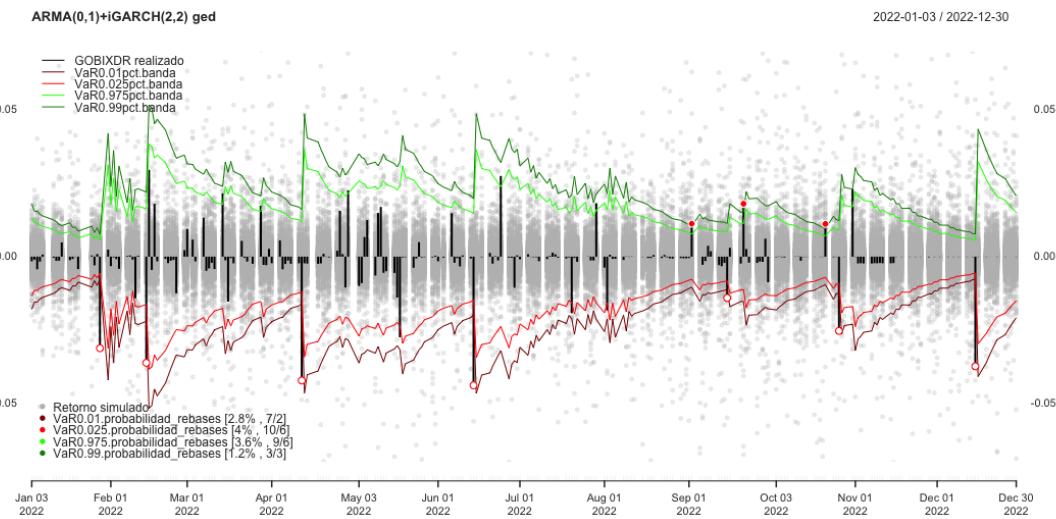
- 1) Se puede apreciar que cada modelo revela la existencia de posibilidades de experimentar pérdidas considerablemente mayores de lo que fue observado en el período entrenamiento. El período 2019-2021 fue caracterizado por una supresión considerable en la volatilidad realizada. Esto concluyó en el mes de diciembre de 2021. En el año 2022 se observa persistencia en el choque e inicio del comportamiento errático en el índice, caracterizado por saltos y supresiones en movimientos diarios;
- 2) La banda simulada del iGARCH es considerablemente más amplia que lo presentado por sGARCH y csGARCH<sup>63</sup>;
- 3) En las imágenes se presenta la expansión y permanencia de la volatilidad realizada en un nivel elevado en términos relativos al contrastar la estimación de la banda VaR y el resultado de las simulaciones presentado en el fondo.

---

<sup>62</sup>Cuando un modelo de riesgos presenta el cuadro con características observadas en el conjunto de validación, se pueden plantear varias soluciones. La primera es considerar elementos adicionales (cuantitativos, juicio experto) para interpretar la situación. Esto ocurre por el hecho de que la interpretación del resultado como "mala suerte" es más amplia que el rechazo estadístico de las pruebas, dado que últimamente pudieran caer en el Error Tipo I. La segunda opción sería penalizar (pero no rechazar por completo) el modelo que no ha logrado pasar la prueba. En nuestro caso, la diferencia entre los dos modelos rechazados en la fase de validación y el modelo que no pudo ser rechazado consiste en meramente un (1) exceso. Finalmente, si los resultados son contundentes, el modelo deberá ser rechazado.

<sup>63</sup>Los gráficos no revelan el espacio muestral completo tomando en cuenta todas las observaciones, y por lo tanto, la peor pérdida, dado que son truncados para fines de presentación y lectura.





En las *tablas 14 y 15* se presentan las estimaciones FHS del VaR y c-VaR a la confianza estadística del 1% y 2.5% para diferentes modelos. Se visibiliza la amplitud de la heterocedasticidad en los dos períodos. En el conjunto de validación, las estimaciones han incrementado considerablemente. En tiempos normales, típicamente, el valor en riesgo de movimientos diarios oscila entre -0.42% y -1.05%. En situaciones donde el mercado experimenta mayores reversos (duración que no excede unos pocos días), el riesgo incrementa al rango entre -1.49% y -2.73%. Cuando se trata de estrés prolongado y turbulencias que no son transitorias, la mediana en el valor en riesgo incrementa al rango [-1.44%, -3.93%]. Finalmente, estando en este régimen de mercado, si ocurren malos momentos<sup>64</sup>, se puede esperar la estimación del riesgo incremente hasta el rango [-3.36%, -6.68%].

Table 14: Estimación FHS: VaR diario (2019-2021)

	min	max	q.50	q.05	q.025	q.01
iGARCH.VaR.01	-0.0426	-0.0036	-0.0059	-0.0126	-0.0147	-0.0227
sGARCH.VaR.01	-0.0424	-0.0039	-0.0055	-0.0111	-0.0129	-0.0209
csGARCH.VaR.01	-0.0425	-0.0038	-0.0055	-0.0110	-0.0130	-0.0190
iGARCH.VaR.025	-0.0329	-0.0027	-0.0045	-0.0097	-0.0113	-0.0177
sGARCH.VaR.025	-0.0333	-0.0030	-0.0043	-0.0086	-0.0101	-0.0164
csGARCH.VaR.025	-0.0333	-0.0029	-0.0042	-0.0086	-0.0101	-0.0149
iGARCH.cVaR.01	-0.0472	-0.0082	-0.0105	-0.0172	-0.0193	-0.0273
sGARCH.cVaR.01	-0.0459	-0.0074	-0.0090	-0.0146	-0.0164	-0.0244
csGARCH.cVaR.01	-0.0464	-0.0077	-0.0094	-0.0149	-0.0169	-0.0229
iGARCH.cVaR.025	-0.0362	-0.0060	-0.0078	-0.0130	-0.0146	-0.0210
sGARCH.cVaR.025	-0.0365	-0.0062	-0.0075	-0.0118	-0.0133	-0.0196
csGARCH.cVaR.025	-0.0364	-0.0060	-0.0073	-0.0117	-0.0132	-0.0180

Table 15: Estimación FHS: VaR diario (2022)

	min	max	q.50	q.05	q.025	q.01
iGARCH.VaR.01	-0.0519	-0.0075	-0.0222	-0.0403	-0.0443	-0.0497
sGARCH.VaR.01	-0.0519	-0.0068	-0.0195	-0.0332	-0.0390	-0.0452
csGARCH.VaR.01	-0.0500	-0.0086	-0.0196	-0.0363	-0.0409	-0.0469
iGARCH.VaR.025	-0.0383	-0.0056	-0.0164	-0.0298	-0.0328	-0.0369
sGARCH.VaR.025	-0.0386	-0.0050	-0.0144	-0.0246	-0.0290	-0.0336
csGARCH.VaR.025	-0.0374	-0.0065	-0.0146	-0.0271	-0.0303	-0.0349
iGARCH.cVaR.01	-0.0690	-0.0246	-0.0393	-0.0574	-0.0614	-0.0668
sGARCH.cVaR.01	-0.0701	-0.0250	-0.0377	-0.0514	-0.0572	-0.0634
csGARCH.cVaR.01	-0.0651	-0.0237	-0.0347	-0.0514	-0.0560	-0.0620
iGARCH.cVaR.025	-0.0556	-0.0229	-0.0337	-0.0471	-0.0501	-0.0542
sGARCH.cVaR.025	-0.0552	-0.0216	-0.0310	-0.0412	-0.0456	-0.0502
csGARCH.cVaR.025	-0.0534	-0.0225	-0.0306	-0.0431	-0.0463	-0.0509

Traduciendo los resultados al impacto en consumo por Riesgo de Mercado para el portafolio de trading, identificamos que en tiempos normales la carga oscila entre 3.19% y 6.10% con el recorte al percentil 97.5% (c-VaR anualizado a 10 días), y entre 4.71% y 8.63% para el percentil 99%. En cuanto al impacto patrimonial correspondiente al portafolio de *Inversiones disponibles para la venta (AFS)* y el portafolio de *Inversiones mantenidas hasta el vencimiento (HTM)*, el efecto anualizado del Stress-VaR al 97.5% (250 días) eleva la carga al rango [6.64%, 16.60%].

Analizando el nivel de impacto en tiempos de alto estrés observado durante el año 2022, el VaR en el portafolio de *Trading* alcanzó el nivel de consumo entre 9.17% y 19.42%. Al evaluar el costo de inventariar el riesgo

<sup>64</sup>Estadísticamente, en esta situación nos referimos a la cola izquierda de la cola izquierda de la distribución. Conceptualmente, esta es una aproximación analítica de lo que intenta modelar la metodología EVT.

de mercado en el portafolio de *Inversiones disponibles para la venta (AFS)* y el portafolio de *Inversiones mantenidas hasta el vencimiento (HTM)*, el Stress-VaR aumenta al rango [22.77%, 62.14%].

En este punto, es necesario tomar en consideración un elemento de importante. El proceso de agregación en el tiempo utilizado para traducir las estimaciones del VaR de 1 día a distintos horizontes de tiempo,  $\sigma_t \sqrt{T}$  requiere dos condiciones críticas: que los retornos sean independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.), y que sean no correlacionados. El hecho de que la volatilidad sea variable en el tiempo crea un desafío. En tiempos normales, la agregación subestimará el nivel de riesgo. Y cuando se trata de tiempos de turbulencia, la agregación sufrirá potencialmente de sobreestimación<sup>65</sup>. En nuestro caso, las estimaciones en el período de prueba corresponden a los tiempos de calma (y más cercanos a la normalidad estadística), mientras que la validación realizada sobre la muestra del año 2022 corresponde a condiciones extremas.

Table 16: Estimación FHS: Consumo por Riesgo de Mercado (2019-2021)

	trading_q.05	trading_q.025	trading_q.01	sVaR
iGARCH.VaR.01	-0.0398	-0.0465	-0.0718	-0.0933
sGARCH.VaR.01	-0.0351	-0.0408	-0.0661	-0.0870
csGARCH.VaR.01	-0.0348	-0.0411	-0.0601	-0.0870
iGARCH.VaR.025	-0.0307	-0.0357	-0.0560	-0.0712
sGARCH.VaR.025	-0.0272	-0.0319	-0.0519	-0.0680
csGARCH.VaR.025	-0.0272	-0.0319	-0.0471	-0.0664
iGARCH.cVaR.01	-0.0544	-0.0610	-0.0863	-0.1660
sGARCH.cVaR.01	-0.0462	-0.0519	-0.0772	-0.1423
csGARCH.cVaR.01	-0.0471	-0.0534	-0.0724	-0.1486
iGARCH.cVaR.025	-0.0411	-0.0462	-0.0664	-0.1233
sGARCH.cVaR.025	-0.0373	-0.0421	-0.0620	-0.1186
csGARCH.cVaR.025	-0.0370	-0.0417	-0.0569	-0.1154

Table 17: Estimación FHS: Consumo por Riesgo de Mercado (2022)

	trading_q.50	trading_q.05	trading_q.025	sVaR
iGARCH.VaR.01	-0.0702	-0.1274	-0.1401	-0.3510
sGARCH.VaR.01	-0.0617	-0.1050	-0.1233	-0.3083
csGARCH.VaR.01	-0.0620	-0.1148	-0.1293	-0.3099
iGARCH.VaR.025	-0.0519	-0.0942	-0.1037	-0.2593
sGARCH.VaR.025	-0.0455	-0.0778	-0.0917	-0.2277
csGARCH.VaR.025	-0.0462	-0.0857	-0.0958	-0.2308
iGARCH.cVaR.01	-0.1243	-0.1815	-0.1942	-0.6214
sGARCH.cVaR.01	-0.1192	-0.1625	-0.1809	-0.5961
csGARCH.cVaR.01	-0.1097	-0.1625	-0.1771	-0.5487
iGARCH.cVaR.025	-0.1066	-0.1489	-0.1584	-0.5328
sGARCH.cVaR.025	-0.0980	-0.1303	-0.1442	-0.4902
csGARCH.cVaR.025	-0.0968	-0.1363	-0.1464	-0.4838

Recordando que la investigación tiene como objetivo aportar conocimiento práctico, la utilidad de la metodología se deriva exclusivamente de su capacidad para apoyar las decisiones de gestión. En concreto, su aporte al control de riesgos y la gestión del capital. Por esta razón, la evaluación *Out-of-Sample* debe considerar exclusivamente el nivel de información existente al momento de la estimación. Desde esta perspectiva, el consumo potencial de capital por Riesgo de Mercado para el año 2022 puede ser estimado únicamente con datos que preceden ese año. Por lo tanto, el Stress-VaR de la Simulación Histórica Filtrada (FHS)

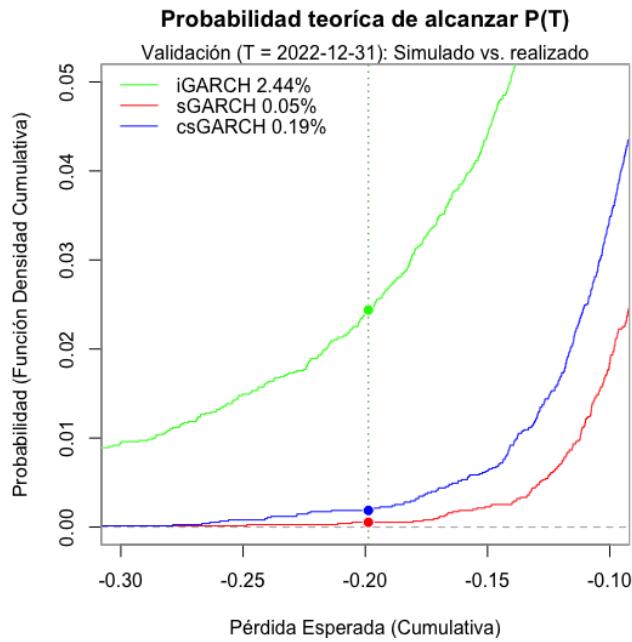
<sup>65</sup>Ver: Pritsker, M. (2006). The hidden dangers of historical simulation. Journal of Banking and Finance, 30(2), 561-582.

mas elevado hasta ese momento marcaba una pérdida potencial de 16.60%. La Simulación Monte-Carlo (MC) por bootstrap al percentil 99 identificaba el rango esperado mas amplio [-11.29%, -24.73%]. El retorno realizado por GOBIXDR fue -19.87%, quedando cerca de la banda superior de la mayor estimación en cada metodología de estimación.

Estos resultados nos llevan al segundo hallazgo, respondiendo de manera afirmativa a la primera pregunta de la investigación. Previo al inicio del ciclo de ajuste de política monetaria en el año 2022, ambos métodos de aplicación del GARCH indicaban que las pérdidas potenciales correspondientes a un escenario de baja probabilidad de ocurrencia pero plausible, pudieran exceder considerablemente las pérdidas históricas observadas.

Table 18: Simulación Monte Carlo: Consumo del Capital por Riesgo de Mercado (2022)

	VaR.025	VaR.01
iGARCH	-0.1701	-0.2473
sGARCH	-0.0935	-0.1129
csGARCH	-0.0974	-0.1254



Finalmente, analizando el periodo de validación (*Out-of-Sample*) y lo que captura plenamente el impacto del ciclo monetario poscovid: la carga de por vía de la Simulación Histórica Filtrada (FHS) incrementa por un factor esperado superior a 3x en tiempos de mercado turbulento. La Simulación Monte-Carlo (MC) no presenta cambios relevantes. Una implicación de esto en la práctica es que el segundo tipo de modelos tenderá a sobreestimar las cargas por consumo de riesgo de mercado en tiempos normales y potencialmente a subestimar el nivel de riesgo en tiempos extremos. Podemos observar esto en las probabilidades teóricas de ocurrencia. La Simulación Monte-Carlo asignó las probabilidades del 0.0244, 0.005, y 0.0019 para el iGARCH, sGARCH y csGARCH, al nivel de cierre del GOBIXDR alcanzado al 31 de diciembre 2022. Esto equivale aproximadamente a la expectativa que un evento de la magnitud experimentada ocurra cada 40 años en el primer caso, 2000 años en el segundo, y en el último, 526 años.

## Conclusiones

Esta investigación estudia el riesgo de mercado presente en los bonos gubernamentales. Su principal aporte es la estimación del nivel de riesgo de mercado presente en el portafolio benchmark utilizando el índice GOBIXDR.

Nuestro proceso es agnóstico respecto a la idoneidad metodológica, la elección y configuración de los modelos. El problema fue abordado puramente desde la perspectiva práctica y, en ese sentido, el proceso sistemático de entrenamiento, evaluación y validación de una batería inicial de 32,400 modelos ha producido resultados razonablemente en línea con las aproximaciones empíricas del VaR en mercados emergentes y de frontera<sup>666768</sup>.

Los resultados responden a nuestra primera pregunta de investigación afirmativamente. Es decir, aún antes de iniciar el ciclo de ajuste en las tasas de interés existió la posibilidad construir escenarios donde las caídas potenciales del mercado de renta fija bajo estrés que superaban ampliamente las informaciones históricas disponibles hasta ese momento<sup>69</sup>. En términos prácticos, esto significa que uso del GOBIXDR como *benchmark* ha proporcionado la oportunidad para la preparación y planificación de los presupuestos correspondientes al riesgo de mercado, y por lo tanto, desde el punto de vista institucional gestionar el patrimonio en riesgo con efectividad.

Asimismo, lo presentado sugiere que en tiempos de turbulencia, el consumo del VaR tiende a incrementar por un factor cercano a 3x. Consideramos este hallazgo altamente relevante para orientar las tomas de decisiones de gestión, tanto en el sentido estratégico (composición de portafolio) como táctico (decisiones de compra/venta). Una de las principales decisiones relacionadas a este aspecto es la elección de la clasificación de portafolio al que corresponden las inversiones. Los portafolios identificados como Disponible Para la Venta (Available-For-Sale) y Valores Hasta el Vencimiento (Hold-To-Maturity) presentan un nivel de consumo de capital considerablemente mayor que el portafolio de Trading.

En cuanto a la segunda pregunta de investigación, desde la perspectiva de la robustez en los hallazgos y la potencial aplicación de las metodologías presentadas, se ha comprobado la utilidad práctica en el proceso de cuantificación del riesgo de mercado. El choque ocurrido en el año 2022 a raíz del ajuste en la política monetaria, ha mostrado una probabilidad empírica del 2.44% (iGARCH) en la Simulación Monte Carlo. Este resultado caracteriza lo ocurrido como un evento de alto impacto, poco probable pero plausible. En nuestra opinión, esto tiene potenciales aplicaciones en la gestión de portafolios de renta fija, como el diseño de escenarios y la realización de pruebas de estrés.

Finalmente, hemos confirmado que el resultado de la simulación Monte Carlo indica una carga considerablemente menor en comparación con el Stress-VaR evaluado mediante el método FHS. El uso de la volatilidad constante debe ser evaluado cuidadosamente al decidir su aplicación, dado que el riesgo del modelo implica costos implícitos que pueden ser significativos a largo plazo, especialmente cuando ocurre un evento capaz de generar turbulencias prolongadas en el mercado.

---

<sup>66</sup>Zikovic, Sasa, and Randall K. Filer (2012). Ranking of VaR and ES models: performance in developed and emerging markets.

<sup>67</sup>Rossignolo, A. F., Fethi, M. D., and Shaban, M. (2012). Value-at-Risk models and Basel capital charges: Evidence from Emerging and Frontier stock markets. *Journal of Financial Stability*, 8(4), 303-319.

<sup>68</sup>Este debe interpretarse cuidadosamente. Lo indicamos como una aproximación, teniendo en cuenta que es necesario considerar que la mayoría de los estudios se centran en mercados de acciones y presentan un nivel de madurez superior, con un mayor acceso para inversionistas institucionales extranjeros. La existencia de un benchmark para describir las condiciones de un mercado inaccesible para el inversionista extranjero es una excepción. Asimismo, es importante tener en cuenta que ambos son considerados activos de riesgo, y su atractivo se determina por el nivel de prima por riesgo.

<sup>69</sup>La caída máxima hasta ese punto era -0.1062 incurrida en el transcurso del año 2018.

## Anexos

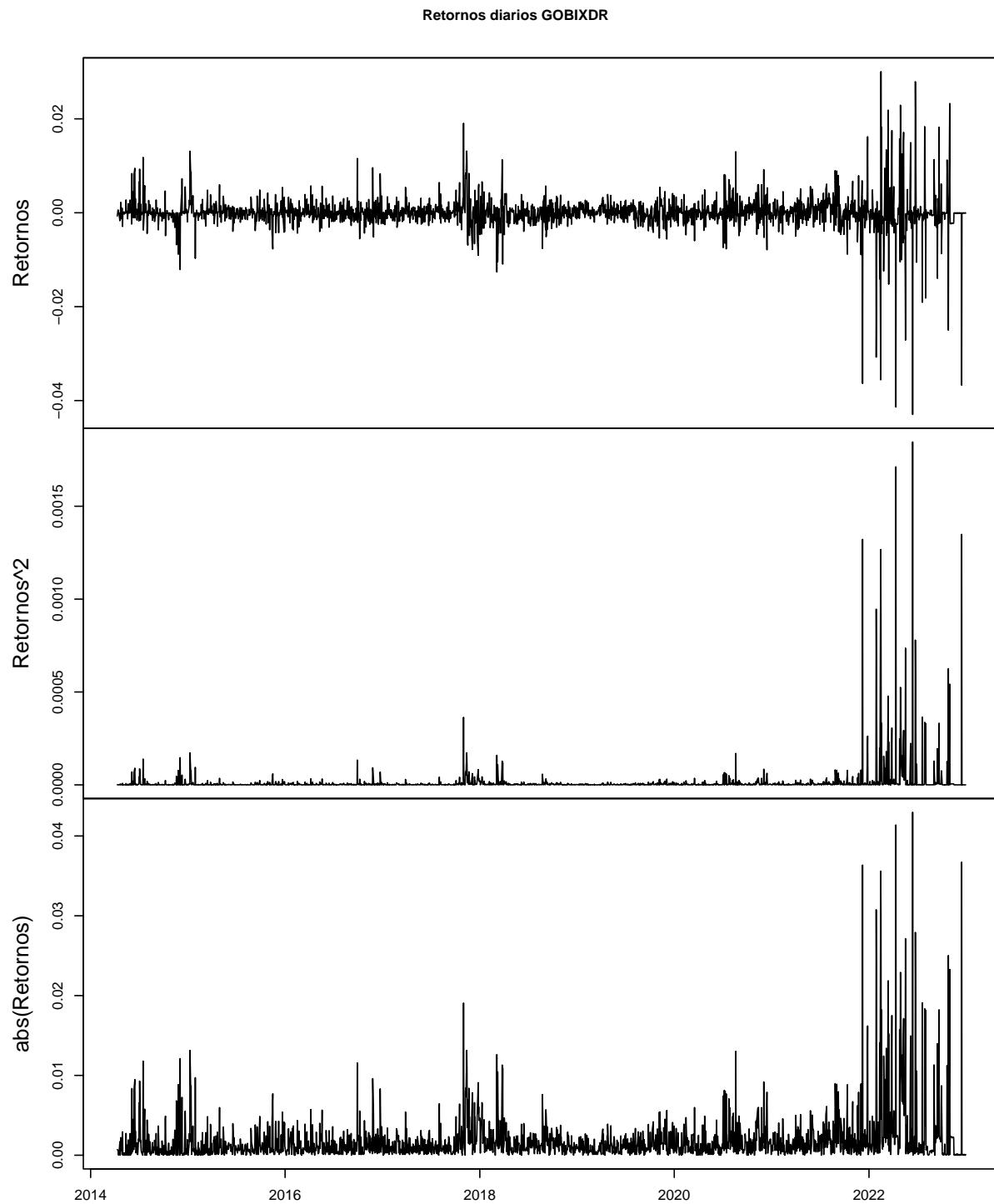
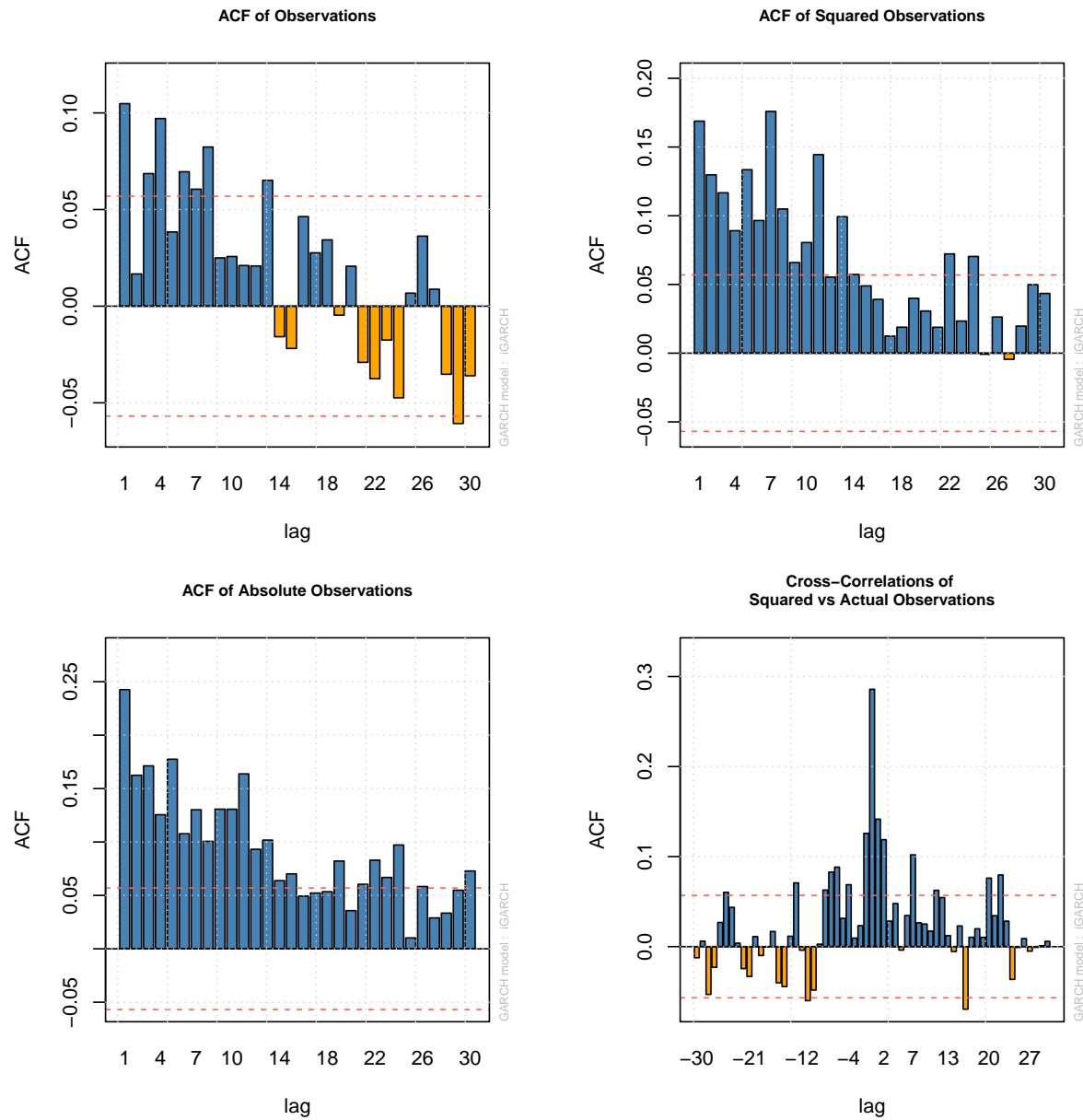


Table 19: Estadísticas summarizadas

	daily.vol
nbr.val	2191.000000
nbr.null	104.000000
nbr.na	0.000000
min	-0.0439178
max	0.0296286
range	0.0735464
sum	0.0213730
median	-0.0000904
mean	0.0000098
SE.mean	0.0000797
CI.mean.0.95	0.0001563
var	0.0000139
std.dev	0.0037316
coef.var	382.5401357
skewness	-2.2718831
skew.2SE	-21.7219381
kurtosis	40.5028467
kurt.2SE	193.7160687
normtest.W	0.6516636
normtest.p	0.0000000

## Propiedades autoregresivas



## Propiedades autoregresivas (cont.)

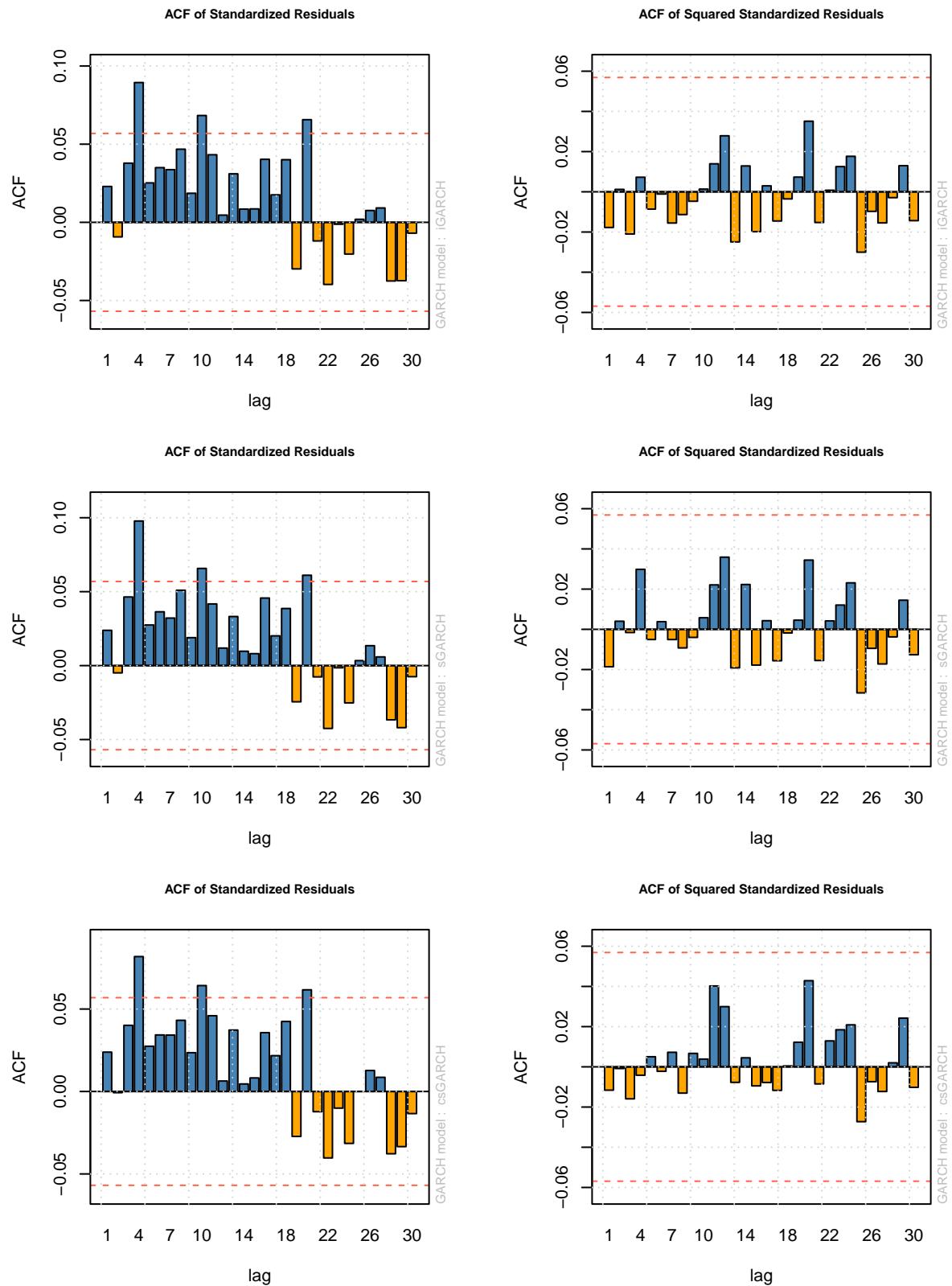


Table 20: Coeficientes iGARCH

	mu	ma1	omega	alpha1	alpha2	beta1	beta2	shape
	-1e-04	1e-04	0	0.3112	0.0036	0	0.6852	0.7323

Table 21: Coeficientes sGARCH

	mu	omega	alpha1	beta1	beta2	beta3	beta4	beta5	shape
	-1e-04	0	0.2934	0	0.2898	0	0.3193	0	0.7631

Table 22: Coeficientes csGARCH

	mu	omega	alpha1	beta1	beta2	eta11	eta21	shape
	-1e-04	0	0.1986	0.1044	0.5194	0.9959	0.0101	0.7745

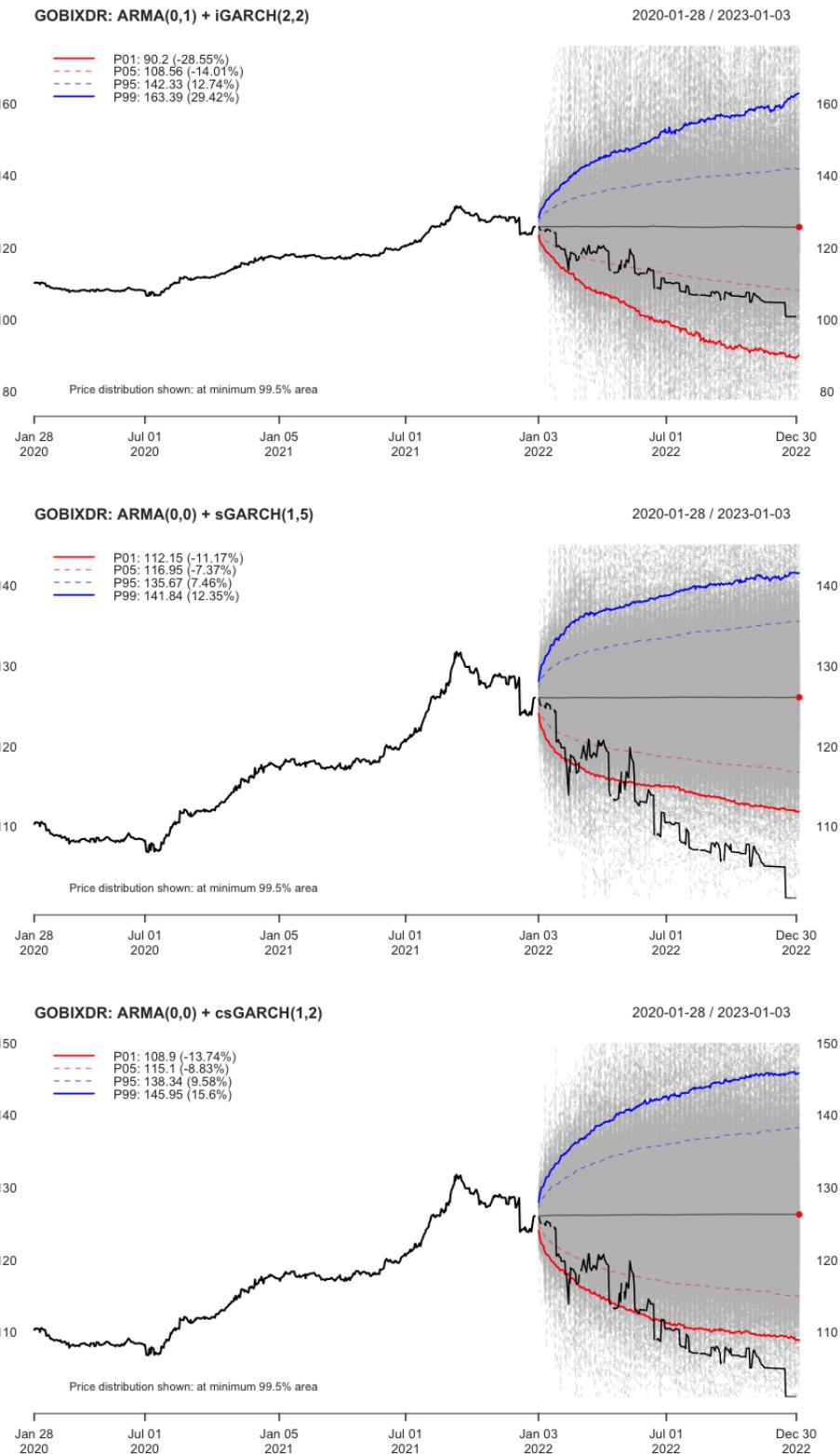
Table 23: Estimación ITS Sigma: Estadísticas Descriptivas

	iGARCH	sGARCH	csGARCH
nbr.val	1187.00000	1187.00000	1187.00000
nbr.null	0.00000	0.00000	0.00000
nbr.na	0.00000	0.00000	0.00000
min	0.00129	0.00140	0.00134
max	0.01088	0.01050	0.00888
range	0.00958	0.00910	0.00754
sum	2.90837	2.73149	2.60164
median	0.00205	0.00196	0.00192
mean	0.00245	0.00230	0.00219
SE.mean	0.00003	0.00003	0.00003
CI.mean.0.95	0.00007	0.00006	0.00005
var	0.00000	0.00000	0.00000
std.dev	0.00119	0.00099	0.00087
coef.var	0.48649	0.43103	0.39623
skewness	2.64174	2.90210	2.73789
skew.2SE	18.60193	20.43524	19.27897
kurtosis	8.85035	11.28009	9.92605
kurt.2SE	31.18611	39.74784	34.97659
normtest.W	0.71389	0.68766	0.71570
normtest.p	0.00000	0.00000	0.00000

Table 24: Configuraciones GARCH (15) que pasan la prueba de modelo Out-of-Sample (OOS)

model	UC.LR.stat	UC.critico	UC.LRp	CC_LR.stat	CC.critico	CC.LRp	b	uLL	rLL	LRp
ARMA(0,1)+iGARCH(2,2) ged	5.073	6.635	0.024	5.459	9.21	0.065	2.605	-25.550	-28.660	0.013
ARMA(0,1)+iGARCH(1,4) ged	5.073	6.635	0.024	5.459	9.21	0.065	2.415	-25.900	-28.660	0.019
ARMA(0,0)+sGARCH(1,5) ged	3.227	6.635	0.072	3.510	9.21	0.173	1.878	-23.399	-24.795	0.095
ARMA(0,0)+iGARCH(4,2) ged	5.073	6.635	0.024	5.459	9.21	0.065	2.605	-25.550	-28.660	0.013
ARMA(0,3)+sGARCH(1,2) ged	5.073	6.635	0.024	5.459	9.21	0.065	2.415	-25.900	-28.660	0.019
ARMA(0,0)+iGARCH(3,4) ged	5.073	6.635	0.024	5.459	9.21	0.065	2.605	-25.550	-28.660	0.013
ARMA(0,1)+iGARCH(2,4) ged	5.073	6.635	0.024	5.459	9.21	0.065	2.415	-25.900	-28.660	0.019
ARMA(0,2)+iGARCH(3,2) ged	5.073	6.635	0.024	5.459	9.21	0.065	2.605	-25.550	-28.660	0.013
ARMA(2,0)+sGARCH(2,3) ged	5.073	6.635	0.024	5.459	9.21	0.065	2.415	-25.900	-28.660	0.019
ARMA(0,3)+iGARCH(3,3) ged	3.227	6.635	0.072	3.510	9.21	0.173	1.878	-23.399	-24.795	0.095
ARMA(0,0)+csGARCH(1,2) ged	5.073	6.635	0.024	5.459	9.21	0.065	2.415	-25.900	-28.660	0.019
ARMA(3,2)+iGARCH(1,2) ged	5.073	6.635	0.024	5.459	9.21	0.065	2.415	-25.900	-28.660	0.019
ARMA(0,0)+sGARCH(3,3) ged	5.073	6.635	0.024	5.459	9.21	0.065	2.415	-25.900	-28.660	0.019
ARMA(4,2)+iGARCH(1,3) ged	5.073	6.635	0.024	5.459	9.21	0.065	2.415	-25.900	-28.660	0.019
ARMA(0,2)+iGARCH(2,4) ged	5.073	6.635	0.024	5.459	9.21	0.065	2.415	-25.900	-28.660	0.019

Simulación Monte-Carlo (conjunto de validación).



Formulación indicadores tabla 6.

$$\text{Semi Deviation} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (R_i - T)^2}{N}}$$

$$\text{Gain Deviation} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\max(0, R_i - T))^2}{N}}$$

$$\text{Loss Deviation} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\min(0, T - R_i))^2}{N}}$$

$$\text{Downside Deviation} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\min(0, R_i - T))^2}{N}}$$

$$\text{MDD} = \max_{t_1, t_2: t_2 > t_1} \left( \frac{V(t_2) - V(t_1)}{V(t_1)} \right)$$

$$\text{Modified VaR} = \text{VaR} + \frac{\text{skewness} \times \text{VaR} - 1}{6} + \frac{\text{kurtosis} - 1}{24} \times \text{VaR}^2$$

$$\text{Alpha} = \text{Actual Return} - (\text{Risk-Free Rate} + \beta \times (\text{Market Return} - \text{Risk-Free Rate}))$$

$$\beta = \frac{\text{Covariance}(R_{\text{asset}}, R_{\text{market}})}{\text{Variance}(R_{\text{market}})}$$

$$\text{Tracking Error} = \sqrt{\text{Var}(R_{\text{portfolio}} - R_{\text{benchmark}})}$$

$$\text{Active Premium} = R_{\text{portfolio}} - R_{\text{benchmark}}$$

$$\text{Information Ratio} = \frac{R_{\text{portfolio}} - R_{\text{benchmark}}}{\text{Tracking Error}}$$

$$\text{Treynor Ratio} = \frac{R_{\text{portfolio}} - R_{\text{risk-free}}}{\beta}$$