Временные ряды

Time series

Введение в задачи дисциплины. Представление рядов динамики

- Значения статистических (экономических, финансовых, технических и др.) показателей в различные моменты времени называют **уровнями** динамического (временного) ряда;
- Ряд, в котором время задано в виде промежутков (лет, месяцев, дней и т.д.) называют **интервальным динамическим рядом**
- Ряд, в котором время задано конкретными датами или моментами времени называют **моментным динамическим рядом.**

Введение в задачи дисциплины. Модели временных рядов

Модели тренда

$$Y(t) = T(t) + \varepsilon_t$$

Модели сезонности

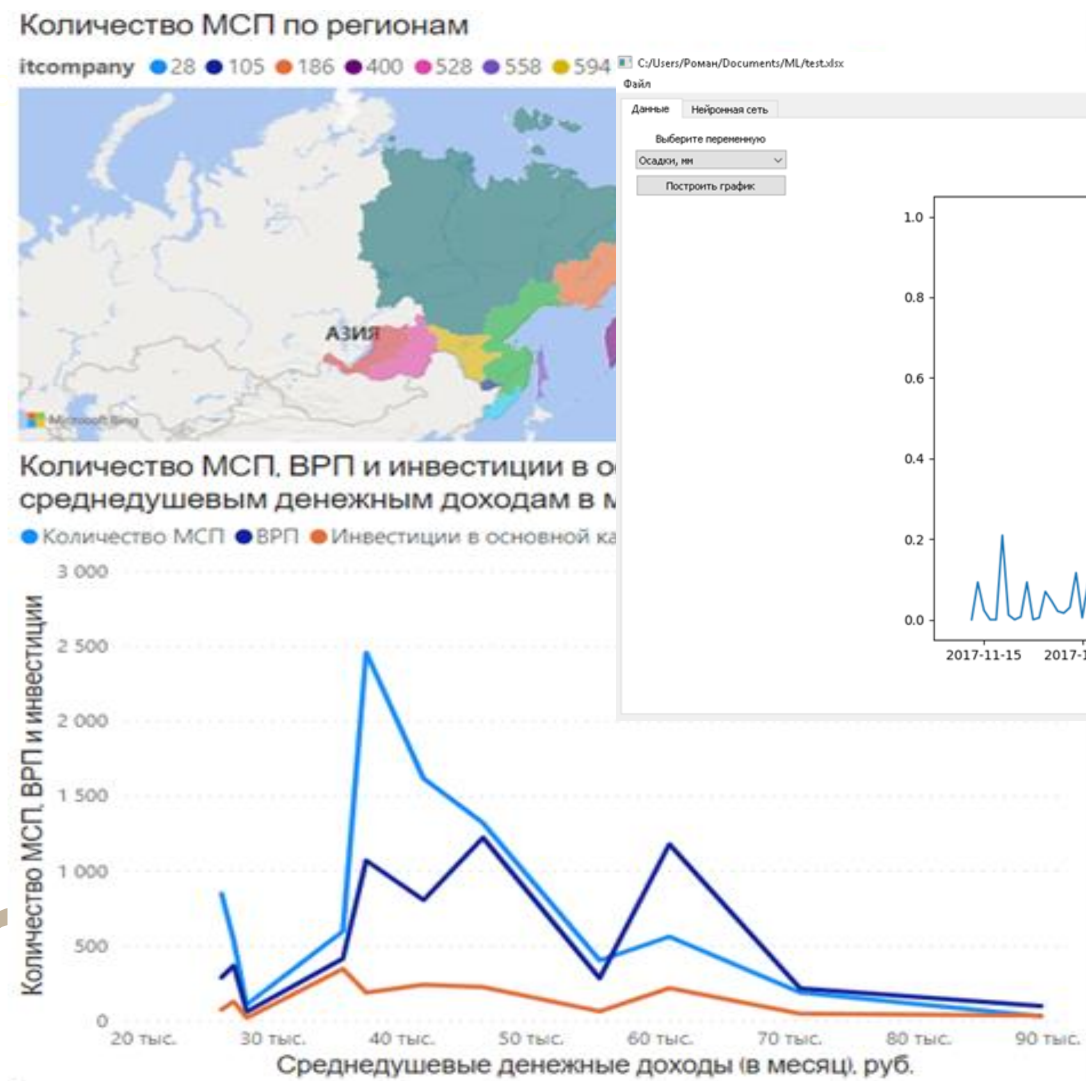
$$Y(t) = S(t) + \varepsilon_t$$

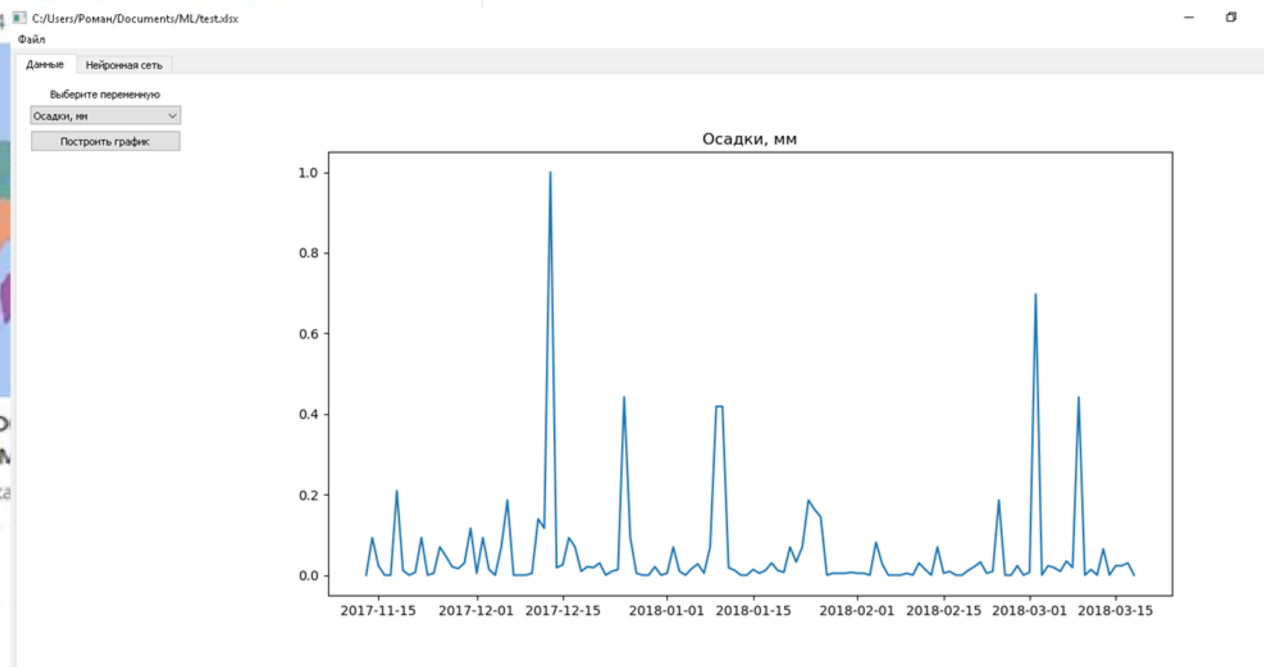
Модели тренда и сезонности

$$Y(t) = T(t) + S(t) + \varepsilon_t$$

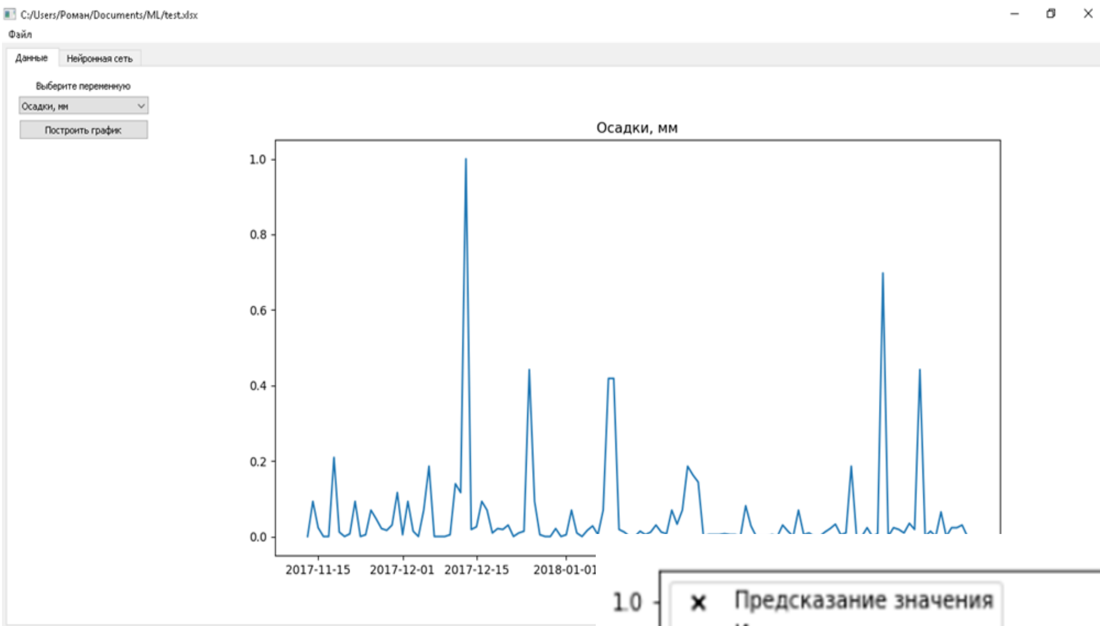
$$Y(t) = T(t)S(t)\varepsilon_t$$

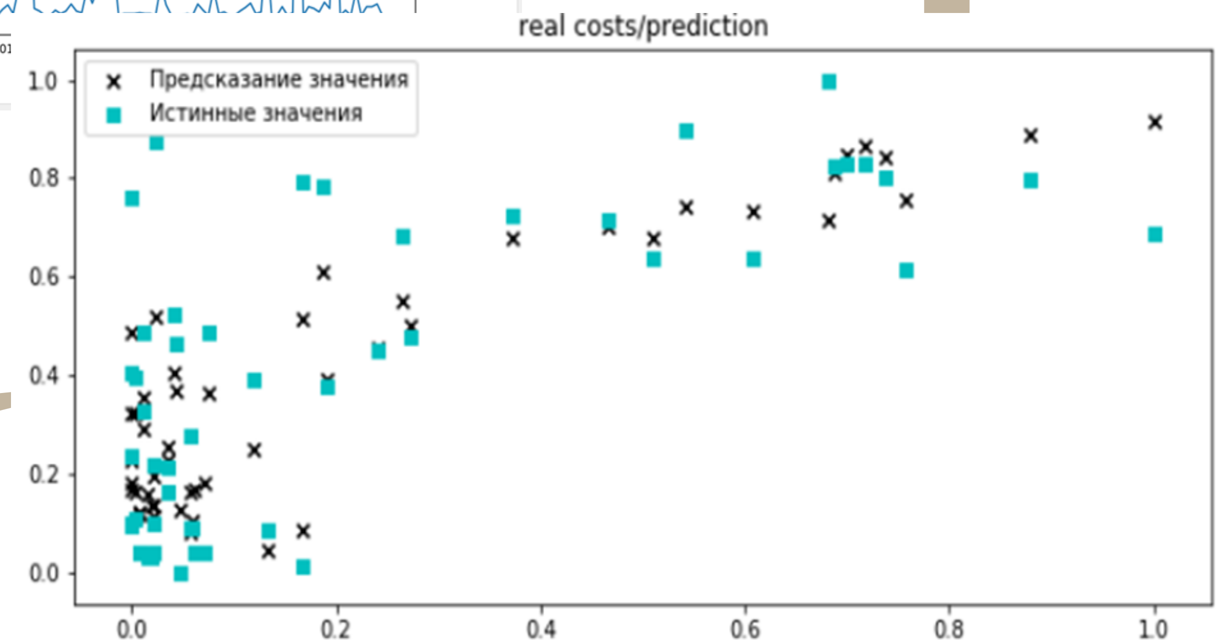
Введение в задачи дисциплины.
Практическое применение.





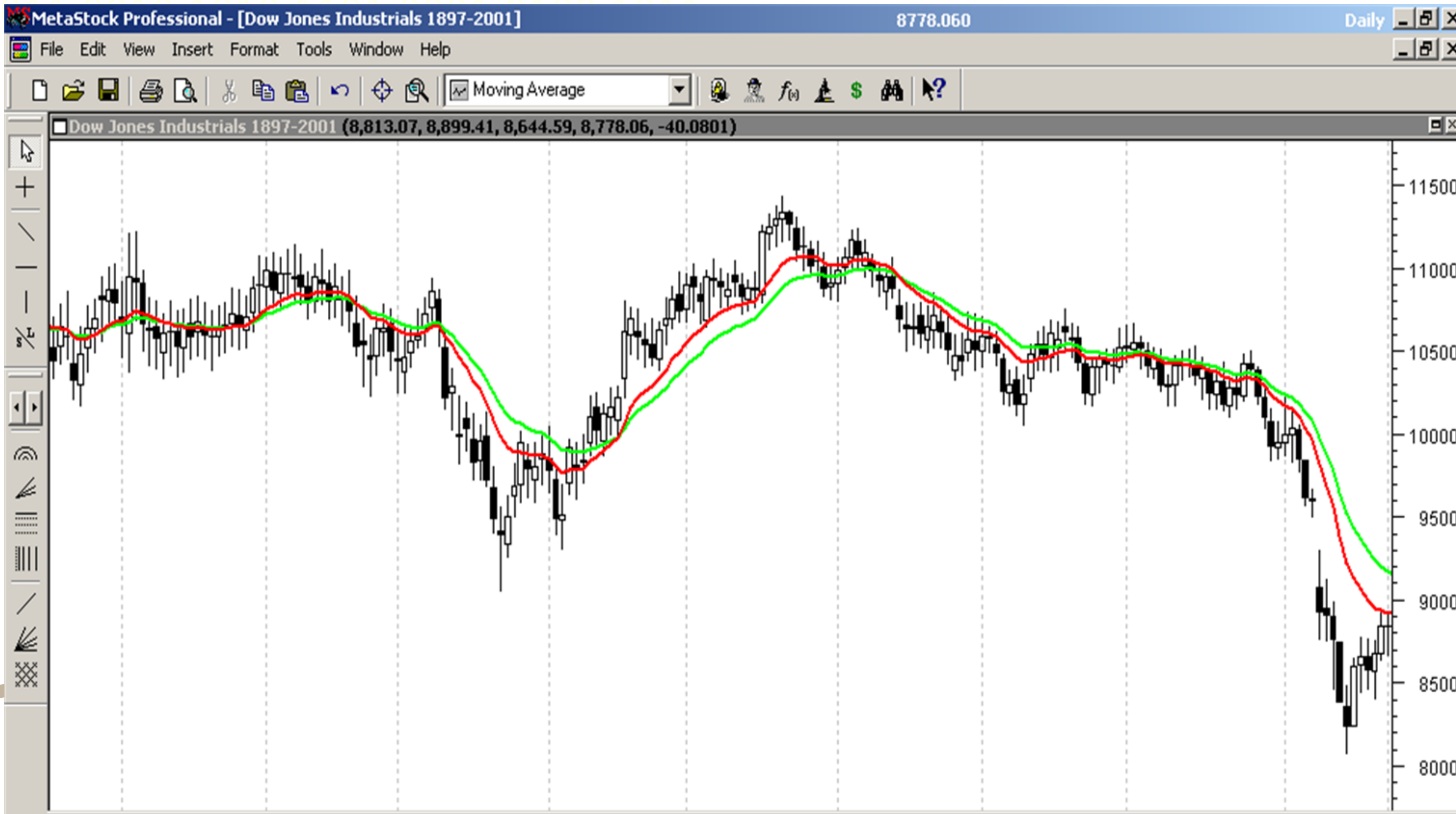
Введение в задачи дисциплины.
Практическое применение.





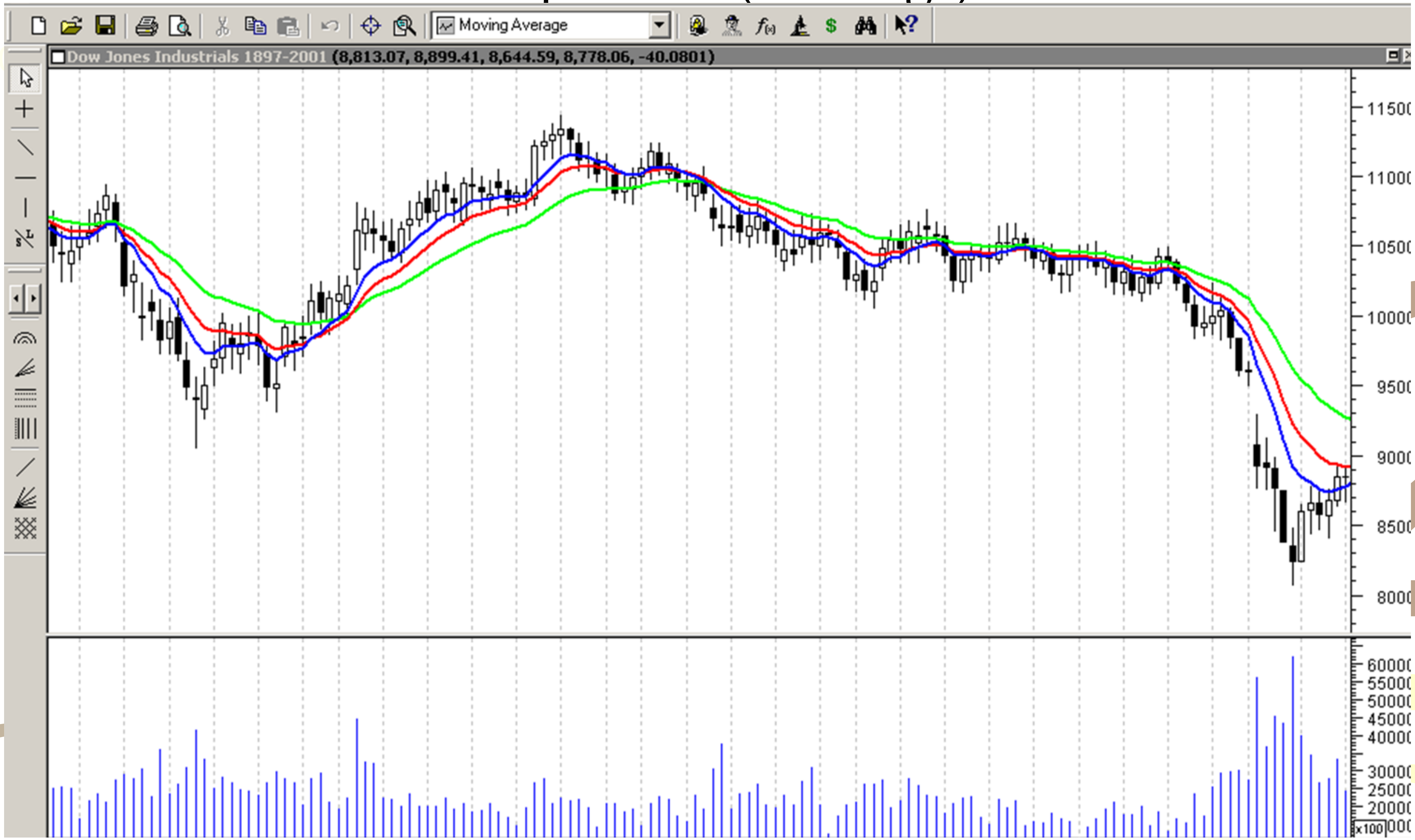
Введение в задачи дисциплины.

Практическое применение. Динамика финансовых рынков (movings)



Введение в задачи дисциплины.

Практическое применение. Динамика финансовых рынков (movings)



Введение в задачи дисциплины.

Практическое применение. Динамика финансовых рынков (RSI)

Изучаемые темы

- Стационарные и нестационарные временные ряды
- Тренды (нестационарные временные ряды
- Обнаружение нестационарности
- Модели стационарных временных рядов

Тенденция. Тренд

- **тенденция** временного ряда - закономерные однонаправленные изменения уровней динамического ряда. Тенденция динамики экономических показателей связана с действием долговременно существующих причин и условий.
- Колебания уровней динамического ряда связаны с действием *случайных краткосрочных или циклических факторов*.
- ***Тренд*** - выражение тенденции динамики в форме достаточно простого уравнения (с единственной переменной – время!)

Типы трендов

Линейная форма тренда:

$$\hat{Y}_k = a + bt_k$$

Параболическая форма тренда:

$$\hat{Y}_k = a + bt_k + ct_k^2$$

Логарифмическая форма тренда:

$$\hat{Y}_k = a + b\log(t_k)$$

Логистическая форма тренда:

$$\hat{Y}_k = \frac{Y_{max} - Y_{min}}{exp(a + b * t_k)} + Y_{min}$$

Применимость и ограничения моделей тренда

Модель тренда применима только нестационарных рядов с устойчивой тенденцией.

Хорошо «работает» только для инерционных процессов. Например в макроэкономических задачах.

Универсальных формальных методов выявления трендов нет.

Модель легко оценить. Однако построение модели тренда имеет смысл , только если удается доказать устойчивость тенденции.

Стационарность ряда

Ряд называется строго стационарным, если совместное распределение вероятностей $Y_{t_1},\ldots,Y_{t_m}$ не зависит от сдвига по времени, т. е. совпадает с распределением вероятностей $Y_{t_1+L},\ldots,Y_{t_m+L}$ для любых L, $t_1,\ldots,t_m$.

Слабая стационарность

Ряд называется слабо стационарным или просто стационарным, если средние, дисперсии и ковариации не зависят от времени *t*. Таким образом, для стационарного ряда

$$MY(t) = \mu$$

$$DY(t) = \nu_0 = \sigma^2$$

$$Cov(Y_t, Y_{t+L}) = \nu_L$$

$$ACF(t, L) = \varphi(L)$$

Автокорреляционная функция ряда

$$ACF(L) = \frac{Cov(Y_t, Y_{t+L})}{DY_t} = \frac{\nu_L}{\nu_0} = \varphi_L$$

Выборочная автокорреляционная функция временного ряда называется коррелограммой и определяется следующим образом:

$$ACF(L) = \frac{\sum_{t=L+1}^{T} (Y_t - \overline{Y})(Y_{t+L} - \overline{Y})}{\sum_{t=1}^{T} (Y_t - \overline{Y})^2}$$

Частная автокорреляционная функция

Кроме автокорреляционной функции рассматривают еще частную автокорреляционную функцию $PACF_Y(L)$. Содержательно частная автокорреляционная функция представляет собой «чистую корреляцию» между Y_t и Y_{t+L} при исключении влияний промежуточных значений $Y_{t+1},\ldots,Y_{t+L-1}$. Формула для ее записи достаточно сложна.

Примеры временных рядов

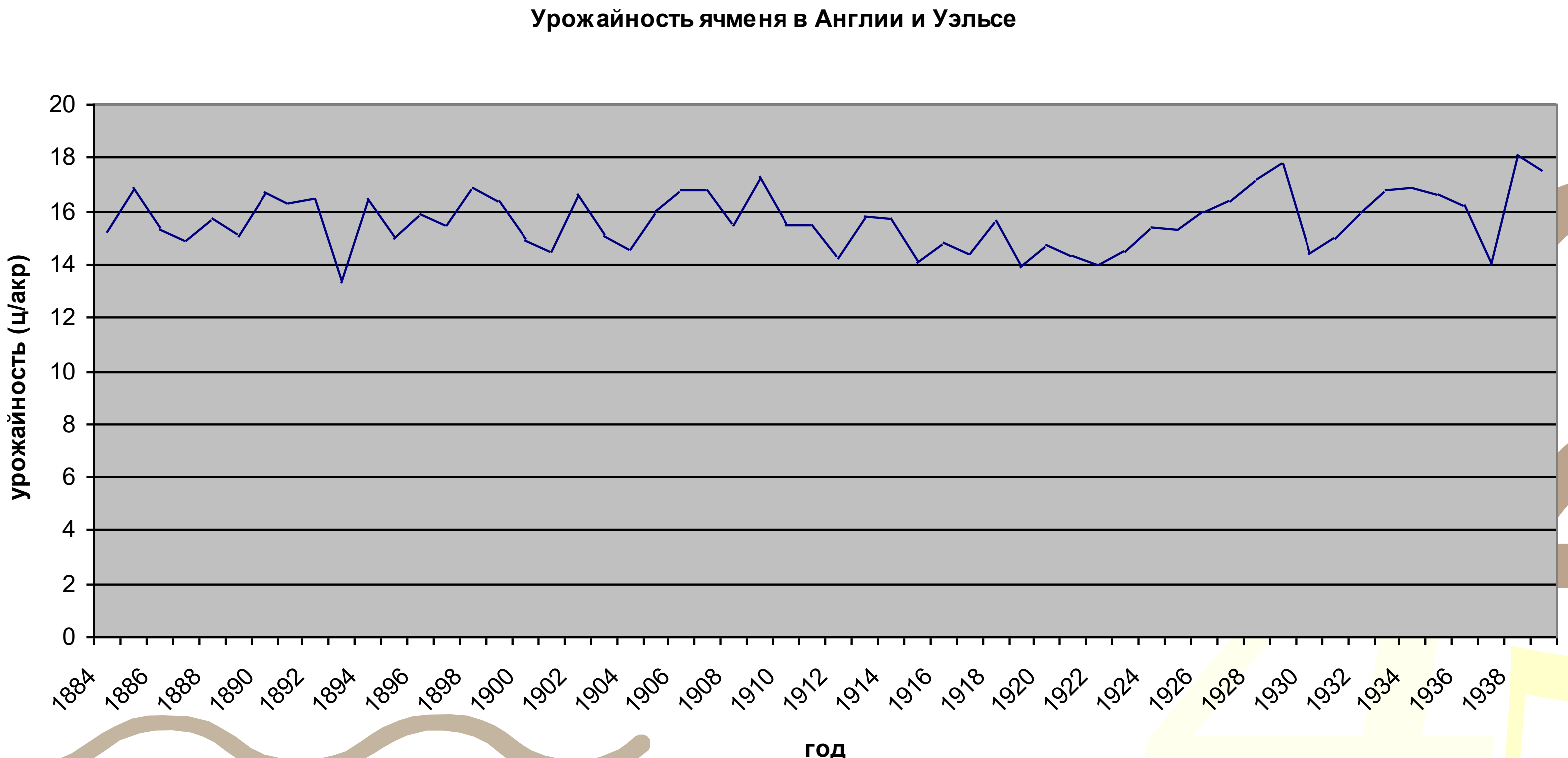
1) «белый шум» – все уровни временного ряда распределены одинаково.

$$Y_t = \varepsilon_t \qquad \text{где} \qquad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$$

$$MY_t = 0, \; DY_t = \sigma^2 \qquad ACF(L) = \begin{cases} 1, L = 0; \\ 0, L > 0 \end{cases}$$

Белый шум

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011



Примеры временных рядов (продолжение)

2) авторегрессионный ряд первого порядка ($AR(1)$)

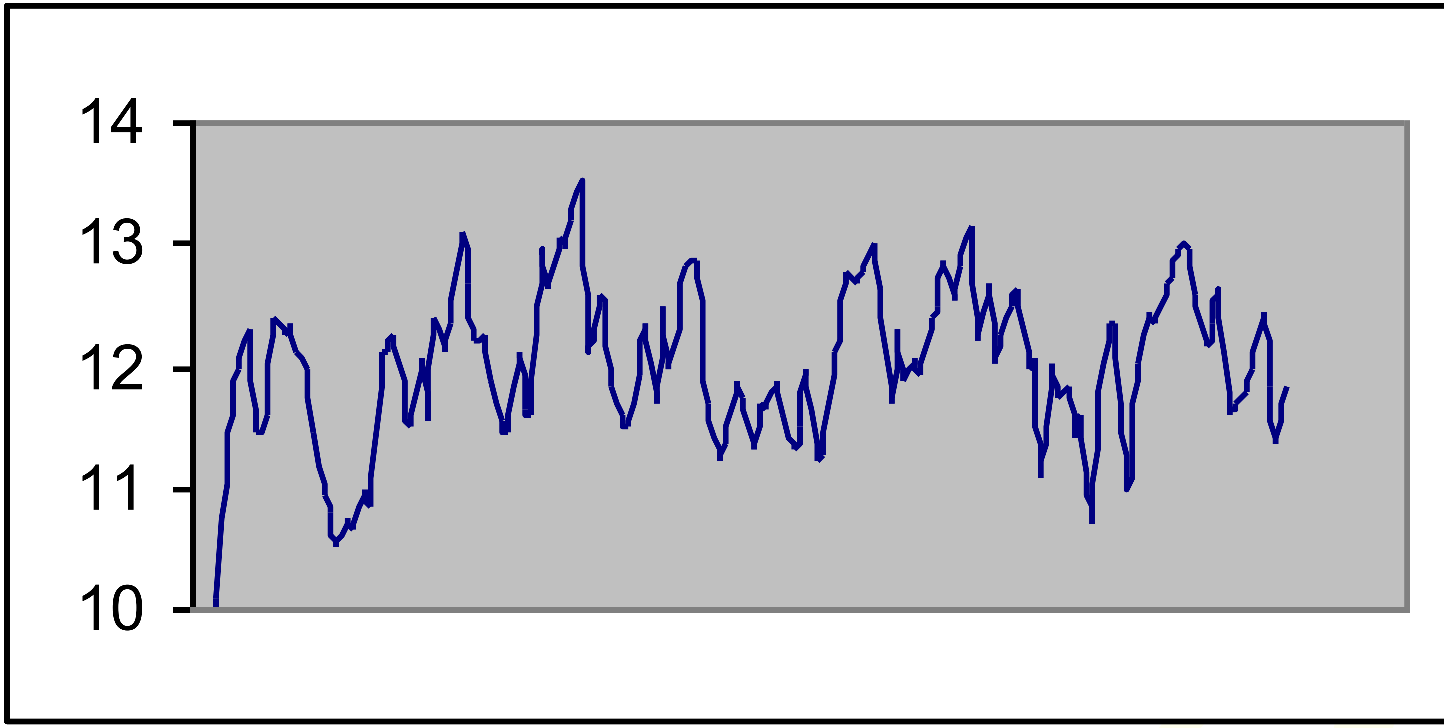
$$Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$$

$$MY_t = \alpha + \rho MY_{t-1} = \alpha + \rho\alpha + \rho^2 MY_{t-2} = \alpha(1 + \rho + \rho^2 + ..) = \frac{\alpha}{1-\rho}$$

$$DY_t = \frac{\sigma^2}{1-\rho} \qquad \nu_L = \frac{\rho^L \sigma^2}{1-\rho^2}$$

если $|\rho| < 1$ ряд стационарен.

AR(1)



Примеры временных рядов (продолжение)

3) «случайное блуждание»

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$$

$$MY_t = MY_{t-1}$$

$$DY_t = DY_{t-1} + \sigma^2 \qquad DY_1 = \sigma^2$$

$$DY_t = t\sigma^2$$

Дисперсия ряда неограниченно возрастает со временем.
Ряд не является стационарным.

Примеры временных рядов (продолжение)

4) ряд с трендом, например, линейным.

$$Y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$$

$$MY_t = \alpha + \beta t$$

ряд не является стационарным.

Примеры временных рядов (продолжение)

5) ряд с сезонной компонентой не является стационарным.

$$Y_t = S(t) + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$$

Ряд с трендом и сезонностью

Трендовая нестационарность

В случае 4) и 5) методы моделирования стационарных временных рядов применяются к остаткам регрессии или к сглаженным уровням временного ряда, т.е. к уровням, очищенным от тренда, циклической и сезонной составляющей.

Обнаружение нестационарности

1. Визуальный анализ временного ряда. Возможно, временной ряд содержит видный на глаз временной тренд и сезонность (периодичную компоненту). Возможно, что разброс значений возрастает или убывает со временем (признак «случайного блуждания»). Это может служить указанием на зависимость среднего и, соответственно, дисперсии от времени. Во всех трех случаях ряд, скорее всего, не будет стационарным.

Обнаружение нестационарности (продолжение)

2. Построить график выборочной автокорреляционной функции или коррелограмму. Коррелограмма стационарного временного ряда быстро убывает со временем, быстро уходит почти в ноль после нескольких первых значений – «влияние предыдущих уровней затухает». Если график показывает, что ACF убывает медленно, с колебаниями, то ряд, скорее всего, будет нестационарным.