

Единичные корни и коинтеграция. Тесты Дики-Фуллера.

автор Кригер А.Б., профессор ДВФУ

Немного истории:

Используется в прикладной статистике и эконометрике для анализа временных рядов для проверки на стационарность [1].

Был предложен в 1979 году Дэвидом Диком (David Alan Dickey) и Уэйном Фуллером (Wayne Arthur Fuller) в работе [1].

За вклад в исследование коинтегрированных и гетероскедстичных процессов с использованием предложенного теста проверки на стационарность в 2003 году авторы получили Нобелевскую премию по экономике.

Название теста

В англоязычной литературе встречается под названиями **Dickey-Fuller test** и **unit root test**. Unit root в дословном означает перевод с английского означает единичный корень.

В ППО кроме того используются обозначения функции / пакета **DF, adf**

Единичный корень

Необходимость тестирования на единичный корень связан с процессом, называемым случайное блуждание

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$$

Или в компактной записи $y_k = y_{k-1} + \varepsilon(k)$.

Процесс случайного блуждания отличается от стационарного тем, что дисперсия возрастает, влияние возмущений ε_t не затухает.

Временной ряд имеет единичный корень или порядок интеграции один, если его первые разницы образуют стационарный ряд.

В терминах математики это условие записывается как:

$\{y(k)\} \sim I(1)$ если $\Delta y(k) = y(k) - y(k-1)$ стационарный ряд

$\{\Delta y(k)\} \sim I(0)$

При помощи теста DF определяют значение коэффициента Φ_1 в авторегрессионном уравнении первого порядка AR(1)

$$y_k = \Phi_1 y_{k-1} + \varepsilon(k)$$

$y(k)$ – временной ряд, $\varepsilon(k)$ – ошибка.

Если $\Phi_1 = 1$ (или очень близок к единице) то процесс имеет единичный корень, в этом случае ряд y_k не стационарен. Степень интегрированности процесса равна $I(1)$.

Если $0 < \Phi_1 < 1$, то ряд стационарный и имеет степень интегрированности $I(0)$

Для финансово-экономических процессов значение $\Phi_1 > 1$ не свойственно, так как в этом случае в процессе присутствуют резко возрастающие (убывающие) эффекты. Возникновение таких процессов маловероятно, так как финансово-экономическая среда достаточно инерционная, что не позволяет принимать бесконечно большие значения за малые промежутки времени.

Проверка на стационарность

Приведенное авторегрессионное уравнение можно переписать в виде

$$\Delta y(k) = p * y(k-1) + \varepsilon(k)$$

где $p = \Phi_1 - 1$, а Δ оператор разности первого порядка

$$\Delta y(k) = y(k) - y(k-1)$$

Существует три версии теста:

$$y(k) = \Phi_1 y(k-1) + \varepsilon(k)$$

$$y(k) = a_0 + \Phi_1 y(k-1) + \varepsilon(k) \text{ (с постоянной)}$$

$$y(k) = a_0 + a * t + \Phi_1 y(k-1) + \varepsilon(k) \text{ (с постоянной и трендом)}$$

Если $p = 0$ (в этом случае $\Phi_1 = p + 1$), то в процессе присутствует единичный корень, то есть ряд y не стационарен и его порядок интегрированности один $I(1)$. Но ряд первых разниц $\Delta y(k) = y(k) - y(k-1)$ уже может быть стационарным (если в ряде y не заложена интегрированность более высокого порядка).

Если $p < 0$, $\Phi_1 < 1$, то и стационарным является ряд y_k .

Критические значения статистики Дики-Фуллера

При нуль гипотезе H_0 считается, что, то $p = 0$ есть процесс с единичным корнем (не стационарный).

При H_1 гипотезе считается, что, то $p < 0$ есть ряд стационарный.

Каждый из трех типов теста (без учета и с учетом смещения и тренда) имеет собственные критические значения t -статистики Стьюдента, которые берутся из специальной таблицы Дики-Фуллера. Критические значения таблицы Дики-Фуллера обозначаются как $\tau_{крит}$. Эти значения показывают силу принятия гипотезы.

Если $|\tau| = \left| \frac{p}{SE_p} \right| > |\tau_{крит}|$ то нуль гипотеза о нестационарности ряда откидывается.

Если возникает экзотическая ситуация когда $p = 0$ и $|\tau| = \left| \frac{p}{SE_p} \right| > |\tau_{крит}|$ то ряд y является моделью случайного блуждания.

Augment DF

автор Кригер А.Б., доцент ЦИД ВФУ