文章编号:1002-8692(2008)12-0016-03

压缩感知理论简介*

・综述・

喻玲娟」,谢晓春 2,3

(1.华南理工大学 电子与信息学院,广东 广州 510640; 2. 赣南师范学院 物理与电子信息学院,江西 赣州 341000; 3. 中国科学院空间科学与应用研究中心, 北京 100190)

【摘 要】压缩感知(CS)理论是在已知信号具有稀疏性或可压缩性的条件下,对信号数据进行采集、编解码的新理论。主要阐述了 CS理论框架以及信号稀疏表示、CS 编解码模型,并举例说明基于压缩感知理论的编解码理论在一维信号、二维图像处理上的应用。 【关键词】压缩感知;稀疏表示;编码;解码;受限等距特性

【中图分类号】TN919.81

【文献标识码】A

Brief Introduction of Compressed Sensing Theory

YU Ling-juan¹, XIE Xiao-chun²³

(1.School of Electronic and Information Engineering, South China University of Teconology, Guangzhou 510640, China;

- 2. School of Physics and Electronic Information, Gannan Normal University, Jiangei Ganzhou 341000, China;
 - 3. Center for Space Science and Applied Research, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

[Abstract] Compressed Sensing(CS) theory is a novel data collection and coding theory under the condition that signal is sparse or compressible. In this paper, the CS framework, CS coding model are introduced, after which the application of CS theory in one-dimensional signal and two-dimension image are illustrated.

[Key words] compressed sensing; sparse presentation; encoding; decoding; restricted isometry property

引言

过去的几十年间,传感系统获取数据的能力不断地 得到增强, 需要处理的数据量也不断增多, 而传统的 Nyquist 采样定理要求信号的采样率不得低于信号带宽 的 2 倍, 这无疑给信号处理的能力提出了更高的要求, 也给相应的硬件设备带来了极大的挑战。寻找新的数据 采集、处理方法成为一种必然。2004年,由 Donoho 与 Candes 等人提出的压缩感知(Compressed Sensing, CS)理 论是一个充分利用信号稀疏性或可压缩性的全新信号 采集、编解码理论[1-2]。该理论表明,当信号具有稀疏性或 可压缩性时,通过采集少量的信号投影值就可实现信号 的准确或近似重构。CS 理论的提出是建立在已有的盲源 分离和稀疏分解理论基础上的。盲源分离为 CS 理论提 供了在未知源信号的情况下,通过测量编码值实现信号 重构的思路;稀疏分解中的具体算法已直接被 CS 解码 重构所用。

2 CS 理论框架

CS 理论是编解码思想的一个重要突破。传统的信号 采集、编解码过程如图 1 所示:编码端先对信号进行采 样,再对所有采样值进行变换,并将其中重要系数的幅 度和位置进行编码,最后将编码值进行存储或传输:信

号的解码过程仅仅是编码的逆过程,接收的信号经解压 缩、反变换后得到恢复信号。这种传统的编解码方法存 在两个缺陷:1) 由于信号的采样速率不得低于信号带 宽的 2 倍,这使得硬件系统面临着很大的采样速率的压 力; 2) 在压缩编码过程中,大量变换计算得到的小系数 被丢弃,造成了数据计算和内存资源的浪费。

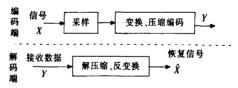


图 1 传统编解码理论的框图

CS 理论的信号编解码框架和传统的框架大不一样, 如图 2 所示。CS 理论对信号的采样、压缩编码发生在同 一个步骤,利用信号的稀疏性,以远低于 Nyquist 采样率 的速率对信号进行非自适应的测量编码。测量值并非信 号本身,而是从高维到低维的投影值,从数学角度看,每

个测量值是传统理 论下的每个样本信 号的组合函数,即一 个测量值已经包含 了所有样本信号的



^{*} 江西省教育厅青年科学基金项目(GJJ09581)

少量信息。解码过程不是编码的简单逆过程,而是在盲源分离中的求逆思想下,利用信号稀疏分解中已有的重构方法在概率意义上实现信号的精确重构或者一定误差下的近似重构¹¹,解码所需测量值的数目远小于传统理论下的样本数。

3 信号的稀疏表示

由于 CS 理论的前提条件是信号具有稀疏性或可压缩性,为使模型简单化,只考虑长度为 N 的离散实值信号 x,记为 x(n), $n \in [1,2,\cdots,N]$ 。由信号理论可知 x 能够用一组基 $\Psi^T = [\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_m, \cdots, \psi_M]$ 的线性组合表示(其中 Ψ^T 代表 Ψ 的转置).则

$$x = \sum_{k=1}^{N} \Psi_k \alpha_k = \Psi \alpha \tag{1}$$

式中: $\alpha_k = \langle x, \Psi_k \rangle$, $\alpha = \langle x \rangle$ 是 $N \times 1$ 矩阵, $\Psi \in N \times N$ 矩阵。 当信号 x 在某个基 Ψ 上仅有 $K \ll N$ 个非零系数(或远大于零的系数) α_k 时,称 Ψ 为信号 x 的稀疏基。

信号在稀疏基上只有 K 个非零系数属于严格稀疏的情况,多数情况下信号无法满足严格稀疏的要求,但仍具有可压缩性,即信号的变换系数经排序后可以指数级进行衰减趋近于零时,信号也是可以近似稀疏表示的。合理地选择稀疏基 Y,使得信号的稀疏系数个数尽可能少,不仅有利于提高采集信号的速度,而且有利于减少存储、传输信号所占用的资源。常用的稀疏基有:正(余)弦基、小波基、chirplet 基以及 curvelet 基等。

4 CS测量编码的模型

在 CS 编码测量模型中,并不是直接测量稀疏信号 x 本身, 而是将信号 x 投影到一组测量向量 $\Phi = [\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m, \cdots, \varphi_m]$ 上,而得到测量值 $y_m = \langle x, \varphi_m \rangle$ 。写成矩阵形式为

$$y = \Phi x \tag{2}$$

式中:x 是 $N\times1$ 矩阵,y 是 $M\times1$ 矩阵, Φ 是 $M\times N$ 的测量矩阵。将式(1)代入(2),有

$$y = \Phi x = \Phi \Psi \alpha = \Theta \alpha$$
 (3)
式中· $\Theta = \Phi \Psi$ 是 $M \times N$ 矩阵。

信号x。Candes 等人在文献[3]中指出,为了保证算法的收

敛性, 使得 K 个系数能够由 M 个测量值准确地恢复,式(3)中矩阵 Θ 必须满足受限等距特性(RIP)准则,即对于任意具有严格 K 稀疏(可压缩情况时,要求是 3K)的矢量ν,矩阵 Θ 都能保证如下不等式成立

$$1-\varepsilon \leqslant \frac{\|\boldsymbol{\Theta}v\|_2}{\|v\|_2} \leqslant 1+\varepsilon \tag{4}$$

式中 $\varepsilon>0$ 。RIP 准则的一种等价的情况是测量矩阵 Φ 和稀疏矩阵 Ψ 满足不相关性的要求 $[\cdot, \cdot]$ -4。

实际测量中稀疏基 V 可能会因信号的不同而改变,因此希望找到对任意的稀疏基 V 都能满足和测量基 O 不相关。对一维信号而言,测量矩阵 O 选取服从高斯分布的基矢量能保证和任意稀疏基 V 不相关的概率很高,类似的矩阵还有 Bernouli 矩阵等四。对二维图像,有文献提出了能快速计算随机扰动的部分傅立叶变换矩阵四、随机扰动的 Hadamard 矩阵回等。

5 CS 解码重构的模型

当式(3)中的矩阵 Θ 满足 RIP 准则时, CS 理论能够通过对式(3)的逆问题先求解稀疏系数 $\alpha=\Psi^{\mathsf{T}}x$, 后代人式(1)将稀疏度为 K 的信号 x 从 M 维的测量投影值 y 中正确地恢复出来[1-2]。解码的最直接方法是通过 l_0 范数下求解式(3)的最优化问题

$$\min \|\boldsymbol{\alpha}\|_{L} \quad \text{s.t.} \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\alpha} \tag{5}$$

从而得到稀疏系数的估计。由于(5)式的求解是个NP-hard 问题,而该最优化问题与信号的稀疏分解中的十分类似,所以有学者从信号稀疏分解的相关理论中寻找更有效的求解途径。文献[7]表明, l, 最小范数下在一定条件下和 l。最小范数具有等价性,可得到相同的解。那么(5)式转化为 l, 最小范数下的最优化问题

$$\min \|\boldsymbol{\alpha}\|_{t} \quad \text{s.t.} \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\alpha} \tag{6}$$

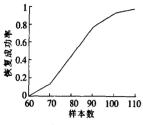
I,最小范数下最优化问题又称为基追踪(BP),其常用实现算法有:内点法和梯度投影法。内点法速度慢,但得到的结果十分准确;而梯度投影法速度快,但没有内点法得到的结果准确。二维图像的重构中,为充分利用图像的梯度结构,可修正为整体部分(Total Variation,TV)最小化法。由于I,最小范数下的算法速度慢,新的快速贪婪法被逐渐采用,如匹配追踪法(MP)。如外,有效的算法还有迭代阈值法10以及各种改进算法。

6 CS 理论的应用举例

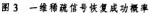
6.1 一维信号情况下的实验仿真

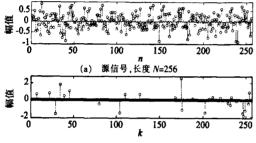
源信号是一维离散稀疏信号,长度 N=256, 选余弦基

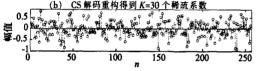
为稀疏基,得到稀疏个数 K=30。在基于 CS 理论的编解 码框架中.编码端采用高斯测量矩阵,解码端采用 OMP 法进行恢复重构。仿真实验首先观察 CS 理论下测量值 数量对信号重建效果的影响。由图 3 可知, 当测量值的



数量 M 增加时, 信号 成功恢复的概率同步 增加。而且当样本数 目达到 M=110 时,信 号已经能够准确恢 复。此时由图 4 可以 看出信号得到了准确 的解码重构。







(c) CS解码重构后信号,长度 N=256

图 4 源信号、解码重构稀疏系数、解码重构信号图

6.2 二维图像情况下的实验仿真

源图像为 256×256 的 boat 图、选小波基为稀疏基。 基于 CS 理论的编解码框架中,测量编码端采用分块(块 大小为 32×32)Hadamard 测量矩阵,解码端基于 TV 最小 化的梯度投影法进行恢复重构。图像的测量样本数 M= 25 000, 其重构结果如图 5a 所示。在传统的编解码理论 下,对图像小波变换后保留其中的25000个大系数进行 编码,后进行解码、反变换重建,其结果如图 5b 所示。仿 真结果表明,在编码端的测量值个数相同的情况下,CS 理论下的恢复图像 PSNR 达到 27.9 dB, 远远高于传统编





图 5 CS 与传统编解码 boat 图恢复效果比较

解码的 15.49 dB。

小结

笔者主要阐述了 CS 理论框架,以及基于 CS 理论的 编解码模型。通过对一维信号、二维图像进行编解码的 仿真实验说明了 CS 理论是一种能够使用少量测量值实 现信号准确恢复的数据采集、编解码理论。由于 CS 理论 对处理大规模稀疏或可压缩数据具有十分重要的意义, 所以该理论提出后在许多研究领域得到了关注。目前, 国外研究人员已开始将 CS 理论用于压缩成像、医学图 像、模数转换、雷达成像、天文学、通信等领域。作为国外 刚出现的新理论,CS 理论的研究方兴未艾、将有着更广 泛的应用前景。

参考文献

- [1] DONOHO D. Compressed sensing[J]. IEEE Trans. Information Theory, 2006, 52(4): 1289~1306.
- [2] CANDES E. Compressive sampling[CV/Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Madrid, Spain: [s.n.], 2006:1433~ 1452.
- [3] CANDES E, ROMBERG J, TAO T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Trans. Information Theory, 2006, 52(4): 489-509.
- [4] TROPP J, GILBERT A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J]. IEEE Trans. Information Theory, 2007, 53(12): 4655-4666.
- [5] ZOU J, GILBERT A C, STRAUSS M J, et al. Theoretical and experimental analysis of a randomized algorithm for sparse Fourier transform analysis[J]. Journal of Computational Physics, 2006, 211(2): 572 -595.
- [6] GAN Lu. Block compressed sensing of natural images|CV/Proceedings of the International Conference on Digital Signal Processing. [S.l.]: IEEE Press, 2007:403-406.
- [7] DONOHO D, TSAIG Y. Extensions of compressed sensing[J]. Signal Processing, 2006, 86(3): 533-548.
- [8] FIGUEIREDO M A T, NOWAK R D, WRIGHT S J. Gradient projection for sparse reconstruction: application to compressed sensing and other inverse problems[J]. IEEE J-STSP,2007,1(4): 586-598.
- [9] TROP J A. Greed is good: algorithmic results for sparse approximation[J]. IEEE Trans. Information Theory, 2004, 50(10):2231-2242.
- [10] FORNASIER M, RAUHUT H. Iterative thresholding algorithms[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2008, 25(2):187-208.

作者简介:

喻玲娟(1982~),硕士生,研究方向为视频图像处理; 谢晓春(1975~),副教授,从事信号与信息处理方面的研究。

责任编辑:哈宏疆

收稿日期:2008~11-11

压缩感知理论简介



作者: 喻玲娟, 谢晓春, YU Ling-juan, XIE Xiao-chun

作者单位: 喻玲娟, YU Ling-juan(华南理工大学, 电子与信息学院, 广东, 广州, 510640), 谢晓春, XIE

Xiao-chun(赣南师范学院, 物理与电子信息学院, 江西, 赣州, 341000; 中国科学院空间科学与

应用研究中心, 北京, 100190)

刊名: 电视技术 ISTIC PKU 英文刊名: VIDEO ENGINEERING

年,卷(期): 2008,32(12)

被引用次数: 0次

参考文献(10条)

1. DONOHO D Compressed sensing 2006(04)

2. CANDES E Compressive sampling 2006

 $3. \ \underline{\text{CANDES E. ROMBERG J. }} \ \underline{\text{TAO T}} \ \underline{\text{Robust uncertainty principles:Exact signal reconstruction from highly}}$

incomplete frequency information $2006\,(04)$

4. TROPP J. GILBERT A C Signal recovery from random n. measuremerits via orthogonal matching pursuit

2007 (12)

5. ZOU J. GILBERT A C. STRAUSS M J Theoretical and experimental analysis of a randomized algorithm for

sparse Fourier transform analysis 2006(02)

6. GAN Lu Block compressed sensing of natural images 2007

7. DONOHO D. TSAIG Y Extensions of compressed sensing 2006 (03)

8. FIGUEIREDO M A T.NOWAK R D.WRIGHT S J Gradient projection for sparse reconstruction:application to

compressed sensing and other inveme problems 2007(04)

9. TBOP J A Greed is good:algorithmic results for sparse approximation 2004(10)

10. FORNASIER M. RAUHUT H Iterative thresholding algorithms 2008(02)

相似文献(6条)

1. 学位论文 张强 基于雷达信号的稀疏表示 2009

受奈奎斯特·采样定理的约束, 传统雷达在提高分辨率和满足实时性要求时, 面临高采样率、快处理速度等问题的挑战。稀疏表示与压缩感知理论指 出, 稀疏信号可通过一组线性测量值重建得到原信号, 在获得测量值时, 采样率可低于奈奎斯特采样频率。

本文就是围绕信号的稀疏表示与压缩感知理论展开的,整篇文章分为两部分。第一部分是研究信号的稀疏表示。首先是字典的构造,包括构造 Gabor字典和匹配字典等,然后介绍两种稀疏分解算法,用这两种算法对信号进行稀疏分解,并验证其性能;最后构造一个简单的雷达回波模型,利用匹配追踪法对回波信号进行稀疏分解。

论文的第二部分是有关压缩感知理论及其应用。论文首先介绍了压缩感知理论和重建算法。然后引入了稀疏表示与压缩感知理论的三个不同应用:A/1转换器,随机滤波,压缩感知与SAR成像,其本质都是为了降低信号的采样率,利用计算机仿真验证了稀疏表示与压缩感知理论的可行性。

2. 学位论文 喻玲娟 基于压缩感知理论的图像压缩技术 2009

传统的静止图像压缩编码过程是先对已有的图像样本值进行变换以得到大量的零或接近于零的系数,再对其中的重要的大系数的幅度、位置进行量 化和熵编码形成压缩的图像数据,最后进行存储和传输。解码过程是编码的逆过程。视频图像压缩编码通常分为帧内编码和帧间编码两种。帧内编码的 过程和静止图像的一样。帧间编码过程是先对参考帧进行运动估计和补偿得到预测帧,再将现有帧和预测帧进行求残差,最后对残差进行变换、量化和 熵编码。视频图像的解码过程也是编码的逆过程。〈br〉

新的压缩感知理论是在近几年的数学成果上提出的,主要包括信号的稀疏表示、测量和信号的重构三个部分。信号的稀疏表示是指信号经某种变换后出现很多零系数或者趋近于零的系数;测量是指将高维信号投影到低维空间;重构是指利用某种算法通过信号的低维投影测量值得到欠定方程组的最优解的过程。〈br〉

本文提出了一种基于压缩感知理论的静止和视频图像的压缩编解码方案。静止图像的编码过程是先完成一个测量或采样的过程,也即将高维信号进行投影的过程,再对样本值或测量值进行量化、熵编码得到编码码流。解码过程是先将接收到的码流进行熵解码、反量化,再完成一个求欠定方程组的最优解的过程。视频图像的编码仍分为帧内编码和帧间编码。帧内编码的过程和静止图像的编码过程一样,而帧间编码过程则先将现有帧和参考帧进行求效差,再对残差进行测量、量化、熵编码。由于残差图像的稀疏性更强,所以需要的样本数或测量数目更少。帧内编码的图像的解码和静止图像的解码过程相同,帧间编码的图像的解码在熵解码、反量化得到的残差数据进行最优化重构后,再与参考帧求和得到重构图像。实验证明,在保持较高的压缩比和较好的图像质量条件下,新的编解码方案比传统的方案所需的样本数少,不会出现数据和计算资源的浪费。而且,由于没有运动估计和补偿过程,所以新的编解码过程的计算复杂度低。此外,传统的编码过程较为复杂,解码是编码的逆过程,而新提出的编码测量过程十分简单,解码端的最优化重构过程较为复杂,有利于测量条件较为严格的条件下采集非编码信号。

3. 期刊论文 刘兆霆. 何劲. 刘中 基于压缩感知的高分辨频率估计 -信号处理2009, 25(8)

,利用一个随机的压缩矩阵先对信号进行压缩,再在压缩域中通过对11模优化重构该稀疏信号,获得信号的频率估计.模拟分析了新方法性能,并与直接11模优化算法、Pisarenko、MUSIC等算法进行了比较. 结果表明本文方法分辨性能明显优于Pisarenko和MUSIC等算法;具有直接11模优化算法相当的性能,但计算量大大降低.

4. 期刊论文 谢志鹏. XIE Zhi-peng 迭代式正交匹配追踪及稀疏解 -微电子学与计算机2009, 26(10)

欠定线性方程组Ax=y的稀疏求解算法是稀疏表示与压缩感知中的研究热点,包括最小化L0拟范数与L1范数及迭代武阀值的方法.介绍一类最小化L0拟范数的方法,即迭代式正交匹配追踪,剖析并证明其基坐标迭代更新框架,介绍三种迭代式算法包括Hermite逆迭代,cholesky与QR迭代分解.迭代式算法的特点避免了逐步求逆运算,从而提高了计算速度.介绍正交匹配追踪获取稀疏解的性质.压缩感知实验表明迭代式正交匹配追踪可快速稳定地求取欠定系统的稀疏解的

5. 期刊论文 <u>石光明. 刘丹华. 高大化. 刘哲. 林杰. 王良君. SHI Guang-ming. LIU Dan-hua. GAO Da-hua. LIU Zhe. LIN</u> Jie. WANG Liang-jun 压缩感知理论及其研究进展 -电子学报2009, 37(5)

信号采样是联系模拟信源和数字信息的桥梁. 人们对信息的巨量需求造成了信号采样、传输和存储的巨大压力. 如何缓解这种压力又能有效提取承载 在信号中的有用信息是信号与信息处理中急需解决的问题之一. 近年国际上出现的压缩感知理论(Compressed Sensing, CS)为缓解这些压力提供了解决方法. 本文综述了Cs理论框架及关键技术问题, 并着重介绍了信号稀疏变换、观测矩阵设计和重构算法三个方面的最新进展, 评述了其中的公开问题, 对研究中现存的难点问题进行了探讨, 最后介绍了CS理论的应用领域.

6. 学位论文 刘亚楠 多模态特征融合和变量选择的视频语义理解 2010

随着计算机技术及互联网应用的迅速发展,多媒体数据特别是视频数据呈海量趋势增长,如何有效存储、管理、传输、检索和使用这些多媒体数据 ,是摆在人们面前巨大的挑战和亟待解决的研究问题。视频数据蕴含了丰富的语义,同时视频又是时序数据,视频中存在图像、音频和文本三种媒质数 据,并呈现时序关联共生特性。本文针对视频数据中多种模态之间的时序关联特性,通过特征融合和变量选择来进行视频语义分析与理解。〈br〉

在视频语义信息理解和挖掘中,充分利用图像、音频和文本等多模态媒质之间的交互关联是非常重要的研究方向。考虑到视频的多模态和时序关联共生特性,提出了一种基于多模态子空间相关性传递的语义概念检测方法来挖掘视频的语义信息。该方法对所提取视频镜头的多模态底层特征,根据共生数据嵌入和相似度融合进行多模态子空间相关性传递而得到镜头之间的相似度关系,接着通过局部不变投影对原始数据进行降维以获得低维语义空间内的坐标,再利用标注信息训练分类模型,从而可对训练集外的测试数据进行语义概念检测,实现视频语义信息挖掘。实验表明这一方法有较高的准确率。《hp>

传统视频表达所采用的向量模型除了会产生高维向量而导致"维度灾难"问题外,同时在降维过程中,由于特征向量过高的维度及训练样本的数据不足,将不同类型特征进行拼合会引起"过压缩"问题,以致丢失大量信息。另外,不同类型特征通过简单向量拼接也在一定程度上减弱或忽略了视频中这些多种模态特征之间的时序关联共生性。为了解决这一问题,提出了一种基于高阶张量表示的视频语义分析与理解框架。在这个框架中,视频镜头首先被表示成由视频中所包含的文本、视觉和听觉等多模态数据构成的3阶张量;其次,基于此3阶张量表达及视频的时序关联共生特性设计了一种子空间嵌入降维方法,称为"张量镜头";由于半监督学习从已知样本出发能对特定的未知样本进行学习和识别,最后在这个框架中提出了基于"张量镜头"的直推式支持张量机算法以及两种基于《br》

主动学习的后精化处理策略,其不仅保持了张量镜头所在的流形空间的本征结构,而且能将训练集合外数据直接映射到流形子空间,同时充分利用未标记样本改善分类器的学习性能。实验结果表明本方法能有效地进行视频镜头的语义概念检测。 为了更加有效利用标记样本,基于压缩感知和稀疏表示理论,结合稀疏表达、非负矩阵分解和监督学习,提出了基于(非负)组稀疏表示的分类方法对图像和视频进行分类思路。其基本思想是将测试样本表示为训练样本的加权线性组合:即在非负、1 正则化因子约束下,对每个训练样本求取一个回归系数,同时每一类别也求取加权系数,使得在训练过程中能基于稀疏系数对类别中所有样本同时选择或放弃。另外,非"负"回归加权系数使得视频和图像理解过程更加具有可解释性(interpretable)。基于(非负)组稀疏表示的分类方法优势在于能有效利用类别信息对视频和图像进行变量选择,不仅提高了语义分类精度,而且使得这一过程更具可解释性。《br》

关键词: 多模态,时序关联共生,子空间相关性传递,张量镜头,高阶SVD,主动学习,压缩感知,组稀疏表示,非负garrote, 1 1范数最小化

本文链接: http://d.g. wanfangdata.com.cn/Periodical_dsjs200812005.aspx

授权使用:北京理工大学(北京理工大学),授权号:57f78d20-ffef-4658-a59d-9db40138e1f8

下载时间: 2010年7月15日