

# 基于二阶锥规划的任意传感器阵列 时域恒定束宽波束形成<sup>\*</sup>

鄢社锋 马远良

(西北工业大学声学工程研究所 西安 710072)

2003 年 12 月 30 日收到

2004 年 4 月 7 日定稿

**摘要** 提出了基于 FIR 滤波器的适用于任意几何形状和阵元方向性的传感器阵列的时域恒定束宽波束形成方法。首先将设计频带分成若干窄带, 采用优化方法, 通过对各窄带波束施加约束, 设计出具有设定主瓣形状要求的各窄带波束。然后针对每个传感器, 根据其各频率波束形成加权向量, 采用约束优化方法, 设计出具有要求幅度和相位响应的 FIR 滤波器。各滤波器输出相加即得到时域恒定束宽波束输出时间序列。波束图主瓣形状设计与期望频率响应 FIR 滤波器的设计问题都可以转化为二阶锥规划 (Second-Order Cone programming) 的形式, 然后利用已有的内点方法 (Interior-Point Methods) 求出其数值解。计算机仿真结果显示, 设计出的各子带波束主瓣宽度比较接近, FIR 滤波器设计精度高。湖上实验数据处理结果表明, 该方法可以适用于实际水声系统, 时域宽带波束能够满足恒定束宽要求。

PACS 数: 43.30, 43.60

## Broadband constant beamwidth beamforming for arbitrary sensor arrays in time domain via second-order cone programming

YAN Shefeng MA Yuanliang

(Institute of Acoustic Engineering, Northwestern Polytechnical University Xi'an 710072)

Received Dec. 30, 2003

Revised Apr. 7, 2004

**Abstract** A method of broadband constant beamwidth beamforming (BCBB) based on finite impulse response (FIR) filters is presented. Firstly, the working frequency band is decomposed into a number of narrow-band frequency bins, and the beamforming weights for each frequency bin are deduced by array pattern synthesis methods. Then, the BCBB is implemented by a set of FIR filters corresponding to the input channels, which provides the frequency response derived from BCBB weights for each sensor. Finally, the outputs of the digital filters are summed up to yield the time domain broadband beam output. BCBB weights can be designed via array pattern synthesis at each frequency bin in bands of interest by imposing mainlobe pattern constraints. The FIR filters are designed to provide required magnitude and phase response by a constrained optimization method. Both the design of beamformers and that of FIR filters can be converted to a convex optimization form as the so-called Second-Order Cone Programming (SOCP) and solved efficiently via the well-established interior point method. Results of computer simulation and lake-experiments for a twelve-element arc array confirmed the satisfactory performance of the approaches developed in this paper.

## 引言

在宽带阵列信号处理中, 往往要求信号通过基阵系统后其频谱特性不发生畸变。对于常规宽带波

束形成, 波束主瓣宽度随频率发生变化, 一般只有当目标在波束方向时能满足要求, 当目标在其波束半功率点内其它方向时信号波束输出频谱就会失真。而恒定束宽波束形成可以解决这个问题。

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金资助项目 (60072025, 10304015)

对于由各向同性阵元组成的均匀分布线列阵, Dolph 提出可以采用 Chebyshev 窗函数对线列阵进行加权, 可以获得给定的主瓣宽度<sup>[1]</sup>, 文献 2 将该方法运用于恒定束宽波束形成。但是, Chebyshev 窗函数法只适用于各向同性阵元组成的均匀线列阵, 对其它结构的基阵不适用。Ward 等利用波束图与频率和孔径之间的关系, 推导了阵元加权值与其位置和频率的关系, 提出了频率不变波束设计<sup>[3]</sup>及其实现方法<sup>[4]</sup>。文献 5 和文献 6 建立了基阵各设计频率与参考频率响应向量之间的关系, 并将其转化到参考频率上, 然后设计各频率波束使之逼近于参考波束。文献 7 同样利用波束形成中频率和孔径的关系, 采用空间重采样法使设计频率点的波束逼近参考频率波束。但是文献 3—文献 7 所给方法都要求各传感器的接收响应(灵敏度、阵元指向性等)在各频率保持不变, 才能建立基阵方向响应向量在设计频率点与参考频率之间的对应关系。对于实际系统, 例如水声系统, 当水听器安装到基阵架上后, 由于受结构遮挡影响和各预处理通道之间存在的非一致性等影响, 水听器也就不再是各向同性的, 而且在各频率也不相同。此时的宽带波束在各频率的主瓣宽度误差就会增大。文献 8 采用自适应的方法进行频率不变波束设计, 可以适用于任意结构和阵元指向性的基阵。但是文献 3—文献 8 全部都是设计各频率的全方位(包括主瓣和旁瓣区域)的波束响应逼近参考波束, 而我们真正感兴趣的只是波束主瓣区域, 这些方法相当于在旁瓣区域增加了多余的约束, 必然造成设计波束与参考波束主瓣区域拟合误差增大。到目前为止, 还没有出现仅针对波束主瓣响应逼近于期望波束主瓣的恒定束宽波束形成方法的报道。

对于运用 FIR 滤波器进行时域波束形成, 近年已经出现了部分报道<sup>[2,8-11]</sup>, 该方法的主要技术难点在于任意频率响应 FIR 滤波器的设计方法。这几篇文献均采用模型参考自适应的方法<sup>[12]</sup>来设计 FIR 滤波器, 由于自适应方法存在迭代收敛的问题, 迭代步长难以选择, 过大的步长导致不稳定, 而过小的步长使得收敛速度太慢。该类方法总存在收敛误差, 因此设计精度不高, 而且速度非常慢。到目前为止, 虽然已经出现了大量的 FIR 滤波器设计方法(见文献 13—文献 19 及其参考文献), 但是这些方法都比较复杂, 计算量比较大。

近来, 在优化算法领域, 一些新的内点方法(Interior-Point Methods)有了较大的发展<sup>[20,21]</sup>。作为一种内点方法, 二阶锥规划(Second-Order Cone programming)方法具有计算量小<sup>[20]</sup>, 计算结果精确

等优点, 并且已经运用于稳健波束形成<sup>[22]</sup>, 控制系统<sup>[23]</sup>, 图像处理<sup>[24]</sup>等方面。

本文将波束图设计和任意频率响应 FIR 滤波器设计问题表述成凸优化的形式, 然后将它们转化为二阶锥规划所要求的形式, 利用已有的内点方法 SeDuMi<sup>[21]</sup>来求取最优数值解, 最后用于实现时域恒定束宽波束形成。由于本文是数值方法, 它可以适用于任意几何形状和阵元不一致性的传感器阵列。而且本文方法仅要求设计波束在主瓣区域逼近于参考波束, 因此相比于已有方法可以提高设计精度。更重要的是, 内点方法 SeDuMi 具有高于自适应方法的设计精度和更快的计算速度。

## 1 基于 FIR 滤波器的恒定束宽波束形成原理

假设一个由  $N$  个传感器(可以不是各向同性)组成的任意几何形状的阵列, 信号处理频带为  $[F_L, F_U]$ 。频域宽带波束形成是先将各传感器输出通过短时傅里叶变换(STFT)分成各窄带, 然后将各频率的窄带数据进行相移、加权、求和。中心频率为  $f_k$  的窄带波束形成输出为:

$$b(f_k) = \mathbf{w}^H(f_k) \mathbf{x}(f_k), \quad f_k \in [F_L, F_U], \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (1)$$

其中,  $K$  为设计频带内离散化的频率个数,  $\mathbf{w}(f_k) = [w_1(f_k), w_2(f_k), \dots, w_N(f_k)]^T$  是中心频率为  $f_k$  的窄带信号的复加权向量,  $\mathbf{x}(f_k)$  是原宽带信号通过短时傅里叶变换得到的中心频率为  $f_k$  的窄带数据,  $b(f_k)$  是中心频率为  $f_k$  的窄带波束输出。 $(\cdot)^H$  表示共轭转置,  $(\cdot)^T$  表示转置。

如果能够设计出一组具有冲击响应为:

$$\mathbf{h}_n = [h_{n0}, h_{n1}, \dots, h_{n(L-1)}]^T, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

的 FIR 滤波器, 它在各频率点  $f_k \in [F_L, F_U]$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) 的频率响应  $H_n(f_k)$  与某传感器在该频率点波束形成复数权  $w_n(f_k)$  ( $n = 1, 2, \dots, N, k = 1, 2, \dots, K$ ) 相等, 则可以运用一组 FIR 滤波器来实现宽带时域波束形成。式(2)中  $L$  是滤波器冲激响应长度。

基于 FIR 滤波器的恒定束宽时域宽带波束形成的设计步骤为, 首先将工作频段分为若干窄带频率区间, 对每个窄带频率区间设计满足一定主瓣宽度的波束复加权向量, 以保证设计频段内波束主瓣宽度(大致)相等。然后根据每个传感器在该频段内各频率点的波束形成复加权, 设计一组具有该频率响应的 FIR

滤波器, 每个传感器输出通过一个对应的 FIR 滤波器, 各滤波器输出相加即可得到宽带波束输出。

在滤波器的设计过程中还存在一些技巧。由于每个阵元的复加权值可以分解为它先对信号进行预延迟, 使到达所有阵元的相位相同 (它相当于波束方向信号到达各阵元相对于参考点时延的负数), 然后再对各通道进行复加权求和。对于采样周期整数倍延迟部分, 我们可以直接采用数字延迟线来实现, 这样滤波器只需要实现小数延迟部分和加权部分, 缓解了滤波器设计的压力。另一方面, 考虑到一个长度为  $L$  的 FIR 滤波器固有群延迟为  $(L-1)T_s/2$  ( $T_s$  为采样周期), 因此将滤波器设计指标附加该延迟, 可以提高滤波器设计精度。综上所述, 以第  $n$  个传感器为例, 将波束形成权向量进行如下分解:

$$w_n(f_k) = \exp \left[ -j2\pi f_k \text{int} \left( \tau_n - \frac{L-1}{2} \right) / f_s \right] w_n(f_k) \exp \left[ j2\pi f_k \text{int} \left( \tau_n - \frac{L-1}{2} \right) / f_s \right] \quad (3)$$

$\text{int}(\cdot)$  表示按四舍五入取整,  $\tau_n \cdot T_s$  表示将各阵元数据转换到同相位需要的时延,  $f_s$  为采样频率。上式中第一部分相当于将数据进行  $\text{int}[\tau_n - (L-1)/2]$  倍采样周期延迟 (当它为负数时, 可以将各通道统一增加一个正整数), 只需要将第二部分通过设计 FIR 滤波器来实现即可, 即期望 FIR 滤波器频率响应为:

$$H_{d,n}(f_k) = w_n(f_k) \exp \left[ j2\pi f_k \text{int} \left( \tau_n - \frac{L-1}{2} \right) / f_s \right], \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

基于 FIR 滤波器的宽带时域恒定束宽波束形成如图 1 所示。可见其核心部分是设计子带恒定束宽加权向量和期望频率响应 FIR 滤波器。

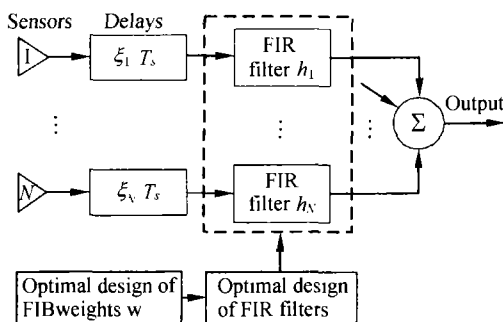


图 1 宽带时域恒定束宽波束形成原理

## 2 恒定束宽波束形成

### 2.1 波束图设计

基阵波束响应为:

$$p(\theta, f_k) = \mathbf{d}^H(\theta, f_k) \mathbf{w}(f_k), \quad (5)$$

其中  $\mathbf{d}(\theta, f_k)$  是信号方向为  $\theta$ , 频率为  $f_k$  时的方向响应向量。

恒定束宽波束形成可以先选择参考波束, 然后设计各频率的波束, 使其主瓣逼近于参考波束。将方位 (不一定均匀) 离散化, 令  $\theta_s \in \Theta_{SL} (s = 1, \dots, S)$  和  $\theta_m \in \Theta_{ML} (m = 1, \dots, M)$  是离散化的方位点。其中  $\Theta_{SL}$  表示旁瓣区域,  $\Theta_{ML}$  表示主瓣区域。最佳恒定束宽波束形成可以描述为主瓣内设计波束响应幅度与期望波束幅度误差最小, 即

$$\min_w \left( \sum_{m=1}^M \lambda_m |p_d(\theta_m) - p(\theta_m)|^2 \right), \quad \theta_m \in \Theta_{ML}, \quad m = 1, \dots, M \quad (6)$$

其中  $p_d(\theta_m)$  和  $p(\theta_m)$  分别为角度  $\theta_m$  的期望波束响应和设计波束响应 (省略频率变量  $f_R$ )。  $\lambda_m (m = 1, \dots, M)$  为主瓣内不同方位误差加权系数, 加权系数越大, 设计波束与期望波束拟合越接近。

由于对该目标函数求最优解是非凸优化, 很难以求出全局最优解。但是将其进行适当变换, 可以将其转化求次优解的凸优化问题, 它仍能获得较好的优化结果。下面给出了三种恒定束宽波束形成的次最优方法。

(1) 在保证波束旁瓣低于期望值的条件下, 设计以最小加权均方误差逼近于期望波束响应的波束。

$$\begin{aligned} \min_w & \left( \sum_{m=1}^M \lambda_m |p_d(\theta_m) - p(\theta_m)|^2 \right), \\ & \theta_m \in \Theta_{ML}, \quad m = 1, \dots, M, \\ \text{subject to } & |p(\theta_s)| \leq \delta_s, \quad \theta_s \in \Theta_{SL}, \quad s = 1, \dots, S \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $\delta_s (s = 1, \dots, S)$  控制了设计波束的旁瓣。

(2) 在保证主瓣设计波束与期望波束加权误差小于某期望值的条件下, 使设计波束旁瓣级最低。

$$\begin{aligned} \min_w & \max_{s=1, \dots, S} |p(\theta_s)| \\ \text{subject to } & \sum_{m=1}^M \lambda_m |p_d(\theta_m) - p(\theta_m)|^2 \leq \varepsilon, \\ & \theta_m \in \Theta_{ML}, \quad m = 1, \dots, M \end{aligned} \quad (8)$$

其中  $\varepsilon$  确定了主瓣设计波束与期望波束的误差平方和上限。

(3) 在保证波束对期望信号方向  $\theta_0$  的响应为 1 时, 让主瓣区间若干点设计波束响应幅度小于期望响应幅度, 使波束旁瓣最低 [25]。

$$\begin{aligned} \min_w & \max_{s=1, \dots, S} |p(\theta_s)| \\ \text{subject to } & |p(\theta_m)| < |p_d(\theta_m)|, \quad m = 1, \dots, M \\ & p(\theta_0) = 1. \end{aligned} \quad (9)$$

对于以上三种方法, 方法 1 和 2 是最小均方意义上的波束响应 (包括幅度响应和相位响应) 逼近法, 虽然不是波束响应幅度最佳逼近, 由于只在主瓣区域求最优解, 显然精度要高于文献 3—文献 8 中的方法。方法 3 是波束主瓣幅度的单边 (不等式) 逼近法, 当主瓣内约束不能恰好以等式满足时, 设计的波束图主瓣形状就会出现误差。但由于使旁瓣最低化有让主瓣变宽的趋势, 它能够使主瓣尽量接近主瓣约束点。如果主瓣约束选择恰当, 就能够降低误差。对于不同的阵形和不同的主瓣期望值, 三种方法各有优缺点。在实际使用中, 对于不同频率窄带波束形成, 可以分别采用这三种方法, 然后从中选择最优方法。另外, 可以通过对波束形成加权向量范数进行约束, 以提高波束形成的稳健性<sup>[26,27]</sup>, 这里暂不考虑。

## 2.2 二阶锥表述

SeDuMi<sup>[21]</sup> 是一个较好的内点方法, 它是 Sturm 开发的用于处理对称锥优化问题的 MATLAB 工具箱, 可以用来求解二阶锥和线性约束下的凸优化问题, 使用十分方便, 具有计算量小和计算精确等优点。将其用于处理波束优化问题, 可以达到寻优方法规范、精确性高的目的。对于优化问题无解的情况, 它也能自动判别, 以便修正参数继续计算。在 SeDuMi 中, 标准的凸锥优化问题形式定义为:

$$\max \quad \mathbf{b}^T \mathbf{y} \quad \text{subject to} \quad \mathbf{c} - \mathbf{A}^T \mathbf{y} \in \mathbf{K} \quad (10)$$

这里  $\mathbf{y}$  中包含有期望变量,  $\mathbf{A}$  是任意矩阵,  $\mathbf{b}$  和  $\mathbf{c}$  是任意向量,  $\mathbf{K}$  是一个对称锥集合。  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$  和  $\mathbf{c}$  的维数必须匹配, 且都可以为复数。二阶锥、零锥和非负集都是对称锥的子集,  $q$  维二阶锥定义为:

$$Qcone^q \triangleq \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in C^{q-1}, x_1 \geq \|x_2\| \right\} \quad (11)$$

等式约束可以表示为零锥, 零锥定义为:

$$\{0\} \triangleq \{x \in C \mid |x| = 0\}, \quad (12)$$

其中  $C$  为复数集。将非负集合表示为  $\mathbb{R}_+$ , 如果约束问题可以写成

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{c} - \mathbf{A}^T \mathbf{y} \in \{0\}^{q_1} \times \mathbb{R}_+^{q_2} \times Qcone^{q_3} \end{aligned} \quad (13)$$

的形式, 则可以很容易通过 SeDuMi 求出其数值解。式 (13) 中的约束表示有  $q_1$  个等式约束,  $q_2$  个线性约束和另外  $q_3$  个元素位于二阶锥。

以第二种恒定束宽波束形成方法为例, 将其转化为二阶锥规划的形式求解, 其它两种方法可以采用类似的方法转化求解。

引入一新非负变量  $\delta$  和一组新非负变量  $\varepsilon_m$ ,  $m = 1, \dots, M$ , 式 (8) 可以表示为:

$$\begin{aligned} \min_w \quad & \delta \\ \text{subject to} \quad & \sum_{m=1}^M \lambda_m \varepsilon_m \leq \varepsilon, \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} |p_d(\theta_m) - \mathbf{d}^H(\theta_m) \mathbf{w}|^2 &\leq \varepsilon_m, \\ \theta_m &\in \Theta_{ML}, m = 1, \dots, M \end{aligned} \quad (14b)$$

$$|\mathbf{d}^H(\theta_s) \mathbf{w}| \leq \delta, \theta_s \in \Theta_{SL}, s = 1, \dots, S \quad (14c)$$

定义  $\mathbf{y} = [\delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_M, \mathbf{w}^T]^T$  和  $\mathbf{b} = [-1, \mathbf{0}_{1 \times M}, \mathbf{0}_{1 \times N}]^T$ , 使  $-\delta = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$ , 这里  $\mathbf{0}_{1 \times M}$  表示  $1 \times M$  维的零向量。线性不等式约束 (14a) 可以表示为:

$$\varepsilon - \sum_{m=1}^M \lambda_m \varepsilon_m = \varepsilon - [\mathbf{0} \quad \boldsymbol{\lambda} \quad \mathbf{0}_{1 \times N}] \mathbf{y} \triangleq \mathbf{c}_1 - \mathbf{A}_1^T \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+, \quad (15)$$

其中  $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_M]$  表示加权向量。对于二次不等式约束 (14b), 有

$$\begin{aligned} |p_d(\theta_m) - \mathbf{d}^H(\theta_m) \mathbf{w}|^2 &\leq \varepsilon_m \\ \Leftrightarrow |2p_d(\theta_m) - 2\mathbf{d}^H(\theta_m) \mathbf{w}|^2 &\leq 4\varepsilon_m \\ \Leftrightarrow |2p_d(\theta_m) - 2\mathbf{d}^H(\theta_m) \mathbf{w}|^2 + 1 + \varepsilon_m^2 - 2\varepsilon_m &\leq 1 + \varepsilon_m^2 + 2\varepsilon_m \\ \Leftrightarrow \left\| \begin{bmatrix} 2p_d(\theta_m) - 2\mathbf{d}^H(\theta_m) \mathbf{w} \\ \varepsilon_m - 1 \end{bmatrix} \right\|^2 &\leq (\varepsilon_m + 1)^2 \\ \Leftrightarrow \left\| \begin{bmatrix} 2p_d(\theta_m) - 2\mathbf{d}^H(\theta_m) \mathbf{w} \\ \varepsilon_m - 1 \end{bmatrix} \right\| &\leq \varepsilon_m + 1 \end{aligned} \quad (16)$$

因此约束 (14b) 可以表示为二阶锥

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varepsilon_m + 1 \\ 2p_d(\theta_m) - 2\mathbf{d}^H(\theta_m) \mathbf{w} \\ \varepsilon_m - 1 \end{bmatrix} &= \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 2p_d(\theta_m) \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{g}^T(m) & \mathbf{0}_{1 \times N} \\ 0 & \mathbf{0}_{1 \times M} & 2\mathbf{d}^H(\theta_m) \\ 0 & -\mathbf{g}^T(m) & \mathbf{0}_{1 \times N} \end{bmatrix} \mathbf{y} &\triangleq \\ \mathbf{c}_{1+m} - \mathbf{A}_{1+m}^T \mathbf{y} \in Qcone_m^3, \quad m = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (17)$$

其中  $\mathbf{g}(m) = [g_1, g_2, \dots, g_i, \dots, g_M]^T$ ,  $g_i = \begin{cases} 0, & i \neq m \\ 1, & i = m \end{cases}$ 。

不等式约束 (14c) 可以表示为:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta \\ \mathbf{d}^H(\theta_s) \mathbf{w} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{0}_{1 \times M} & \mathbf{0}_{1 \times N} \\ 0 & \mathbf{0}_{1 \times M} & -\mathbf{d}^H(\theta_s) \end{bmatrix} \mathbf{y} \triangleq \\ \mathbf{c}_{1+M+s} - \mathbf{A}_{1+M+s}^T \mathbf{y} \in Qcone_{M+s}^2, \quad s = 1, 2, \dots, S \end{aligned} \quad (18)$$

令  $\mathbf{c} \triangleq [\mathbf{c}_1^T, \mathbf{c}_2^T, \dots, \mathbf{c}_{1+M+S}^T]^T$  和  $\mathbf{A}^T \triangleq [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_{1+M+S}]^T$ , 其中  $\mathbf{c}_i$  和  $\mathbf{A}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 1+M+S$ ) 由上列各式给出。并且在这里  $\mathbf{w}$  定义为复数, 约束优化问题 (8) 成为式 (13) 所表示的二阶锥规划形式:

$$\begin{aligned} \max_y \quad & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \quad \text{subject to} \\ \mathbf{c} - \mathbf{A}^T \mathbf{y} \in & \mathbb{R}_+ \times Q\text{cone}_1^3 \times \cdots \times Q\text{cone}_M^3 \times \\ & Q\text{cone}_{M+1}^2 \times \cdots \times Q\text{cone}_{M+S}^2. \end{aligned} \quad (19)$$

利用 SeDuMi 求解得到向量  $\mathbf{y}$  的最优解之后, 取出其第  $M+2 \sim M+1+N$  个分量即为所求波束权向量。

### 3 任意频率响应 FIR 滤波器设计

冲激响应为  $\mathbf{h} = [h_0, h_1, \dots, h_{L-1}]^T$  的 FIR 滤波器的频率响应为:

$$H(f) = \sum_{l=0}^{L-1} h_l \exp(-jl2\pi f/f_s) = \mathbf{e}^T(f) \mathbf{h}, \quad (20)$$

其中  $\mathbf{e}(f) = [1, e^{-j2\pi f/f_s}, \dots, e^{-j(L-1)2\pi f/f_s}]^T$ 。设计滤波器与期望频率响应的加权平方误差表示为:

$$\sum_{k=1}^K \left( \lambda_k |H_d(f_k) - H(f_k)|^2 \right), \quad (21)$$

其中  $\lambda_k$  是加权系数 (代价因子)。由于我们只对设计频带  $[F_L, F_U]$  内的滤波器响应感兴趣, 希望其它频带滤波器幅度响应尽量小。因此, 该滤波器的设计可以有几种优化准则, 例如

(1) 让非设计频段 (阻带) 滤波器幅度响应小于某上界约束值, 而使设计频段内设计滤波器频率响应与期望频率响应加权平方和误差最小。该滤波器设计问题表示为:

$$\begin{aligned} \min_h \quad & \left( \sum_{k=1}^K \lambda_k |H_d(f_k) - \mathbf{e}^T(f_k) \mathbf{h}|^2 \right), \\ & f_k \in \mathbf{F}_K, k = 1, 2, \dots, K \\ \text{subject to} \quad & |\mathbf{e}^T(f_p) \mathbf{h}| \leq \delta_p, \\ & f_p \in \mathbf{F}_P, p = 1, 2, \dots, P \end{aligned} \quad (22)$$

其中  $\delta_p (p = 1, 2, \dots, P)$  是阻带频率响应幅度上界,  $f_k (k = 1, 2, \dots, K)$  表示设计频带 (通带) 频率集  $\mathbf{F}_K$  中的离散频率, 而  $f_p (p = 1, 2, \dots, P)$  为阻带频率集  $\mathbf{F}_P$  中的离散频率。并且两个频率集中的离散频率不一定必须均匀离散化。

(2) 在保证设计频段内设计滤波器频率响应与期望频率响应加权平方和误差小于某一给定值的约束下, 使非设计频段 (阻带) 内滤波器的幅度响应尽量小。该滤波器的优化设计准则表示为:

$$\begin{aligned} \min_h \quad & \max |\mathbf{e}^T(f_p) \mathbf{h}|, \quad f_p \in \mathbf{F}_P, p = 1, 2, \dots, P \\ \text{subject to} \quad & \left( \sum_{k=1}^K \lambda_k |H_d(f_k) - \mathbf{e}^T(f_k) \mathbf{h}|^2 \right) \leq \xi, \\ & f_k \in \mathbf{F}_K, k = 1, 2, \dots, K \end{aligned} \quad (23)$$

其中  $\xi$  是设计滤波器与期望滤波器通带内误差加权平方和上界。

观察式 (22) 与式 (7) 以及式 (23) 与式 (8), 它们的表达形式非常相似, 因此可以利用前面已经介绍的二阶锥规划方法求出最优解, 只不过要定义滤波器系数为实数。本文不再具体推导。

### 4 设计实例

#### 4.1 恒定束宽波束形成

我们给出的恒定束宽波束形成可以适用于任意结构的基阵, 下面以一圆弧阵为例给出计算机仿真设计结果。圆弧阵的阵形结构如图 2 所示。12 个水听器在一个半径为 1.5 m 的半圆弧上均匀分布, 各水听器之间夹角为  $15^\circ$ 。在本节中假设水听器无指向性, 对于水听器非各向同性的情况 (例如在真实水声条件下) 将在下一节中说明。定义圆心为极坐标原点,  $x$  轴正方向为  $0^\circ$  方向, 沿逆时针方向依次为  $0^\circ \sim 180^\circ$ , 从  $0^\circ$  沿逆时针方向的各阵元依次为 1#, 2#,  $\dots$ , 12# 阵元。

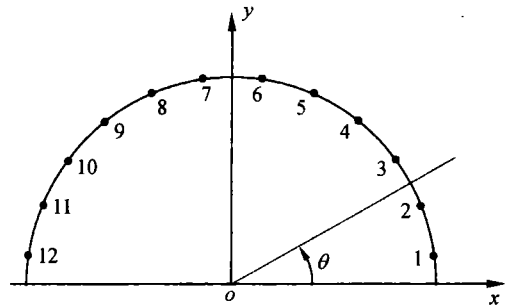


图 2 圆弧阵结构

假设该圆弧阵接收频率范围为  $[F_L, F_U] = [928 \text{ Hz}, 1888 \text{ Hz}]$ , 超过一个倍频程。以 64 Hz 为子带带宽, 因此共分为 15 个子带, 各子带中心频率分别为 960 Hz, 1024 Hz,  $\dots$ , 1856 Hz。采样频率为  $f_s = 8192 \text{ Hz}$ 。若采用常规的延迟求和波束形成, 得到图 3 所示的各子带上的  $90^\circ$  方向波束。各子带波束宽度各不相同, 且所有波束旁瓣都较高, 最高旁瓣约为  $-7.5 \text{ dB}$ 。

如果将本文的第 3 种恒定束宽波束形成方法在主瓣不附加任何不等式约束, 即仅保证波束方向响应为 1, 而使旁瓣最低化, 即可得到一种低旁瓣波束形成方法。可以用该方法来设计参考波束。以 1024 Hz 低旁瓣波束为参考波束, 取出其中的  $72.5^\circ, 80^\circ, 90^\circ, 100^\circ$  和  $107.5^\circ$  等 5 个方位的波束响应作为期望波束主瓣拟合点如图 4 中 “\*” 所示 (如果希望各波束与参考波束拟合得更精确, 可以增加拟合点个数)。分

别采用本文提出的三种恒定束宽波束形成方法设计 1856 Hz 波束, 使该波束具有与期望波束近似的主瓣形状。

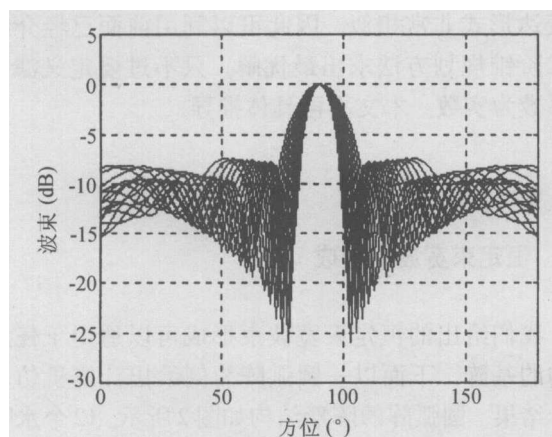


图 3 各子带常规波束图

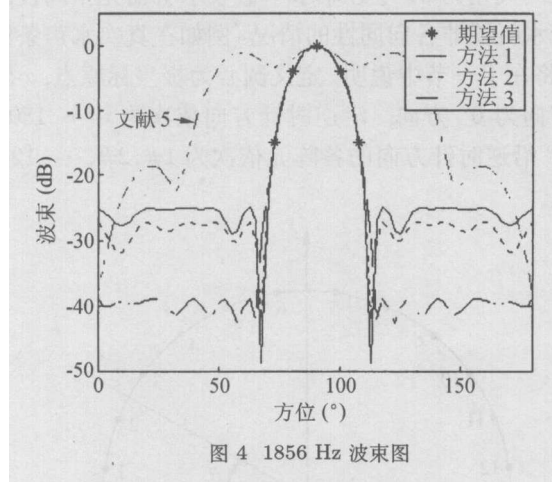


图 4 1856 Hz 波束图

首先将  $0^\circ \sim 180^\circ$  方位以  $2.5^\circ$  为间隔进行离散化, 假设旁瓣区域为  $\Theta_{SL} = [0^\circ, 70^\circ] \cup [110^\circ, 180^\circ]$ 。对于第 1 种波束形成方法, 将上述 5 方位 1024 Hz 复波束响应作为主瓣期望波束响应, 在保证旁瓣低于 25 Hz 的约束下设计 1856 Hz 波束, 得到的波束在这 5 个期望点处的均方根误差为 0.0012。对于第 2 种波束形成方法, 在保证主瓣内该 5 个期望点处的均方根误差为 0.0045 的约束下, 求 1856 Hz 最低旁瓣波束, 得到的旁瓣为 -27 dB。对于第 3 种方法, 将除  $90^\circ$  方位之外 (因为该方法已经有  $90^\circ$  方位波束响应为 1 的等式约束) 的 4 个波束响应幅度作为主瓣不等式约束上界设计 1856 Hz 波束, 该方法得到的旁瓣级为 -38.9 dB。这三种方法得到的 1856 Hz 波束如图 4 所示。从图中可以看出, 设计的三个波束都以很高的精度逼近期望波束。在所给参数情况下, 第 1 种方法得到的束宽与期望值之间精度最高, 第 3 种方法精度最低, 而第 3 种方法旁瓣最低。作为比较, 图中还给出了文献 3 中的方法得到的 1856 Hz 波束图。

由于文献 3 中方法要求运用高阶 Bessel 函数来近似表示各频率的信号方向向量, 但是为了保证矩阵求逆处理不出现奇异, Bessel 函数最高阶数又必须小于阵元数的一半, 因此在阵元数较少时误差非常大。

作为一个实例, 图 5 中给出了采用本文第 3 种方法设计的 928~1888 Hz 宽带波束图。图中可以看出, 该宽带内各子带中心频率点处的波束主瓣形状非常相似。

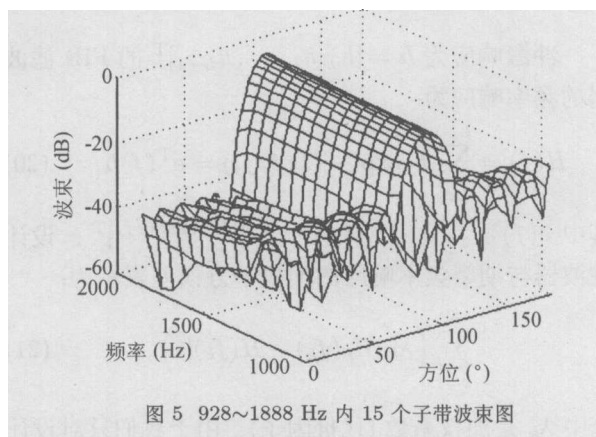


图 5 928~1888 Hz 内 15 个子带波束图

#### 4.2 期望频率响应 FIR 滤波器设计

获得各水听器波束形成权向量后, 就可以根据该设计指标设计对应的 FIR 滤波器。图 6 中圆点表示对应于 2 号阵元的期望滤波器幅度和相位响应。

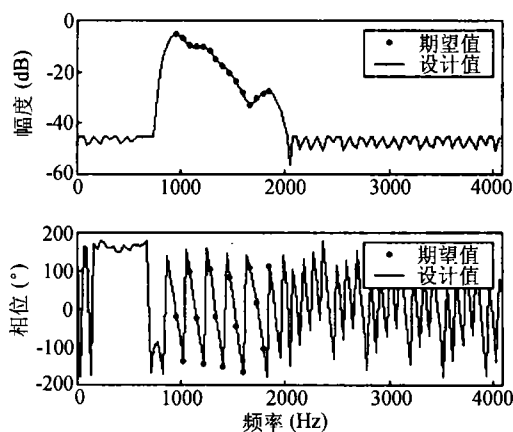


图 6 2 号阵元对应滤波器频率响应

为了保证阻带幅度的一致性, 将阻带按 32 Hz 进行离散化, 得到离散频率集  $F_p = [0 \text{ Hz}, 736 \text{ Hz}] \cup [2016 \text{ Hz}, 4096 \text{ Hz}]$ , 共有  $P = 90$  个频率点。而通带内保持 64 Hz 离散化为  $K = 15$  个频率点。假设滤波器长度  $L = 80$ , 误差加权系数  $\lambda_k = 1 (k = 1, 2, \dots, 15)$ , 设定误差平方和上限为  $\xi = 0.001$ , 即 15 个频率点的均方根误差为 0.0082。采用第 3 节中第 2 种滤波器设计方法, 设计出 2 号阵元对应的 FIR 滤波器频率响应如图 6 实线所示。该滤波器幅度响应在阻带部分约为 -45 dB。

## 5 实验分析

2001 年 9 月在新安江水库进行了实验, 实验的主要目的是测量安装在基阵架上各阵元在水下的阵列流形 (Array Manifold) 向量, 即基阵对各个不同方向入射的信号响应向量集合。

实验所使用基阵各参数与第 4 节仿真中相同。首先从  $0^\circ$  方向远场发射信号频率为 960 Hz 的 CW 脉冲信号, 通过各阵元接收数据计算出基阵对该方向的响应向量  $d(0, 960)$ , 具体计算方法参见文献 28 或文献 6 附录。然后将基阵顺时针转动  $2.5^\circ$ , 继续接收远场 CW 脉冲信号, 计算出  $d(2.5, 960)$ 。按此方法依次计算出  $d(5, 960)$ ,  $d(7.5, 960)$ ,  $\dots$ ,  $d(180, 960)$  等 73 个方向的基阵响应向量, 继而得到基阵在这些离散方位频率为 960 Hz 的阵列流形。图 7 中给出了 2# 水听器和 6# 水听器对各方向信号的接收响应幅度, 该幅度以所有阵元接收到的最大幅度进行归一化。从图中可以看出, 阵元受到基阵架结构的影响还是比较严重的, 阵元是各向不同性的。按照相同的方法, 依次可得到 1024 Hz, 1088 Hz,  $\dots$ , 1856 Hz 的阵列流形。

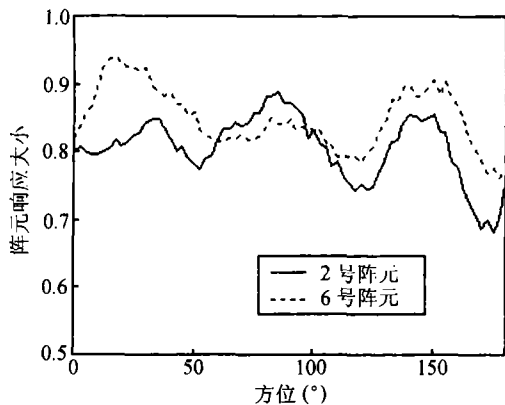


图 7 阵元 960 Hz 接收响应大小

得到实测基阵各频率的阵列流形后, 采用本文第 3 种恒定束宽波束形成方法, 并保持第 4 节计算机仿真时的参数不变, 直接针对实测阵列流形进行恒定波束图设计, 得到各频率波束图如图 8 所示。图中各频率波束主瓣宽度基本相当, 所有这些频率的  $-3$  dB 束宽最大宽度与最小宽度之差大约为  $1.25^\circ$ 。

根据设计波束的加权值, 设定误差平方和上限为  $\xi = 0.0032$  (相比于仿真, 精度要求略有降低), 设计 FIR 滤波器。图 9 中给出了基于该 FIR 滤波器的时域宽带波束图的实测结果。计算出时域宽带波束在各子带中心频率处的  $-3$  dB 束宽最大宽度与最小宽度之差只有  $1.6^\circ$ , 完全可以满足恒定束宽要求。

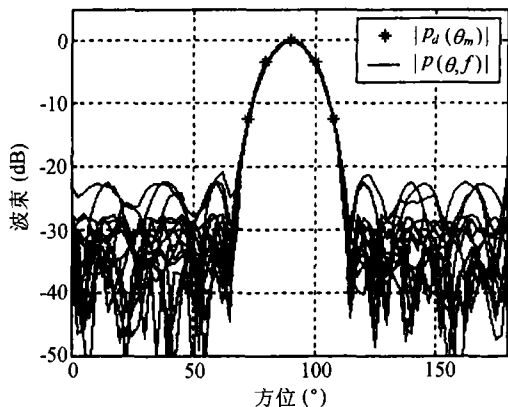


图 8 恒定束宽波束图设计的实测结果

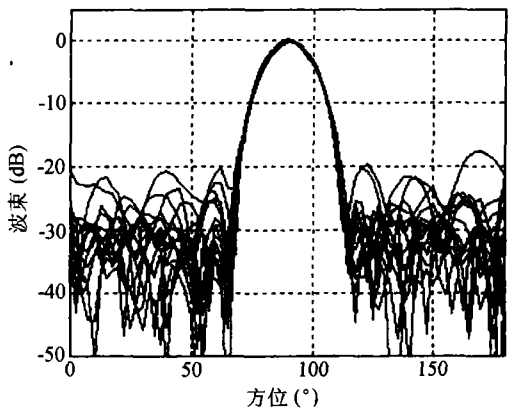


图 9 基于 FIR 滤波器的时域宽带波束图实测结果

## 6 结论

针对现有的恒定束宽波束形成运用于真实水声环境时波束宽度误差较大这一缺点, 提出三种运用二阶锥规划方法进行波束图优化设计, 使设计频段内各子带波束主瓣趋近于期望约束值, 从而实现恒定束宽。由于该方法直接利用实测阵列流形来进行波束图优化设计, 因此设计的波束图与期望值误差较小。针对现有任意频率响应 FIR 滤波器设计误差较大或计算复杂等缺点, 提出了两种采用二阶锥规划方法设计任意频率响应 FIR 滤波器。将波束图设计和 FIR 滤波器设计方法相结合, 给出了任意传感器阵列时域恒定束宽波束形成。通过计算机仿真, 验证了本文所提出的方法的正确性。将基于二阶锥规划的任意传感器阵列时域恒定束宽波束形成方法运用于离线处理湖试数据, 获得了理想的结果, 该方法具有较好的实际应用前景。

## 7 致谢

感谢中船工业集团海鹰水声中心和西北工业大学声学工程研究所参加湖试的科研人员, 他们对实验数据获取作了大量的工作。

## 参 考 文 献

- 1 Dolph C L. A current distribution for broadside arrays which optimizes the relationship between beamwidth and sidelobe level. *Proc. IRE*, 1946; **34**(6): 335—348
- 2 ZHANG Baosong, MA Yuanliang. Beamforming for broad band beamwidth based on FIR and DSP. *Chinese Journal of Acoustics*, 2000; **19**(3): 207—214
- 3 Ward D B, Kennedy R A, Williamson R C. Theory and design of broadband sensor arrays with frequency invariant far-field beam patterns. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1995; **97**(2): 1023—1034
- 4 Ward D B, Kennedy R A, Williamson R C. FIR filter design for frequency invariant beamformers. *IEEE Signal Processing Lett.*, 1996; **3**(3): 69—71
- 5 杨益新, 孙 超. 任意结构阵列宽带恒定束宽波束形成新方法. *声学学报*, 2001; **26**(1): 55—58
- 6 杨益新, 孙 超, 鄢社锋等. 圆阵宽带恒定束宽波束形成的实验研究. *声学学报*, 2003; **28**(5): 504—508
- 7 朱维杰, 孙进才. 基于阵列接收数据重采样的频率不变波束形成器. *自然科学进展*, 2002; **12**(6): 669—672
- 8 朱维杰, 孙进才, 曾向阳. 宽带波束形成器的自适应综合. *声学学报*, 2003; **28**(3): 283—287
- 9 ZHANG Yanwu, MA Yuanliang. An efficient architecture for real time narrowband beamforming. *IEEE J. Oceanic Eng.*, 1994; **19**(4): 635—638
- 10 鄢社锋, 马远良, 倪晋平等. 特定频率响应 FIR 滤波器的设计及其在水声中的应用. *应用声学*, 2003; **22**(2): 30—34
- 11 杨益新, 孙 超, 马远良. 宽带低旁瓣时域波束形成. *声学学报*, 2003; **28**(4): 331—338
- 12 Widrow B, Stearns S D. Adaptive signal processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1985
- 13 ZHU Wei-Ping, Ahmad M O, Swamy M N S. A new approach for weighted least-square design of FIR filters. In: *Proc. ISCAS '99, Orlando, FL, USA*, 1999(3): 267—270
- 14 Burrus C S, Barreto J A, Selesnick I W. Iterative reweighted least-squares design of FIR filters. *IEEE Trans. Signal Processing*. 1994; **42**(11): 2926—2936
- 15 Lang M, Bamberger J. Nonlinear phase FIR filter design according to the  $L_2$  norm with constraints for the complex error. *Signal Processing*. 1994; **36**(1): 31—40
- 16 Hai Huyen Dam, Kok Lay Teo, Nordebo S, Cantoni A. The dual parameterization approach to optimal least square FIR filter design subject to maximum error constraints. *IEEE Trans. Signal Processing*. 2000; **48**(8): 2314—2320
- 17 Adams J W. FIR digital filters with least-squares stopbands subject to peak-gain constraints. *IEEE Trans. Circuits and Systems*. 1991; **39**(4): 376—388
- 18 Lu W S. Design of nonlinear-phase FIR digital filters: a semidefinite programming approach. In: *Proc. ISCAS'99, Orlando, FL, USA*, 1999(3): 263—266
- 19 Er M H, Siew C K. Design of FIR filters using quadratic programming approach. *IEEE Trans. Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*. 1995; **42**(3): 217—220
- 20 Lobo M, Vandenberghe L, Boyd S et al. Applications of second-order cone programming. *Linear Algebra Appl.*, 1998: 193—228
- 21 Sturm J F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optim. Meth. Softw.*, 1999; **11-12** 期合刊: 625—653
- 22 Vorobyov S A, Gershman A B, Luo Z Q. Robust adaptive beamforming using worst-case performance optimization: a solution to the signal mismatch problem. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2003; **51**(2): 313—324
- 23 Faybusovich L, Mouktonglang T. Multi-target linear-quadratic control problem and second-order cone programming. In: *Proc. American Control Conference*, 2003; **6**: 4549—4554
- 24 YAO Jianchao. Visual motion estimation via second order cone programming. *Proc. Image Processing*, 2000, Vancouver, BC, Canada, 2000(3): 604—607
- 25 Lebrecht H, Boyd S. Antenna array pattern synthesis via convex optimization. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1997; **45**(3): 526—532
- 26 鄢社锋, 马远良. 基于二阶锥规划的稳健高增益波束形成. 2004 年全国水声学学术会议论文集, 安徽黄山, 2004, 声学技术, 2004; **23**(增): 133—135
- 27 鄢社锋, 马远良, 孙 超. 任意几何形状和阵元指向性的传感器阵列优化波束形成方法. *声学学报*, 2005; **30**(3): 264—270
- 28 鄢社锋. 水听器阵列超增益特性及信号处理研究. 西安: 西北工业大学硕士学位论文, 2001