

# 压缩感知研究

戴琼海 付长军 季向阳

(清华大学自动化系 北京 100084)

**摘 要** 经典的香农采样定理认为,为了不失真地恢复模拟信号,采样频率应该不小于奈奎斯特频率(即模拟信号频谱中的最高频率)的两倍.但是其中除了利用到信号是有限带宽的假设外,没利用任何的其它先验信息.采集到的数据存在很大程度的冗余. Donoho 等人提出的压缩感知方法(Compressed Sensing 或 Compressive Sampling, CS)充分运用了大部分信号在预知的一组基上可以稀疏表示这一先验信息,利用随机投影实现了在远低于奈奎斯特频率的采样频率下对压缩数据的直接采集.该方法不仅为降低采样频率提供了一种新思路,也为其它科学领域的研究提供了新的契机.该文综述性地阐述了压缩感知方法的基本原理,给出了其中的一些约束问题和估计方法,并介绍压缩感知理论的相关问题——矩阵填充,最后讨论了其未来可能的应用前景.

**关键词** 压缩感知;贪婪算法;线性规划;随机投影

中图法分类号 TP391 DOI号: 10.3724/SP.J.1016.2011.00425

## Research on Compressed Sensing

DAI Qiong-Hai FU Chang-Jun JI Xiang-Yang

(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084)

**Abstract** According to the conventional Shannon's sampling theorem, in order to represent the analog signal, the sampling rate should not be less than twice the Nyquist sampling rate. However, this theorem only makes use of the bandwidth information. As a result, the collected data contain many redundant information. The recently proposed sampling method, compressed sensing or compressive sampling (CS), can collect compressed data at the sampling rate much lower than that needed in Shannon's sampling theorem by exploring the compressibility of the signal. This paper presents a review on the basic theory of CS. Some of the restrictions and recovery methods in CS are also discussed. Finally, some potential applications based on CS are presented.

**Keywords** compressed sensing; greedy algorithms; linear programming; random projection

## 1 引 言

当前大部分数据采集系统都是基于传统的香农采样定理来设计,按照这种方式采集的数据能够充分表示原始信号,但是它们存在较大的冗余.因此,这些方法往往导致采集数据的泛滥和传感器的浪

费.研究如何根据信号的一些特征来实现低于奈奎斯特采样频率的采集,以减少所需采集的数据量具有重要的意义.在过去的30年里,从噪声中提取正弦信号的方法吸引了许多科学家的关注,但是利用信号的可压缩性进行数据采集却是一个新兴的课题.其起源于对具有有限速率信号(finite-rate-of-innovation signal,即单位时间内具有有限自由度的

收稿日期:2009-02-10;最终修改稿收到日期:2010-12-13.本课题得到国家“九七三”重点基础研究发展规划项目基金(2010CB731800)和国家自然科学基金重点基金(60933006)与面上基金(60972013)资助.戴琼海,男,1964年生,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为信号处理、计算机视觉和图形学、视频处理及通信. E-mail: qh.dai@mails.tsinghua.edu.cn.付长军,男,1981年生,博士研究生,主要研究方向为视频处理、压缩感知.季向阳,男,1976年生,博士,主要研究方向为视频处理及通信.

信号)进行采集的研究,利用固定的结构性基函数(structureed, fixed deterministic sampling kernels)以两倍于新息率而不是两倍于奈奎斯特采样频率对连续信号进行采集. Donoho 等人提出的压缩感知方法<sup>[1]</sup>则提供一种可以广泛应用于可压缩信号的采集方法. 该方法所需要的传感器数目大大减少,采集到的数据也具有更小的冗余度. 因此,该理论提出后立即吸引了众多科学家的关注,目前我国关于压缩感知方法的研究也已经开始起步,相信不久将有更多的人加入到关于压缩感知的研究行列.

压缩感知采集方法并不是对数据直接进行采集,而是通过一组特定波形去感知信号,即将信号投影到给定波形上面(衡量与给定波形的相关度),感知到一组压缩数据. 最后利用最优化的方法实现对压缩数据解密,估计出原始信号的重要信息. 压缩感知关键的问题是如何给定用来感知信号的波形才能有效地恢复出原始信号的重要信息. 涉及的关键因素在于给定的波形要与可以用来压缩原始信号的波形组均不相干,并且不相干程度越高,感知数据包含的信息量越大,为准确获取重建原始信号所需的感知数据量就越少. Tao 等人提出的受限等距性(Restricted Isometry Property, RIP)<sup>[2-3]</sup>、一致不确定性原理(Uniform Uncertainty Principle, UUP)和准确重构原理(Exact Reconstruction Principle, ERP)<sup>[4-5]</sup>进一步回答了如何从压缩数据中方便地提取信号有用信息的充分条件.

本文首先在第2节和第3节介绍压缩感知方法和其中的约束条件;接着在第4节讨论压缩感知方法的鲁棒性;然后在第5节列举压缩感知中通常采用的信息获取方法;第6节进一步讨论压缩感知的一种拓展问题——矩阵填充问题(matrix completion);第7节阐述了压缩感知方法在不同领域的应用;最后给出了一些结论.

## 2 压缩感知原理

本节我们将从一个具体实例出发介绍压缩感知的采样机制,然后给出压缩感知方法与常规数据采集方法的对比.图1是CS采样过程的一个示意图,其中待采集信号  $f$  只在  $k$  个时刻非零( $k$  即为稀疏程度). 为采集  $f$  中的信息,将其投影到了给定的一组感知波形  $\phi$  上(也可以说,用一组给定的波形对  $f$  进行感知),得到了一组远小于信号原始长度的测度数  $y$

$$y = \phi f \quad (1)$$

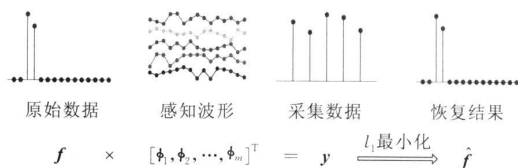


图1 压缩感知数据采集方式示意图

压缩感知方法的目的是通过远小于采集信号数据量的测度  $y$  恢复出原始信号  $f$  的全部信息. 从式(1)中求解  $f$  是一个欠定的问题,但从另一方面看,信号只有  $k$  个未知位置上的未知变量,即信号只有  $k+1$  个自由度,因此,在一定条件下当测度数只要超过信号自由度的时候就是可以通过一些非线性的方法进行恢复. 显然,当任意选取感知矩阵  $\phi$  的  $k+1$  列均线性无关的时候(即感知矩阵能够区分任意两个不同的均为  $k$  稀疏的信号),在满足  $y = \phi f$  的所有情况中找到的具有最稀疏特性的信号即为所求,即求解如下的最优化问题:

$$(P0) \quad \min \|f\|_0 \quad (2) \\ \text{s. t. } y = \phi f$$

其中  $\|f\|_0$  代表  $f$  的零范数,即其中非零元素的个数. 此外给定一些其它约束条件以后,信号也可以通过求解如下的最优化问题来实现:

$$\min \|f\|_p \quad (3) \\ \text{s. t. } y = \phi f$$

其中  $0 < p \leq 1$ ,  $\|f\|_p = \left( \sum |f_i|^p \right)^{1/p}$ . 然而对(P0)问题的求解只能通过对所有可能的稀疏情况进行求解后才能找到最稀疏的形式,这是一个NP难问题. 而对  $0 < p < 1$  时式(3)所示最优化问题的求解也存在一定困难. 幸运的是,用  $p=1$  时式(3)的解来估计可压缩信号  $f$  即接近最优(near-optimal),并且对它的求解能够等价为一个线性规划问题,从而便于利用现有方法进行求解. 图1中的信号  $\hat{f}$  即为此方法恢复的结果. 最优化(如式(3))为什么总会导致一个稀疏的解的原因可以用如图2的几何图形来说明. 式(3)的目的即是在图中所示直线  $H$  (满足  $y = \phi f$ )上找一点使得  $l_p$  球的半径最小. 显然由于当  $0 < p < 1$  时  $l_p$  球是内凸的,当球的半径逐渐增加时与直线的交点(式(3)的解)将位于坐标轴上,而这样的一个是稀疏的. 其中的菱状  $l_1$  球如图2(b)是一个特殊情况,在一定条件下同样会导致一个稀疏解. 但是当  $p > 1$  时,  $l_p$  球是外凸的,当逐渐膨胀时与图像的切点必不位于坐标轴上,即此时的解是不稀疏的. 作为当  $p > 1$  时的一个特例,通常采用的  $l_2$  范数(即能

量最小化方法)的情况显示在了图 2(d)中. 关于极小化  $l_0$  范数与  $l_1$  范数等价的条件将在第 3 节进行详

细的说明. 其它一些如贪婪算法、迭代算法也能在较低复杂度下获得较好的恢复结果.

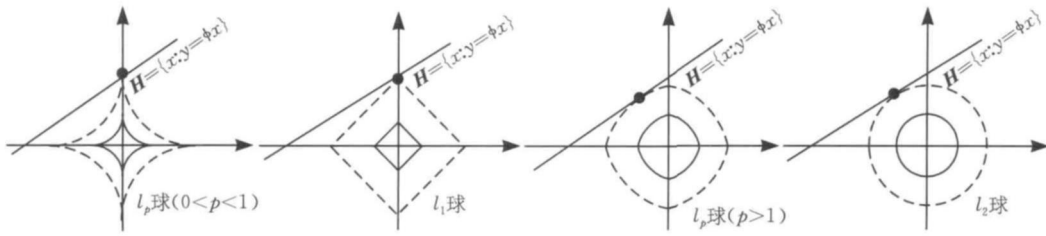


图 2 极小化  $l_1$  范数导致稀疏解的几何说明

当  $f$  具有可压缩性时(关于可压缩性的论述详见第 3 节), 上述的方法同样可以估计出  $f$  中的具有较大幅值的项. 在实际应用中, 待采集的信号  $f$  (如一副图像)本身通常不是稀疏的, 但是在某个基  $\psi$  上的变换系数是稀疏的, 或者是可压缩的, 即由

$$f = \psi \theta \quad (4)$$

确定的变换系数  $\theta$  是稀疏的, 或者极少的系数包含了几乎全部的能量(详见第 3 节). 结合式(1)和式(4), 可以得到感知数据与变换系数之间的关系为

$$y = \phi f = \phi \psi \theta \quad (5)$$

若令  $A = \phi \psi$  (测度矩阵, measurement matrix), 则

$$y = A \theta \quad (6)$$

由于式(6)与式(1)有相同的形式和假设, 因而同样可以按照上述的最优化方法估计出式中的变换系数, 进而经过变换估计出待采集信号  $f$ . 实际上,  $f$  本身稀疏可以看成是  $f$  在单位阵上稀疏, 此时的测度矩阵即为感知矩阵.

当感知矩阵与变换矩阵不相干时, 矩阵  $A$  就能够很好地满足能够通过极小化变换系数的  $l_1$  范数来估计原始信号的约束条件. 并且随机矩阵即与任何一个固定的变换矩阵不相干的概率非常大, 也即通过收集信号随机投影系数来采集未知信号是最优的, 这样的数据采集方式在实际应用中显然是比较容易实现的. 另外, 信号的稀疏程度越高, 利用

式(3)恢复出原始信号所需的感知数据量也将越少. 这些结论我们将在第 3 节给出详细的讨论.

下面我们将通过一个信号采集的实例来说明压缩感知方法<sup>[6]</sup>的优越性. 图 3(a)给出了一个周期为  $T=0.01\text{s}$  的待采集信号  $f(t)$ . 在实际工作中, 需要将连续信号  $f(t)$  进行抽样以便于在计算机上实现处理, 该抽样过程可以看作是原始信号和脉冲串函数的乘积:

$$f(nT_s) = f(t)p(t) \quad (7)$$

其中,  $f(t) = \sum_n \alpha(t-nT_s)$ ,  $\alpha(t)$  为脉冲函数. 根据香农-奈奎斯特采样定理, 如果该信号为连续信号且抽样频率两倍于信号的最高截止频率(奈奎斯特采样频率), 那么, 可由采集信号  $f(nT_s)$  恢复出原始信号. 根据信号的连续性和最高截止频率有界, 可以得到信号的重建方法为

$$\hat{f}(t) = \sum f(nT_s) \frac{\sin[\pi(t-nT_s)/T_s]}{\pi(t-nT_s)/T_s} \quad (8)$$

即利用 sinc 函数插值出未采集时刻的信息. 当该信号为非带限信号或者采样频率低于奈奎斯特采样频率时重建出的信号较原始信号将存在一定的误差. 如图 3 所示, 当我们对以采样速率为  $5\text{kHz}$  从图 3(a)获取的采样数据进行两倍的上采样时, 按照式(8)的重建方法获取到的估计信号与原始信号存在一定的误差, 重构结果如图 3(b)所示.

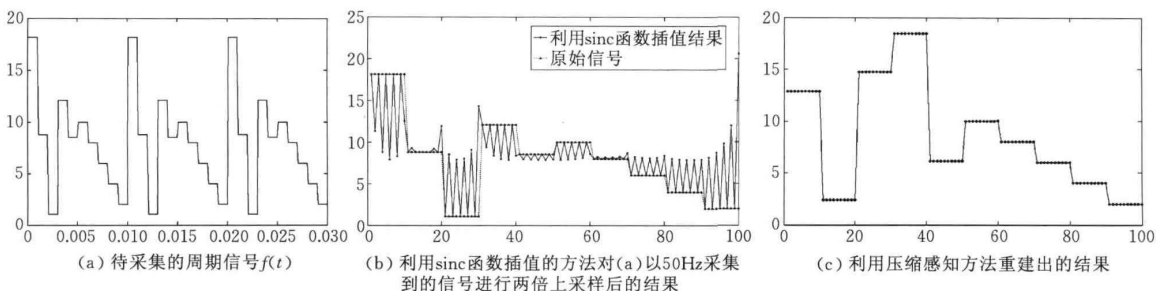


图 3 两种重建结果

与传统重建方法所依据的连续性和有限带宽相比, 压缩感知重建方法利用的是信号在某个域上具有稀疏性和可压缩性, 通过给定信号更好的表征域(换言之, 利用一些其它的先验知识), 通过同样的数据可以得到更加好的重建效果. 图 3(c) 是结合该信号的变化是稀疏的(即只在部分时刻存在变化)这一先验知识, 利用式(3)的最优化方法重构的结果, 该方法完全重构出了原始信号. 另一方面在压缩感知中对数据的获取方面也采用了更加灵活的方式以利于感知信号中包含的重要信息, 传统的利用脉冲串函数进行采集的方法可以看作是压缩感知中感知波形为脉冲函数时的一种特殊情况. 由于采用压缩感知重建方法所需的数据量依赖于感知波形和表征波形之间的不相干性和信号的稀疏程度, 而采用随机信号感知的方法能够确保与任给的一个表征域具有良好的不相干性, 因此在对包含一些高频分量的信号采集时, 若已知信号在某个表征域稀疏或可压缩, 采用压缩感知的方法将具有更大的优越性. 实际上大部分信号均具有可压缩性, 因此, 压缩感知方法具有更广泛的优越性和普适性, 具有广阔的应用前景. 压缩感知方法在其它方面的应用将在第 7 节详细讨论.

### 3 压缩感知中的约束条件

本节我们将讨论在利用极小化  $l_1$  范数方法估计稀疏信号的情况下, 对某一稀疏程度的信号利用何种感知矩阵采集时能够以最少测度数达到给定的误差水平. 为此, 我们将主要阐述极小化  $l_1$  范数恢复时的一些结论, 也即零范数和一范数等价的条件. 首先我们给出关于不相干及信号稀疏可压缩性的定义.

#### 3.1 不相干性与信号的稀疏性

##### (1) 不相干性

两组基之间的相干程度定义为

$$\mu(\phi, \psi) = \max_{1 \leq k, j \leq n} |\langle \phi_k, \psi_j \rangle| = \max_{1 \leq k, j \leq n} |A(k, j)| \quad (9)$$

其中,  $\phi_k, \psi_j$  分别是正交矩阵  $\phi, \psi$  的行向量和列向量. 根据线性代数的基本知识可知  $\mu(\phi, \psi) \in [1/\sqrt{n}, 1]$ . 显然当测度矩阵是单位阵时, 相干程度最大  $\mu=1$ . 此时要估计出可压缩信号中的重要信息, 需要采集与原始数据量相当的感知数据. 因此, 当感知矩阵与变换矩阵之间的相干程度为 1 时压缩感知方法退化为常规的采样方法. 实际上, 大部分矩阵对之间的相干程度都不是 1, 即都是不相干的. 下面给出经常采用的感知矩阵和变换矩阵之间的相干程度:

① 由脉冲函数  $\phi_k = \delta(t - t_k)$  形成的规范基 (canonical, spikebasis) 与傅里叶变换矩阵相干程度最小, 为  $1/\sqrt{n}$ . 其与正弦曲线之间的相干程度也为  $1/\sqrt{n}$ .

② Noiselet 变换基矩阵与 Harr 小波基之间的相干程度大约是  $\sqrt{2/n}$ , 与 Daubechies D4 & D8 小波之间的不相干程度大约是  $2\sqrt{2/n}$  和  $2\sqrt{9/n}$ . 值得一提的是: 由于 noiselet 变换仅需要  $O(N)$  次计算来实现, 并且不需要空间来存储变换矩阵, 因此适用于 CS 方法中.

③ 由随机数生成的随机矩阵或将某一个正交矩阵进行随机的行列互换形成的随机矩阵与任一个给定的矩阵不相干程度也非常大. 因此在压缩感知中通常采用随机投影的方法来采集数据.

##### (2) 信号可压缩性

信号是可压缩的, 是指在允许较小损失的情况下可以通过较少的系数表达出来. 显然当信号本身或其在某个变换域的支撑域相对较小时(即稀疏信号)是可以压缩的. 此外, 当信号在空域或者某个变换域的系数属于  $l_p$  球 ( $0 < p < 1$ ) 时, 信号也是可以压缩的. 此时表明信号  $f$  在给定基  $\psi$  下由式(4)确定的变换系数  $\theta$ , 对任给的某一常数  $R > 0$  和  $0 < p < 1$ , 满足

$$\|\theta\|_p = \left( \sum_{i=1}^K |\theta_i|^p \right)^{1/p} \leq R \quad (10)$$

当系数  $\theta$  属于  $l_p$  球时, 设  $\theta_K$  是取定其中  $K$  个较大项, 并将其它项置为零得到的向量, 则

$$\|\theta - \theta_K\|_2 \leq \zeta_{2,p} \cdot \|\theta\|_p \cdot (K+1)^{1/2-1/p} \quad (11)$$

其中,  $\zeta_{2,p}$  是仅取决于  $p \in (0, 2)$  的常数. 因而为了使  $\theta_K$  对  $\theta$  的估计误差不大于  $\epsilon$ , 只须令  $K \geq \epsilon^{(p-2)/2p}$ . 换言之最大的  $K$  个系数保留信号中绝大部分信息.

#### 3.2 (P0) 和 (P1) 问题的等价条件

本节我们将讨论 (P0) 和 (P1) 问题的等价条件, 进一步揭示感知矩阵和变换矩阵的不相干程度和待采集信号可压缩程度与所需测度数的关系(定理 4). 定理 1 给出了信号满足稀疏性假设时, 利用 (P1) 问题可以获得稀疏信号的条件, 而定理 2 和定理 3 则给出了信号可压缩时的限制. 在给出定理 1 之前, 我们先定义一个矩阵的受限等距常数 (restricted isometry constants). 不妨假设矩阵  $A$  是一个  $M \times N$  维矩阵, 其列向量记作  $(a_j)_{j \in J} \in R^M$ , 其中  $J = \{1, 2, \dots, N\}$ . 并记  $A_T$  是以  $T$  为指标集抽取矩阵  $A$  的列向量形成的  $N \times |T|$  维矩阵.

对任给的常数  $1 \leq S \leq N$ ,  $S$  受限等距常数定义

为对所有势最大为  $M$  的子集  $T \subset J$ , 以及任意实值系数  $(c_j)_{j \in T}$  使得  $A_T c$  满足

$$(1 - \delta) \|c\|^2 \leq \|A_T c\|^2 \leq (1 + \delta) \|c\|^2 \quad (12)$$

成立的最小值.

定义  $S, S'$ -受限等距常数  $\theta_{S, S'}$  为当  $S + S' \leq |J|$  时, 所有势满足  $|T| \leq S$  和  $|T'| \leq S'$  的子集  $T, T' \subset J$ , 满足

$$|\langle A_T c, A_{T'} c' \rangle| \leq \theta_{S, S'} \|c\| \|c'\| \quad (13)$$

给出上述定义之后, 有如下定理成立.

**定理 1** (RIP<sup>[2, 7]</sup>). 假定  $S \geq 1$ , 使得  $\delta + \theta_S + \theta_{2S} < 1$  成立, 任取一个支撑域为  $T \subset J$  ( $|T| \leq S$ ) 的向量  $c$ . 记  $y := A_T c$ . 那么  $c$  是

$$(P1) \quad \min \|d\| \\ \text{s.t. } Ad = y \quad (14)$$

的唯一解.

定理 1 说明当测度矩阵满足 RIP 时, 通过极小化  $l_1$  范数能够恢复出稀疏信号. 值得注意的是, 感知矩阵与变换矩阵的不相干程度越高, 测度矩阵的  $S$ -受限等距常数就越大, (P1) 就能够恢复更不稀疏的信号. 此外, 在文献[8]中也有类似的结论.

为进一步讨论针对可压缩信号时的一些相关结论, 首先引入关于矩阵的两个假设: UUP 和 ERP.

**UUP.** 如果对所有足够小的系数  $\alpha > 0$ , 下述说法至少以  $1 - O(N^{-\theta/\alpha})$  ( $\theta > 0$  为某一固定常数) 的概率成立: 对所有满足  $|T| \leq \alpha \cdot M/\lambda$  的子集  $T \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$ , 以  $T$  为指示函数从矩阵  $A$  中抽取  $|T|$  个列向量形成的  $M \times |T|$  维矩阵  $A_T$ , 对所有支撑域满足  $|\text{supp}(f)| \leq \alpha K/\lambda$  的信号, 有

$$\frac{1}{2} \frac{K}{N} \|f\|_2 \leq \|A_T f\|_2 \leq \frac{3}{2} \frac{K}{N} \|f\|_2 \quad (15)$$

则称矩阵  $A$  以过采样系数  $\lambda$  满足 UUP.

当矩阵  $A$  是一个部分傅里叶变换矩阵时,  $f$  是一个支撑域为  $T$  ( $|T| \leq \alpha K/\lambda$ ) 的信号. 式(15)表明  $\|\hat{f}\|_{2(\Omega)}$  (其中  $\hat{f} = Af$ ) 不超过  $\sqrt{3K/2N} \|f\|_2$  的概率非常大. 与 Plancherel 等式  $\|\hat{f}\|_{2(N)} = \|f\|_2$  相对比, 可以看出除非  $K$  与  $N$  非常接近, 稀疏信号  $f$  在  $\Omega$  上的集中程度与其支撑域有关. 这也是称其为“不确定性”的原因. 名称中“一致”一词在于强调式(15)对所有满足  $|T| \leq \alpha K/\lambda$  的子集  $T$  都成立.

**ERP.** 如果对所有足够小的  $\alpha > 0$ , 每一个满足  $|T| \leq \alpha \cdot M/\lambda$  的子集  $T \in \{1, 2, \dots, n\}$  和所有定义在  $T$  上的符号向量  $\sigma$  ( $|\sigma(t)| = 1$ ), 存在向量  $P \in R^N$  以  $1 - O(N^{-\theta/\alpha})$  ( $\theta > 0$  为某一给定的正常数) 的概率满足以下性质:

(1) 对所有的  $t \in T, P(t) = \sigma(t)$ ;

(2)  $P$  是矩阵  $A_T$  行的线性组合;

(3) 对所有  $t \in T^c := \{0, \dots, N-1\} \setminus T$ ,  $|P(t)| \leq \frac{1}{2}$ , 则称矩阵  $A$  以过采样系数  $\lambda$  满足 ERP.

ERP 用来检测重构的信号  $\hat{\theta}$  在  $l_1$  范数下与仅保留  $\theta$  最大系数后的向量相接近程度. 给定 UUP 和 ERP 的假设以后, 我们有如下定理成立.

**定理 2**<sup>[9]</sup>. 假设测度矩阵  $A$  分别以过采样因子  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  满足 UUP 和 ERP, 记  $\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2)$ , 并取  $M \geq \lambda$ . 如果对某一给定的  $0 < p < 1$ , 信号  $f \in R^N$  满足  $|\theta(f)|_{(n)} \leq C \cdot n^{-1/p}$ , 或者对  $p=1$  有  $\|f\|_{l_1} \leq C$ , 那么由式(6)确定的  $\hat{\theta}$  估计的  $f^\#$  以  $1 - O(N^{-\theta/\alpha})$  的概率满足

$$\|f - f^\# \| \leq C_{\alpha} \cdot (K/\lambda)^{-r} \quad (16)$$

其中,  $r = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$ . 实际上, UUP 可以在  $l_2$  范数下, 而不是  $l_\infty$  范数下推导出类似于 ERP 的命题. 此外, ERP 可以通过 UUP 和下述的弱准确重构原理 (Weak Exact Reconstruction Principle, WERP) 来得出. 因为很难验证 ERP 的条件是否成立, 在实际应用中大多采用 WERP 来解决相关问题.

**WERP**<sup>[9]</sup>. 如果对任意给定满足  $|T| \leq \alpha \cdot M/\lambda$  的子集  $T$ , 任给  $0 < \gamma < 1$ , 矩阵  $A$  对所有  $t \in T^c$  至少以概率  $1 - O(N^{-\theta/\gamma})$  ( $\theta > 0$  为某一固定正常数) 满足  $\|A_{\Omega^*}^* A_t\|_2 \leq \gamma \cdot \sqrt{K|T|}/N$ . 其中,  $A_t$  是  $A_{\Omega}$  的列向量.

定理 2 给出了 (P0) 和 (P1) 问题等价时普遍意义下感知矩阵和信号满足的约束条件. 而如下定理将给出信号的支撑域固定, 测度矩阵是从正交矩阵中抽取出来时的约束条件.

**定理 3**<sup>[8]</sup>. 假设  $A$  是一个相干度为  $\mu$  的标准正交矩阵. 给定信号的支撑域  $T \in \{1, 2, \dots, N\}$  和势为  $M$  的指示集  $\Omega \in \{1, 2, \dots, N\}$ , 定义  $T$  上的随机的符号序列  $z$ . 当  $M \geq C_0 |T| \cdot \mu^2(A) \cdot N \log(N/\delta)$  和  $M \geq C'_0 \cdot \log^2(N/\delta)$  ( $C_0$  和  $C'_0$  为固定的常数) 时, 支撑域为  $T$ , 符号序列为  $z$  的信号可以以超过  $1 - \delta$  的概率通过  $l_1$  范数最小化的方法从  $y = A_{\Omega} x_0$  中估计出来.

其中,  $A_{\Omega}$  是从矩阵  $A$  中以  $\Omega$  为指示集抽取行向量形成的  $M \times N$  维矩阵. 该定理实际上隐含了关于正交基的弱不确定性原理, 即当  $A = \Phi \Psi$  时, 信号不可能在  $\Phi$  域和  $\Psi$  域同时集中. 此外, 从如下的定理将

会看到这这也是一个关于矩阵  $A$  最小特征值的论断.

定理 4<sup>[8]</sup>.  $A, T, \Omega$  按上述定义, 并令  $A_{\Omega T}$  是以  $\Omega$  指标集抽取矩阵  $A_T$  的行向量形成的  $M \times |T|$  维矩阵, 如果测度数  $M$  满足:

$$M \geq |T| \cdot \mu^2(A) \cdot N \cdot \max(C_1 \log |T|, C_2 \log(3/\delta))$$

(其中:  $C_1, C_2$  为某正常数), 那么

$$P\left\{\left\|\frac{1}{M}A_{\Omega T}^*A_{\Omega T}-I\right\| \geq 1/2\right\} \leq \delta \quad (17)$$

其中,  $\|\cdot\|$  是标准的  $l_2$  范数算子. 式(17)表明对较小的  $\delta$  矩阵  $A_{\Omega T}^*A_{\Omega T}$  的特征值均以很大概率趋近于  $M$ . 为说明式(17)表明了矩阵  $A_{\Omega}$  满足不确定性原理, 令  $f \in R^N$  是定义在  $T$  上的向量, 并假定  $\|M^{-1}A_{\Omega T}^*A_{\Omega T}-I\| \geq 1/2$ , 那么

$$4 \frac{1}{2N} \|f\|_2 \leq \|A_{\Omega} f\|_2 \leq \frac{3}{2N} \|f\|_2 \quad (18)$$

式(17)说明只有  $f$  的一小部分能量集中在  $A_{\Omega}$  的值域内, 并且所集中能量的大小正比于  $\Omega$  的大小. 从式(12)、式(15)和式(17)可以看出感知矩阵与变换矩阵的不相干程度决定了利用(P1)方法恢复出原始信号所需的测度数. 不相干程度越高, 所需要的测度数越少.

## 4 压缩感知的鲁棒性

实际应用中感知到的数据不可避免地会包含一些误差, 即

$$y = A\theta + z \quad (19)$$

其中  $z$  为观测噪声. 对含噪声的感知数据的处理方法有利用线性规划问题求解的 dant-zig 方法<sup>[9]</sup>、基追踪降噪算法(Basis Pursuit De-Noising, BPDN)<sup>[10]</sup>以及通过二次锥规划问题(second-order cone programs)实现二次约束下极小化  $l_1$  范数的方法<sup>[11]</sup>. Haupt 和 Nowak 提出的 dant-zig 方法(后来也被称作 LASSO 问题), 是求解如下的最优化问题:

$$(PD) \quad \min \|\theta\|_1 \\ \text{s.t. } \|A^*(y - A\theta)\|_{\infty} \leq \gamma \quad (20)$$

通过将其等价于如下的线性规划问题, 该问题可以方便地进行求解.

$$\min \sum_i u_i \\ \text{s.t. } -u \leq \|\theta\| \leq u \\ -\gamma_i \leq \|A^*(y - A\theta)\| \leq \gamma_i \quad (21)$$

下面我们给出利用该方法从包含观测噪声的感知数据中恢复的信号较原始信号的误差大小.

定理 5<sup>[12]</sup>. 如果测度矩阵的  $S$ -受限等距常数满足,  $\delta_s \leq \sqrt{2} - 1$ , 那么通过式(20)估计的结果较原

始信号的误差满足

$$\|\theta^* - \theta\| \leq C_0 \cdot \|\theta - \theta_s\|_{l_1} / \sqrt{S} + C_1 \cdot \epsilon \quad (22)$$

其中  $C_0$  和  $C_1$  为两个固定的常数, 通常都比较小. 从中可以看出, 重构误差来源于两项. 第 1 项是在无噪声情况下恢复结果的误差, 而第 2 项正比于观测噪声大小. 由此可以看出, 压缩感知方法对观测噪声有一定的鲁棒性.

基追踪降噪算法是通过求解如下最优化问题来实现从包含噪声的感知数据中对原始信号的估计:

$$\min \frac{1}{2} \|y - A\theta\|_2^2 + \lambda \|\alpha\|_1 \quad (23)$$

其中  $\lambda$  控制着允许残差的大小. 通常当矩阵  $A$  的列向量经过归一化后,  $\lambda$  可以取作  $\sigma \sqrt{2 \log(N)}$ , 该问题可以等价成的线性规划问题为

$$\min \quad v^T x + \frac{1}{2} \|p\|^2 \\ \text{s.t. } Ux + \hat{p} = b \\ x \geq 0, \hat{p} = 1n \quad (24)$$

其中,  $U = (A, -A)$ ;  $b = y$ ;  $c = \lambda 1$  二次约束下极小化  $l_1$  范数的方法是在满足观测约束的范围内找一个  $l_1$  范数最小的向量作为恢复结果:

$$(P2) \quad \min \|\theta\|_1 \\ \text{s.t. } \|y - A\theta\|_2 \leq \epsilon \quad (25)$$

该问题可以利用二次锥规划的求解方法进行求解.

## 5 压缩感知中的信息获取方法

本节我们将讨论从感知到的数据中估计原始信号的几种常见实用方法: 基追踪算法(Basis Pursuit, BP)、贪婪算法(Matching Pursuit, MP)、迭代阈值算法(iterative thresholding methods, iterative shrinkage algorithm)等.

### 5.1 基追踪算法<sup>[10]</sup>

首先需要指出的是基追踪算法并不是一个最优化原则. 其原理是上述讨论的给定一些限制条件后, 通过极小化  $l_1$  范数可以获得最稀疏的解. 与(P1)问题等价的标准线性规划问题为

$$\min \quad v^T \alpha \\ \text{s.t. } U\alpha = b, \alpha \geq 0 \quad (26)$$

其中,  $\alpha$  是重新定义的一个新变量,  $m \Leftrightarrow 2n$ ;  $v \Leftrightarrow (1, 1)$ ;  $U \Leftrightarrow (A, -A)$ ;  $b \Leftrightarrow y$  上述线性规划问题可以通过单纯形法、内点法或对数障碍法来进行求解. 目前, 提供了一些关于 BP 算法的软件包<sup>①</sup>.

① <http://www-stat.stanford.edu/~schen/Atomizer.html>

## 5.2 贪婪算法<sup>[13]</sup>

贪婪算法的基本步骤为

1. 给定初始的估计  $\theta^0 = \mathbf{0}$ ;
2. 在每次迭代中根据  $\mathbf{A}(\theta - \theta^0) = \mathbf{A}\theta - \mathbf{A}\theta^0$  确定出  $\theta - \theta^0$  的估计值  $\Delta$ ;
3. 仅保留  $\Delta$  中较大值的项 将其它项置为零. 更新  $\theta^0 = \theta^0 + \Delta$ .

关于贪婪算法的具体实现方法有很多种, 主要有正交贪婪算法 (Orthogonal Matching Pursuit, OMP<sup>[14]</sup>)、规整化正交贪婪算法 (Regularized Orthogonal Matching Pursuit, ROMP<sup>[15]</sup>)、分段正交贪婪算法 (Stagewise Orthogonal Matching Pursuit, STOMP<sup>[16]</sup>) 和梯度贪婪算法 (gradient pursuit method<sup>[17]</sup>) 等.

## 5.3 迭代阈值算法<sup>[18-19]</sup>

迭代阈值算法是采用递归的方法确定出式(6)的一个解, 具体来讲就是通过定义下式序列  $\theta^{(n)}$  来趋近于式(6)的最优解:

$$\theta^{(n+1)} = S_{\tau}[\theta^{(n)} + \mathbf{A}^* \mathbf{y} - \mathbf{A}^* \mathbf{A} \theta^{(n)}] \quad (27)$$

其中  $S_{\tau}(x)$  为

$$S_{\tau}(x) = \begin{cases} x - \tau, & x > \tau \\ 0, & x \leq \tau \\ x + \tau, & x < -\tau \end{cases} \quad (28)$$

该迭代序列的获取可以通过两种方法获得: 算子分裂<sup>[20]</sup>和二次函数近似<sup>[21]</sup>的方法. 首先通过引入规整化因子  $\lambda$  将(P1)问题转化为如下的无约束问题:

$$\min L(\theta, \lambda) = \|\theta\|_1 + \lambda \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\theta\|_2^2 \quad (29)$$

由于  $\|\theta\|_1$  是非平滑可分凸函数,  $\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\theta\|_2^2$  是平滑非可分凸函数, 因此若令  $T_1 = \partial \|\theta\|_1$ ,  $T_2 = \partial \|\mathbf{x} - \mathbf{D}\theta\|_2^2$ , 则

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \arg \min L(\theta, \lambda) \\ &\Leftrightarrow \hat{\theta} \in (T_1 + T_2)(\theta^*) \\ &\Leftrightarrow \hat{\theta} \in (I + \tau T_1 - I + \tau T_2)(\theta^*) \\ &\Leftrightarrow (I - \tau T_2)(\theta^*) \in (I + \tau T_1)(\theta^*) \\ &\Leftrightarrow \theta^* \in (I - \tau T_2)^{-1}(I + \tau T_1)(\theta^*) \end{aligned} \quad (30)$$

其中  $(I + \tau T_1)$  是一个以步长为  $\tau$  的梯度下降算子, 而  $(I - \tau T_2)^{-1}$  即为  $S_{\tau}(\cdot)$ .

从另一角度, 式(29)中  $\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\theta\|_2^2$  是一个以 Lip-chitz 常数为  $\|\mathbf{A}\|$  的连续可微函数, 从而

$$\|\theta\|_1 + \lambda \|\mathbf{x} - \mathbf{A}\theta\|_2^2 \leq \|\theta\|_1 + \lambda (\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\theta_n\|_2^2 + (\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\theta - \mathbf{y}), \theta - \theta_n) + \frac{1}{2\|\mathbf{A}\|} \|\theta - \theta_n\|_2^2) \quad (31)$$

因此在得到一个解  $\theta_n$ , 下一个  $\theta_{n+1}$  可以通过极小化不等式(31)右边的表达式来获得

$$\begin{aligned} \theta_k &= \arg \min \left[ \|\theta\|_1 + \lambda \left( \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\theta_n\|_2^2 + (\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\theta - \mathbf{y}), \theta - \theta_n) + \frac{1}{2\|\mathbf{A}\|} \|\theta - \theta_n\|_2^2 \right) \right] = \\ &\theta_{k-1} + S_{\frac{\lambda}{2\|\mathbf{A}\|}}(\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\theta_{k-1} - \mathbf{y})) \end{aligned} \quad (32)$$

文献[22]指出从任意给定的初始值  $\theta^{(0)}$  出发由式(27)得到的序列均能收敛到最优解. 该方法所需的迭代次数已经接近理论最优<sup>[21]</sup>, 即为获得误差为  $\epsilon$  的估计值所需的迭代次数为  $\left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil$ .

## 5.4 其它方法

极小化  $l_1$  范数的方法能够有效解决压缩感知中的恢复问题, 但是当结合其它的一些先验知识后, 该问题可以被更加有效地解决. 在此, 我们仅简单介绍贝叶斯压缩感知方法 (Bayesian compressed Sensing, BCS<sup>[23-24]</sup>) 和基于模型的压缩感知方法 (model based compressed sensing<sup>[25]</sup>). Ji 等人提出的 BCS 借助传统的贝叶斯方法和机器学习中的主动学习方法 (active learning), 通过将关于稀疏性的先验信息用垂直先验分布 (hierarchical prior) 来建模, 提出了自适应的感知方法以及相应的恢复方法. 而 Baraniuk 等人提出的针对基于模型可压缩信号 (model-compressible signals) 的压缩感知方法中利用小波树模型和块稀疏模型, 仅需要与稀疏程度相当的测度数即可实现信号的鲁棒性恢复.

## 6 矩阵填充问题

矩阵填充理论与压缩感知理论相比, 压缩感知理论利用的是信号在一组基下的稀疏性, 而矩阵填充理论利用的是利用矩阵特征值的稀疏性 (即低秩性). 假设一个秩为  $r$  的低秩矩阵  $X$ , 令  $P_{\Omega}: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  是一个将矩阵中位于支撑域以外的元素投影成零的正交投影. 即

$$Y_{i,j} = \begin{cases} X_{i,j}, & (i,j) \in \Omega \\ 0, & (i,j) \notin \Omega \end{cases} \quad (33)$$

那么,  $X$  能够通过如下的最优化方法从部分观测  $Y$  中准确的重构出来:

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{rank}(X) \\ \text{s. t.} \quad & P_{\Omega}(X) = P_{\Omega}(Y) \end{aligned} \quad (34)$$

该问题的求解同样是一个 NP 难问题. 当部分观测是从矩阵  $X$  中随机选取的元素时, Candes<sup>[26-27]</sup> 指出该问题可以通过如下的凸规划问题加以求解:

$$\begin{aligned} \min \quad & \|X\|_* \\ \text{s. t.} \quad & P_{\Omega}(X) = P_{\Omega}(Y) \end{aligned} \quad (35)$$



其中,  $\|X\|_*$  是矩阵  $X$  的核范数, 即  $X$  的所有奇异值的和. 之后人们通过不断求解一个二次逼近函数来实现式(35)的最优解<sup>[21]</sup>. Beck 将文献[21]中求解一范数最优化的问题拓展到了核范数最优化的问题上. 之后 Toh<sup>[28]</sup> 提出了在每次迭代中使用部分 SVD, 大大降低了算法的复杂度.

实际上, 部分观测矩阵  $Y$  是矩阵  $X$  在一些随机矩阵上的随机投影时, 矩阵  $X$  同样可以从观测矩阵  $Y$  中准确地重构出来. Ma 等人进一步指出, 当一个低秩的矩阵被稀疏噪声污染的时候, 利用噪声的稀疏性和矩阵的低秩特性, 同样能够把原始矩阵准确地重构出来. 该理论被成功地用于人脸识别和视频跟踪<sup>[29]</sup> 中.

## 7 应 用

从压缩感知的采样机制可以看出: 同一个投影方法(硬件结构)可以完成大部分可压缩信号的采集; 每个采集到的数据(测度数)包含的信息量是相同的, 即 CS 方法对测度数的丢失鲁棒性比较强; 感知数据的获取方法仅需通过简单的投影来完成, 需要大量运算的估计方法放在拥有更加强大计算能力的解码端进行; 此外, 由于信号是通过随机投影的方式获取的, 感知到的数据具有一定的保密性. 由于压缩感知方法具有上述优点, 可被广泛应用于以下领域:

### (1) 数据采集

莱斯大学的研究组利用压缩感知原理成功设计出了单像素相机<sup>[30-32]</sup>. 该相机利用透镜和数字可控镜片阵列(Digital Micromirror Device, DMD)随机地将从物体发射来的部分光线汇聚到一点, 从而利用一个像素即可实现感知数据的采集. 尽管该相机还存在一些问题, 但是它为未来相机的发展提供了一种新的思路和发展方向.

此外压缩感知方法被应用到了多跳网络和无线传感器网络中具有稀疏性或可压缩性网络数据的重构上面. CS 采样的普遍性和分散式编码的特征有可能使其成为一种新的网络数据分析范例. 更重要的是, 借助伪随机宽带调制器, 低通滤波器和采样器, 压缩感知方法可以以较低采样率实现对模拟信号到离散信号的直接采集.

### (2) 医学成像

核磁共振成像方法(Magnetic Resonance Imaging, MRI)是通过在静止磁场施加梯度磁场并检测

所发射出的电磁波来收集信息. 正如压缩感知方法中采集的感知数据, MRI 收集到的信息是混叠信息, 而不是直接的像素信息. 此外, 由于大部分的医学图像都具有可压缩性, 核磁共振成像问题具有压缩感知理论应用的两个关键前提假设. Lustig 在文献[33]中指出压缩感知方法有助于减少核磁共振成像的扫描时间, 有利于减少对患者的危害和降低医疗费用. 在三维造影、脑部成像、冠状动脉成像、动态成像等方面也有较大的应用前景. 而关于联合子空间中信号(signals from union of subspaces)的压缩感知理论<sup>[34]</sup> 可以用于解决脑电图(Electroencephalography, EEG)和光学相干断层扫描(Optical Coherence Tomography, OCT)中的一些问题.

### (3) 其它领域

除上述的应用, CS 方法还被用到信道编码中误差控制的研究中. 在文献[7]中, 根据信道传输中的误差是稀疏的, 即不是所有传输的数据会出现错误, 按照压缩感知理论构建了误差纠正机制. 在图像处理分析方面, 压缩感知方法也被广泛应用. 在 Wright 等人<sup>[35]</sup> 提出的基于压缩感知方法的人脸识别算法中, 人脸识别问题看成是找待测图像的特征在训练集中稀疏表示, 然后运用了 CS 理论中的恢复方法对该问题进行了求解. 基于压缩感知方法的超分辨率算法也由 Yang 等人提出. 高分辨率图像认为可由一组训练得到的冗余基稀疏表示, 然后利用压缩感知理论中的恢复方法从低分辨率图像中估计出这些表示系数, 进而可以得到一个超分辨率后的图像. Cai 等人<sup>[36]</sup> 针对运动去模糊中的卷积核在 curvelet 小波变换下的稀疏性, 并结合图像在框架小波基上的稀疏性获得了不错的恢复效果. 除此之外, 压缩感知方法还被广泛引入到通信<sup>[37-38]</sup>、地理信息数据分析<sup>[39]</sup>、超光谱成像<sup>[40]</sup>、雷达<sup>[41-42]</sup> 和生命科学<sup>[43]</sup> 等领域.

## 8 结 语

本文简要介绍了一种刚刚兴起的可以在亚奈奎斯特频率进行采样的数据采集方法——压缩感知方法. 该方法主要依赖于如下事实: 与原始数据的有限次随机投影中包含了原始信号的足够信息; 给定的约束条件, 极小化  $l_1$  范数总是导致一个最稀疏的解. 该方法已经被广泛应用于数据采集、误差修正、图像处理等问题中. 但是该方法目前还处在起步阶段, 还有一些问题有待于进一步解决和完善, 如:



如何实现快速的数据采集以及在不同应用背景下更加有效的重构。

## 参 考 文 献

- [1] Donoho D L. Compressed sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289-1306
- [2] Baraniuk R et al. A simple proof of the restricted isometry property for random matrices. *Constructive Approximation*, 2008, 28(3): 253-263
- [3] Candes E J. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing. *Comptes Rendus Mathématique*, 2008, 346(9-10): 589-592
- [4] Candes E J et al. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(2): 489-509
- [5] Candes E J, Tao T. Near-optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies? *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(12): 5406-5425
- [6] Romberg J. Imaging via compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25(2): 14-20
- [7] Candes E J, Tao T. Decoding by linear programming. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2005, 51(3): 4203-4215
- [8] Cand et al. Sparsity and incoherence in compressive sampling. *Inverse Problems*, 2007, 23(3): 969-985
- [9] Candes E, Tao T. The dantzig selector: Statistical estimation when  $p$  is much larger than  $n$ . *Annals of Statistics*, 2007, 35(6): 2313-2351
- [10] Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2001, 43(1): 129-159
- [11] Boyd S P, Vandenberghe L. *Convex Optimization*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004
- [12] Candes E J, Wakin M B. An introduction to compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25(2): 21-30
- [13] Mallat S G, Zhang Zhifeng. Matching pursuits with time-frequency dictionaries. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1993, 41(12): 3397-3415
- [14] Tropp J A, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, 53(12): 4655-4666
- [15] Needell D, Vershynin R. Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit. *Foundations of Computational Mathematics*, 2007, 9(3): 317-334
- [16] Donoho D L et al. Sparse solution of underdetermined linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit. Department of Statistics, Stanford University, Stanford: Technical Report 2006-02, 2006
- [17] Blumensath T, Davies M E. Gradient pursuits. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(6): 2370-2382
- [18] Daubechies I et al. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2004, 57(11): 1413-1457
- [19] Fornasier M, Rauhut H. Iterative thresholding algorithms. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2008, 25(2): 187-208
- [20] Yin W et al. Bregman iterative algorithms for  $l_1$ -minimization with applications to compressed sensing. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2008, 1(1): 143-168
- [21] Beck A, Teboulle M. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2009, 2(1): 183-202
- [22] DeFrise M, De Mol C, Daubechies I. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2004, 57(11): 1413-1457
- [23] Ji S, Carin L. Bayesian compressive sensing and projection optimization//*Proceedings of the 24th International Conference on Machine Learning (ICML)*. Corvallis, Oregon, 2007
- [24] Ji S et al. Bayesian compressive sensing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(6): 2346-2356
- [25] Baraniuk R G, Cevher V, Duarte M F, Hegde C. Model-based compressive sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, 56(4): 1982-2001
- [26] Candes E J, Recht B. Exact matrix completion via convex optimization. *Foundations of Computational Mathematics*, 2009, 9(6): 717-772
- [27] Candes E J, Tao T. The power of convex relaxation: Near-optimal matrix completion. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, 56(5): 2053-2080
- [28] Toh K C, Yun S. An accelerated proximal gradient algorithm for nuclear norm regularized linear least squares problems. *Pacific Journal of Optimization*, 2010, 6(5): 615-640
- [29] Ganesh A et al. Dense error correction for low-rank matrices via principal component pursuit//*Proceedings of the 2010 IEEE International Symposium on Information Theory Proceedings (ISIT)*. Austin, 2010: 1513-1517
- [30] Duarte M F et al. Single-Pixel Imaging via Compressive Sampling [Building simpler, smaller and less-expensive digital cameras]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25(2): 83-91
- [31] Takhar D et al. A new compressive imaging camera architecture using optical-domain compression//*Proceedings of the Computational Imaging IV at SPIE Electronic Imaging*, 2006: 43-52
- [32] Zhang Yifu et al. A multiple description image/video coding method by compressed sensing theory//*Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems*. Seattle, Washington, 2008: 1830-1833

- [ 33] Lustig M et al. Compressed sensing MRI. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 72-82
- [ 34] Lu Y M, Do M N. Sampling signals from a union of subspaces. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 41-47
- [ 35] Wright J et al. Robust face recognition via sparse representation. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2009, 31(2): 210-227
- [ 36] Cai Jian-Feng et al. High-quality curvelet-based motion deblurring from an image pair//Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Miami, 2009: 1566-1573
- [ 37] Cotter S F, Rao B D. Sparse channel estimation via matching pursuit with application to equalization. IEEE Transactions on Communications, 2002, 50(3): 374-377
- [ 38] Taubock G, Hlawatsch F. A compressed sensing technique for OFDM channel estimation in mobile environments: Exploiting channel sparsity for reducing pilots//Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Las Vegas, 2008: 2885-2888
- [ 39] Felix G H, Herrmann J. Non-parametric seismic data recovery with curvelet frames. Geophysical Journal International, 2008, 173(1): 233-248
- [ 40] Willett R M et al. Multiscale reconstruction for computational spectral imaging//Bouman C A, Miller E L, Pollak I. Proceedings of the SPIE-IS & T Electronic Imaging. San Jose, CA, USA, 2007, 6498: 64980L
- [ 41] Baraniuk R, Steeghs P. Compressive radar imaging//Proceedings of the 2007 IEEE Radar Conference. Waltham, 2007: 128-133
- [ 42] Bhattacharya S et al. Fast encoding of synthetic aperture radar raw data using compressed sensing//Proceedings of the IEEE/SP 14th Workshop on Statistical Signal Processing. Madison, USA, 2007: 448-452
- [ 43] Sheikh M A et al. DNA array decoding from nonlinear measurements by belief propagation//Proceedings of the IEEE/SP 14th Workshop on Presented at the Statistical Signal Processing (SSP'07). Madison, Wisconsin, 2007: 215-219



**DAI Qiong-Hai** born in 1964, Ph.D., professor, Ph.D. supervisor. His research interests include signal processing, computer vision and graphics, video processing and communication

**FU Chang-Jun**, born in 1981, Ph.D. candidate. His current research interests include image processing, signal processing and compressed sensing.

**JI Xiang-Yang** born in 1976, Ph.D.. His research interests include video/image coding, video streaming, and multimedia processing.

## Background

This research is supported by the National Basic Research Program of China (No 2010CB731800), the National Natural Science Foundation of China Key Program (60933006) and General Program (60972013).

In the last few years, as a new concept in the field of signal processing, compressed sensing or compressive sampling (CS), provides a widely used method for compressible data. With the priority of sparsity, it can sample compressed data directly with much lower sampling rate than that determined by Shannon-Nyquist sampling theorem. And the sensor resources can be efficiently saved by it. Besides, this new concept provides a new insight into other research area. With its mature, an adoption wave in different technologies has

been emerging.

The authors' main objectives are to provide an overview of this new technology. In this paper, the authors introduce the mainframe of compressed sensing at first. Then, they provide some key factors for faithful recovery from the sensed data, such as the conditions for the equivalence of  $l_1$  minimization and  $l_0$  minimization and how to incorporate other prior information in compressed sensing. So far, the iterative thresholding methods derived from operator splitting and second order approximation is the most efficient method for the reconstruction in CS. Finally, the authors discuss some of potential applications of this theory.