

中图分类号: TN911. 7

文献标志码: A

文章编号: 1674- 2230(2012)06- 0067- 06

基于凸优化的频率方向二维恒定束宽波束形成技术

张文科, 王杰贵, 樊甫华

(电子工程学院, 合肥 230037)

摘要: 针对传统波束的主瓣宽度会随波束指向和信号频率不同而变化, 提出了一种基于凸优化的频率方向二维恒定束宽波束形成算法。该算法先采用非线性约束优化实现参考频点的方向不变恒定束宽, 然后针对频带内各子带中心频率在每个指向上采用二阶锥约束, 实现频率方向的二维恒定束宽。仿真结果表明, 该算法能够在主波束指向 $\pm 40^\circ$ 范围内有效地形成方向不变恒定束宽, 同时在每个主波束指向上得到良好的频率不变恒定束宽波束图。

关键词: 波束形成; 频率方向二维恒定束宽; 凸优化; 主瓣控制

Frequency and Steering Invariant Constant Beamwidth
Beamforming Based on Convex Optimization

ZHANG Wen-gang, WANG Jie-gui, FAN Fu-hua

(Electronic Engineering Institute, Hefei 230037, China)

Abstract: Traditional beam main-lobe width is variable with the main beam look direction and signal frequency differing. In order to solve this problem, a frequency and steering invariant constant beamwidth beamforming algorithm via convex optimization is proposed. The steering-invariant constant beamwidth beampattern at a reference frequency is achieved by nonlinear constrained optimization firstly. And the frequency and steering invariant constant beamwidth beampattern is implemented over the whole frequency band in every look direction with second-order cone programming constraints. Simulation results show that the steering-invariant constant beamwidth beam pattern could be obtained effectively under the designed main-lobe direction of $\pm 40^\circ$, also the frequency invariant constant beamwidth beam pattern could be achieved in every main-lobe look direction.

Key words: beamforming; frequency and steering invariant constant beamwidth beamforming; convex optimization; main-lobe shape controlling

1 引言

随着射频电子技术的飞跃和宽带无线电设备的飞速发展, 宽带阵列天线技术也在日益发展。近年来, 宽带阵列天线已经广泛应用于现代航空、航天以及民用通信等各个领域。而宽带波束形成技术已经成为宽带阵列天线处理宽带信号的重要手段^[1-3]。宽带波束形成技术的使用将大大提高目标跟踪测量精度和多目标分辨能力, 然而在宽带波束形成中, 往往会面临两大方面的问题: 一方面是采用传统的宽带波束形成方法, 将会导致严重的信号频率畸变, 这对信号处理中能量接收、信号波形分析、目标识别等一系列处理结果带来麻

收稿日期: 2012-02-13; 修回日期: 2012-03-20

作者简介: 张文科(1987-)男, 硕士研究生, 研究方向为阵列信号处理; 王杰贵(1969-)男, 博士, 副教授, 主要研究方向是雷达对抗信号处理、数字波束形成、定位理论与技术、数据融合技术等; 樊甫华(1975-)男, 博士, 主要研究方向是计算智能、智能信息处理、模式识别。

烦; 另一方面, 在阵列天线中, 当波束主瓣指向不同方位时, 主瓣宽度是不一样的, 主瓣指向偏离阵列法线方向越大, 主瓣宽度越宽^[3], 这将会导致天线阵列的分辨性能下降。因此, 恒定束宽波束形成正成为一个热点问题。

恒定束宽波束形成分为两大方面。一方面是宽带频率不变恒定束宽波束形成, 也就是在信号的带宽内, 阵列对不同频率的输入信号具有相同的阵列响应, 即在带宽内所有频率所形成的波束主瓣宽度保持恒定。另一方面是窄带方向不变恒定束宽波束形成, 即在不同的波束指向角上波束主瓣宽度保持恒定。目前, 宽带频率不变恒定束宽波束形成^[4-6]研究较多, 窄带方向不变恒定束宽波束形成^[7-9]研究相对较少, 而频率方向二维恒定束宽波束形成目前还很少有人研究。

本文提出了一种基于凸优化的频率方向二维恒定束宽波束形成算法。针对宽带信号, 在文献[9]思想的基础上, 研究频率方向不变恒定束宽波束形成。该算法首先采用非线性约束优化的准则, 即在保证各个指向上设计波束的主瓣与相应的参考波束主瓣之间的均方误差小于某一期望值的条件下, 使设计波束旁瓣级尽量低, 实现参考频点的方向不变恒定束宽。然后将不同指向上参考频点的主波束作为相应方向上的参考波束, 针对频带内各子带中心频率在每个指向上采用在保证主瓣设计波束与参考波束加权误差小于某一期望值的条件下, 使设计波束旁瓣电平最低的优化准则, 从而实现频率方向二维恒定束宽。

2 阵列模型

基于带宽分解的频域宽带信号阵列接收模型, 就是把阵列接收的宽带信号经过 DFT 变换到频域, 在频域内每一离散频点按照窄带的方法进行建模。

考虑一个 M 元宽带阵列天线阵, 阵列天线在 θ 方向、频点 f_n 的波束方向图函数定义为:

$$P(\theta, f_n) = \mathbf{W}_n^H \mathbf{a}(\theta, f_n) = \sum_{m=1}^M w_{n,m}^* e^{j2\pi f_n \tau_m(\theta)} \quad (1)$$

$$\mathbf{a}(\theta, f_n) = [e^{j2\pi f_n \tau_1(\theta)} e^{j2\pi f_n \tau_2(\theta)} \dots e^{j2\pi f_n \tau_M(\theta)}]^T \quad (2)$$

其中, $\mathbf{W}_n = [w_{n,1}, w_{n,2}, \dots, w_{n,M}]^T$ 表示频点 f_n 的阵元加权矢量。 $\mathbf{a}(\theta, f_n)$ 表示频点 f_n 的阵元导向

矢量。 $\tau_k(\theta)$ 为第 k 个阵元接收信号相对于参考阵元的时间延迟。 $(\cdot)^T$ 表示转置, $(\cdot)^H$ 表示共轭转置。

本文定义波束主瓣宽度为主波束左右两边第一个零点之间的宽度。

3 频率方向二维恒定束宽波束形成

采用基于带宽分解的宽带波束形成方法主要是将接收的宽带信号分解成若干个子带, 然后利用典型的窄带波束形成方法在各频点形成波束。本文算法的核心思想是: 首先采用在保证各个指向上设计波束主瓣与相应的参考波束主瓣之间的均方误差小于某一期望值的条件下, 使设计波束旁瓣级尽量低的准则, 实现参考频点的方向不变恒定束宽。然后将不同指向上参考频点的主波束作为相应方向上的参考波束, 针对频带内各子带中心频率在每个指向上采用在保证主瓣设计波束与参考波束加权误差小于某一期望值的条件下, 使设计波束旁瓣电平最低的优化准则, 从而实现各个指向上频率不变恒定束宽。

3.1 频率方向不变恒定束宽的约束优化方法

文献[9]采用约束优化的方法实现了单频点的方向不变恒定束宽。其约束优化如下:

$$\left. \begin{aligned} \min_w & \left| \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_{isl}) \right|, i = 1, 2, \dots, N \\ s.t. & \left| \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_{si}) \right| = 1 \\ & \left[\sum_{j=1}^J \left| P_d(\theta_{\bar{j}}) - P_r(\theta'_{ij}) \right|^2 \right] < \epsilon, \theta_{ij} \in [\theta_L, \theta_R] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中, θ_{si} 是某一个主瓣指向角, 如果 θ_{si} 取遍整个观察区域, 就可以在不同的波束指向上形成具有同样主瓣宽度的波束, 即可以实现单频点的方向不变恒定束宽波束图。

对于宽带信号, 波束方向图是频率和方向的二维函数, 不同的频率、不同的波束指向, 波束主瓣宽度是不一样的。因此, 研究频率方向二维恒定束宽是很有必要的。

本文利用上述的优化方法首先实现参考频率 f_r 在整个观察区域内的方向不变恒定束宽。为了同时实现同一指向上不同频率所形成的波束主瓣宽度恒定和同一频率在不同指向上所形成的波束

主瓣宽度恒定, 即频率方向二维恒定束宽, 只需设计同一指向上不同频率所形成的主波束最优逼近参考频率 f_r 在该指向上形成的主波束。

现在的目标是实现在整个观察区域内同一个波束指向上不同频率形成的波束主瓣宽度保持恒定。采用带宽分解思想, 首先将信号带宽在频域内分解成 N 个子带(各子带满足窄带条件), 且各子带中心频率为 f_1, \cdots, f_N, f_n 表示第 n 个子带的中心频率, 则频率 f_n 上波束形成器的波束输出可以表示为:

$$P(\theta, f_n) = \mathbf{w}^H(f_n) \mathbf{a}(\theta, f_n) \quad (4)$$

式中, $\mathbf{w}(f_n) = [w_1(f_n), w_2(f_n), \cdots, w_M(f_n)]^T$ 为在频率 f_n 上形成波束所需要的加权矢量, $\mathbf{a}(\theta, f_n)$ 为频率 f_n 的阵元导向矢量。

将参考频率 f_r 在不同指向上形成的方向不变恒定束宽波束作为参考波束。为了确保带宽内各子带中心频点形成的波束主瓣宽度一样, 等价于在各子带中心频点 f_n 上求取 $\mathbf{w}(f_n)$, 使其满足:

$$P(\theta, f_n) \approx P_r(\theta, f_r), \theta \in \Theta_{main}, n = 1, 2, \cdots, N \quad (5)$$

式中, $P_r(\theta, f_r)$ 为参考频率 f_r 在某个波束指向上波束主瓣区域的波束输出, Θ_{main} 为参考频率 f_r 在该指向上波束的主瓣区域。

对某一个波束指向角 θ_{si} , 采用在主瓣设计波束与参考波束加权误差小于某一期望值的条件下, 使设计波束旁瓣电平最低的约束优化:

$$\left. \begin{aligned} & \min_{\mathbf{w}} \left(\max_{b=1, 2, \cdots, B} |\mathbf{w}^H(f_n) \mathbf{a}(\theta_{ib}, f_n)| \right) \\ & s. t. \sum_{a=1}^A \lambda_a |P(\theta_{ia}, f_n) - P_r(\theta_{ia}, f_r)|^2 \leq \sigma \\ & \theta_{ia} \in \Theta_{main}, a = 1, 2, \cdots, A \\ & \theta_{ib} \in \Theta_{side}, b = 1, 2, \cdots, B \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中, θ_{ia} 是波束指向 θ_{si} 时波束主瓣区域的离散化角度, θ_{ib} 是主瓣指向 θ_{si} 时波束旁瓣区域的离散化角度, A 和 B 分别为波束的主瓣区域和旁瓣区域离散化点数; $P_r(\theta_{ia}, f_r)$ 是波束指向 θ_{si} 时参考波束的第 a 个值。 λ_a 表示主瓣区域内不同角度的均方误差加权系数, 为正实数。 λ_a 越大, 则设计出的波束在相应方向上与参考波束的逼近程度越高。 σ 是一个小的正实数。

如果 θ_{si} 取遍整个观察区域, 就可以保证在不同的波束指向上各子带中心频率在该波束指向上形成的波束主瓣宽度一样。

3.2 频率方向不变恒定束宽的二阶锥表示

近年来, 由于凸优化最新理论突破与其本身的诸多优点, 部分学者已将凸优化理论应用到了波束形成^[10] 领域, 采用二阶锥凸优化内点算法求解优化方程以获得全局最优解。二阶锥规划属于凸优化问题的范畴, 它是在满足一组二阶锥约束和线性等式约束的条件下使某线性函数最小化, 具有计算结果精确等优点^[11]。

二阶锥规划具体表述为:

$$\max_{\mathbf{y}} \mathbf{b}^T \mathbf{y} \text{ subject to } \mathbf{c} - \mathbf{A}^T \mathbf{y} \in \kappa \quad (7)$$

式中, \mathbf{A} 是任意的系数矩阵, \mathbf{b} 和 \mathbf{c} 是任意向量, \mathbf{y} 是包含有未知参数的优化变量, 而 κ 是一个对称锥的集合。 \mathbf{A} , \mathbf{b} 和 \mathbf{c} 的维数必须匹配, 各向量均可以为复数。等式约束可以表示为零锥的形式:

$$\{0\} \triangleq \{x \in C | x = 0\} \quad (8)$$

不等式约束可以表示为二阶锥的形式, q 维二阶锥定义为

$$SOC_q^I \triangleq \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \left| x_1 \in R, \mathbf{x}_2 \in C^{(q-1) \times 1}, \|\mathbf{x}_2\| \leq x_1 \right. \right\} \quad (9)$$

如果式(7)能够转化为

$$\left. \begin{aligned} & \max_{\mathbf{y}} \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ & s. t. \mathbf{c} - \mathbf{A}^T \mathbf{y} \in \{0\}^{q_1} \times R^{q_2} \times SOC_{q_3}^I \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

的形式, 则可以很容易采用 SeDuMi 工具箱进行求解。式(10)中的约束表示含有 q_1 个等式约束, q_2 个线性不等式约束和 q_3 个二阶锥约束。

引入一个非负标量 δ 和一组非负向量 $\epsilon_a, a = 1, 2, \cdots, A$ 。 则式(6)可以表示为

$$\left. \begin{aligned} & \min_{\mathbf{w}} \delta \\ & s. t. \sum_{a=1}^A \lambda_a \epsilon_a \leq \sigma \\ & |\mathbf{w}^H(f_n) \mathbf{a}(\theta_{ib}, f_n)| \leq \delta \\ & |P(\theta_{ia}, f_n) - P_r(\theta_{ia}, f_r)|^2 \leq \epsilon_a \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

定义: $\mathbf{y} = [\delta \ \epsilon_1, \cdots, \epsilon_A, w_1, \cdots, w_M]^T$, $\mathbf{b} = [-1, \mathbf{0}_{1 \times A}, \mathbf{0}_{1 \times M}]^T$, 式中, $\mathbf{0}_{1 \times A}$ 表示 $1 \times A$ 维的零向量。 为了下面推导方便, 用 \mathbf{w} 代替 $\mathbf{w}(f_n)$ 。 式(11)的第1个不等式约束用二阶锥表示为:

$$\sigma - \sum_{a=1}^A \lambda_a \epsilon_a = \sigma - (\mathbf{0}_{1 \times 1} \ \lambda_{A \times 1}^T \ \mathbf{0}_{M \times 1}^T) \mathbf{y} \triangleq$$

$$c_1 - A_1^T y \in R_+^1 \quad (12)$$

其中, $\lambda_{A \times 1} = [\lambda_1, \dots, \lambda_A]^T$ 为常数矢量。

式(11)的第2个不等式约束用二阶锥表示为

$$\begin{pmatrix} \delta \\ a^H(\theta_{ib}, f_n)w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0_{A \times 1}^T & 0_{M \times 1}^T \\ 0 & 0_{A \times 1}^T & -a^H(\theta_{ib}, f_n) \end{pmatrix} y \triangleq c_{1+b} - A_{1+b}^T y \in SOC_b^2, b=1, 2, \dots, B \quad (13)$$

式(11)的第3个不等式约束用二阶锥表示为^[12-13]

$$\begin{pmatrix} \epsilon_a + 1 \\ 2P_r(\theta_{ia}, f_r) - 2a^H(\theta_{ia}, f_n)w \\ \epsilon_a - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2P_r(\theta_{ia}, f_r) \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -g^T(a) & 0_{M \times 1}^T \\ 0 & 0_{A \times 1}^T & 2a^H(\theta_{ia}, f_n) \\ 0 & -g^T(a) & 0_{M \times 1}^T \end{pmatrix} y \triangleq c_{1+B+a} - A_{1+B+a}^T y \in SOC_a^3, a=1, 2, \dots, A \quad (14)$$

式中, $g(a) = [g_1, g_2, \dots, g_k, \dots, g_A]^T$, 且 $g_k = \begin{cases} 0, & k \neq a \\ 1, & k = a \end{cases}$

定义: $c \triangleq [c_1^T, \dots, c_{1+B+A}^T]^T$, $A^T \triangleq [A_1, \dots, A_{1+B+A}]^T$, 式中 c_i 和 A_i 由式(12~14)分别定义。因此由式(11)所描述的优化问题, 可以转化为标准的二阶锥规划的形式:

$$\begin{aligned} & \max_y b^T y \\ & s. t. c - A^T y \in R_+^1 \times SOC_1^2 \times \dots \times SOC_B^2 \times SOC_1^3 \times \dots \times SOC_A^3 \end{aligned} \quad (15)$$

对于式(15)所描述的二阶锥规划问题, 在 MATLAB 中使用 SeDuMi 工具箱可求得优化矢量 y 的最优解, 其最后 M 个分量就是所要求的加权矢量 w 。

二阶锥规划属于凸优化的子集, 而凸优化算法有一个显著特点, 即任何局部最优点就是全局最优点。因此由式(15)收敛得到的加权矢量 w , 必收敛于全局最优点, 即该加权矢量 w 是在本约束条件下的最优加权矢量。

本文提出的算法就是采用约束优化先实现参考频点的方向不变恒定束宽, 然后再实现宽带的频率方向二维恒定束宽, 归纳起来算法步骤如下:

- (1) 利用 DFT 处理技术对各阵元接收的宽带信号进行窄带分解;
- (2) 选择参考频点 f_r , 利用窄带波束形成方法

设计波束指向 θ_r 方向的参考波束 P_r ;

(3) 根据式(3)实现参考频点在整个观察区域内的方向不变恒定束宽, 将其作为参考波束;

(4) 然后根据式(6)求出指向 θ 方向各子带频率的恒定束宽加权矢量 $w(f_n, \theta)$, 实现频率方向二维恒定束宽。

该算法的不足之处: 为了同时满足方向恒定束宽和频率恒定束宽, 要求方向不变恒定束宽权值和频率不变恒定束宽权值, 两次权值计算导致了运算量的增加。一旦波束指向和信号频带确定后, 权值是固定的。这些不足也是以后需要进一步研究的内容。本文所提的频率方向二维恒定束宽波束形成算法用流程图描述为如图1所示。

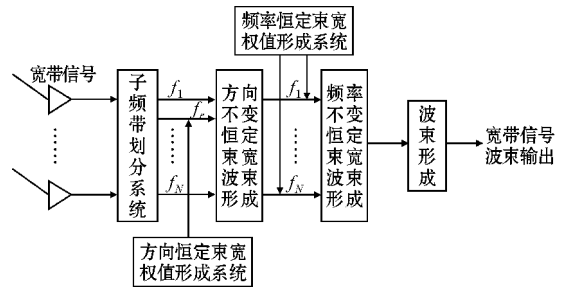


图1 频率方向二维恒定束宽波束形成算法的流程图

4 仿真实例

以下仿真实验若无特殊说明, 均在各向同性的16元均匀线阵模型下完成。宽带信号频率范围为1.2~1.4GHz, 阵元间距为1.3GHz, 频率对应波长的一半, 以参考频率为1.3GHz、主波束指向 20° 方向的波束主瓣为参考主瓣, 将宽带信号的频率覆盖范围划分为20个子带, 每个子带带宽为10MHz。参数 $\epsilon=0.5$, $\sigma=0.5$ 。

首先在参考频率为1.3GHz、主波束指向 20° 方向上设计一个均匀加权波束图, 如图2所示。运用本文算法实现频率方向二维恒定束宽波束, 仿真结果如图3、4、5所示。图3为参考频率点的方向不变恒定束宽波束图, 图4为主波束指向 20° 方向频带内各个子带中心频率点上的恒定束宽波束图, 图5为主波束指向 -20° 和 30° 方向频带内各个子带中心频率点上的恒定束宽波束图。

分析图3可知, 在主波束指向 $\pm 40^\circ$ 范围内时, 主波束宽度是恒定的。从图4可以看出, 在主波束指向 20° 方向对各子带中心频率, 使用凸优化

约束能够使得波束形成器输出的波束主瓣宽度基本保持恒定, 较好地拟合了参考波束的主瓣形状, 同时由于在凸优化约束中目标函数是使恒定束宽波束的旁瓣电平尽可能低, 因此也获得了较低的旁瓣电平。由图 5 可知, 各子带中心频率点在主波束分别指向 -20° 、 30° 方向形成的波束主瓣宽度也基本保持恒定, 且在两个方向上形成的主波束宽度基本一致, 由于在同时满足方向恒定束宽和频率恒定束宽时进行了两次约束, 相比参考指向 20° 方向的恒定束宽波束形成, 消耗了更多的阵列自由度, 恒定束宽波束的旁瓣电平有所升高。

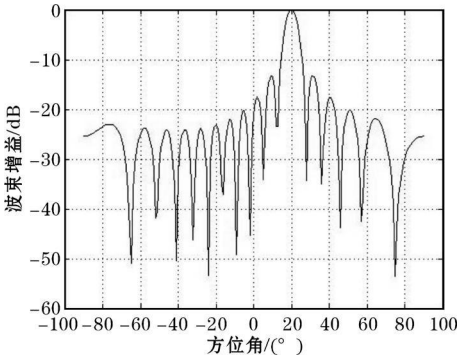
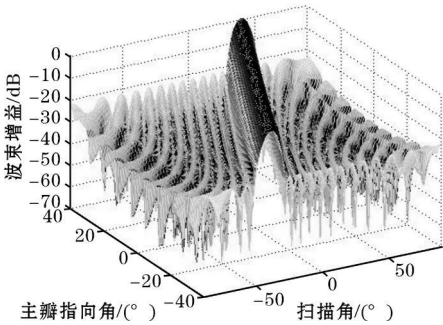
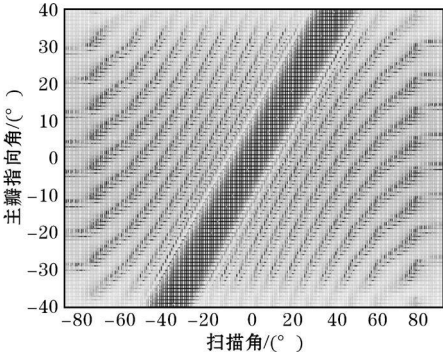


图2 指向 20° 方向 16元直线阵均匀加权波束图

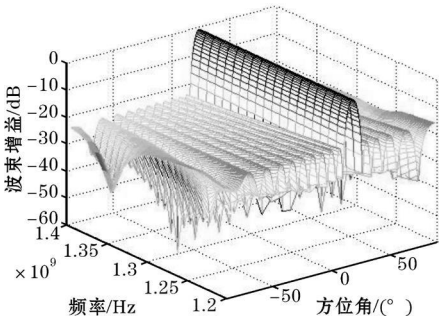


(a)波束三维图

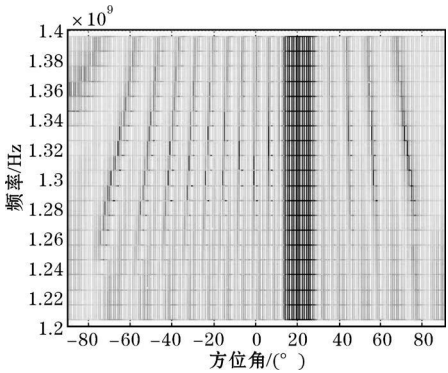


(b)波束二维图

图3 参考频率点的方向不变恒定束宽波束图

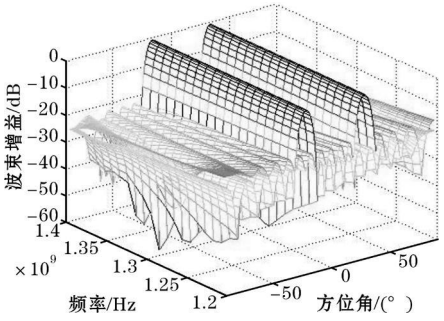


(a)波束三维图

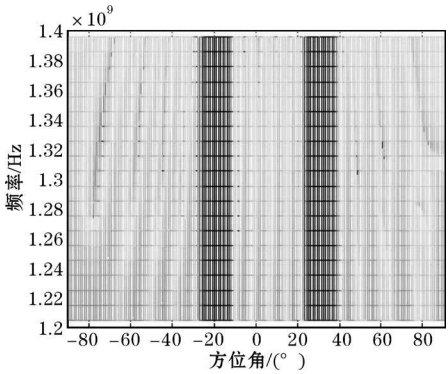


(b)波束二维图

图4 主波束指向 20° 处频率不变恒定束宽波束图



(a)波束三维图



(b)波束二维图

图5 主波束指向 -20° 、 30° 处频率不变恒定束宽波束图

表 1 第一零点波束宽度比较结果表

频率/GHz	1. 205	1. 225	1. 245	1. 265	1. 285	1. 300	1. 315	1. 335	1. 355	1. 375	1. 395
波束指向/°											
— 20	14. 64	14. 62	14. 59	14. 58	14. 54	14. 52	14. 49	14. 48	14. 46	14. 44	14. 41
20	14. 62	14. 59	14. 56	14. 55	14. 52	14. 50	14. 47	14. 46	14. 44	14. 42	14. 39
30	14. 66	14. 65	14. 62	14. 60	14. 58	14. 55	14. 52	14. 50	14. 48	14. 45	14. 43

表 1 列举了频带内 20 个子带中心频率点中的 10 个频率点及参考频率点在三个指向上的第一零点波束宽度。从数据中可以看出, 在主波束分别指向 -20° 、 20° 、 30° 方向上各个频率点的第一零点波束宽度基本保持一致, 且在这三个指向上波束的第一零点波束宽度基本保持恒定。以上分析表明, 本算法能够形成良好的频率方向二维恒定束宽波束图。

5 结论

将宽带波束形成技术应用于现代航空、航天以及民用通信等各个领域, 是一个有着重要理论意义的课题。本文采用凸优化的方式实现了频率方向二维恒定束宽波束形成, 主要思想是: 先采用在保证各个指向上设计波束的主瓣与相应的参考波束主瓣之间的均方误差最小的条件下, 使设计波束旁瓣级尽量低的准则, 实现参考频点的方向不变恒定束宽。然后将不同波束指向上参考频点的主波束作为相应方向上的参考波束, 针对频带内各子带中心频率点在每个指向上采用在保证主瓣设计波束与参考波束加权均方误差小于某一期望值的条件下, 使设计波束旁瓣电平最低的优化准则, 实现各个指向上频率不变恒定束宽。本文算法将约束优化转化为标准的二阶锥优化的形式, 采用高效的 SeDuMi 工具箱进行求解。该算法能够在主波束指向 $\pm 40^{\circ}$ 范围内有效地形成方向不变恒定束宽波束图, 同时在每个指向上获得良好的频率不变恒定束宽波束图。该方法可以应用到宽带多波束测向系统中。另外, 由于约束优化的思想对阵型没有任何限制, 因此该算法适用于任意型阵列。

参考文献:

[1] VAN TREES H L. Optimum Array Processing, Part IV of

Detection, Estimation, and Modulation Theory[M]. New York: John & Sons Ing, 2002.
[2] LIU W, WEISS S. Wideband Beamforming: Concepts and Techniques[M]. Chichester: Wiley, 2010.
[3] VAN TREESH L. Optimum Array Processing[M]. New York: John Wiley & Sons Inc, 2002.
[4] CHEN H H, CHAN S C, HO K L. Adaptive Beamforming Using Frequency Invariant Uniform Concentric Circular Arrays[J]. IEEE Trans Circuits & Systems I: Regular Papers, 2007, 54(9): 1938—1949.
[5] LIU W, WEISS S. Design of Frequency Invariant Beamformers for Broadband Arrays[J]. IEEE Trans Signal Processing, 2008, 56(2): 855—860.
[6] WEIL, MCLERNON D C, GHOGHO M. Design of Frequency Invariant Beamformer Without Temporal Filtering[J]. IEEE Trans Signal Processing, 2009, 57(2): 798—802.
[7] GIUSEPPE A, RYUJI K. Chebyshev-like Sidelobe Beam patterns with Adjustable Beamwidth and Steering Invariance[C] // Proceedings for European Wireless 2002(EW'02), Florence, Italy, 2002: 732—738.
[8] KHANNA R. Characterization and Development of Algorithms for Arrays Processing Architectures of Adaptive Antennas in Wireless Communication[D]. India: Deemed University, 2006.
[9] 幸高翔, 蔡志明. 基于二阶锥约束的方向不变恒定束宽波束形成[J]. 电子与信息学报, 2009, 31(9): 2109—2112.
[10] LIU J, GERSHMAN A B, LUO Z Q, et al. Adaptive Beamforming with Sidelobe Control: Second-Order Cone Programming Approach[J]. IEEE Sig Proc Lett, 2003, 10(11): 331—334.
[11] VANDENBERGHE L, BOYD S. Semidefinite Programming. SIAM Review[J]. 1996, 38(3): 49—95.
[12] YAN She-feng. Optimal Design of FIR Beamformer with Frequency Invariant Patterns[J]. Applied Acoustics, 2006, 67(6): 511—528.
[13] LIU Jing, GERSHMAN A B, LUO Zhi-quan, et al. Adaptive Beamforming with Sidelobe Control: A Second-Order Cone Programming Approach[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2003, 10(11): 331—334.