EJEMPLOS DE LA TRANSFORMACIÓN INVERSIÓN w = 1/z:

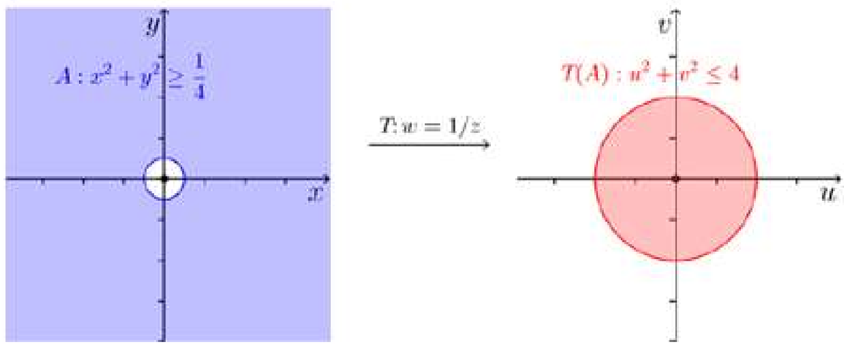
Hallemos la imagen de los siguientes conjuntos por la inversión $T : w = 1/z$

La inversa es $T^{-1} : z = 1/w$

a) $A = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq \frac{1}{2}\right\}$

Es inmediato considerando la observación 2.4.3 para $R = \frac{1}{2}$:

$$T(A) = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq 2\}$$



b) $B = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| = 1\}$

$$z \in B \Leftrightarrow |z - 2i| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{w} - 2i\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1 - 2iw}{w}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|1 - 2iw|}{|w|} = 1 \Leftrightarrow$$

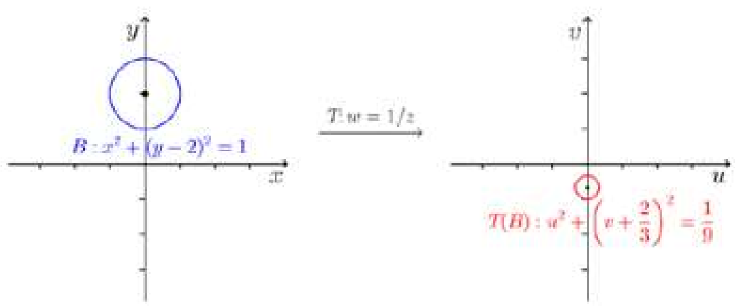
$$\Leftrightarrow |1 - 2iw| = |w| \Leftrightarrow |1 - 2i(u + iv)| = |u + iv| \Leftrightarrow |(2v + 1) - 2ui| = |u + iv| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |(2v + 1) - 2ui|^2 = |u + iv|^2 \Leftrightarrow (2v + 1)^2 + (-2u)^2 = u^2 + v^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4v^2 + 4v + 1 + 4u^2 = u^2 + v^2 \Leftrightarrow 3\left(v^2 + \frac{4}{3}v\right) + 3u^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(v^2 + \frac{4}{3}v\right) + u^2 + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow u^2 + \left(v + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \left|w + \frac{2i}{3}\right| = \frac{1}{3}$$

Se trata de una circunferencia de centro el punto $w_0 = -2i/3$ y de radio $1/3$



c) $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| = 2\}$

Las cuentas son similares a las del inciso anterior:

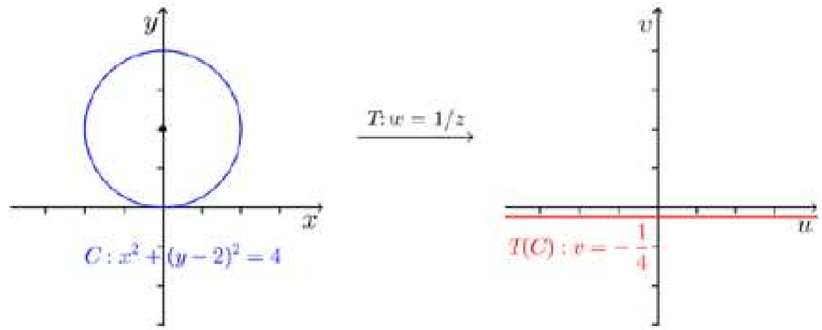
$$z \in C \Leftrightarrow |z-2i| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{w} - 2i\right| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{1-2iw}{w}\right| = 2 \Leftrightarrow \frac{|1-2iw|}{|w|} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |1-2iw| = 2|w| \Leftrightarrow |1-2i(u+iv)| = 2|u+iv| \Leftrightarrow |(2v+1)-2ui| = 2|u+iv| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |(2v+1)-2ui|^2 = 4|u+iv|^2 \Leftrightarrow (2v+1)^2 + (-2u)^2 = 4u^2 + 4v^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4v^2 + 4v + 1 + 4u^2 = 4u^2 + 4v^2 \Leftrightarrow 4v + 1 = 0 \Leftrightarrow v = -\frac{1}{4}$$

Dio por resultado una recta horizontal.



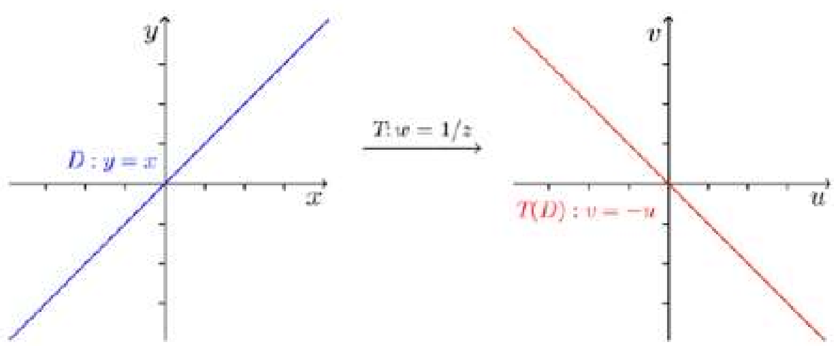
d) $D = \{x + iy : y = x\}$

En este caso conviene trabajar con las componentes cartesianas de la inversa

$$T^{-1} : \begin{cases} x = u/\left(u^2+v^2\right) \\ y = -v/\left(u^2+v^2\right) \end{cases}$$

$$D \in A \Leftrightarrow y = x \Leftrightarrow -v/\left(u^2+v^2\right) = u/\left(u^2+v^2\right) \Leftrightarrow v = -u$$

Se obtuvo como imagen una recta.



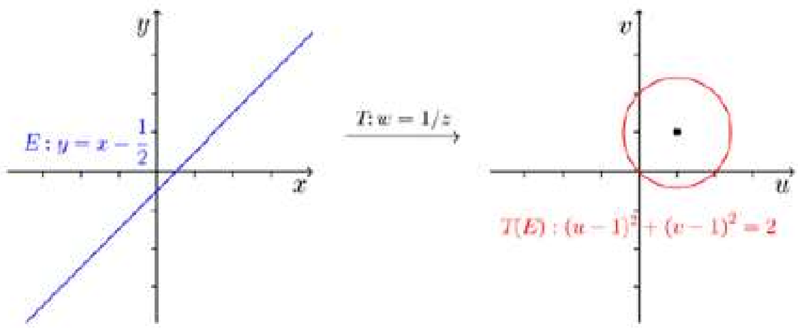
e) $E = \{x + iy : 2y = 2x - 1\}$

Trabajamos como en el inciso anterior:

$$z \in E \Leftrightarrow 2y = 2x - 1 \Leftrightarrow -\frac{2v}{u^2+v^2} = \frac{2u}{u^2+v^2} - 1 \Leftrightarrow -2v = 2u - u^2 - v^2$$

$$\Leftrightarrow (u^2 - 2u) + (v^2 - 2v) = 0 \Leftrightarrow (u-1)^2 + (v-1)^2 = 2 \Leftrightarrow |w - (1+i)| = \sqrt{2}$$

La imagen resultó una circunferencia.



f) $F = \left\{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| < \frac{5}{2}\right\}$

$$z \in F \Leftrightarrow |z - 2i| < \frac{5}{2} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{w} - 2i\right| < \frac{5}{2} \Leftrightarrow \left|\frac{1-2iw}{w}\right| < \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{|1-2iw|}{|w|} < \frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |1-2iw| < \frac{5}{2}|w| \Leftrightarrow |1-2i(u+iv)| < \frac{5}{2}|u+iv| \Leftrightarrow |(2v+1)-2ui| < \frac{5}{2}|u+iv| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |(2v+1)-2ui|^2 < \frac{25}{4}|u+iv|^2 \Leftrightarrow (2v+1)^2 + (-2u)^2 = \frac{25}{4}u^2 + \frac{25}{4}v^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4v^2 + 4v + 1 + 4u^2 < \frac{25}{4}u^2 + \frac{25}{4}v^2 \Leftrightarrow \frac{9}{4}u^2 + \frac{9}{4}v^2 - 4v > 1$$

$$\Leftrightarrow u^2 + v^2 - \frac{16}{9}v > \frac{4}{9} \Leftrightarrow u^2 + \left(v - \frac{8}{9}\right)^2 > \frac{100}{81} \Leftrightarrow \left|w - \frac{8}{9}i\right| > \frac{10}{9}$$