ANÁLISIS NUMÉRICO

Ingeniería en Sistemas de Información

3er año - Anual

Docentes: Prof. Diego Amiconi
Prof. Marcelo Cappelletti
Ay. Demian Bogado

INGENIERÍA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN
U.T.N. F.R.L.P.

ANÁLISIS NUMÉRICO

Unidades Temáticas:

- **UNIDAD Nº 1:** “Señales continuas y su representación por medio de Series y Transformadas de Fourier”
- **UNIDAD Nº 2:** “Fundamentos de Análisis de Variable Compleja”
- **UNIDAD Nº 3: “Transformada de Laplace. Aplicación a la Resolución de Ecuaciones Diferenciales”**
- **UNIDAD Nº 4:** “Transformada en Z”

ANÁLISIS NUMÉRICO

- UNIDAD Nº 3: "Transformada de Laplace. Aplicación a la Resolución de Ecuaciones Diferenciales"

$\delta(t)$	1
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

$\operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at} \operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$

- UNIDAD Nº 3: “Transformada de Laplace. Aplicación a la Resolución de Ecuaciones Diferenciales”

CONTENIDOS:

a) **Definición. Propiedades.**
b) **Cálculo de la transformada.**
c) **Teoremas de Traslación.**
d) **Anti transformada. Uso de fracciones simples.**
e) **Teorema de convolución.**
f) **Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer y segundo orden con coeficientes constantes.**

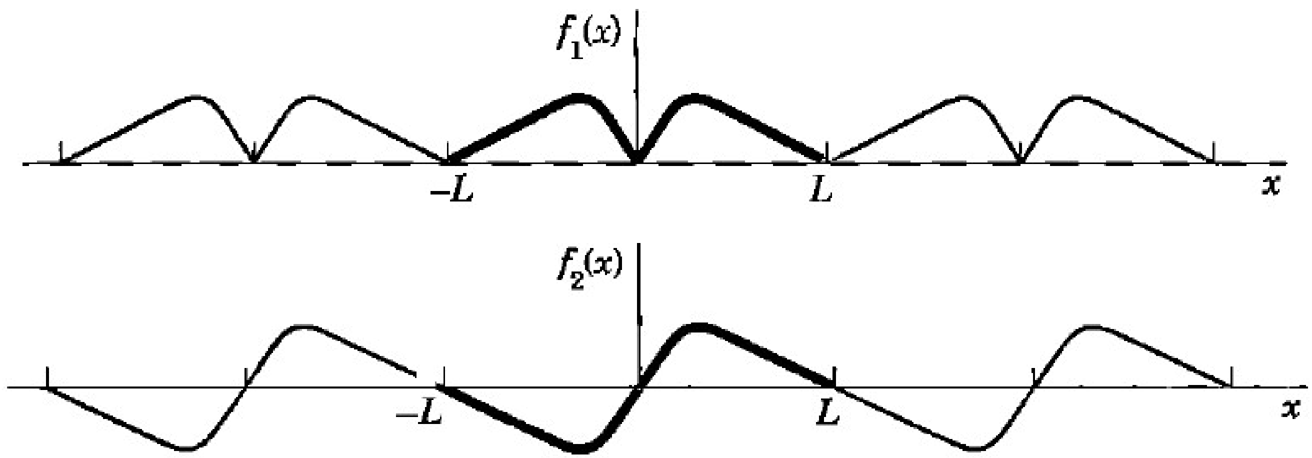
- UNIDAD Nº 3: “Transformada de Laplace. Aplicación a la Resolución de Ecuaciones Diferenciales”

OBJETIVOS:

La transformada de Laplace es un operador lineal que permite resolver ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas por métodos algebraicos. Es una de las herramientas más utilizadas en ingeniería para resolver problemas procedentes de campos tan distintos como pueden ser la Teoría de Circuitos, la Elasticidad Lineal, la Transmisión de Calor o la Propagación de Ondas. Introducimos el concepto de sistema dinámico y profundizaremos en el uso de la transformada de Laplace para analizar la estabilidad de los sistemas dinámicos lineales e invariantes en el tiempo por medio de la ubicación de polos y ceros en el plano S.

Desde la Serie a la Integral de Fourier

Las **series de Fourier** son una herramienta poderosa parar resolver problemas que involucran **funciones periódicas** o que son de interés en un intervalo finito, en cuyo caso hemos visto que se podía extender la función no periódica en una periódica a partir de la **expansión de medio rango**.



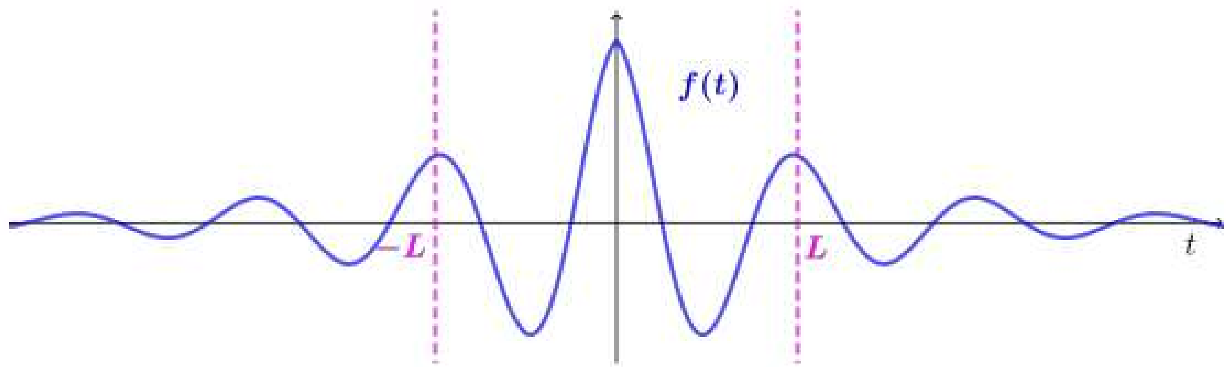
Sin embargo, existen muchos problemas que involucran **funciones que son no periódicas** y que son de **interés en el eje *x* entero, es decir, entre -∞** y **+∞.**

Para resolver este tipo de situaciones es que surgen las Integrales de Fourier.

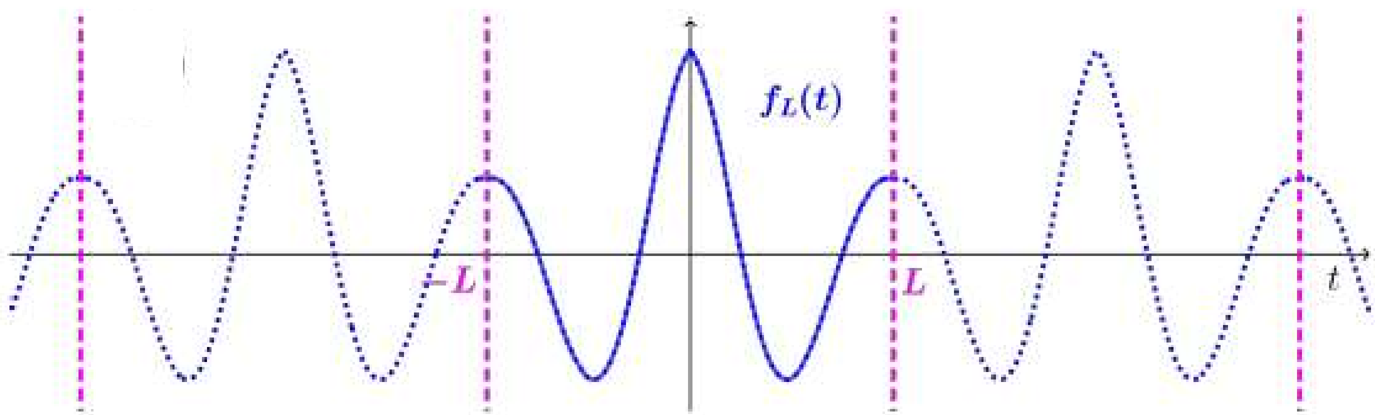
Transformada de Laplace

Desde la Serie a la Integral de Fourier

Las series de Fourier surgieron por la necesidad de resolver ciertas ecuaciones diferenciales parciales sujetas a condiciones de contorno que involucran funciones periódicas. Para los casos de funciones aperiódicas entre -∞ y +∞, es posible introducir las **integrales de Fourier** a partir de las series de Fourier.



Sea $f_L(t) = f(t)$, $t \in (-L, L)$, periódica de período $2L$.



observamos que cuando L crece $f_L(t)$ tiende a $f(t)$.

Transformada de Laplace

➢ Transformadas Integrales

Las transformaciones ayudan a simplificar la resolución de algunos problemas. Lo mismo sucede con las transformaciones llamadas integrales:

Sea $N(t,s)$ una función de las variables t y s. Si $f(t)$ es una función (real o compleja) entonces **la transformada integral $\mathscr{I}$ de la función $f(t)$ respecto al núcleo $N(t,s)$** es

$$\mathscr{I}\{f(t)\} = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)N(t,s)dt$$

cuando la integral existe.

Diversos núcleos originan diferentes transformadas integrales. Abordaremos los casos con $N(t,s) = e^{-i2\pi ts}$ y $N(t,s) = e^{-ts}$ que corresponden a casos particulares vastamente conocidos, la transformada de Fourier y la transformada de Laplace respectivamente.

Por lo tanto, una transformación integral es una transformación en la forma de una integral que produce a partir de funciones dadas, nuevas funciones que dependen de una variable diferente.

Estas transformaciones se las utiliza principalmente como herramientas para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones en derivadas parciales, dado que permiten convertir derivadas en operaciones algebraicas.

Transformada de Laplace

Transformada de Laplace. Sean

$f(t)$ = una función del tiempo t tal que $f(t) = 0$ para $t < 0$

s = una variable compleja

$\mathcal{L}$ = un símbolo operativo que indica que la cantidad a la que antecede se va a transformar mediante la integral de Laplace $\int_0^\infty e^{-st}\,dt$

$F(s)$ = transformada de Laplace de $f(t)$

Entonces la transformada de Laplace de $f(t)$ se obtiene mediante

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

Transformada de Laplace

➢ Transformada inversa de Laplace

El proceso inverso de encontrar la función del tiempo $f(t)$ a partir de la transformada de Laplace $F(s)$ se denomina *transformada inversa de Laplace*. La notación para la transformada inversa de Laplace es $\mathscr{L}^{-1}$ se encuentra a partir de $F(s)$ mediante la siguiente integral de inversión:

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}\,ds, \qquad \text{para } t > 0$$

donde c, la abscisa de convergencia, es una constante real que se eligió más grande que las partes reales para todos los puntos singulares de $F(s)$. Por tanto, la trayectoria de integración es paralela al eje $j\omega$ y se desplaza una cantidad c a partir de él. Esta trayectoria de integración va hacia la derecha de todos los puntos singulares.

Transformada de Laplace

➢ Propiedades de la Transformada de Laplace

Linealidad: Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones tales que

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s),\ \ s \in D_1 \ \ \text{y} \ \ \mathscr{L}\{g(t)\} = G(s),\ \ s \in D_2$$

si α y β son constantes cualesquiera, entonces

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathscr{L}\{f(t)\} + \beta\mathscr{L}\{g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s),\ \ s \in D_1 \cap D_2$$

Además, la antitransformada también es lineal.

Traslación en el dominio de la transformada (o sustitución)
Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ para $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(b)$ entonces

$$\mathscr{L}\{f(t)e^{at}\} = F(s-a) \quad \text{para} \quad \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a+b)$$

Esta propiedad enuncia que si conocemos la transformada de una función, entonces también conocemos la transformada de esa función multiplicada por una exponencial.
Además,

$$\mathscr{L}^{-1}\{\ F(s-a)\} = f(t)e^{at}, \quad t \geq 0$$

Transformada de Laplace

➢ Propiedades de la Transformada de Laplace

Traslación en el dominio del tiempo
Sea $f(t), \quad t \geq 0$. Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ para $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(b)$ y a es una constante real positiva, entonces

$$\mathscr{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = F(s)e^{-as} \quad \text{para} \quad \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(b)$$

Es decir, si conocemos la transformada de una función entonces también conocemos la transformada de esa función trasladada a unidades y "conectada" a partir de a, para cualquier $a > 0$. Además,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)e^{-as}\right\} = f(t-a)u(t-a), \quad t \geq 0$$

Transformada de la derivada primera de una función: Sea $f(t)$ continua para $t \geq 0$, de orden exponencial σ para $t \to \infty$ y $f'(t)$ seccionalmente continua para $t \geq 0$.
Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ entonces para $\mathrm{Re}(s) > \sigma$:

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

Teorema ***Transformada de la derivada de orden $n \geq 1$ de una función***
Sean $f(t), f'(t), f^{(2)}(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$ continuas para $t \geq 0$ y de orden exponencial σ para $t \to \infty$ y $f^{(n)}(t)$ seccionalmente continua para $t \geq 0$. Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ entonces para $\mathrm{Re}(s) > \sigma$:

$$\mathscr{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - s^{n-3}f''(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Transformada de Laplace

➢ Propiedades de la Transformada de Laplace

Teorema *Transformada de la convolución de funciones*
Sean $f(t), g(t)$, $t \geq 0$. *Si* $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ *y* $\mathscr{L}\{g(t)\} = G(s)$ *para* $\mathrm{Re}(s) > k$, *entonces*

$$\mathscr{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\}\mathscr{L}\{g(t)\} = F(s)G(s) \quad \text{para} \quad \mathrm{Re}(s) > k$$

Corolario *Transformada de la integral de una función*
Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ *para* $\mathrm{Re}(s) > k$, *entonces para* $\mathrm{Re}(s) > k$

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Teorema *Derivada de la transformada de una función*
Sean $f(t)$, $t \geq 0$, *seccionalmente continua y de orden exponencial* σ *para* $t \to \infty$.
Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ *y* $n \in \mathbb{N}$, *entonces*

$$\mathscr{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s) \quad \text{para} \quad \mathrm{Re}(s) > \sigma$$

Tabla de transformadas

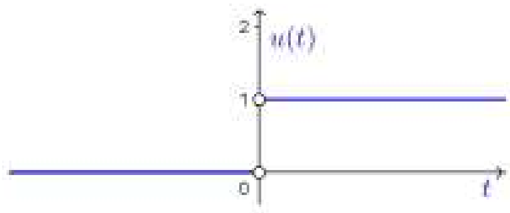
	$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\}$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	t^n n es un entero positivo	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
3	$\sqrt{t}$	$\sqrt{\frac{\pi}{4s^3}}$
4	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
5	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
6	$t^n e^{at}$ n es un entero positivo	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
7	$\operatorname{sen} kt$	$\frac{k}{s^2+k^2}$
8	$\cos kt$	$\frac{s}{s^2+k^2}$
9	$\operatorname{senh} kt$	$\frac{k}{s^2-k^2}$
10	$\cosh kt$	$\frac{s}{s^2-k^2}$

Transformada de Laplace

➢ Funciones especiales

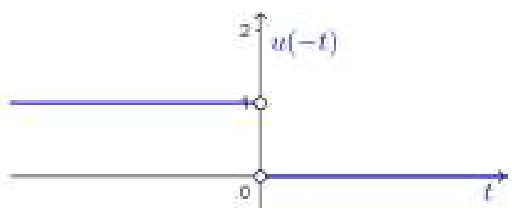
Función escalón unitario (o salto unidad o función de Heaviside)

La función escalón unitario:

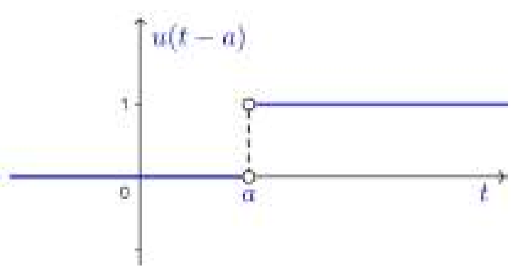


$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Ilustramos algunos casos de composición con otras funciones:



$$u(-t) = \begin{cases} 0, & -t < 0 \\ 1, & -t > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t > 0 \\ 1, & t < 0 \end{cases}$$

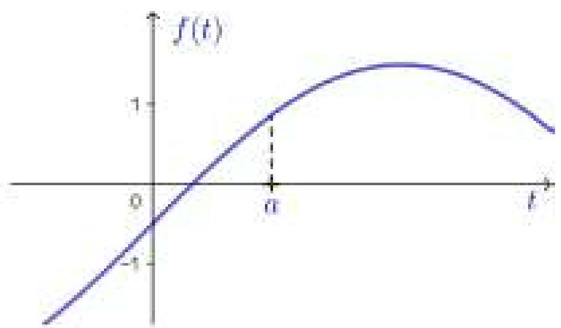


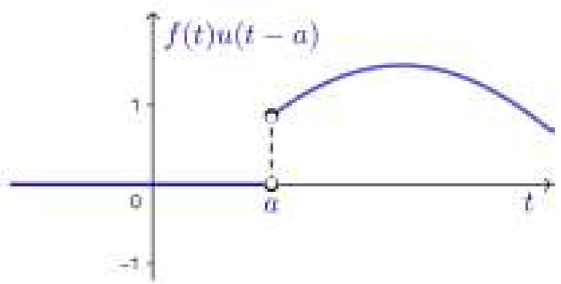
$$u(t-a) = \begin{cases} 0, & t-a < 0 \\ 1, & t-a > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t > a \end{cases}$$

Transformada de Laplace

- Funciones especiales

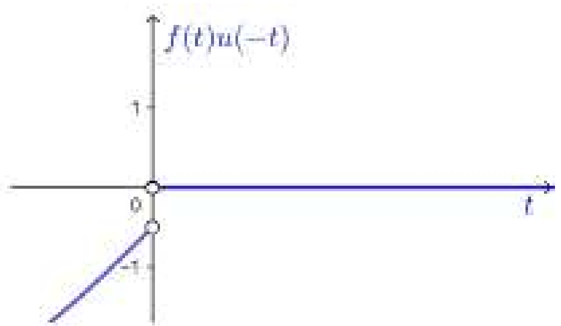
Multiplicar una función f por un escalón unitario puede "conectarla" o "desconectarla":





$f(t)$ "conectada" en $t > a$:

$$f(t)u(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ f(t), & t > a \end{cases}$$



$f(t)$ "desconectada" en $t > 0$:

$$f(t)u(-t) = \begin{cases} 0, & t > 0 \\ f(t), & t < 0 \end{cases}$$

Transformada de Laplace

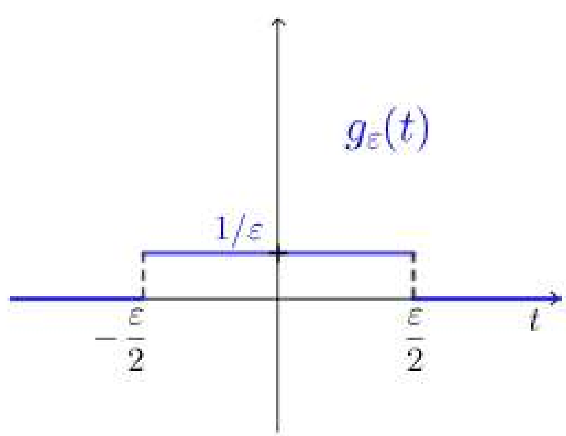
➢ Funciones especiales

Impulso unitario

Deseamos describir un evento que esté "conectado" en un entorno de $t = 0$ durante un tiempo corto con una magnitud muy grande. En principio, para $\varepsilon > 0$, definimos la función

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}, & |t| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ 0, & |t| > \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

que llamamos **impulso unitario finito** debido a que el área bajo su gráfica (y arriba del eje de las absisas) es 1.



Expresando el área con la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(t)dt = 1$$

Transformada de Laplace

➢ Funciones especiales

Cuando $\varepsilon \to 0$, $\dfrac{1}{\varepsilon} \to \infty$ y la función $g_\varepsilon(t)$ se aproxima a un “elemento”, notado $\delta(t)$, que se denomina **impulso unitario o delta de Dirac.**