ANÁLISIS NUMÉRICO

Ejemplos de la Unidad N° 1: Señales continuas y su representación por medio de Series y Transformadas de Fourier (Parte II)

- **Ejemplo 6: Integral de Fourier**

a) Encontrar la representación por medio de la integral de Fourier de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}1 & , \quad |x|<1 \\ 0 & , \quad |x|>1\end{cases}$$

b) Estudiar la convergencia de la integral de Fourier encontrada.

Solución:

a) En primer lugar se calculan los coeficientes de la integral de Fourier:

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos(\omega u)\,du=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos(\omega u)\,du=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}(\omega u)}{\omega}\right]_{-1}^{1}=\frac{2\operatorname{sen}(\omega)}{\pi\omega}$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\operatorname{sen}(\omega u)\,du=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\operatorname{sen}(\omega u)\,du=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(\omega u)}{\omega}\right]_{-1}^{1}=0$$

por lo tanto, la integral de Fourier de *f(x)* es:

$$\boxed{f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\frac{1}{\omega}\operatorname{sen}(\omega)\cos(\omega x)\right]d\omega}$$

b) Dado que f(x) es seccionalmente continua, entonces la integral de Fourier de f(x) converge a $f(x_0)=\frac{1}{2}\left(f(x_0^+)+f(x_0^-)\right) \quad \forall \; x=x_0$

Luego, de acuerdo al criterio de convergencia se tiene:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\frac{1}{\omega}\operatorname{sen}(\omega)\cos(\omega x)\right]d\omega=\begin{cases}1 & , \quad |x|<1 \\ \frac{1}{2} & , \quad x=\pm 1 \\ 0 & , \quad |x|>1\end{cases}$$

- **Ejemplo 7: Transformadas de Fourier de coseno y seno**

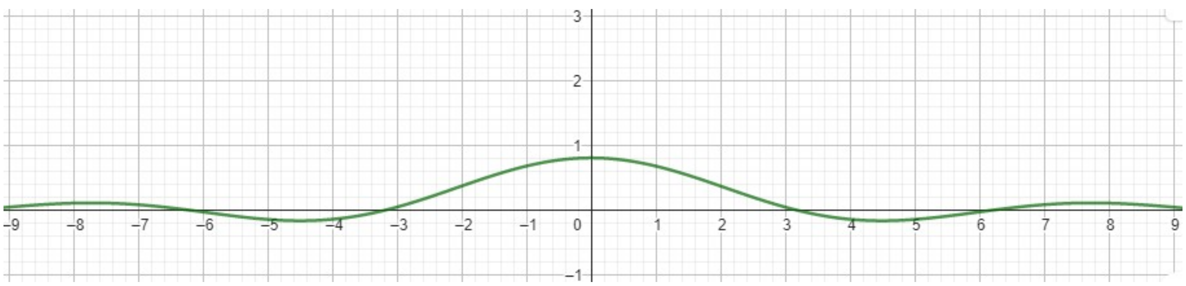
Dada la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} k & , \ 0<x<a \\ 0 & , \ x>a \end{cases}$$

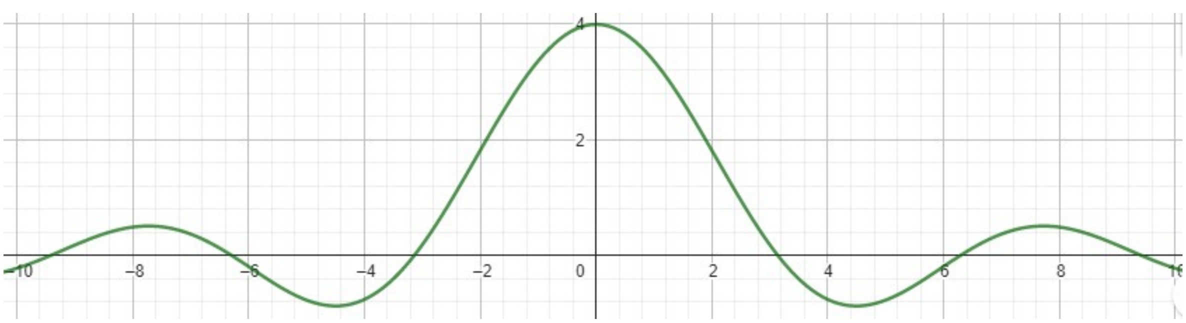
a) Determinar la transformada coseno de Fourier.

$$F_C(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{a} k\cos(\omega x)\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot k\cdot\left(\frac{\operatorname{sen}(a\omega)}{\omega}\right)$$

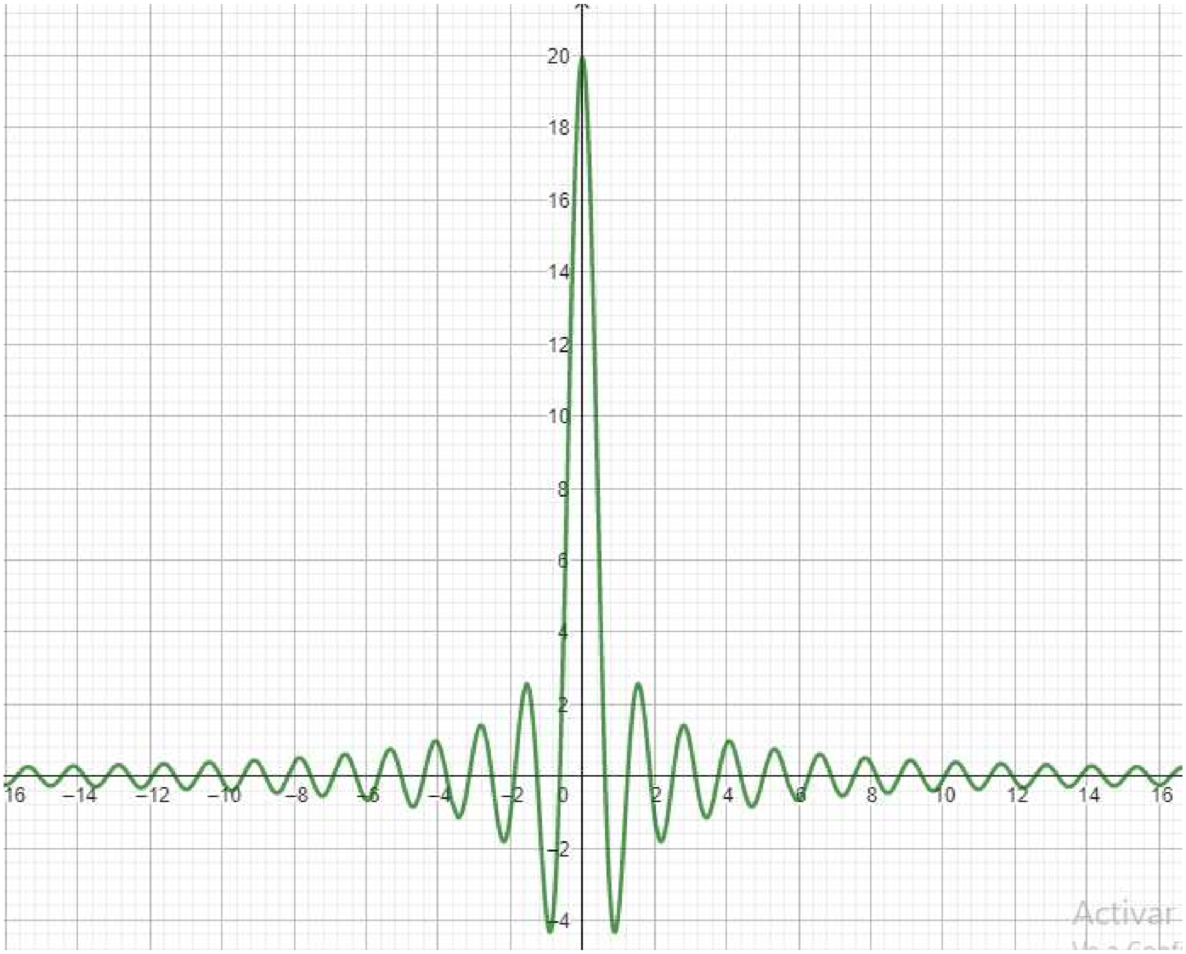
Para k=1 y a=1:



Para k=5 y a=1:



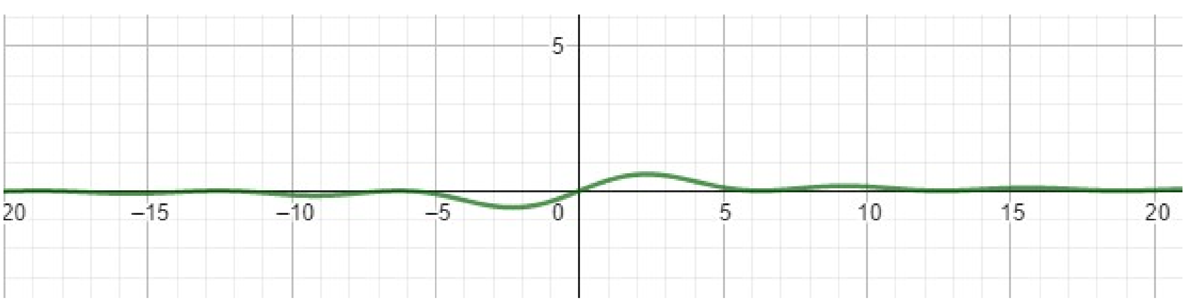
Para k=5 y a=5:



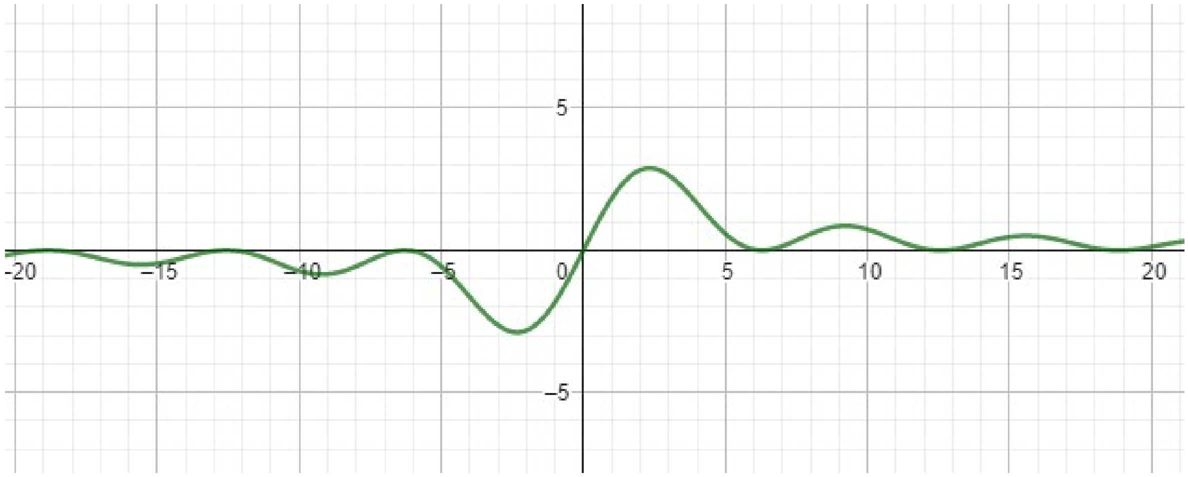
b) Determinar la transformada seno de Fourier.

$$F_S(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\operatorname{sen}(\omega x)\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{a} k\ \operatorname{sen}(\omega x)\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot k\cdot\left(\frac{1-\cos(a\omega)}{\omega}\right)$$

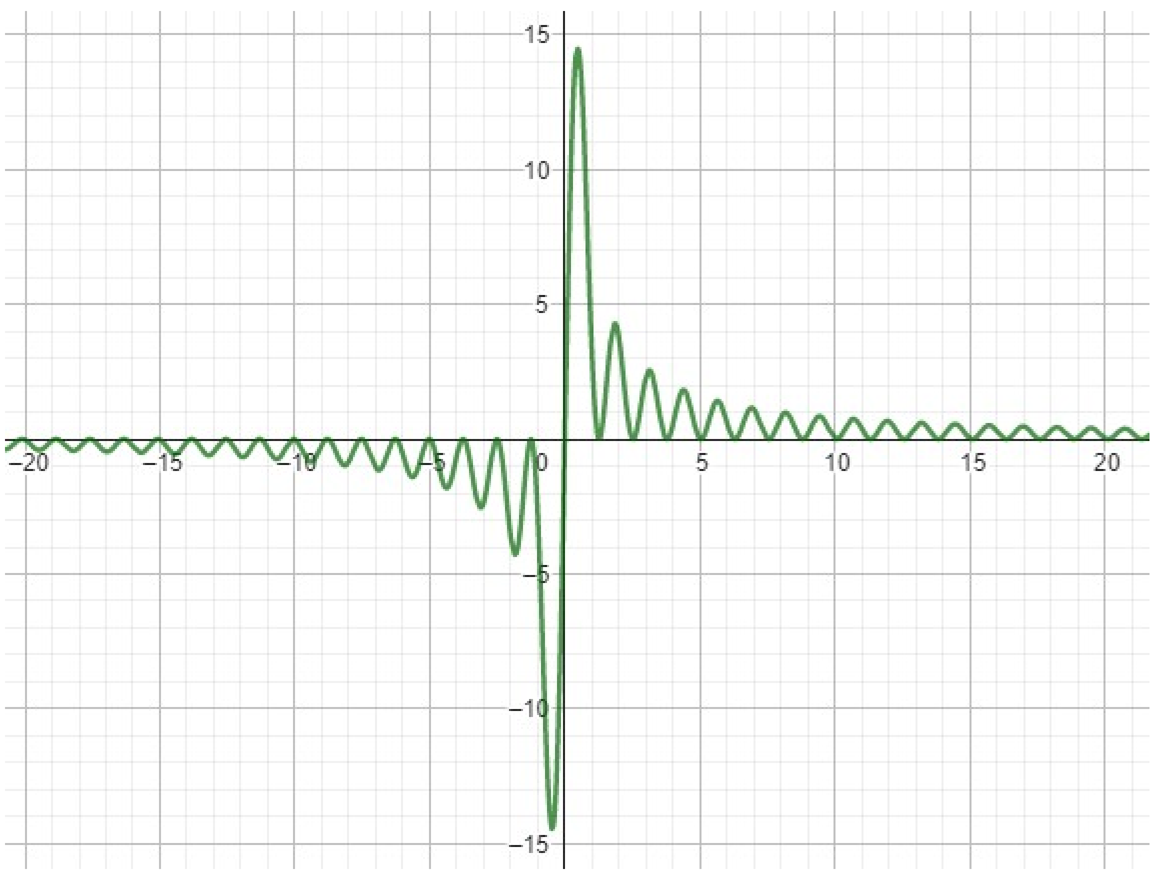
Para k=1 y a=1:



Para k=5 y a=1:



Para k=5 y a=5:



- **Ejemplo 8: Transformada de Fourier**

Determinar la Transformada de Fourier de las siguientes funciones:

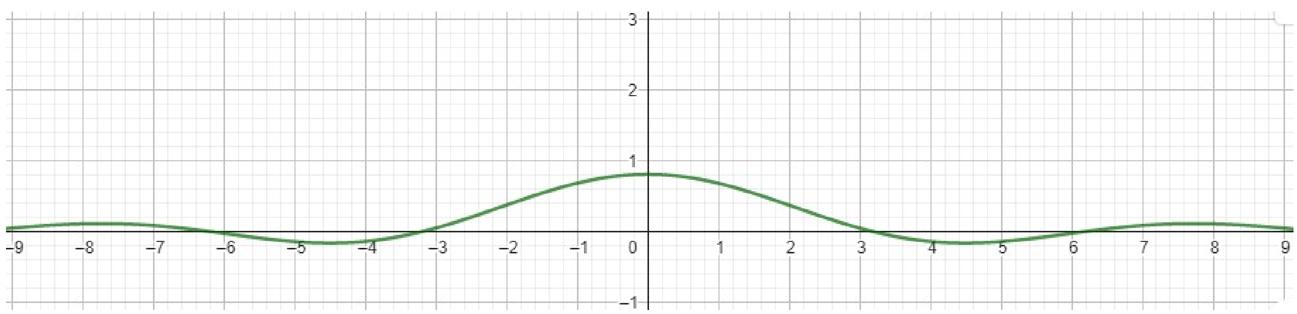
a) $$f(x)=\begin{cases}1 & , \ |x|<1 \\ 0 & , \ |x|>1\end{cases}$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left.\frac{e^{-i\omega x}}{(-i\omega)}\right|_{-1}^{1}=\frac{1}{(-i\omega)\sqrt{2\pi}}\cdot\left(e^{-i\omega}-e^{i\omega}\right)$$

En base a la Fórmula de Euler: $e^{i\omega}=\cos(\omega)+i\operatorname{sen}(\omega)$ y $e^{-i\omega}=\cos(\omega)-i\operatorname{sen}(\omega)$

$\left(e^{-i\omega}-e^{i\omega}\right)=-2i\ \operatorname{sen}(\omega)$, por lo tanto:

$$F(\omega)=\frac{(-2i)\ \operatorname{sen}(\omega)}{(-i\omega)\sqrt{2\pi}}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\operatorname{sen}(\omega)}{\omega}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\operatorname{sen}(\omega)}{\omega}$$



b) $$f(x)=\begin{cases}e^{-ax} & , \ x>0 \\ 0 & , \ x<0\end{cases} \quad , \ a>0$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{-ax}e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{-(a+i\omega)x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left.\frac{e^{-(a+i\omega)x}}{\left[-(a+i\omega)\right]}\right|_{0}^{+\infty}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left.\frac{e^{-(a+i\omega)x}}{\left[-(a+i\omega)\right]}\right|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(a+i\omega)}$$

- **Ejemplo 9: Transformada de Fourier**

Determinar la Transformada de Fourier de la función $f(x) = xe^{-x^2}$

Aplicando la propiedad de Transformada de Derivadas: $F\{f'(x)\} = i\omega F\{f(x)\}$

se tiene: $f'(x) = xe^{-x^2}$

$$F\left\{xe^{-x^2}\right\} = F\left\{-\frac{1}{2}\left(e^{-x^2}\right)'\right\} = -\frac{1}{2}F\left\{\left(e^{-x^2}\right)'\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}i\omega F\left\{e^{-x^2}\right\} = -\frac{1}{2}i\omega\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\omega^2/4} = -\frac{i\omega}{2\sqrt{2}}e^{-\omega^2/4}$$