APÉNDICE A

Tablas de la transformada de Laplace

El Apéndice A presenta la variable compleja y la función compleja. Después se presentan las tablas de parejas de la transformada de Laplace y las propiedades de la transformada de Laplace. Finalmente, se presentan teoremas usuales de la transformada de Laplace y las transformadas de Laplace de la función pulso y de la función impulso.

Variable compleja. Un número complejo tiene una parte real y una parte imaginaria, y ambas son constantes. Si la parte real y/o la parte imaginaria son variables, el número complejo se denomina *variable compleja*. En la transformada de Laplace, se emplea la notación s como variable compleja; esto es,

$$s = \sigma + j\omega$$

donde σ es la parte real y ω es la parte imaginaria.

Función compleja. Una función compleja $G(s)$ es una función de s, que tiene una parte real y una parte imaginaria, o bien,

$$G(s) = G_x + jG_y$$

donde G_x y G_y son cantidades reales. La magnitud de $G(s)$ es $\sqrt{G_x^2 + G_y^2}$, y el ángulo θ de $G(s)$ es $\tan^{-1}(G_y/G_x)$. El ángulo se mide en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, a partir del eje real positivo. El complejo conjugado de $G(s)$ es $\bar{G}(s) = G_x - jG_y$.

Las funciones complejas que se suelen encontrar en el análisis de los sistemas de control lineales son funciones univaluadas de s y se determinan en forma única para un determinado valor de s.

Se dice que una función compleja $G(s)$ es *analítica* en una región, si $G(s)$ y todas sus derivadas existen en esa región. La derivada de una función analítica $G(s)$ se obtiene mediante

$$\frac{d}{ds}G(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{G(s + \Delta s) - G(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta G}{\Delta s}$$

Como $\Delta s = \Delta\sigma + j\Delta\omega$, Δs se puede aproximar a cero a lo largo de un número infinito de trayectorias diferentes. Se puede demostrar, aunque no se realiza aquí, que si las derivadas tomadas a lo largo de dos trayectorias particulares, esto es, $\Delta s = \Delta\sigma$ y $\Delta s = j\Delta\omega$ son iguales, entonces la derivada es única para cualquier otra trayectoria $\Delta s = \Delta\sigma + j\Delta\omega$, y por lo tanto, la derivada existe.

Para una trayectoria determinada $\Delta s = \Delta\sigma$ (lo que significa que la trayectoria es paralela al eje real),

$$\frac{d}{ds}G(s) = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \left(\frac{\Delta G_x}{\Delta\sigma} + j\frac{\Delta G_y}{\Delta\sigma}\right) = \frac{\partial G_x}{\partial\sigma} + j\frac{\partial G_y}{\partial\sigma}$$

Para otra trayectoria determinada $\Delta s = j\Delta\omega$ (lo que significa que la trayectoria es paralela al eje imaginario),

$$\frac{d}{ds}G(s) = \lim_{j\Delta\omega \to 0} \left(\frac{\Delta G_x}{j\Delta\omega} + j\frac{\Delta G_y}{j\Delta\omega}\right) = -j\frac{\partial G_x}{\partial\omega} + \frac{\partial G_y}{\partial\omega}$$

Si estos dos valores de la derivada son iguales,

$$\frac{\partial G_x}{\partial\sigma} + j\frac{\partial G_y}{\partial\sigma} = \frac{\partial G_y}{\partial\omega} - j\frac{\partial G_x}{\partial\omega}$$

o si se satisfacen las dos condiciones siguientes,

$$\frac{\partial G_x}{\partial\sigma} = \frac{\partial G_y}{\partial\omega} \quad \text{y} \quad \frac{\partial G_y}{\partial\sigma} = -\frac{\partial G_x}{\partial\omega}$$

la derivada $dG(s)/ds$ se determina de forma única. Estas dos condiciones se conocen como las condiciones de Cauchy-Riemann. Si se cumplen estas condiciones, la función $G(s)$ es analítica.

Como ejemplo, considérese la siguiente $G(s)$:

$$G(s) = \frac{1}{s + 1}$$

Por lo tanto,

$$G(\sigma + j\omega) = \frac{1}{\sigma + j\omega + 1} = G_x + jG_y$$

donde

$$G_x = \frac{\sigma + 1}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2} \qquad \text{y} \qquad G_y = \frac{-\omega}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2}$$

Se puede apreciar que, excepto en $s = -1$ (esto es, $\sigma = -1$, $\omega = 0$), $G(s)$ satisface las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial G_x}{\partial \sigma} = \frac{\partial G_y}{\partial \omega} = \frac{\omega^2 - (\sigma + 1)^2}{[(\sigma + 1)^2 + \omega^2]^2}$$

$$\frac{\partial G_y}{\partial \sigma} = \frac{\partial G_x}{\partial \omega} = \frac{2\omega(\sigma + 1)}{[(\sigma + 1)^2 + \omega^2]^2}$$

Por tanto, $G(s) = 1/(s + 1)$ es analítica en todo el plano s, excepto en $s = -1$, y la derivada $dG(s)/ds$, excepto en $s = 1$, es:

$$\frac{d}{ds} G(s) = \frac{\partial G_x}{\partial \sigma} + j\,\frac{\partial G_y}{\partial \sigma} = \frac{\partial G_y}{\partial \omega} - j\,\frac{\partial G_x}{d\omega}$$

$$= -\frac{1}{(\sigma + j\omega + 1)^2} = -\frac{1}{(s + 1)^2}$$

Obsérvese que la derivada de una función analítica se obtiene simplemente diferenciando $G(s)$ con respecto a s. En este ejemplo,

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s + 1}\right) = -\frac{1}{(s + 1)^2}$$

Los puntos en el plano s en los cuales la función $G(s)$ es analítica se denominan puntos *ordinarios*, mientras que los puntos del plano s en los cuales la función $G(s)$ no es analítica se denominan puntos *singulares*. Los puntos singulares en los cuales la función $G(s)$ o sus derivadas tienden a infinito se denominan polos. Los puntos singulares en los que la función $G(s)$ es igual a cero se denominan *ceros*.

Si $G(s)$ tiende a infinito conforme s se aproxima a $-p$ y si la función:

$$G(s)(s + p)^n, \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

tiene un valor finito diferente de cero en $s = -p$, entonces $s = -p$ se denomina polo de orden n. Si $n = 1$, el polo se designa polo simple. Si $n = 2, 3, \ldots$, el polo es un polo de segundo orden, polo de tercer orden, etc.

Como ejemplo, se considera la función compleja

$$G(s) = \frac{K(s + 2)(s + 10)}{s(s + 1)(s + 5)(s + 15)^2}$$

$G(s)$ tiene ceros en $s = -2$, $s = -10$, polos simples en $s = 0$, $s = -1$, $s = -5$, y un polo doble (polo múltiple de orden 2) en $s = -15$. Se observa que $G(s)$ se vuelve cero en $s = \infty$. Como, para valores grandes de s,

$$G(s) \div \frac{K}{s^3}$$

$G(s)$ posee un cero triple (cero múltiple de orden 3) en $s = \infty$. Si se incluyen puntos en infinito, $G(s)$ tiene el mismo número de polos que de ceros. En resumen, $G(s)$ tiene cinco ceros ($s = -2$, $s = -10$, $s = \infty$, $s = \infty$, $s = \infty$) y cinco polos ($s = 0$, $s = -1$, $s = -5$, $s = -15$, $s = -15$).

Transformada de Laplace. Sean

$f(t)$ = una función del tiempo t tal que $f(t) = 0$ para $t < 0$

s = una variable compleja

$\mathscr{L}$ = un símbolo operativo que indica que la cantidad a la que antecede se va a transformar mediante la integral de Laplace $\int_0^\infty e^{-st}\,dt$

$F(s)$ = transformada de Laplace de $f(t)$

Entonces la transformada de Laplace de $f(t)$ se obtiene mediante

$$\mathscr{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

El proceso inverso de encontrar la función del tiempo $f(t)$ a partir de la transformada de Laplace $F(s)$ se denomina *transformada inversa de Laplace*. La notación para la transformada inversa de Laplace es $\mathscr{L}^{-1}$ se encuentra a partir de $F(s)$ mediante la siguiente integral de inversión:

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}\,ds, \qquad \text{para } t > 0$$

donde c, la abscisa de convergencia, es una constante real que se eligió más grande que las partes reales para todos los puntos singulares de $F(s)$. Por tanto, la trayectoria de integración es paralela al eje $j\omega$ y se desplaza una cantidad c a partir de él. Esta trayectoria de integración va hacia la derecha de todos los puntos singulares.

Parece complicado evaluar la integral de inversión. En la práctica, rara vez se emplea esta integral para encontrar $f(t)$. Normalmente se utiliza el método de expansión en fracciones simples dado en el Apéndice B.

En lo que sigue, en la Tabla A-1 se presentan las parejas de transformadas de Laplace de las funciones más comunes, y en la Tabla A-2, se presentan las propiedades de las transformadas de Laplace.

Tabla A-1. Parejas de la transformada de Laplace.

	$f(t)$	$F(s)$
1	Unidad de impulso $\delta(t)$	1
2	Unidad de paso $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$	$\frac{1}{s^n}$
5	$t^n \quad (n = 1, 2, 3, ...)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
7	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
9	$t^n e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\text{sen}\, \omega \text{t}$	$\frac{\omega}{\text{s}^2 + \omega^2}$
11	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
12	$\text{senh}\, \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
13	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega 2}$
14	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at)}$	$\frac{1}{s(s+a)}$
15	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
16	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
17	$\frac{1}{ab}\left[1 + \frac{1}{a-b}(be^{-at} - ae^{-bt})\right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$

(*continúa*)

Tabla A-1. (*Continuación*).

	$f(t)$	$F(s)$
18	$\frac{1}{a^2}(1 - e^{-at} - ate^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$
19	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
20	$e^{-at}\operatorname{sen}\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
21	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
22	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t \quad (0 < \zeta < 1)$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
23	$-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t - \phi)$ $\phi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ $(0 < \zeta < 1,\ 0 < \phi < \pi/2)$	$\frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
24	$-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ $(0 < \zeta < 1,\ 0 < \phi < \pi/2)$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$
25	$1 - \cos\omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}$
26	$\omega t - \operatorname{sen}\omega t$	$\frac{\omega^3}{s^2(s^2+\omega^2)}$
27	$\operatorname{sen}\omega t - \omega t\cos\omega t$	$\frac{2\omega^3}{(s^2+\omega^2)^2}$
28	$\frac{1}{2\omega}\,t\operatorname{sen}\omega t$	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$
29	$t\cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
30	$\frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t) \quad (\omega_1^2 \neq \omega_2^2)$	$\frac{s}{(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_2^2)}$
31	$\frac{1}{2\omega}(\operatorname{sen}\omega t + \omega t\cos\omega t)$	$\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$

Tabla A-2. Propiedades de la transformada de Laplace.

1	$\mathcal{L}[Af(t)] = AF(s)$
2	$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$
3	$\mathcal{L}_{\pm}\left[\dfrac{d}{dt} f(t)\right] = sF(s) - f(0\pm)$
4	$\mathcal{L}_{\pm}\left[\dfrac{d^2}{dt^2} f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0\pm) - \dot{f}(0\pm)$
5	$\mathcal{L}_{\pm}\left[\dfrac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} \overset{(k-1)}{f}(0\pm)$ donde $\overset{(k-1)}{f}(t) = \dfrac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} f(t)$
6	$\mathcal{L}_{\pm}\left[\int f(t)\,dt\right] = \dfrac{F(s)}{s} + \dfrac{1}{s}\left[\int f(t)\,dt\right]_{t=0\pm}$
7	$\mathcal{L}_{\pm\,\pm}\left[\int \cdots \int f(t)\,(dt)^n\right] = \dfrac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{s^{n-k+1}}\left[\int \cdots \int f(t)\,(dt)^k\right]_{t=0\pm}$
8	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \dfrac{F(s)}{s}$
9	$\int_0^\infty f(t)\,dt = \lim_{s\to 0} F(s) \quad$ si $\int_0^\infty f(t)\,dt$ salidas
10	$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} f(t)] = F(s + a)$
11	$\mathcal{L}[f(t-\alpha)1(t-\alpha)] = e^{-\alpha s} F(s) \qquad a \geqslant 0$
12	$\mathcal{L}[tf(t)] = -\dfrac{dF(s)}{ds}$
13	$\mathcal{L}[t^2 f(t)] = \dfrac{d^2}{ds^2} F(s)$
14	$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n} F(s) \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$
15	$\mathcal{L}\left[\dfrac{1}{t} f(t)\right] = \int_s^\infty F(s)\,ds \quad$ si $\lim_{t\to 0} \dfrac{1}{t} f(t)$ salidas
16	$\mathcal{L}\left[f\left(\dfrac{1}{a}\right)\right] = aF(as)$
17	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\,d\tau\right] = F_1(s)F_2(s)$
18	$\mathcal{L}[f(t)g(t)] = \dfrac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\infty} F(p)G(s-p)\,dp$

Por último se presentan dos teoremas frecuentemente utilizados junto con las transformadas de Laplace de la función pulso y de la función impulso.

Teorema de valor inicial	$f(0+) = \lim\limits_{t \to 0+} f(t) = \lim\limits_{s \to \infty} sF(s)$
Teorema de valor final	$f(\infty) = \lim\limits_{t \to \infty} f(t) = \lim\limits_{s \to 0} sF(s)$
Función pulso $f(t) = \dfrac{A}{t_0} 1(t) - \dfrac{A}{t_0} 1(t - t_0)$	$\mathscr{L}[f(t)] = \dfrac{A}{t_0 s} - \dfrac{A}{t_0 s} e^{-st_0}$
Función impulso $g(t) = \lim\limits_{t_0 \to 0} \dfrac{A}{t_0}, \quad \text{para } 0 < t < t_0$ $= 0, \quad \text{para } t < 0,\ t_0 < t$	$\mathscr{L}[g(t)] = \lim\limits_{t_0 \to 0} \left[\dfrac{A}{t_0 s} (1 - e^{-st_0}) \right]$ $= \lim\limits_{t_0 \to 0} \dfrac{\dfrac{d}{dt_0} [A(1 - e^{-st_0})]}{\dfrac{d}{dt_0} (t_0 s)}$ $= \dfrac{As}{s} = A$

APÉNDICE B

Método de desarrollo en fracciones simples

Antes de presentar la aproximación de MATLAB para el cálculo de desarrollos en fracciones simples de funciones de transferencia, se presenta la aproximación manual para calcular desarrollos en fracciones simples de funciones de transferencia.

Desarrollo en fracciones simples cuando *F*(*s*) sólo contiene polos distintos. Considérese $F(s)$ escrita en la forma factorizada

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}, \qquad \text{para } m < n$$

donde $p_1, p_2, ..., p_n$ y $z_1, z_2, ..., z_m$ son cantidades reales o complejas, pero para cada p_i o z_j complejo se tendrá el complejo conjugado de p_i o z_j, respectivamente. Si $F(s)$ sólo involucra polos distintos, puede expandirse en una suma de fracciones simples del modo siguiente:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s + p_1} + \frac{a_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s + p_n} \tag{B-1}$$

donde a_k ($k = 1, 2, ..., n$) son constantes. El coeficiente a_k se denomina *residuo* del polo en $s = -p_k$. El valor de a_k se calcula multiplicando ambos miembros de la Ecuación (B-1) por $(s + p_k)$ y suponiendo que $s = -p_k$; esto conduce a

$$\begin{aligned}\left[(s + p_k)\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-p_k} &= \left[\frac{a_1}{s + p_1}(s + p_k) + \frac{a_2}{s + p_2}(s + p_k)\right.\\ &\qquad \left. + \cdots + \frac{a_k}{s + p_k}(s + p_k) + \cdots + \frac{a_n}{s + p_n}(s + p_k)\right]_{s=-p_k}\\ &= a_k\end{aligned}$$

Se observa que todos los términos expandidos se cancelan, con excepción de a_k. Por tanto, el residuo a_k se calcula a partir de

$$a_k = \left[(s + p_k)\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-p_k}$$

Obsérvese que, como $f(t)$ es una función real del tiempo, si p_1 y p_2 son complejos conjugados, en tal caso los residuos a_1 y a_2 también son complejos conjugados. Sólo necesita evaluarse uno de los conjugados, a_1 o a_2, porque el otro se conoce automáticamente.

Como

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a_k}{s + p_k}\right] = a_k e^{-p_k t}$$

$f(t)$ se obtiene así:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \cdots + a_n e^{-p_n t}, \qquad \text{para } t \geqslant 0$$

EJEMPLO B-1 Encuentre la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)}$$

El desarrollo en fracciones simples de $F(s)$ es

$$F(s) = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{a_1}{s + 1} + \frac{a_2}{s + 2}$$

donde a_1 y a_2 se encuentran mediante

$$a_1 = \left[(s + 1)\frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)}\right]_{s=-1} = \left[\frac{s + 3}{s + 2}\right]_{s=-1} = 2$$

$$a_2 = \left[(s + 2)\frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)}\right]_{s=-2} = \left[\frac{s + 3}{s + 1}\right]_{s=-2} = -1$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s + 1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s + 2}\right] \\ &= 2e^{-t} - e^{-2t}, \qquad \text{para } t \geqslant 0 \end{aligned}$$

EJEMPLO B-2 Obtenga la transformada inversa de Laplace de

$$G(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s + 1)(s + 2)}$$

Aquí, como el grado del polinomio del numerador es mayor que el polinomio del denominador, se debe dividir el numerador entre el denominador.

$$G(s) = s + 2 + \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)}$$

Observe que la transformada de Laplace de la función impulso $\delta(t)$ es 1 y que la transfomada de Laplace de $d\delta(t)/dt$ es s. El tercer término del lado derecho de esta última ecuación es $F(s)$ en el Ejemplo B-1. Por tanto, la transformada inversa de Laplace de $G(s)$ se obtiene como

$$g(t) = \frac{d}{dt}\,\delta(t) + 2\delta(t) + 2e^{-t} - e^{-2t}, \qquad \text{para } t \geqslant 0-$$

EJEMPLO B-3 Encuentre la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{2s + 12}{s^2 + 2s + 5}$$

Observe que el polinomio del denominador se puede factorizar como

$$s^2 + 2s + 5 = (s + 1 + j2)(s + 1 - j2)$$

Si la función $F(s)$ contiene un par de polos complejos conjugados, es conveniente no expandir $F(s)$ en las fracciones simples usuales, sino en la suma de una función seno amortiguada y una función coseno amortiguada.

Observando que $s^2 + 2s + 5 = (s + 1)^2 + 2^2$ y utilizando las transformadas de Laplace de $e^{-\alpha t}\,\text{sen}\,\omega t$ y $e^{-\alpha t}\cos\omega t$, reescritas por tanto,

$$\mathscr{L}[e^{-\alpha t}\,\text{sen}\,\omega t] = \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$$

$$\mathscr{L}[e^{-\alpha t}\cos\omega t] = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$$

la $F(s)$ dada se escribe como una suma de una función seno amortiguada y una función coseno amortiguada.

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{2s + 12}{s^2 + 2s + 5} = \frac{10 + 2(s + 1)}{(s + 1)^2 + 2^2} \\ &= 5\,\frac{2}{(s + 1)^2 + 2^2} + 2\,\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2} \end{aligned}$$

De aquí se sigue que

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathscr{L}^{-1}[F(s)] \\ &= 5\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s + 1)^2 + 2^2}\right] + 2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2}\right] \\ &= 5e^{-t}\,\text{sen}\,2t + 2e^{-t}\cos 2t, \qquad \text{para } t \geqslant 0 \end{aligned}$$

Desarrollo en fracciones simples cuando $F(s)$ contiene polos múltiples. En lugar de analizar el caso general, se utilizará un ejemplo para mostrar cómo obtener el desarrollo en fracciones simples de $F(s)$.

Considérese la siguiente $F(s)$:

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s + 1)^3}$$

El desarrollo en fracciones simples de esta $F(s)$ contiene tres términos:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_1}{s + 1} + \frac{b_2}{(s + 1)^2} + \frac{b_3}{(s + 1)^3}$$

donde b_3, b_2 y b_1 se determinan del modo siguiente. Si se multiplican ambos miembros de esta última ecuación por $(s+1)^3$, se tiene que

$$(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)} = b_1(s+1)^2 + b_2(s+1) + b_3 \tag{B-2}$$

Por tanto, si se supone que $s = -1$, la Ecuación (B-2) da por resultado:

$$\left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-1} = b_3$$

Asimismo, la diferenciación de ambos miembros de la Ecuación (B-2) con respecto a s da

$$\frac{d}{ds}\left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right] = b_2 + 2b_1(s+1) \tag{B-3}$$

Si se supone que $s = -1$ en la Ecuación (B-3), entonces,

$$\frac{d}{ds}\left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-1} = b_2$$

Diferenciando ambos miembros de la Ecuación (B-3) con respecto a s, resulta

$$\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right] = 2b_1$$

A partir del análisis precedente, se observa que los valores de b_3, b_2 y b_1 se encuentran sistemáticamente del modo siguiente:

$$\begin{aligned}
b_3 &= \left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-1} \\
&= (s^2+2s+3)_{s=-1} \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= \left\{\frac{d}{ds}\left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right]\right\}_{s=-1} \\
&= \left[\frac{d}{ds}(s^2+2s+3)\right]_{s=-1} \\
&= (2s+2)_{s=-1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{2!}\left\{\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right]\right\}_{s=-1} \\
&= \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{ds^2}(s^2+2s+3)\right]_{s=-1} \\
&= \frac{1}{2}(2) = 1
\end{aligned}$$

Por tanto, se obtiene

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \mathscr{L}^{-1}[F(s)] \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{0}{(s+1)^2}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^3}\right] \\
&= e^{-t} + 0 + t^2 e^{-t} \\
&= (1+t^2)e^{-t}, \qquad \text{para } t \geqslant 0
\end{aligned}
$$

Comentarios. Para funciones complicadas con denominadores que contienen polinomios de orden superior, un desarrollo en fracciones simples puede llevar mucho tiempo. En tal caso, se recomienda el uso de MATLAB.

Desarrollo en fracciones simples con MATLAB. MATLAB tiene una orden para obtener el desarrollo en fracciones simples de $B(s)/A(s)$ Considérese la función de transferencia $B(s)/A(s)$:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\text{num}}{\text{den}} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

donde algunos a_i y b_j pueden ser cero. En MATLAB, los vectores fila num y den especifican los coeficientes del numerador y del denominador en la función de transferencia. Es decir,

```
num = [b0 b1 ... bn]
den = [1 a1 ... an]
```

El comando

```
[r,p,k] = residue(num,den)
```

encuentra los residuos (`r`), los polos (`p`) y los términos directos (`k`) de una desarrollo en fracciones simples del cociente de dos polinomios $B(s)$ y $A(s)$.

El desarrollo en fracciones simples de $B(s)/A(s)$ se obtiene mediante

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{r(1)}{s-p(1)} + \frac{r(2)}{s-p(2)} + \cdots + \frac{r(n)}{s-p(n)} + k(s) \tag{B-4}$$

Comparando las Ecuaciones (B-1) y (B-4), se observa que $p(1) = -p_1$, $p(2) = -p_2$, ..., $p(n) = -p_n$; $r(1) = a_1$, $r(2) = a_2$, ..., $r(n) = a_n$. [$k(s)$ es un término directo.]

EJEMPLO B-4 Considere la siguiente función de transferencia:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{2s^3 + 5s^2 + 3s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Para esta función,

```
num = [2 5 3 6]
den = [1 6 11 6]
```

La orden

```
[r,p,k] = residue(num,den)
```

proporciona el resultado siguiente:

```
[r,p,k] = residue(num,den)
r =

   -6.0000
   -4.0000
    3.0000

p =

   -3.0000
   -2.0000
   -1.0000

k =
   2
```

(Observe que los residuos se devuelven en el vector columna r, las posiciones de los polos en el vector columna *p* y el término directo en el vector fila *k*). Esta es la representación en MATLAB del siguiente desarrollo en fracciones simples de $B(s)/A(s)$:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{2s^3 + 5s^2 + 3s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$= \frac{-6}{s+3} + \frac{-4}{s+2} + \frac{3}{s+1} + 2$$

Observe que si $p(j) = p(j+1) = \cdots = p(j+m-1)$ [esto es, $p_j = p_{j+1} = \cdots = p_{j+m-1}$], el polo $p(j)$ es un polo de multiplicidad m. En este caso, el desarrollo incluye términos en la forma

$$\frac{r(j)}{s-p(j)} + \frac{r(j+1)}{[s-p(j)]^2} + \cdots + \frac{r(j+m-1)}{[s-p(j)]^m}$$

Consúltense los detalles en el Ejemplo B-5.

EJEMPLO B-5 Obtenga el desarrollo $B(s)/A(s)$ siguiente en fracciones simples utilizando MATLAB.

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3} = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

Para esta función, se tiene

```
num = [1 2 3]
den = [1 3 3 1]
```

La orden

```
[r,p,k] = residue(num,den)
```

proporciona el resultado siguiente:

```
num = [1 2 3];
den = [1 3 3 1];
[r,p,k] = residue(num,den)

r =

   1.0000
   0.0000
   2.0000

p =

   -1.0000
   -1.0000
   -1.0000

k =

  []
```

Es la representación en MATLAB del desarrollo en fracciones simples de $B(s)/A(s)$:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{1}{s+1} + \frac{0}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^3}$$

Observe que el término directo `k` es cero.