

- 24.5 Estimación de parámetros, 722
- 24.6 Intervalos de confianza, 725
- 24.7 Prueba de hipótesis. Decisiones, 735
- 24.8 Control de calidad, 747
- 24.9 Muestreo de aceptación, 753
- 24.10 Bondad de ajuste. Prueba χ^2 , 758
- 24.11 Pruebas no paramétricas, 761
- 24.12 Pares de mediciones. Ajuste de rectas, 765

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 24, 770
Resumen del capítulo 24, 773

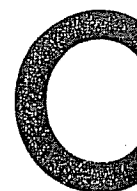
APÉNDICES

- Apéndice 1 Bibliografía, 777
- Apéndice 2 Respuestas a los problemas impares, 783
- Apéndice 3 Material auxiliar, 817
 - A3.1 Fórmulas para funciones especiales, 817
 - A3.2 Derivadas parciales, 823
 - A3.3 Sucesiones y series, 826
- Apéndice 4 Demostraciones adicionales, 829
- Apéndice 5 Tablas, 837

ÍNDICE

853

Parte



ANÁLISIS DE FOURIER Y ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

-
- Capítulo 10 Series, integrales y transformadas de Fourier
 - Capítulo 11 Ecuaciones diferenciales parciales
-

Son muy comunes los fenómenos periódicos en la física y en sus aplicaciones en la ingeniería y es un importante problema práctico representar las funciones periódicas correspondientes en términos de funciones periódicas simples tales como el seno y el coseno. Esto lleva a las series de Fourier, cuyos términos son funciones de senos y de cosenos. Su introducción por Fourier (después de los trabajos realizados por Euler y Daniel Bernoulli) fue uno de los acontecimientos más importantes en el desarrollo de las matemáticas aplicadas. El capítulo 10 se ocupa principalmente de las series de Fourier. Las ideas y técnicas correspondientes pueden generalizarse a fenómenos no periódicos. Esto lleva a las integrales de Fourier y a las transformadas de Fourier (secciones 10.9-10.11) y un nombre genérico para esta área en su conjunto es análisis de Fourier.

El capítulo 11 se ocupa de las ecuaciones diferenciales parciales más importantes de la física y la ingeniería. En esta área el análisis de Fourier tiene sus aplicaciones más importantes, como herramienta básica para la solución de problemas con valores en la frontera y con valor inicial en mecánica, flujo de calor, electrostática y otros campos.

10

Series, integrales y transformadas de Fourier

Las series de Fourier¹ (sección 10.2) son series de términos coseno y seno y surgen en la importante tarea práctica de representar funciones periódicas generales. Constituyen una herramienta muy importante en la solución de problemas en los que intervienen ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales.

En el presente capítulo se discuten los conceptos, hechos y técnicas básicas en relación con las series de Fourier. Se incluyen ejemplos ilustrativos y algunas aplicaciones importantes en ingeniería. En el capítulo siguiente sobre ecuaciones diferenciales parciales y problemas con valor inicial y con valores en la frontera se presentan aplicaciones adicionales.

La *teoría* de las series de Fourier es bastante complicada, pero la *aplicación* de estas series es simple. Las series de Fourier son, en cierto sentido, más universales que las series de Taylor, ya que muchas funciones periódicas *discontinuas* de interés práctico pueden desarrollarse en series de Fourier, pero, desde luego, no tienen representaciones en series de Taylor.

En las tres secciones finales de este capítulo se tratan las **integrales de Fourier** y las **transformadas de Fourier**, que generalizan las ideas y las técnicas de las series de Fourier a funciones no periódicas definidas para toda x . En el capítulo siguiente (sección 11.14) se considerarán las aplicaciones correspondientes a ecuaciones diferenciales parciales.

Prerrequisitos para este capítulo: Cálculo integral elemental

Secciones que pueden omitirse en un curso más corto: 10.6-10.11

Bibliografía: Apéndice 1, parte C.

Respuestas a los problemas: Apéndice 2.

¹ JEAN-BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768-1830). físico y matemático francés, vivió y enseñó en París, acompañó a Napoleón a Egipto y más tarde fue prefecto de Grenoble. Utilizó series de Fourier en su obra principal *Théorie analytique de la chaleur* (*Teoría analítica del calor*, París, 1822) en la que desarrolló la teoría de la conducción del calor (ecuación del calor, ver la sección 11.5). Estas nuevas series llegaron a ser una herramienta de suma importancia en la física matemática y tuvieron asimismo una influencia considerable en el desarrollo subsecuente de las propias matemáticas; ver la referencia [9] en el apéndice 1.

10.1 FUNCIONES PERIÓDICAS. SERIES TRIGONOMÉTRICAS

Se dice que una función $f(x)$ es **periódica** si está definida para toda x real y si existe algún número positivo p tal que

$$(1) \quad f(x + p) = f(x) \quad \text{para toda } x.$$

A este número p se le llama **periodo** de $f(x)$. La gráfica de esta función se obtiene por repetición periódica de su gráfica en cualquier intervalo de longitud p (figura 229). Los fenómenos y las funciones periódicas se presentan en muchas aplicaciones.

Funciones periódicas conocidas son las funciones seno y coseno y se hace notar que la función $f = c = \text{const}$ es también una función periódica en el sentido de la definición, ya que satisface (1) para toda p positiva. Ejemplos de funciones que *no* son periódicas son x , x^2 , x^3 , e^x y $\ln x$, por mencionar sólo algunas.²

Por (1) se tiene $f(x + 2p) = f[(x + p) + p] = f(x + p) = f(x)$, etc., y para cualquier entero n ,

$$(2) \quad f(x + np) = f(x) \quad \text{para toda } x.$$

Por tanto, $2p$, $3p$, $4p$, \dots también son periodos de $f(x)$. Además, si $f(x)$ y $g(x)$ tienen periodo p , entonces la función

$$h(x) = af(x) + bg(x) \quad (a, b \text{ constantes})$$

también tiene periodo p .

El problema por resolver en las primeras secciones de este capítulo será la representación de varias funciones de periodo $p = 2\pi$ en términos de las funciones simples

$$(3) \quad 1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad \dots, \quad \cos nx, \quad \sin nx, \quad \dots,$$

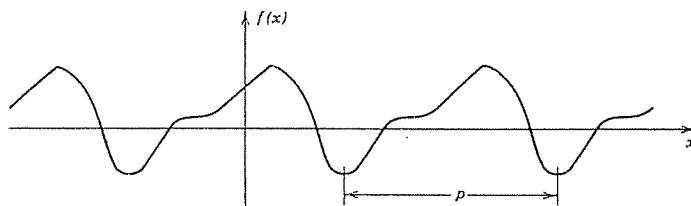


Figura 229. Función periódica.

² Si una función periódica $f(x)$ tiene un periodo p (> 0) que es el más pequeño de todos, éste con frecuencia se denomina el **periodo primitivo** de $f(x)$. Por ejemplo, el periodo primitivo de $\sin x$ es 2π y el periodo primitivo de $\sin 2x$ es π . Una función periódica sin periodo primitivo es $f = \text{const}$.

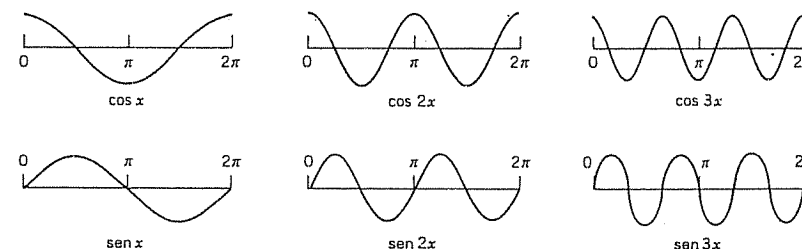


Figura 230. Funciones coseno y seno que tienen el periodo 2π .

que tienen periodo 2π (figura 230). Las series que surgirán serán de la forma

$$(4) \quad a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots,$$

donde $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ son constantes reales. Estas series se llaman **series trigonométricas** y a las a_n y b_n se les llama los **coeficientes** de la serie. Usando el signo de sumatoria,³ esta serie puede escribirse

$$(4) \quad a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Al conjunto de funciones (3) a partir del cual se ha construido la serie (4) suele llamarse el **sistema trigonométrico**.

Se observa que cada término de la serie (4) tiene periodo 2π . Por tanto, si la serie (4) converge, su suma será una función de periodo 2π .

Las funciones periódicas que se presentan en problemas prácticos con frecuencia son bastante complicadas y es deseable representarlas en términos de funciones periódicas simples. Se verá que casi cualquier función periódica $f(x)$ de periodo 2π que aparezca en las aplicaciones —por ejemplo, con relación a vibraciones— puede representarse por una serie trigonométrica (la cual se denominará **series de Fourier** de f).

Problemas de la sección 10.1

Encontrar el periodo positivo p más pequeño de las siguientes funciones.

1. $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, $\cos \pi x$, $\sin \pi x$, $\cos 2\pi x$, $\sin 2\pi x$
2. $\cos nx$, $\sin nx$, $\cos \frac{2\pi x}{k}$, $\sin \frac{2\pi x}{k}$, $\cos \frac{2\pi nx}{k}$, $\sin \frac{2\pi nx}{k}$
3. Si $f(x)$ y $g(x)$ tienen periodo p , demostrar que $h = af + bg$ (a, b , constantes) tiene periodo p . En consecuencia, todas las funciones de periodo p forman un espacio vectorial.

³ Y entre paréntesis; de una serie convergente esto da también como resultado una serie convergente con la misma suma, como puede demostrarse.

4. Si p es un periodo de $f(x)$, demostrar que np , $n = 2, 3, \dots$, es un periodo de $f(x)$.
5. Demostrar que la función $f(x) = \text{const}$ es una función periódica de periodo p para toda p positiva.
6. Si $f(x)$ es una función periódica de x de periodo p , demostrar que $f(ax)$, $a \neq 0$, es una función periódica de x de periodo p/a , y que $f(x/b)$, $b \neq 0$, es una función periódica de x de periodo bp . Comprobar estos resultados para $f(x) = \cos x$, $a = b = 2$.

Trazar las siguientes funciones $f(x)$, las cuales se suponen periódicas de periodo 2π y, para $-\pi < x < \pi$, están dadas por las fórmulas

7. $f(x) = x$
8. $f(x) = x^2$
9. $f(x) = e^{|x|}$
10. $f(x) = |x|$
11. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$
12. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ 1 - x/\pi & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$
13. $f(x) = \begin{cases} \pi + x & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$
14. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \cos x/2 & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$
15. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$
16. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \sin x & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$

Evaluar las siguientes integrales donde $n = 0, 1, 2, \dots$. (Son ejemplos típicos de integrales que se necesitarán más adelante.)

17. $\int_0^\pi \sin nx \, dx$
18. $\int_{-\pi/2}^0 \cos nx \, dx$
19. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \cos nx \, dx$
20. $\int_{-\pi}^\pi x \sin nx \, dx$
21. $\int_{-\pi}^0 e^x \sin nx \, dx$
22. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin nx \, dx$
23. $\int_0^\pi e^x \cos nx \, dx$
24. $\int_{-\pi}^\pi x^2 \cos nx \, dx$
25. $\int_0^\pi x \sin nx \, dx$

10.2 SERIES DE FOURIER

Las series de Fourier surgen de la tarea práctica de representar una función periódica $f(x)$ dada en términos de funciones coseno y seno. Estas series son trigonométricas (sección 10.1) cuyos coeficientes se determinan a partir de $f(x)$ mediante ciertas fórmulas [las "fórmulas de Euler" (6) siguientes], las cuales se establecerán primero. Después se considerará la teoría de las series de Fourier.

Fórmulas de Euler para los coeficientes de Fourier

Se supone que $f(x)$ es una función periódica de periodo 2π que puede representarse por una serie trigonométrica,

$$(1) \quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx);$$

es decir, se supone que esta serie converge y que tiene a $f(x)$ como su suma. Dada una función $f(x)$ como ésta, quieren determinarse los coeficientes a_n y b_n de la serie (1) correspondiente.

Se determina a_0 . Al integrar ambos miembros de (1) de $-\pi$ a π , se obtiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] dx.$$

Si es posible realizar la integración término a término de la serie⁴, se obtiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx \right).$$

El primer término del segundo miembro es igual a $2\pi a_0$. Las demás integrales del segundo miembro son cero, como puede verse de inmediato por integración. Por tanto, el primer resultado obtenido es

$$(2) \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx.$$

Se determinan ahora a_1, a_2, \dots por un procedimiento similar. Se multiplica (1) por $\cos mx$, donde m es cualquier entero positivo fijo, y se integra de $-\pi$ a π :

$$(3) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \cos mx \, dx.$$

Al integrar término a término, se observa que el segundo miembro queda

$$a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx \right].$$

La primera integral es cero. Al aplicar (11) del apéndice 3 se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos (n+m)x \, dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos (n-m)x \, dx, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin (n+m)x \, dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin (n-m)x \, dx. \end{aligned}$$

⁴ Esto se justifica, por ejemplo, en el caso de la convergencia uniforme (ver el teorema 3 de la sección 14.6).

La integración demuestra que los cuatro términos del segundo miembro son cero, con excepción del último término del primer renglón, que es igual a π cuando $n = m$. Puesto que en (3) este término está multiplicado por a_m , el segundo miembro de (3) es igual a $a_m \pi$. El segundo resultado obtenido es

$$(4) \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx, \quad m = 1, 2, \dots$$

Por último, se determinan b_1, b_2, \dots en (1). Si se multiplica (1) por $\sin mx$, donde m es cualquier entero positivo fijo, y después se integra de $-\pi$ a π , se tiene

$$(5) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \sin mx \, dx.$$

Al integrar término a término, se observa que el segundo miembro queda

$$a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx \right].$$

La primera integral es cero. La integral siguiente es del tipo considerado antes, y es cero para toda $n = 1, 2, \dots$. Para la última integral se obtiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos (n - m)x \, dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos (n + m)x \, dx.$$

El último término es cero. El primer término del segundo miembro es cero cuando $n \neq m$ y es π cuando $n = m$. Puesto que en (5) este término está multiplicado por b_m , el segundo miembro de (5) es igual a $b_m \pi$ y el último resultado obtenido es

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx, \quad m = 1, 2, \dots$$

Al escribir n en lugar de m , se obtienen las llamadas fórmulas de Euler⁵

$$(6) \quad \begin{array}{ll} \text{(a)} & a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx \\ \text{(b)} & a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad n = 1, 2, \dots, \\ \text{(c)} & b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad n = 1, 2, \dots. \end{array}$$

⁵ Ver la nota de pie de página 9 de la sección 2.6.

Los números dados por (6) se denominan los **coeficientes de Fourier** de $f(x)$. La serie trigonométrica

$$(7) \quad a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

con coeficientes dados por (6) se denomina la **serie de Fourier** de $f(x)$ (sin atender la convergencia —ésta se discute en la página 95).

EJEMPLO 1 Onda cuadrada

Encontrar los coeficientes de Fourier de la función periódica $f(x)$ de la figura 231a, p. 632. La fórmula es

$$f(x) = \begin{cases} -k & \text{si } -\pi < x < 0 \\ k & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases} \quad y \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

Funciones de este tipo se presentan como fuerzas externas que actúan sobre sistemas mecánicos, fuerzas electromotrices en circuitos eléctricos, etc. (El valor de $f(x)$ en un solo punto no afecta la integral, por lo que puede dejarse indefinida $f(x)$ en $x = 0$ y $x = \pm\pi$).

Solución. Por (6a) se obtiene $a_0 = 0$. Esto también puede verse sin integrar, ya que el área bajo la curva de $f(x)$ entre $-\pi$ y π es cero. Por (6b),

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-k) \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} k \cos nx \, dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-k \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 + k \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} \right] = 0. \end{aligned}$$

porque $\sin nx = 0$ en $-\pi, 0$ y π para toda $n = 1, 2, \dots$. De manera similar, por (6c) se obtiene

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-k) \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} k \sin nx \, dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[k \frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 - k \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} \right]. \end{aligned}$$

Puesto que $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ y $\cos 0 = 1$, de esta expresión se obtiene

$$b_n = \frac{k}{n\pi} [\cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos n\pi + \cos 0] = \frac{2k}{n\pi} (1 - \cos n\pi).$$

Ahora bien, $\cos \pi = -1$, $\cos 2\pi = 1$, $\cos 3\pi = -1$, etc.; en general,

$$\cos n\pi = \begin{cases} -1 & \text{para } n \text{ impar} \\ 1 & \text{para } n \text{ par} \end{cases} \quad y \text{ por tanto} \quad 1 - \cos n\pi = \begin{cases} 2 & \text{para } n \text{ impar} \\ 0 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

Por tanto, los coeficientes de Fourier b_n de la función en cuestión son

$$b_1 = \frac{4k}{\pi}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{4k}{3\pi}, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = \frac{4k}{5\pi}, \dots$$

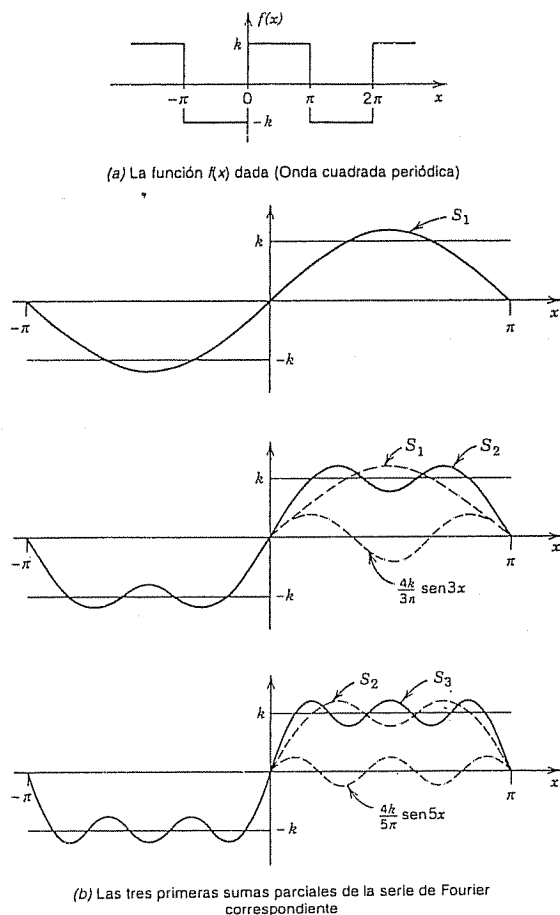


Figura 231. Ejemplo 1.

y como las a_n son cero, la serie de Fourier de $f(x)$ es

$$(8) \quad \frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right).$$

Las sumas parciales son

$$S_1 = \frac{4k}{\pi} \sin x, \quad S_2 = \frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x \right), \quad \text{etc.},$$

y sus gráficas en la figura 231 parecen indicar que la serie es convergente y que tiene la suma $f(x)$, la función dada. Se observa que en $x = 0$ y $x = \pi$, los puntos de discontinuidad de $f(x)$, todas las sumas parciales tienen el valor cero, la media aritmética de los valores $-k$ y k de la función en cuestión.

Además, suponiendo que $f(x)$ es la suma de la serie y haciendo $x = \pi/2$, se tiene

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = k = \frac{4k}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \right),$$

por tanto

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Este es un famoso resultado de Leibniz (obtenido en 1673 a partir de consideraciones geométricas). Ilustra que los valores de varias series con términos constantes pueden obtenerse evaluando la serie de Fourier en puntos específicos.

Ortogonalidad del sistema trigonométrico

El sistema trigonométrico (3), sección 10.1,

$$1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad \dots, \quad \cos nx, \quad \sin nx, \quad \dots$$

es ortogonal en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$ (y, en consecuencia, en cualquier intervalo de longitud 2π , debido a la periodicidad). Por definición, esto significa que la integral del producto de cualesquiera dos de estas funciones diferentes sobre dicho intervalo es cero; en fórmulas, para enteros cualesquiera m y $n \neq m$ se tiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0 \quad (m \neq n)$$

y

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0 \quad (m \neq n)$$

y para los enteros m y n cualesquiera (incluyendo $m = n$) se tiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0.$$

Esta es la propiedad más importante del sistema trigonométrico, la clave en la deducción de las fórmulas de Euler (donde se demostró esta ortogonalidad).

Convergencia y suma de series de Fourier

En todo este capítulo las series de Fourier se consideran desde un punto de vista práctico. Se verá que la aplicación de estas series es muy sencilla. En contraste con esto, la teoría de dichas series es complicada y no se entrará en los detalles de la misma. Por consiguiente, sólo se aborda un teorema sobre la convergencia y la suma de series de Fourier, que se presenta a continuación.

Suponer que $f(x)$ es cualquier función periódica dada de periodo 2π para la que existen las integrales de (6); por ejemplo, $f(x)$ es continua o tan sólo continua por secciones (continua salvo por un número finito de saltos en el intervalo de integra-

ción). Entonces pueden calcularse los coeficientes de Fourier (6) de $f(x)$ y usarlos para formar la serie de Fourier (7) de $f(x)$. Sería muy conveniente que la serie así obtenida convergiera y tuviera la suma $f(x)$. La mayoría de las funciones que se presentan en las aplicaciones son tales que esto se cumple (salvo en los saltos de $f(x)$, los cuales se discuten a continuación). En este caso, cuando la serie de Fourier de $f(x)$ representa a $f(x)$, se escribe

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

con un signo de igualdad. Si la serie de Fourier de $f(x)$ no tiene la suma $f(x)$ o no converge, se sigue escribiendo

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

con una tilde \sim , la cual indica que la serie trigonométrica del segundo miembro tiene los coeficientes de Fourier de $f(x)$ como coeficientes, por lo que se trata de la serie de Fourier de $f(x)$.

La clase de las funciones que pueden representarse por series de Fourier es sorprendentemente grande y general. Las condiciones suficientes correspondientes que abarcan casi cualquier aplicación concebible son las siguientes.

Teorema 1 (Representación por una serie de Fourier)

Si una función periódica $f(x)$ con periodo 2π es continua por secciones⁶ en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$ y tiene derivada por la izquierda y por la derecha⁷ en todo punto de dicho intervalo, entonces la serie de Fourier (7) de $f(x)$ [con coeficientes (6)] es convergente. Su suma es $f(x)$, salvo en un punto x_0 en el que $f(x)$ es discontinua y la suma de la serie es el promedio de los límites por la izquierda y la derecha⁸ de $f(x)$ en x_0 .

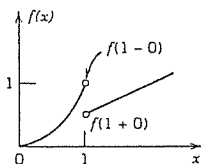


Figura 232. Límites por la izquierda y por la derecha

$$\begin{aligned} f(1-0) &= 1, \\ f(1+0) &= \frac{1}{2} \\ \text{de la función} \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ x/2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

⁶ Definición en la sección 6.1

⁷ El límite por la izquierda de $f(x)$ en x_0 se define como el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 por la izquierda y se denota con frecuencia por $f(x_0 - 0)$. Por tanto

$$f(x_0 - 0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 - h) \quad \text{cuando } h \rightarrow 0 \text{ por valores positivos.}$$

El límite por la derecha se denota por $f(x_0 + 0)$ y

$$f(x_0 + 0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) \quad \text{cuando } h \rightarrow 0 \text{ por valores positivos.}$$

Las derivadas por la izquierda y por la derecha de $f(x)$ en x_0 se definen como los límites de

$$\frac{f(x_0 - h) - f(x_0 - 0)}{-h} \quad \text{y} \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h},$$

respectivamente, cuando $h \rightarrow 0$ a través de valores positivos. Desde luego, si $f(x)$ es continua en x_0 , el último término de ambos numeradores es simplemente $f(x_0)$.

Demostración de la convergencia en el teorema 1 para una función continua $f(x)$ que tiene primera y segunda derivadas continuas. Al integrar (6b) por partes se obtiene

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{f(x) \sin nx}{n\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx.$$

El primer término del segundo miembro es cero. Al integrar otra vez por partes se obtiene

$$a_n = \frac{f'(x) \cos nx}{n^2 \pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2 \pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx \, dx.$$

El primer término del segundo miembro es cero debido a la periodicidad y la continuidad de $f''(x)$. Puesto que f'' es continua en el intervalo de integración, se tiene

$$|f''(x)| < M$$

para una constante M adecuada. Además, $|\cos nx| \leq 1$. Se sigue que

$$|a_n| = \frac{1}{n^2 \pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx \, dx \right| < \frac{1}{n^2 \pi} \int_{-\pi}^{\pi} M \, dx = \frac{2M}{n^2}.$$

De manera similar, $|b_n| < 2M/n^2$ para toda n . Por tanto, el valor absoluto de cada término de la serie de Fourier de $f(x)$ es a lo sumo igual al término correspondiente de la serie

$$|a_0| + 2M \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \right)$$

que es convergente. Por tanto, esa serie de Fourier converge y se termina así la demostración. (Los lectores familiarizados con la convergencia uniforme observarán que por el criterio de Weierstrass de la sección 14.6, bajo los supuestos presentes, la serie de Fourier converge uniformemente y, en consecuencia, la deducción de (6) integrando término a término se justifica por el teorema 3 de la sección 14.6.)

La demostración de la convergencia en el caso de una función $f(x)$ continua por secciones y la demostración de que bajo los supuestos del teorema la serie de Fourier (7) con coeficientes (6) representa a $f(x)$ son mucho más complicadas; ver, por ejemplo, la referencia [C14].

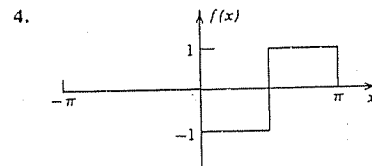
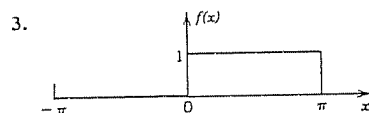
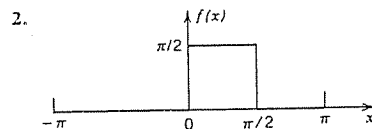
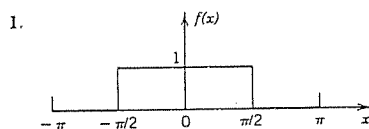
EJEMPLO 2 Convergencia en un salto según se indica en el teorema 1

La onda cuadrada del ejemplo 1 tiene un salto en $x = 0$. Su límite por la izquierda ahí es $-k$ y su límite por la derecha es k (figura 231), por lo que el promedio de estos límites es 0. La serie de Fourier (8) de la onda cuadrada converge en realidad a este valor cuando $x = 0$ ya que entonces todos sus términos son cero. Se procede de manera similar para los otros saltos. Esto concuerda con el teorema 1.

Resumen. Una serie de Fourier de una función $f(x)$ dada de periodo 2π es una serie de la forma (7) con coeficientes dados por las fórmulas de Euler (6). El teorema 1 da las condiciones que son suficientes para que esta serie converja y para que en toda x tenga el valor $f(x)$, salvo en las discontinuidades de $f(x)$, donde la serie es igual a la media aritmética de los límites por la izquierda y por la derecha de $f(x)$ en ese punto.

Problemas de la sección 10.2

Encontrar la serie de Fourier de la función $f(x)$, la cual se supone tiene periodo 2π , y trazar gráficas precisas de las tres primeras sumas parciales,* donde $f(x)$ es igual a



5. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ -1 & \text{si } \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{si } \pi/2 < x < 2\pi \end{cases}$

7. $f(x) = x \quad (-\pi < x < \pi)$

8. $f(x) = x \quad (0 < x < 2\pi)$

9. $f(x) = x^2 \quad (-\pi < x < \pi)$

10. $f(x) = x^2 \quad (0 < x < 2\pi)$

11. $f(x) = x^3 \quad (-\pi < x < \pi)$

12. $f(x) = x + |x| \quad (-\pi < x < \pi)$

13. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{si } \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$

14. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ x & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$

15. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \pi - x & \text{si } \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$

16. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \pi^2/4 & \text{si } \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$

17. Comprobar el último enunciado del teorema 1 acerca de las discontinuidades para la función del problema 1.

18. Obtener la serie de Fourier en el problema 3 a partir de la del problema 1.

19. Demostrar que si $f(x)$ tiene los coeficientes de Fourier a_n, b_n y $g(x)$ tiene los coeficientes de Fourier a_n^*, b_n^* , entonces $kg(x) + lg(x)$ tiene los coeficientes de Fourier $ka_n^* + la_n^*, kb_n^* + lb_n^*$.

20. Usando el problema 19, encontrar la serie de Fourier del problema 2 a partir de las de los problemas 3 y 4.

* Es decir, $a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ para $N = 1, 2, 3$

10.3 FUNCIONES DE CUALQUIER PERIODO $P = 2L$

Las funciones consideradas hasta este punto tenían periodo 2π , en tanto que la mayoría de las funciones periódicas en las aplicaciones tendrán otros periodos. Pero se demuestra que la transición de funciones de periodo $p = 2\pi$ a funciones de periodo $p = 2L$, es bastante simple, en esencia un alargamiento de escala sobre el eje.

Si una función $f(x)$ de periodo $p = 2L$ tiene una serie de Fourier, se afirma que esta serie es

$$(1) \quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$$

con los coeficientes de Fourier de $f(x)$ dados por las fórmulas de Euler

$$(2) \quad \begin{aligned} (a) \quad a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx \\ (b) \quad a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad n = 1, 2, \dots \\ (c) \quad b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Demostración. La idea es deducir estas expresiones a partir de la sección 10.2 mediante un cambio de escala. Se hace $v = \pi x/L$, de donde $x = Lv/\pi$. Entonces $x = \pm L$ corresponde a $v = \pm\pi$. Por tanto f , considerada como una función de v a la que se llama $g(v)$,

$$f(x) = g(v),$$

tiene periodo 2π . Por consiguiente, por (7) y (6), sección 10.2, con v en lugar de x , esta función periódica $g(v)$ con periodo 2π tiene la serie de Fourier

$$(3) \quad g(v) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nv + b_n \sin nv)$$

* Esta notación es práctica, ya que en las aplicaciones L será la longitud de una cuerda en vibración (sección 11.2), de una varilla en la conducción de calor (sección 11.5), etc.

con coeficientes

$$(4) \quad \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(v) dv \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(v) \cos nv dv \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(v) \sin nv dv. \end{aligned}$$

Puesto que $v = \pi x/L$ y $g(v) = f(x)$, la fórmula (3) da como resultado (1). En (4) se introduce $x = Lv/\pi$ como variable de integración. Entonces los límites de integración $v = \pm\pi$ pasan a ser $x = \pm L$. Asimismo, $v = \pi x/L$ implica $dv = \pi dx/L$. Por tanto, $dv/2\pi = dx/2L$ en a_0 . De manera similar, $dv/\pi = dx/L$ en a_n y b_n . En consecuencia, de (4) se obtiene (2).

El intervalo de integración en (2) puede reemplazarse por cualquier intervalo de longitud $p = 2L$, por ejemplo, por el intervalo $0 \leq x \leq 2L$.

EJEMPLO 1 Onda cuadrada periódica

Encontrar la serie de Fourier de la función (ver la figura 233)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -2 < x < -1 \\ k & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases} \quad p = 2L = 4, \quad L = 2.$$

Solución. Por (2a) y (2b) se obtiene

$$a_0 = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 k dx = \frac{k}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 k \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{2k}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi}{2} \right)$$

Por tanto, $a_n = 0$ si n es par y

$$a_n = 2k/n\pi \quad \text{si } n = 1, 5, 9, \dots, \quad a_n = -2k/n\pi \quad \text{si } n = 3, 7, 11, \dots$$

A partir de (2c) se encuentra que $b_n = 0$ para $n = 1, 2, \dots$. Por tanto el resultado es

$$f(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{2} x - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{2} x + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi}{2} x - \dots \right).$$

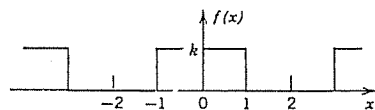


Figura 233. Ejemplo 1.

EJEMPLO 2 Rectificador de media onda

Un voltaje senoidal $E \sin \omega t$, donde t es el tiempo, se hace pasar por un rectificador de media onda que corta la porción negativa de la onda (figura 234). Encontrar la serie de Fourier de la función periódica resultante

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -L < t < 0, \\ E \sin \omega t & \text{si } 0 < t < L \end{cases} \quad p = 2L = \frac{2\pi}{\omega}, \quad L = \frac{\pi}{\omega}.$$

Solución. Puesto que $u = 0$ cuando $-L < t < 0$, por (2a), con t en lugar de x , se obtiene

$$a_0 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\pi/\omega} E \sin \omega t dt = \frac{E}{\pi}$$

y por (2b), usando la fórmula (11) del apéndice 3.1 con $x = \omega t$ y $y = n\omega t$,

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} E \sin \omega t \cos n\omega t dt = \frac{\omega E}{2\pi} \int_0^{\pi/\omega} [\sin(1+n)\omega t + \sin(1-n)\omega t] dt.$$

Si $n = 1$, la integral del segundo miembro es cero, y si $n = 2, 3, \dots$, se obtiene de inmediato

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\omega E}{2\pi} \left[-\frac{\cos(1+n)\omega t}{(1+n)\omega} - \frac{\cos(1-n)\omega t}{(1-n)\omega} \right]_0^{\pi/\omega} \\ &= \frac{E}{2\pi} \left(\frac{-\cos(1+n)\pi + 1}{1+n} + \frac{-\cos(1-n)\pi + 1}{1-n} \right). \end{aligned}$$

Si n es impar, esta expresión es igual a cero, y para n par se tiene

$$a_n = \frac{E}{2\pi} \left(\frac{2}{1+n} + \frac{2}{1-n} \right) = -\frac{2E}{(n-1)(n+1)\pi} \quad (n = 2, 4, \dots)$$

En una manera similar, a partir de (2c) se encuentra que $b_n = E/2$ y $b_n = 0$ para $n = 2, 3, \dots$. Por consiguiente,

$$u(t) = \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2} \sin \omega t - \frac{2E}{\pi} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t + \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \dots \right).$$

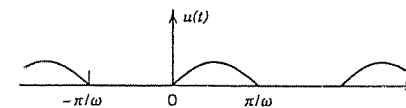


Figura 234. Rectificador de media onda.

Problemas de la sección 10.3

Encontrar la serie de Fourier de la función periódica $f(x)$, de periodo $p = 2L$, y trazar $f(x)$ y las tres primeras sumas parciales.

1. $f(x) = -1$ ($-1 < x < 0$), $f(x) = 1$ ($0 < x < 1$), $p = 2L = 2$
2. $f(x) = 0$ ($-1 < x < 1$), $f(x) = 1$ ($1 < x < 3$), $p = 2L = 4$
3. $f(x) = 0$ ($-2 < x < 0$), $f(x) = 2$ ($0 < x < 2$), $p = 2L = 4$
4. $f(x) = x$ ($-1 < x < 1$), $p = 2L = 2$

5. $f(x) = 1 - x^2$ ($-1 < x < 1$), $p = 2L = 2$
6. $f(x) = 2|x|$ ($-2 < x < 2$), $p = 2L = 4$
7. $f(x) = 0$, ($-1 < x < 0$), $f(x) = x$ ($0 < x < 1$), $p = 2L = 2$
8. $f(x) = x$ ($0 < x < 1$), $f(x) = 1 - x$ ($1 < x < 2$), $p = 2L = 2$
9. $f(x) = -1$ ($-1 < x < 0$), $f(x) = 2x$ ($0 < x < 1$), $p = 2L = 2$
10. $f(x) = \frac{1}{2} + x$ ($-\frac{1}{2} < x < 0$), $f(x) = \frac{1}{2} - x$ ($0 < x < \frac{1}{2}$), $p = 2L = 1$
11. $f(x) = 3x^2$ ($-1 < x < 1$), $p = 2L = 2$
12. $f(x) = \pi x^3/2$ ($-1 < x < 1$), $p = 2L = 2$
13. $f(x) = \pi \sin \pi x$ ($0 < x < 1$), $p = 2L = 1$
14. $f(x) = x^2/4$ ($0 < x < 2$), $p = 2L = 2$
15. Obtener la serie de Fourier en el problema 1 directamente a partir de la del ejemplo 1, sección 10.2.
16. Obtener la serie de Fourier en el problema 11 directamente a partir de la del problema 9, sección 10.2.
17. Obtener la serie de Fourier en el problema 3 directamente a partir de la del ejemplo 1.
18. Encontrar la serie de Fourier de la función periódica que se obtiene al hacer pasar el voltaje $v(t) = k \cos 100\pi t$ por un rectificador de media onda.
19. Demostrar que cada término de (1) tiene periodo $p = 2L$.
20. Demostrar que en (2) el intervalo de integración puede reemplazarse por cualquier intervalo de longitud $p = 2L$.

10.4 FUNCIONES PARES E IMPARES

La función del ejemplo 1 de la sección anterior era impar y sólo tenía términos seno en su serie de Fourier, sin términos coseno. Esto es típico. De hecho, puede evitarse trabajo innecesario (y las consiguientes fuentes de error) al determinar los coeficientes de Fourier si una función es impar o par.

Se recuerda primero que una función $y = g(x)$ es par si

$$g(-x) = g(x) \quad \text{para toda } x$$

La gráfica de esta función es simétrica con respecto al eje y (figura 235). Una función $h(x)$ es impar si

$$h(-x) = -h(x) \quad \text{para toda } x$$

(Ver la figura 236.) La función $\cos nx$ es par, en tanto que $\sin nx$ es impar.

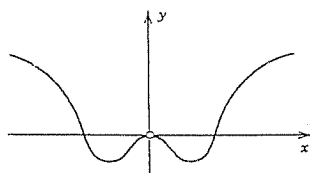


Figura 235. Función par.

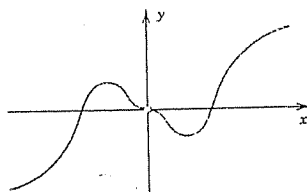


Figura 236. Función impar.

Si $g(x)$ es una función par, entonces

$$(1) \quad \int_{-L}^L g(x) dx = 2 \int_0^L g(x) dx \quad (g \text{ par})$$

Si $h(x)$ es una función impar, entonces

$$(2) \quad \int_{-L}^L h(x) dx = 0 \quad (h \text{ impar})$$

Las fórmulas (1) y (2) son obvias a partir de las gráficas de g y h y las demostraciones formales se le dejan al estudiante.

El producto $q = gh$ de una función par g y una función impar h es impar, ya que

$$q(-x) = g(-x)h(-x) = g(x)[-h(x)] = -q(x).$$

Por tanto, si $f(x)$ es par, entonces el integrando $f \sin(n\pi x/L)$ en (2c), sección 10.3, es impar, y $b_n = 0$. De manera similar, si $f(x)$ es impar, entonces $f \cos(n\pi x/L)$ en (2b), sección 10.3, es impar, y $a_n = 0$. Por lo anterior y (1) se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 1 (Series de Fourier de funciones pares e impares)

La serie de Fourier de una función par de periodo $2L$ es una "serie de Fourier de cosenos"

$$(3) \quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x \quad (f \text{ par})$$

con coeficientes

$$(4) \quad a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

La serie de Fourier de una función impar de periodo $2L$ es una "serie de Fourier de senos"

$$(5) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (f \text{ impar})$$

con coeficientes

$$(6) \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

El caso del periodo 2π . En este caso, para una función par por el teorema 1 se obtiene

$$(3^*) \quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (f \text{ par})$$

con coeficientes

$$(4^*) \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

y para una función impar

$$(5^*) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (f \text{ impar})$$

con coeficientes

$$(6^*) \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Por ejemplo, $f(x)$ del ejemplo 1, sección 10.2, es impar y, por lo tanto, está representada por una serie de Fourier de senos.

Simplificaciones adicionales resultan de la siguiente propiedad (ya mencionada en el problema 19 de la sección 10.2):

Teorema 2 (Suma de funciones)

Los coeficientes de Fourier de una suma $f_1 + f_2$ son las sumas de los coeficientes de Fourier de f_1 y f_2 correspondientes.

Los coeficientes de Fourier de cf son el producto de c y los coeficientes de Fourier de f correspondientes.

EJEMPLO 1 Pulso rectangular

La función $f^*(x)$ de la figura 237 es la suma de la función $f(x)$ del ejemplo 1 de la sección 10.2 y la constante k . Por tanto, a partir de dicho ejemplo y del teorema 2 se concluye que

$$f^*(x) = k + \frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right).$$

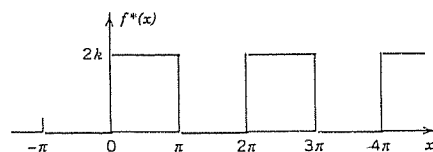


Figura 237. Ejemplo 1.

EJEMPLO 2 Onda diente de sierra

Encontrar la serie de Fourier de la función (figura 238a)

$$f(x) = x + \pi \quad \text{si} \quad -\pi < x < \pi \quad \text{y} \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

Solución. Puede escribirse

$$f = f_1 + f_2$$

donde

$$f_1 = x \quad \text{y} \quad f_2 = \pi.$$

Los coeficientes de Fourier de f_2 son cero, salvo el primero (el término constante), que es π . En consecuencia, por el teorema 2, los coeficientes de Fourier a_n , b_n son los de f_1 , excepto para a_0 , que es π . Puesto que f_1 es impar, $a_n = 0$ para $n = 1, 2, \dots$ y

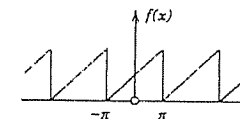
$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_1(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx.$$

Al integrar por partes se obtiene

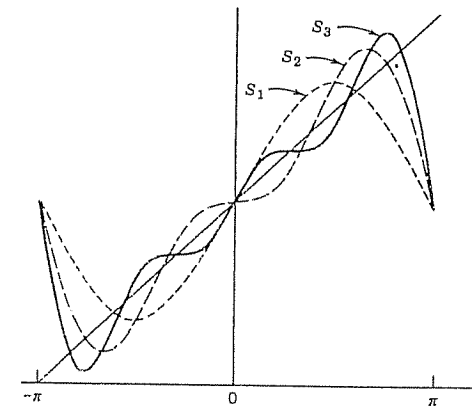
$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-x \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] = -\frac{2}{n} \cos n\pi.$$

Por tanto, $b_1 = 2$, $b_2 = -2/2$, $b_3 = 2/3$, $b_4 = -2/4$, ... y la serie de Fourier de $f(x)$ es

$$f(x) = \pi + 2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots \right).$$



(a) La función $f(x)$



(b) Sumas parciales $S_n(x)$

238. Ejemplo 2.

Problemas de la sección 10.4

¿Las funciones siguientes son impares, pares o ni lo uno ni lo otro?

1. $|x^3|$, $x \cos nx$, $x^2 \cos nx$, $\cosh x$, $\sinh x$, $\sin x + \cos x$, $x|x|$
2. $x + x^2$, $|x|$, e^x , e^{x^2} , $\sin^2 x$, $x \sin x$, $\ln x$, $x \cos x$, $e^{-|x|}$

¿Las siguientes funciones $f(x)$, las cuales se suponen periódicas, de periodo 2π , son pares, impares o ni lo uno ni lo otro?

3. $f(x) = x^3$ ($-\pi < x < \pi$)
4. $f(x) = x^4$ ($0 < x < 2\pi$)
5. $f(x) = x|x|$ ($-\pi < x < \pi$)
6. $f(x) = e^{-|x|}$ ($-\pi < x < \pi$)
7. $f(x) = |\sin x|$ ($-\pi < x < \pi$)
8. $x^3 - x$
9. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ x & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$
10. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 < x < 2\pi - 1 \\ x & \text{si } -1 < x < 1 \end{cases}$
11. $f(x) = \begin{cases} \sinh x & \text{si } -\pi < x < 0 \\ -\cosh x & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$
12. $f(x) = \begin{cases} \cos^2 2x & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \sin^2 2x & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$

Representar las siguientes funciones como la suma de una función par y una impar.

13. $1/(1-x)$
14. $1/(1-x)^2$
15. e^{bx}
16. $x/(x+1)$

17. Demostrar el teorema 2.

18. Encontrar todas las funciones que sean tanto pares como impares.

19. Demostrar que la conocida identidad $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$ puede interpretarse como el desarrollo de una serie de Fourier y que se cumple lo mismo para la identidad $\cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x$.

Demostrar que:

20. La suma y el producto de funciones pares son funciones pares.
21. La suma de funciones impares es impar. El producto de dos funciones impares es par.
22. Si $f(x)$ es impar, entonces $|f(x)|$ y $f^2(x)$ son funciones pares.
23. Si $f(x)$ es par, entonces $|f(x)|$, $f^2(x)$ y $f^3(x)$ son funciones pares.
24. Si $g(x)$ está definida para toda x , entonces la función $p(x) = [g(x) + g(-x)]/2$ es par y la función $q(x) = [g(x) - g(-x)]/2$ es impar.

Encontrar la serie de Fourier de las siguientes funciones, las cuales se supone tienen periodo 2π . *Sugerencia.* Usar el hecho de que algunas de estas funciones son pares o impares.

25. $f(x) = \begin{cases} k & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{si } \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$
26. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < \pi \\ \pi - x & \text{si } \pi < x < 2\pi \end{cases}$
27. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \pi - x & \text{si } \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$
28. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -\pi < x < 0 \\ x & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$

29. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \pi^2/4 & \text{si } \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$
30. $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$
31. $f(x) = x^2/4$ ($-\pi < x < \pi$)
32. $f(x) = x(\pi^2 - x^2)$ ($-\pi < x < \pi$)

Demostrar que

33. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$ (Usar el problema 25)
34. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$ (Usar el problema 31)
35. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$ (Usar el problema 31)

10.5 DESARROLLOS DE MEDIO RANGO

En varias aplicaciones existe la necesidad práctica de usar series de Fourier en relación con funciones $f(x)$ que están dadas solamente en algún intervalo, por ejemplo, $0 \leq x \leq L$, como en la figura 239a. En el capítulo siguiente (secciones 11.3 y 11.5) se presentan casos típicos. Podría extenderse $f(x)$ periódicamente con periodo L para después representar la función extendida por una serie de Fourier, la cual en general incluiría *tanto* términos coseno *como* seno. Sin embargo, hay una alternativa mejor mediante la cual se obtiene siempre una serie de cosenos al extender primero $f(x)$ de $0 \leq x \leq L$ como una función *par* en el rango (el intervalo) $-L \leq x \leq L$, como en la figura 239b, para después extender esta nueva función como una función periódica de perio-

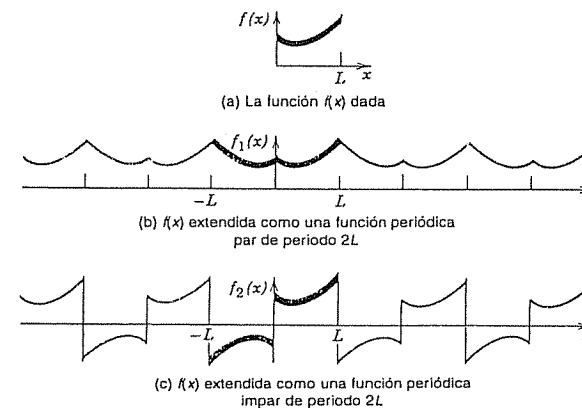


Figura 239. (a) Función $f(x)$ dada en un intervalo $0 \leq x \leq L$, (b) su extensión par al "rango" (intervalo) completo $-L \leq x \leq L$ (curva remarcada) y la extensión periódica de periodo $2L$ al eje x , (c) su extensión impar a $-L \leq x \leq L$ (curva remarcada) y la extensión periódica de periodo $2L$ al eje x .

do $2L$ y, como es par, representarla por una serie de Fourier de cosenos. O puede extenderse $f(x)$ desde $0 \leq x \leq L$ como una función *impar* en $-L \leq x \leq L$, como en la figura 239c, para después extender esta nueva función como una función periódica de periodo $2L$ y, como es impar, representarla por una serie de Fourier de senos. Estas dos series se llaman los dos **desarrollos de medio rango** de la función $f(x)$, la cual está dada sólo en "la mitad del rango" (la mitad del intervalo de periodicidad de estas series). La forma de estas series se presenta en la sección 10.4. El desarrollo de cosenos de medio rango es [ver (3), (4), sección 10.4]

(1)

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x$$

donde

(2)

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx,$$

 $n = 1, 2, \dots$

El desarrollo de senos de medio rango es [ver (5), (6), sección 10.4]

(3)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

donde

(4)

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx,$$

 $n = 1, 2, \dots$ **EJEMPLO 1** El "triángulo" y sus desarrollos de medio rango

Encontrar los dos desarrollos de medio rango de la función (figura 240)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{L} x & \text{si } 0 < x < \frac{L}{2} \\ \frac{2k}{L} (L - x) & \text{si } \frac{L}{2} < x < L. \end{cases}$$

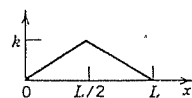


Figura 240. La función dada en el ejemplo 1.

Solución. (a) *Extensión periódica par.* Por (4), sección 10.4, se obtiene

$$a_0 = \frac{1}{L} \left[\frac{2k}{L} \int_0^{L/2} x dx + \frac{2k}{L} \int_{L/2}^L (L - x) dx \right] = \frac{k}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{L} \left[\frac{2k}{L} \int_0^{L/2} x \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{2k}{L} \int_{L/2}^L (L - x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right].$$

Entonces, al integrar por partes,

$$\begin{aligned} \int_0^{L/2} x \cos \frac{n\pi x}{L} dx &= \frac{Lx}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^{L/2} - \frac{L}{n\pi} \int_0^{L/2} \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{L^2}{2n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 \right). \end{aligned}$$

De manera similar,

$$\int_{L/2}^L (L - x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = -\frac{L^2}{2n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{L^2}{n^2\pi^2} \left(\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2} \right).$$

Si se introducen estos dos resultados, se obtiene

$$a_n = \frac{4k}{n^2\pi^2} \left(2 \cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1 \right).$$

Por tanto,

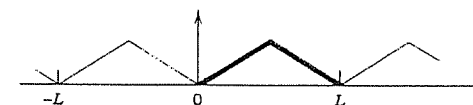
$$a_2 = -16k/2^2\pi^2, \quad a_6 = -16k/6^2\pi^2, \quad a_{10} = -16k/10^2\pi^2, \dots,$$

y $a_n = 0$ si $n \neq 2, 6, 10, 14, \dots$. Así, el primer desarrollo de medio rango de $f(x)$ es

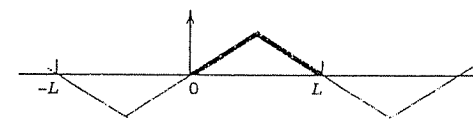
$$f(x) = \frac{k}{2} - \frac{16k}{\pi^2} \left(\frac{1}{2^2} \cos \frac{2\pi x}{L} + \frac{1}{6^2} \cos \frac{6\pi x}{L} + \dots \right).$$

Esta serie representa la extensión periódica par de la función $f(x)$ dada, de periodo $2L$, ilustrada en la figura 241a(b) *Extensión periódica impar.* De manera similar, a partir de (6), sección 10.4, se obtiene

$$(5) \quad b_n = \frac{8k}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}.$$



(a) Extensión par



(b) Extensión impar

Figura 241. Extensiones periódicas de $f(x)$ en el ejemplo 1.

En consecuencia, el otro desarrollo de medio rango de $f(x)$ es

$$f(x) = \frac{8k}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} \sin \frac{\pi}{L} x - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi}{L} x + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi}{L} x - \dots \right).$$

Esta serie representa la extensión periódica impar de $f(x)$, de periodo $2L$, ilustrada en la figura 241b. ■

Problemas de la sección 10.5

Representar las siguientes funciones $f(x)$ por una serie de Fourier de senos y trazar la extensión periódica correspondiente de $f(x)$.

- | | |
|--|--|
| 1. $f(x) = k$ ($0 < x < L$) | 2. $f(x) = kx$ ($0 < x < L$) |
| 3. $f(x) = x^2$ ($0 < x < L$) | 4. $f(x) = 1 - (2/L)x$ ($0 < x < L$) |
| 5. $f(x) = L - x$ ($0 < x < L$) | 6. $f(x) = x^3$ ($0 < x < L$) |
| 7. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < \pi/2 \\ \pi/2 & \text{si } \pi/2 < x < \pi \end{cases}$ | 8. $f(x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } 0 < x < \pi/2 \\ \pi - x & \text{si } \pi/2 < x < \pi \end{cases}$ |
| 9. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < L/2 \\ L - x & \text{si } L/2 < x < L \end{cases}$ | 10. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < L/2 \\ L/2 & \text{si } L/2 < x < L \end{cases}$ |

Representar las siguientes funciones $f(x)$ por una serie de Fourier de cosenos y trazar la extensión periódica correspondiente de $f(x)$.

- | | |
|---|---|
| 11. $f(x) = x$ ($0 < x < L$) | 12. $f(x) = 1$ ($0 < x < L$) |
| 13. $f(x) = x^2$ ($0 < x < L$) | 14. $f(x) = \sin^2 3x$ ($0 < x < \pi$) |
| 15. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < L/2 \\ 1 & \text{si } L/2 < x < L \end{cases}$ | 16. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < L/2 \\ 0 & \text{si } L/2 < x < L \end{cases}$ |
| 17. $f(x) = e^x$ ($0 < x < L$) | 18. $f(x) = x^3$ ($0 < x < L$) |
| 19. $f(x) = \sin \frac{\pi x}{L}$ ($0 < x < L$) | 20. $f(x) = \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi x}{2L}$ ($0 < x < L$) |

10.6 SERIES COMPLEJAS DE FOURIER.

OPCIONAL

En esta sección opcional se demuestra que la serie de Fourier

$$(1) \quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

puede escribirse en forma compleja, la cual en ocasiones simplifica los cálculos (ver el ejemplo 1 siguiente). Esto se hace por la fórmula de Euler (8), sección 2.3,

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

y la fórmula que la complementa

$$e^{-it} = \cos t - i \sin t$$

[obtenida a partir de $\cos(-t) = \cos t$, $\sin(-t) = -\sin t$] con $t = nx$, es decir,

$$(2) \quad e^{inx} = \cos nx + i \sin nx,$$

$$(3) \quad e^{-inx} = \cos nx - i \sin nx.$$

Al sumar estas expresiones y dividir las entre 2 se obtiene

$$(4) \quad \cos nx = \frac{1}{2} (e^{inx} + e^{-inx}).$$

Al restarlas y dividir las entre $2i$ se obtiene

$$(5) \quad \sin nx = \frac{1}{2i} (e^{inx} - e^{-inx}).$$

A partir de estos resultados, usando $1/i = -i$, en (1) se tiene

$$\begin{aligned} a_n \cos nx + b_n \sin nx &= \frac{1}{2} a_n (e^{inx} + e^{-inx}) + \frac{1}{2i} b_n (e^{inx} - e^{-inx}) \\ &= \frac{1}{2} (a_n - ib_n) e^{inx} + \frac{1}{2} (a_n + ib_n) e^{-inx}. \end{aligned}$$

Con lo anterior, (1) queda como

$$(6) \quad f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + k_n e^{-inx})$$

donde $c_0 = a_0$, y por (1)–(3) y las fórmulas de Euler (6), sección 10.2,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} (a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \\ (7) \quad k_n &= \frac{1}{2} (a_n + ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx, \end{aligned} \quad n = 1, 2, \dots$$

Por último, si se introduce la notación $k_n = c_{-n}$, por (6) y (7) se obtiene

$$(8) \quad \boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Esta es la llamada **forma compleja de la serie de Fourier** o, abreviando, la **serie compleja de Fourier** de $f(x)$ y c_n recibe el nombre de **coeficientes complejos de Fourier** de $f(x)$.

Resulta interesante el hecho de que (8) pueda deducirse de manera independiente como sigue. Al multiplicar la serie de (8) por e^{inx} , donde m es un entero fijo, e integrar término a término de $-\pi$ a π (permitida, por ejemplo, en el caso de la convergencia uniforme), se obtiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx$$

Cuando $n = m$, el integrando es $e^0 = 1$, y la integral es igual a 2π . Se obtiene así

$$(9) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx = 2\pi c_m,$$

siempre que las demás integrales sean cero, lo cual se cumple por (5),

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx &= \frac{1}{i(n-m)} (e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}) \\ &= \frac{1}{i(n-m)} 2i \sin(n-m)\pi = 0. \end{aligned}$$

Entonces, al escribir n en lugar de m en (9), se obtiene la fórmula de los coeficientes de (8). ■

Para una función de periodo $2L$, el razonamiento anterior da como resultado la **serie compleja de Fourier**

$$(10) \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}, \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx.$$

EJEMPLO 1 Serie compleja de Fourier

Encóntrala serie compleja de Fourier de $f(x) = e^x$ si $-\pi < x < \pi$ y $f(x+2\pi) = f(x)$ y a partir de ella obtener la serie común de Fourier

Solución. Por (8),

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-in} e^{(1-in)x} \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

Multiplicando el numerador y el denominador por $1+in$ y usando $e^{in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n$, se obtiene

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \frac{1+in}{1+n^2} (-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi}).$$

El último factor $(-1)^n$ es $2 \sinh \pi$, por lo que la serie compleja de Fourier es

$$(11) \quad e^x = \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1+in}{1+n^2} e^{inx} \quad (-\pi < x < \pi).$$

Aquí, por (2),

$$(1+in)(\cos nx + i \sin nx) = (\cos nx - n \sin nx) + i(n \cos nx + \sin nx).$$

El término correspondiente con $-n$ en lugar de n es (obsérvese que $\cos(-nx) = \cos nx$ y $\sin(-nx) = -\sin nx$)

$$(1-in)(\cos nx - i \sin nx) = (\cos nx - n \sin nx) - i(n \cos nx + \sin nx).$$

Las partes imaginarias se cancelan si se suman los dos términos, por lo que su suma es

$$2(\cos nx - n \sin nx), \quad n = 1, 2, \dots$$

Para $n = 0$ se obtiene 1 (no 2) debido a que hay un solo término. Por tanto, la serie real de Fourier es

$$(12) \quad e^x = \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1+1^2} (\cos x - \sin x) + \frac{1}{1+2^2} (\cos 2x - 2 \sin 2x) - \dots \right]$$

donde $-\pi < x < \pi$

Problemas de la sección 10.6

1. Demostrar que los coeficientes complejos de Fourier de una función impar son imaginarios puros y que los de una función par son reales.
2. Demostrar que $a_0 = c_0$, $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$, $n = 1, 2, \dots$.
3. Encontrar la serie compleja de Fourier de $f(x) = -1$ si $-\pi < x < 0$, $f(x) = 1$ si $0 < x < \pi$.
4. Convertir la serie de Fourier del problema 3 a la forma real.
5. Encontrar la serie compleja de Fourier de $f(x) = x$ ($-\pi < x < \pi$).
6. Encontrar la serie compleja de Fourier de $f(x) = 0$ si $-\pi < x < 0$, $f(x) = 1$ si $0 < x < \pi$.
7. Encontrar la serie compleja de Fourier de $f(x) = x$ ($0 < x < 2\pi$).
8. Convertir la serie de Fourier del problema 7 a la forma real.
9. Encontrar la serie compleja de Fourier de $f(x) = x^2$ ($-\pi < x < \pi$).
10. Convertir la serie de Fourier del problema 9 a la forma real.

10.7 OSCILACIONES FORZADAS

Las series de Fourier tienen importantes aplicaciones en las ecuaciones diferenciales. Se ilustra el punto para un problema básico en el que interviene una ecuación diferencial ordinaria. (En el capítulo 11 se presentan numerosas aplicaciones en ecuaciones diferenciales parciales.)

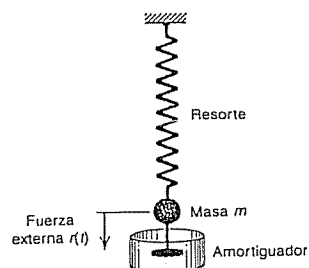


Figura 242. Sistema oscilatorio bajo consideración.

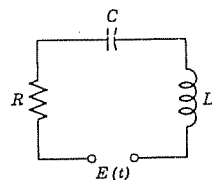


Figura 243. Análogo eléctrico del sistema de la figura 242 (circuito RLC).

Por la sección 2.11 se sabe que las oscilaciones forzadas de un cuerpo de masa m en un resorte de módulo k están gobernadas por la ecuación

(1)

$$my'' + cy' + ky = r(t),$$

donde $y = y(t)$ es el desplazamiento a partir del reposo, c es la constante de amortiguamiento y $r(t)$ es la fuerza externa que depende del tiempo t . En la figura 242 se ilustra el modelo y en la figura 243 se presenta su análogo eléctrico, un circuito RLC gobernado por

(1*)

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t)$$

(ver la sección 2.12).

Se considera (1). Si $r(t)$ es una función de senos o de cosenos y si hay amortiguamiento ($c > 0$), entonces la solución de estado estacionario es una oscilación armónica con frecuencia igual a la de $r(t)$. Sin embargo, si $r(t)$ no es una función de senos o de cosenos pura sino cualquier otra función periódica, entonces la solución de estado estacionario será una superposición de oscilaciones armónicas con frecuencias iguales a las de $r(t)$ y múltiplos enteros de esta última. Y si una de estas frecuencias está próxima a la frecuencia de resonancia del sistema oscilatorio (ver la sección 2.11), entonces la oscilación correspondiente puede ser la parte dominante de la respuesta del sistema a la fuerza externa. Esto es lo que pondrá de manifiesto el uso de series de Fourier; desde luego, esto resulta bastante sorprendente para un observador no familiarizado con la teoría subyacente, que es de gran importancia en el estudio de los sistemas oscilatorios y la resonancia. Se discute la situación global en términos de un ejemplo típico.

EJEMPLO 1 Oscilaciones forzadas bajo una fuerza impulsora periódica no senoidal

En (1), sean $m = 1$ (g), $c = 0.02$ (g/s) y $k = 25$ (g/s²), de tal modo que (1) queda

(2)

$$y'' + 0.02y' + 25y = r(t)$$

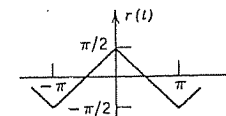


Figura 244. Fuerza en el ejemplo 1.

donde $r(t)$ se mide en g · cm/s². Sea (figura 244)

$$r(t) = \begin{cases} t + \frac{\pi}{2} & \text{si } -\pi < t < 0, \\ -t + \frac{\pi}{2} & \text{si } 0 < t < \pi, \end{cases} \quad r(t + 2\pi) = r(t).$$

Encontrar la solución de estado estacionario $y(t)$.

Solución. Se representa $r(t)$ por una serie de Fourier, encontrándose

$$(3) \quad r(t) = \frac{4}{\pi} \left(\cos t + \frac{1}{3^2} \cos 3t + \frac{1}{5^2} \cos 5t + \dots \right)$$

(se toma $\pi/2$ menos la respuesta del problema 11 de la sección 10.5 con $L = \pi$). Entonces se considera la ecuación diferencial

$$(4) \quad y'' + 0.02y' + 25y = \frac{4}{n^2\pi} \cos nt \quad (n = 1, 3, \dots)$$

cuyo segundo miembro es un solo término de la serie (3). Por la sección 2.11 se sabe que la solución de estado estacionario $y_n(t)$ de (4) es de la forma

$$(5) \quad y_n = A_n \cos nt + B_n \sin nt.$$

Al sustituir esta expresión en (4) se encuentra que

$$(6) \quad A_n = \frac{4(25 - n^2)}{n^2\pi D}, \quad B_n = \frac{0.08}{n\pi D}, \quad \text{donde } D = (25 - n^2)^2 + (0.02n)^2.$$

Puesto que la ecuación diferencial (2) es lineal, puede esperarse que la solución de estado estacionario sea

$$(7) \quad y = y_1 + y_3 + y_5 + \dots$$

donde y_n está dada por (5) y (6). De hecho, esto se establece de inmediato sustituyendo (7) en (2) y usando la serie de Fourier de $r(t)$, siempre que sea permisible la diferenciación término a término de (7). (Los lectores familiarizados con la noción de convergencia uniforme [sección 14.6] pueden demostrar que (7) puede diferenciarse término a término.)

Por (6) se encuentra que la amplitud de (5) es

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} = \frac{4}{n^2\pi\sqrt{D}}.$$

Valores numéricos son

$$C_1 = 0.0530$$

$$C_3 = 0.0088$$

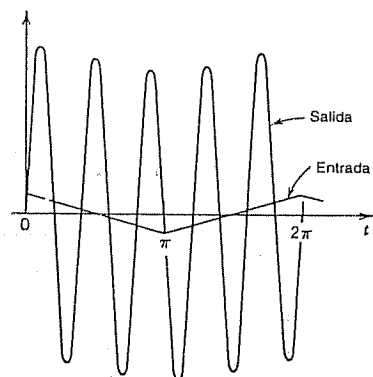


Figura 245. Entrada y salida de estado estacionario en el ejemplo 1.

$$C_5 = 0.5100$$

$$C_7 = 0.0011$$

$$C_9 = 0.0003.$$

Para $n = 5$ la cantidad D es muy pequeña, el denominador de C_5 es pequeño y C_5 es tan grande que y_5 es el término dominante en (7). Esto implica que el movimiento de estado estacionario es casi una oscilación armónica cuya frecuencia es igual a cinco veces la de la fuerza que causa la oscilación (figura 245). ■

La aplicación de series de Fourier a sistemas oscilatorios más generales, a conducción de calor y a otros problemas se trata en el capítulo 11.

Problemas de la sección 10.7

1. ¿Qué ocurriría con las amplitudes C_n en el ejemplo 1 (y, por consiguiente con la forma de las oscilaciones) si se cambia la constante del resorte al valor 9? ¿Si se usa un resorte más rígido con $k = 49$? ¿Si se incrementa el amortiguamiento?

Encontrar una solución general de la ecuación diferencial $y'' + \omega^2 y = r(t)$, donde

2. $r(t) = \cos \alpha t + \cos \beta t$ ($\omega^2 \neq \alpha^2, \beta^2$)
3. $r(t) = \sin t$, $\omega = 0.5, 0.7, 0.9, 1.1, 1.5, 2.0, 10.0$
4. $r(t) = \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t$, $\omega = 0.5, 0.9, 1.1, 2, 2.9, 3.1, 4, 4.9, 5.1, 6, 8$
5. $r(t) = \sum_{n=1}^N a_n \cos nt$, $|\omega| \neq 1, 2, \dots, N$
6. $r(t) = \frac{\pi}{4} |\sin t|$ cuando $-\pi < t < \pi$ y $r(t + 2\pi) = r(t)$, $|\omega| \neq 0, 2, 4, \dots$

$$7. r(t) = \begin{cases} t + \pi & \text{si } -\pi < t < 0 \\ -t + \pi & \text{si } 0 < t < \pi \end{cases} \quad y \quad r(t + 2\pi) = r(t), |\omega| \neq 0, 1, 3, \dots$$

$$8. r(t) = \begin{cases} t & \text{si } -\pi/2 < t < \pi/2 \\ \pi - t & \text{si } \pi/2 < t < 3\pi/2 \end{cases} \quad y \quad r(t + 2\pi) = r(t), |\omega| \neq 1, 3, 5, \dots$$

Encontrar la oscilación de estado estacionario correspondiente a $y'' + cy' + y = r(t)$, donde $c > 0$ y

$$9. r(t) = a_n \cos nt \quad 10. r(t) = \sum_{n=1}^N b_n \sin nt$$

$$11. r(t) = \sin 3t$$

$$12. r(t) = \begin{cases} \pi t/4 & \text{si } -\pi/2 < t < \pi/2 \\ \pi(\pi - t)/4 & \text{si } \pi/2 < t < 3\pi/2 \end{cases} \quad y \quad r(t + 2\pi) = r(t)$$

$$13. r(t) = \frac{t}{12} (\pi^2 - t^2) \quad \text{si } -\pi < t < \pi \quad y \quad r(t + 2\pi) = r(t)$$

14. (Circuito RLC) Encontrar la corriente de estado estacionario $I(t)$ en el circuito RLC de la figura 243, donde $R = 100$ ohms, $L = 10$ henrys, $C = 10^{-2}$ faradios.

$$E(t) = \begin{cases} 100(\pi t + t^2) & \text{si } -\pi < t < 0 \\ 100(\pi t - t^2) & \text{si } 0 < t < \pi \end{cases} \quad y \quad E(t + 2\pi) = E(t).$$

Proceder de la siguiente manera. Desarrollar $E(t)$ en una serie de Fourier. $I(t)$ aparecerá en la forma de una serie trigonométrica. Encontrar las fórmulas generales para los coeficientes de esta serie. Calcular valores numéricos de los primeros coeficientes. Graficar la suma de los primeros términos de esa serie.

15. Repetir el problema 14 con los mismos valores de R , L , C y $E(t) = 200t(\pi^2 - t^2)$ volts si $-\pi < t < \pi$ y $E(t + 2\pi) = E(t)$.

10.8 APROXIMACIÓN POR POLINOMIOS TRIGONOMÉTRICOS

Un campo principal de aplicación de las series de Fourier es en ecuaciones diferenciales, como ya se mencionó. Otra área de interés práctico en que las series de Fourier desempeñan un papel principal es la aproximación de funciones por medio de funciones más simples, área conocida como *teoría de aproximaciones*, como se explica a continuación.

Sea $f(x)$ una función de periodo 2π que puede representarse por una serie de Fourier. Entonces la N -ésima suma parcial de esta serie es una aproximación a $f(x)$:

$$(1) \quad f(x) \approx a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Es natural preguntarse si (1) es la "mejor" aproximación a f por un polinomio trigonométrico de grado N (N fija), es decir, una función de la forma

$$(2) \quad F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + \beta_n \sin nx),$$

donde "mejor" significa que el "error" de la aproximación es mínimo.

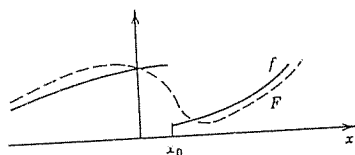


Figura 246. Error de aproximación.

Desde luego, debe definirse primero qué se entiende por el error E de esta aproximación. Desearía elegirse una definición que mida la bondad de la concordancia entre f y F en el intervalo completo $-\pi \leq x \leq \pi$. Evidentemente, el máximo de $|f - F|$ no es adecuado para este fin: en la figura 246, la función F es una buena aproximación de f , pero $|f - F|$ es grande cerca de x_0 . Se elige

$$(3) \quad E = \int_{-\pi}^{\pi} (f - F)^2 dx.$$

Éste es el llamado error cuadrático total de F con relación a la función f en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$. Obviamente, $E \geq 0$.

Con N fija, quieren determinarse los coeficientes de (2) tales que E sea mínimo. Puesto que $(f - F)^2 = f^2 - 2fF + F^2$, se tiene

$$(4) \quad E = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} fF dx + \int_{-\pi}^{\pi} F^2 dx.$$

Al introducir (2) en la última integral y evaluando las integrales presentes como en la sección 10.2, se observa que todos los términos $\cos^2 nx$ y $\sin^2 nx$ ($n \geq 1$) tienen integral π y todos los "términos mixtos" $(\cos nx)(\sin mx)$ tienen integral cero. Por tanto

$$\int_{-\pi}^{\pi} F^2 dx = \pi(2\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_N^2 + \beta_1^2 + \cdots + \beta_N^2).$$

Al introducir (2) en la segunda integral de (4), se observa que las integrales presentes son las de las fórmulas de Euler (6), sección 10.2, y por tanto se obtiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} fF dx = \pi(2\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_N a_N + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_N b_N).$$

Con estas expresiones (4) queda

$$(5) \quad E = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - 2\pi \left[2\alpha_0 a_0 + \sum_{n=1}^N (\alpha_n a_n + \beta_n b_n) \right]$$

$$+ \pi \left[2\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^N (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \right].$$

Si se toma $\alpha_n = a_n$ y $\beta_n = b_n$ en (2), entonces por (5) se ve que el error cuadrático correspondiente a esta elección de los coeficientes de F está dado por

$$(6) \quad E^* = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - \pi \left[2a_0^2 + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right].$$

Al restar (6) de (5) se obtiene

$$E - E^* = \pi \left\{ 2(\alpha_0 - a_0)^2 + \sum_{n=1}^N [(\alpha_n - a_n)^2 + (\beta_n - b_n)^2] \right\}.$$

Puesto que la suma de los cuadrados de números reales en el segundo miembro no puede ser negativa,

$$E - E^* \geq 0, \quad \text{por tanto} \quad E \geq E^*,$$

y $E = E^*$ si y sólo si $\alpha_0 = a_0, \dots, \beta_N = b_N$. Se demuestra así

Teorema 1 (Error cuadrático mínimo)

El error cuadrático total de F en (2) (con N fija) respecto de f en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$ es mínimo si y sólo si los coeficientes de F en (2) son los coeficientes de Fourier de f . Este valor mínimo está dado por (6).

Por (6) se observa que E^* no puede incrementarse cuando N se incrementa, pero sí puede decrementarse. Por tanto, con N creciente, las sumas parciales de la serie de Fourier de f dan aproximaciones cada vez mejores a f , consideradas desde el punto de vista del error cuadrático.

Puesto que $E^* \geq 0$ y (6) es válida para toda N , a partir de (6) se obtiene la importante desigualdad de Bessel¹⁰

$$(7) \quad 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$$

para los coeficientes de Fourier de cualquier función f para la que la integral del segundo miembro exista.

¹⁰ Ver la nota de pie de página 12 en la sección 5.5.

Puede demostrarse (ver [C14]) que para esta función f , el teorema de Parseval es válido, es decir, la fórmula (7) es válida con el signo de igualdad, por lo que da lugar a la "identidad de Parseval"¹¹

$$(8) \quad 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx.$$

EJEMPLO 1 Error cuadrático de la onda diente de sierra

Calcular el error cuadrático total de F con $N=3$ respecto a

$$f(x) = x + \pi \quad (-\pi < x < \pi) \quad (\text{Fig. 238a, Sec. 10.4})$$

en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$

Solución. $F(x) = \pi + 2 \sin x - \sin 2x + \frac{2}{3} \sin 3x$ por el ejemplo 2, sección 10.4. A partir de lo anterior y de (6),

$$E^* = \int_{-\pi}^{\pi} (x + \pi)^2 dx - \pi[2\pi^2 + 2^2 + 1^2 + (\frac{2}{3})^2],$$

por tanto

$$E^* = \frac{8}{3}\pi^3 - \pi(2\pi^2 + \frac{49}{9}) \approx 3.567.$$

$F = S_3$ se ilustra en la figura 238b y aun cuando $|f(x) - F(x)|$ es grande en $x = \pm\pi$ (¿qué tan grande?), donde f es discontinua, F es una buena aproximación a f en el intervalo completo. ■

Se llega así al final de la discusión de las series de Fourier, en la que se ha hecho hincapié en los aspectos prácticos de estas series, como se necesita en las aplicaciones. En las cuatro últimas secciones de este capítulo se muestra la manera en que las ideas y técnicas de las series de Fourier pueden generalizarse a funciones no periódicas.

Problemas de la sección 10.8

- Sea $f(x) = -1$ si $-\pi < x < 0$, $f(x) = 1$ si $0 < x < \pi$ y sea periódica con 2π . Encontrar la función $F(x)$ de la forma (2) para la que el error cuadrático total (3) es mínimo.
- Calcular el error cuadrático mínimo en el problema 1 para $N=1, 3, 5, 7$. ¿Cuál es la menor N tal que $E^* \leq 0.2$?
- Mostrar que el error cuadrático mínimo (6) es una función monótona decreciente de N .

En cada caso, encontrar la función $F(x)$ de la forma (2) para la que el error cuadrático total E en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$ es mínimo y calcular este valor mínimo para $N=1, 2, \dots, 5$, donde, para $-\pi < x < \pi$,

- $f(x) = |x|$
- $f(x) = x(\pi^2 - x^2)/12$
- $f(x) = x$
- $f(x) = -\pi - x$ si $-\pi < x < -\pi/2$, $f(x) = x$ si $-\pi/2 < x < \pi/2$, $f(x) = \pi - x$ si $\pi/2 < x < \pi$
- $f(x) = x$ si $-\pi/2 < x < \pi/2$, $f(x) = 0$ en cualquier parte de $-\pi < x < \pi$

¹¹ MARC ANTOINE PARSEVAL (1755-1836), matemático francés. En la siguiente sección se presenta una descripción de su vida.

- Comparar la rapidez del decrecimiento del error cuadrático para la función discontinua del problema 5 y la función continua del problema 7 y comentar el resultado.

Usando la identidad de Parseval, demostrar que

$$11. \quad 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96} \quad (\text{Usar el problema 27 de la sección 10.4.})$$

$$12. \quad 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{8} \quad (\text{Usar el problema 5 de la sección 10.2.})$$

$$13. \quad 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90} \quad (\text{Usar el problema 9 de la sección 10.2.})$$

$$14. \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^4 x \, dx = \frac{3\pi}{4} \quad 15. \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^6 x \, dx = \frac{5\pi}{8}$$

10.9 INTEGRALES DE FOURIER

Las series de Fourier son poderosas herramientas para abordar varios problemas en los que intervienen funciones periódicas. La sección 10.7 incluyó una primera ilustración de este hecho y en el capítulo 11 se presentan varias aplicaciones más. Puesto que, desde luego, en muchos problemas prácticos intervienen funciones no periódicas, surge la pregunta de qué puede hacerse para generalizar el método de las series de Fourier para tales funciones. Este es el objetivo de la presente sección. En el ejemplo 1 se empieza con una función especial $f_L(x)$ de periodo $2L$ y se observa lo que ocurre con su serie de Fourier si se hace que $L \rightarrow \infty$. Después se considera la serie de Fourier de una función arbitraria f_L de periodo $2L$ y se hace de nuevo que $L \rightarrow \infty$. Esto motivará y sugerirá el resultado principal de esta sección, una representación en integrales en el teorema 1 (p.60).

EJEMPLO 1 Onda cuadrada

Considérese la onda cuadrada periódica $f_L(x)$ de periodo $2L > 2$ dada por

$$f_L(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -L < x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x < L \end{cases}$$

La parte izquierda de la figura 247 ilustra esta función para $2L = 4, 8, 16$ así como la función no periódica

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} f_L(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

que se obtiene a partir de f_L si se hace que $L \rightarrow \infty$.

Se explora ahora lo que ocurre con los coeficientes de Fourier de f_L cuando L se incrementa. Puesto que f_L es par, $b_n = 0$ para toda n . Para a_n las fórmulas de Euler (2), sección 10.3, dan como resultado

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx = \frac{1}{L}, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^1 \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \frac{\sin(n\pi/L)}{n\pi/L}$$

Esta sucesión de coeficientes de Fourier se llama el espectro de la amplitud de f_L ya que $|a_n|$ es la

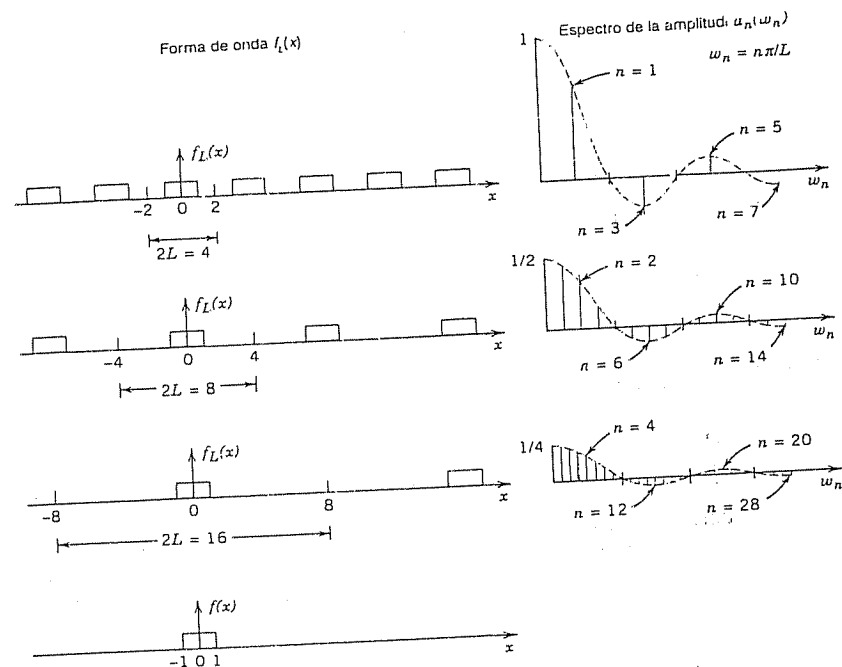


Figura 247. Formas de onda y espectros de amplitud del ejemplo 1.

$2L = 4, 8, 16$. Se observa que para L creciente las amplitudes se hacen cada vez más densas sobre el eje w_n positivo, donde $w_n = n\pi/L$. De hecho, para $2L = 4, 8, 16$ se tienen 1, 3, 7 amplitudes por "media onda" de la función (2 sen w_n/L) (línea discontinua en la figura). Por tanto, para $2L = 2^k$ se tienen $2^{k-1} - 1$ amplitudes por media onda, por lo que estas amplitudes serán en última instancia densas sobre todo el eje w_n positivo (y se decrementarán a cero).

Se considera ahora cualquier función periódica $f_L(x)$ de periodo $2L$ que puede representarse por una serie de Fourier

$$f_L(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos w_n x + b_n \sin w_n x), \quad w_n = \frac{n\pi}{L},$$

y se averigua qué ocurre si se hace que $L \rightarrow \infty$. Junto con el ejemplo anterior, el presente cálculo sugerirá que debería esperarse una integral (en lugar de una serie) que incluye $\cos wx$ y $\sin wx$ con w dejando de estar restringida a múltiplos enteros $w = w_n = n\pi/L$ sino asumiendo *todos* los valores, y se verá asimismo qué forma podría tener dicha integral.

Si se introducen a_n y b_n de las fórmulas de Euler (2), sección 10.3, y se denota por v la variable de integración, la serie de Fourier de $f_L(x)$ queda

$$f_L(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(v) dv + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos w_n x \int_{-L}^L f_L(v) \cos w_n v dv + \sin w_n x \int_{-L}^L f_L(v) \sin w_n v dv \right].$$

Se hace ahora

$$\Delta w = w_{n+1} - w_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}.$$

Entonces $1/L = \Delta w/\pi$ y la serie de Fourier puede escribirse en la forma

$$(1) \quad f_L(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(v) dv + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\cos w_n x) \Delta w \int_{-L}^L f_L(v) \cos w_n v dv + (\sin w_n x) \Delta w \int_{-L}^L f_L(v) \sin w_n v dv \right].$$

Esta representación es válida para cualquier L fija, arbitrariamente grande, pero finita.

Ahora se hace que $L \rightarrow \infty$ y se supone que la función no periódica resultante

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} f_L(x)$$

es absolutamente integrable sobre el eje x ; es decir, que existen los siguientes límites (¡finitos!):

$$(2) \quad \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 |f(x)| dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b |f(x)| dx \quad \left(\text{denotado } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \right).$$

Entonces $1/L \rightarrow 0$, y el valor del primer término del segundo miembro de (1) tiende a cero. Además, $\Delta w = \pi/L \rightarrow 0$ y parece *plausible* que la serie infinita de (1) se convierta en una integral de 0 a ∞ , que representa $f(x)$, a saber,

$$(3) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\cos wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv dv + \sin wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin wv dv \right] dw.$$

Si se introducen las notaciones

$$(4) \quad A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv \, dv, \quad B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin wv \, dv,$$

esta expresión puede escribirse en la forma

$$(5) \quad f(x) = \int_0^{\infty} [A(w) \cos wx + B(w) \sin wx] \, dw.$$

Esta es una representación de $f(x)$ por la llamada **integral de Fourier**.

Resulta evidente que el enfoque intuitivo adoptado tan sólo *sugiere* la representación (5), pero en modo alguno la establece; de hecho, el límite de la serie en (1) cuando Δw tiende a cero no es la definición de la integral (3). Las condiciones suficientes para la validez de (5) son las siguientes.

Teorema 1 (Integral de Fourier)

Si $f(x)$ es continua por secciones (ver la sección 6.1) en todo intervalo finito y tiene una derivada por la izquierda y una derivada por la derecha en todo punto (ver la sección 10.2) y si la integral (2) existe, entonces $f(x)$ puede representarse por una integral de Fourier (5). En cualquier punto donde $f(x)$ sea discontinua, el valor de la integral de Fourier es igual al promedio de los límites por la izquierda y por la derecha de $f(x)$ en ese punto (ver la sección 10.2). (La demostración se presenta en la referencia [C14]; ver el apéndice 1.)

El uso principal de la integral de Fourier es en la solución de ecuaciones diferenciales, como se verá en la sección 11.14. Sin embargo, también puede usarse la integral de Fourier en la integración y discusión de funciones definidas por integrales, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 2 Pulso sencillo, integral de seno

Encontrar la representación por la integral de la función (figura 248)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

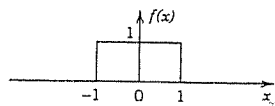


Figura 248. Ejemplo 2.

Solución. Por (4) se obtiene

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv \, dv = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \cos wv \, dv = \frac{\sin wv}{\pi w} \Big|_{-1}^1 = \frac{2 \sin w}{\pi w},$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sin wv \, dv = 0,$$

y (5) da la respuesta

$$(6) \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos wx \sin w}{w} \, dw.$$

El promedio de los límites por la izquierda y por la derecha de $f(x)$ en $x = 1$ es igual a $(1 + 0)/2$, es decir, $1/2$.

Además, por (6) y el teorema 1 se obtiene

$$(7^*) \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos wx \sin w}{w} \, dw = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ \pi/4 & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Cabe mencionar que esta integral es el llamado **factor discontinuo de Dirichlet**.¹² Se considera ahora el caso $x = 0$, que es de particular interés. Si $x = 0$, entonces

$$(7) \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin w}{w} \, dw = \frac{\pi}{2}.$$

Se observa que esta integral es el límite de la llamada **integral de seno**

$$(8) \quad \text{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin w}{w} \, dw$$

cuando $z \rightarrow \infty$ (z real). La gráfica de $\text{Si}(z)$ se muestra en la figura 249.

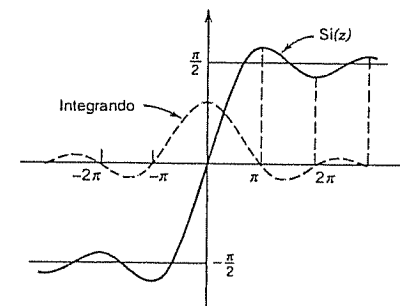
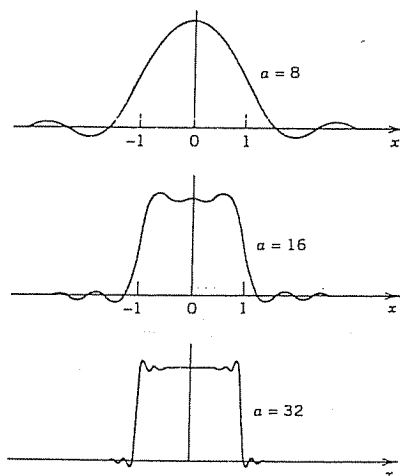


Figura 249. Integral de seno $\text{Si}(z)$

¹² Ver nota de pie de página 16 de la sección 9.8.

Figura 250. La integral (9) para $a = 8, 16$ y 32 .

En el caso de una serie de Fourier, las gráficas de las sumas parciales son curvas de aproximación de la curva de la función periódica representada por la serie. De manera similar, en el caso de la integral de Fourier (5), las aproximaciones se obtienen sustituyendo ∞ por números a . Por tanto, la integral

$$(9) \quad \int_0^a \frac{\cos wx \sin w}{w} dw$$

es una aproximación a la integral en (6) y por lo tanto a $f(x)$; ver la figura 250.

La figura 250 muestra las oscilaciones cerca de los puntos de discontinuidad de $f(x)$. Podría esperarse que estas oscilaciones desaparecieran cuando a tiende a infinito, pero no es este el caso; con a creciente éstas cambian acercándose a puntos $x = \pm 1$. Este comportamiento inesperado, que ocurre también en relación con la serie de Fourier, se conoce como el fenómeno de Gibbs.¹¹ Puede explicarse al representar (9) en términos de la integral de seno de la siguiente manera. Usando (11) del apéndice 3, se tiene

$$\frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{\cos wx \sin w}{w} dw = \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\sin(w + wx)}{w} dw + \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\sin(w - wx)}{w} dw.$$

En la primera integral del segundo miembro se hace $w + wx = t$. Entonces $dw/w = dt/t$ y $0 \leq w \leq a$ corresponde a $0 \leq t \leq (x+1)a$. En la última integral se hace $w - wx = -t$. Entonces $dw/w = dt/t$ y $0 \leq w \leq a$ corresponde a $0 \leq t \leq (x-1)a$. Puesto que $\sin(-t) = -\sin t$, se obtiene

$$\frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{\cos wx \sin w}{w} dw = \frac{1}{\pi} \int_0^{(x+1)a} \frac{\sin t}{t} dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{(x-1)a} \frac{\sin t}{t} dt.$$

¹¹ JOSIAH WILLARD GIBBS (1839-1903), matemático estadounidense, profesor de física matemática en Yale desde 1897, uno de los fundadores del cálculo vectorial (otro fue O. Heaviside (ver la sección 6.1) termodinámica matemática y mecánica estadística. Su trabajo fue de gran importancia en el desarrollo de la física matemática

A partir de esta expresión y de (8) se observa que la integral considerada es igual a

$$\frac{1}{\pi} \text{Si}(a[x+1]) - \frac{1}{\pi} \text{Si}(a[x-1]),$$

y las oscilaciones de la figura 250 resultan de las de la figura 249. El incremento de a equivale a una transformación de la escala sobre el eje y ocasiona el cambio de las oscilaciones.

Integrales de Fourier de cosenos y de senos

Para una función par o impar, la integral de Fourier se hace más simple. Como en el caso de la serie de Fourier (sección 10.4), esto es de interés práctico para ahorrar trabajo y evitar errores. Las simplificaciones se siguen inmediatamente de las fórmulas que acaban de obtenerse.

De hecho, si $f(x)$ es una función par, entonces $B(w) = 0$ en (4) y

$$(10) \quad A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) \cos wv dv,$$

y la integral de Fourier (5) se reduce a la llamada **integral de Fourier de coseno**

$$(11) \quad f(x) = \int_0^{\infty} A(w) \cos wx dw \quad (f \text{ par})$$

De manera similar, si $f(x)$ es impar, entonces en (4) se tiene $A(w) = 0$ y

$$(12) \quad B(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) \sin wv dv,$$

y la integral de Fourier (5) se reduce a la llamada **integral de Fourier de seno**

$$(13) \quad f(x) = \int_0^{\infty} B(w) \sin wx dw \quad (f \text{ impar})$$

Evaluación de integrales

Las representaciones en integrales de Fourier también pueden usarse para evaluar integrales. Se ilustra este método con un ejemplo típico.

EJEMPLO 3 Integrales de Laplace

Encontrar las integrales de Fourier de coseno y de seno de

$$f(x) = e^{-kx} \quad (x > 0, k > 0).$$

Solución. (a) Por (10) se tiene

$$A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-kv} \cos wv \, dv.$$

Entonces, al integrar por partes,

$$\int e^{-kv} \cos wv \, dv = -\frac{k}{k^2 + w^2} e^{-kv} \left(-\frac{w}{k} \sin wv + \cos wv \right).$$

Si $v = 0$, la expresión del segundo miembro es $-k/(k^2 + w^2)$; si v tiende a infinito, dicha expresión tiende a cero debido al factor exponencial. Por tanto,

$$(14) \quad A(w) = \frac{2k/\pi}{k^2 + w^2}.$$

Al sustituir este resultado en (11) se obtiene la representación en una integral de Fourier de coseno

$$f(x) = e^{-kx} = \frac{2k}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos wx}{k^2 + w^2} \, dw \quad (x > 0, k > 0).$$

A partir de esta representación se observa que

$$(15) \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos wx}{k^2 + w^2} \, dw = \frac{\pi}{2k} e^{-kx} \quad (x > 0, k > 0).$$

(b) De manera similar, por (12) se tiene

$$B(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-kv} \sin wv \, dv.$$

Al integrar por partes,

$$\int e^{-kv} \sin wv \, dv = -\frac{w}{k^2 + w^2} e^{-kv} \left(\frac{k}{w} \sin wv + \cos wv \right).$$

Esto es igual a $-w/(k^2 + w^2)$ si $v = 0$, y tiende a 0 cuando $v \rightarrow \infty$. Por tanto

$$(16) \quad B(w) = \frac{2w/\pi}{k^2 + w^2}.$$

Así, por (13) se obtiene la representación en una integral de seno de Fourier

$$f(x) = e^{-kx} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{w \sin wx}{k^2 + w^2} \, dw.$$

A partir de este resultado se observa que

$$(17) \quad \int_0^{\infty} \frac{w \sin wx}{k^2 + w^2} \, dw = \frac{\pi}{2} e^{-kx} \quad (x > 0, k > 0).$$

Las integrales (15) y (17) son las llamadas integrales de Laplace.

Problemas de la sección 10.9

Usando la representación en integrales de Fourier, demostrar que

$$1. \int_0^{\infty} \frac{\cos xw + w \operatorname{sen} xw}{1 + w^2} \, dw = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \pi/2 & \text{si } x = 0 \\ \pi e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad [\text{Usar (5).}]$$

$$2. \int_0^{\infty} \frac{w^3 \operatorname{sen} xw}{w^4 + 4} \, dw = \frac{\pi}{2} e^{-x} \cos x \quad \text{si } x > 0 \quad [\text{Usar (13).}]$$

$$3. \int_0^{\infty} \frac{\cos xw}{1 + w^2} \, dw = \frac{\pi}{2} e^{-x} \quad \text{si } x > 0 \quad [\text{Usar (11).}]$$

$$4. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} w \cos xw}{w} \, dw = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \pi/4 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad [\text{Usar (11).}]$$

$$5. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \pi w \operatorname{sen} xw}{1 - w^2} \, dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{si } x > \pi \end{cases} \quad [\text{Usar (13).}]$$

$$6. \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos \pi w}{w} \operatorname{sen} xw \, dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{si } x > \pi \end{cases} \quad [\text{Usar (13).}]$$

$$7. \int_0^{\infty} \frac{\cos (\pi w/2) \cos xw}{1 - w^2} \, dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cos x & \text{si } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad [\text{Usar (11).}]$$

Representar las siguientes funciones $f(x)$ en la forma (11).

$$8. f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad 9. f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$10. f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 - x/2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad 11. f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{si } x > a \end{cases}$$

$$12. f(x) = \begin{cases} a^2 - x^2 & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{si } x > a \end{cases} \quad 13. f(x) = \frac{1}{1 + x^2} \quad [\text{ver (15)}]$$

$$14. f(x) = e^{-x} + e^{-2x} \quad (x > 0)$$

Si $f(x)$ tiene la representación (11), demostrar que

$$15. f(ax) = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} A\left(\frac{w}{a}\right) \cos xw \, dw \quad (a > 0)$$

$$16. xf(x) = \int_0^{\infty} B^*(w) \operatorname{sen} xw \, dw, \quad B^* = -\frac{dA}{dw}, \quad A \text{ como en (10)}$$

$$17. x^2 f(x) = \int_0^{\infty} A^*(w) \cos xw \, dw, \quad A^* = -\frac{d^2 A}{dw^2}$$

18. Resolver el problema 9 aplicando la fórmula del problema 17 al resultado del problema 8.
 19. Comprobar la fórmula del problema 16 para $f(x) = 1$ si $0 < x < a$ y $f(x) = 0$ si $x > a$.
 20. Demostrar que $f(x) = 1$ ($0 < x < \infty$) no puede representarse con una integral de Fourier.

10.10 TRANSFORMADAS DE FOURIER DE COSENOS Y DE SENOS

Una transformada integral es una transformación que a partir de funciones dadas produce nuevas funciones que dependen de una variable diferente y aparecen en la forma de una integral. Estas transformaciones son de interés principalmente como herramientas para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones diferenciales parciales y ecuaciones integrales, y con frecuencia también son de ayuda en el manejo y aplicación de funciones especiales. La transformada de Laplace (capítulo 6) es de esta clase y es con mucho la transformada integral más importante en ingeniería. Desde el punto de vista de las aplicaciones, las siguientes en importancia serían quizás las transformadas de Fourier, aun cuando su manejo resulta un tanto más difícil que la transformada de Laplace. Se verá que dichas transformadas pueden obtenerse a partir de representaciones en integrales de Fourier de la sección 10.9. En esta sección se consideran dos de ellas, llamadas las transformadas de Fourier de coseno y de seno, las cuales son reales, y en la siguiente sección se trata una tercera, que es compleja.

Transformadas de Fourier de coseno

Para cualquier función $f(x)$ par, la integral de Fourier es la integral de Fourier de coseno

$$(1) \text{ (a) } f(x) = \int_0^{\infty} A(w) \cos wx \, dw, \quad \text{donde} \quad (b) \ A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) \cos wv \, dv$$

[ver (10), (11), sección 10.9]. Se hace ahora $A(w) = \sqrt{2/\pi} \hat{f}_c(w)$, donde c sugiere "coseno". Entonces por (1b), al escribir $v = x$, se tiene

$$(2) \quad \hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos wx \, dx$$

y por (1a),

$$(3) \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}_c(w) \cos wx \, dw.$$

¡Atención! En (2) se integra con respecto a x y en (3) con respecto a w . A partir de $f(x)$, la fórmula (2) da una nueva función $\hat{f}_c(w)$, llamada la transformada de Fourier de coseno de $f(x)$. La fórmula (3) permite regresar a $f(x)$ a partir de $\hat{f}_c(w)$ y, por lo tanto, a $f(x)$ se le llama la transformada de coseno inversa de Fourier de $\hat{f}_c(w)$.

El proceso para obtener la transformada \hat{f}_s a partir de una f dada también se llama la transformación de Fourier de coseno o el método de la transformación de Fourier de coseno.

Transformadas de Fourier de seno

De manera similar, para una función $f(x)$ impar, la integral de Fourier es la integral de Fourier de seno [ver (12), (13), sección 10.9]

$$(4) \text{ (a) } f(x) = \int_0^{\infty} B(w) \sin wx \, dw, \quad \text{donde} \quad (b) \ B(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) \sin wv \, dv.$$

Se hace ahora $B(w) = \sqrt{2/\pi} \hat{f}_s(w)$, donde s sugiere "seno". Entonces por (4b), al escribir $v = x$, se tiene

$$(5) \quad \hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin wx \, dx,$$

llamada la transformada de Fourier de seno de $f(x)$, y por (4a)

$$(6) \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}_s(w) \sin wx \, dw,$$

llamada la transformada de seno inversa de Fourier de $\hat{f}_s(w)$. Al proceso de obtener $\hat{f}_s(w)$ a partir de $f(x)$ también se le llama la transformación de Fourier de seno o el método de la transformación de Fourier de seno.

Otras notaciones son

$$\mathcal{F}_c(f) = \hat{f}_c, \quad \mathcal{F}_s(f) = \hat{f}_s$$

y \mathcal{F}_c^{-1} y \mathcal{F}_s^{-1} para las inversas de \mathcal{F}_c y \mathcal{F}_s , respectivamente.

EJEMPLO 1 Transformadas de Fourier de coseno y de seno

Encontrar las transformadas de Fourier de coseno y de seno de la función

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{si } x > a. \end{cases}$$

Solución. A partir de las definiciones (2) y (5) por integración se obtiene

$$\hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \int_0^a \cos wx \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \left[\frac{\sin aw}{w} \right].$$

$$\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \int_0^a \sin wx \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \left[\frac{1 - \cos aw}{w} \right].$$

Este resultado concuerda con las fórmulas 1 de las dos primeras tablas de la sección 10.12 (donde $k = 1$).

Obsérvese que para $f(x) = k = \text{const}$ ($0 < x < \infty$) estas transformadas no existen. (¿Por qué?) ■

EJEMPLO 2 Transformada de Fourier de coseno de la función exponencialEncontrar $\mathcal{F}_c\{e^{-x}\}$ **Solución.** Por integración por partes y recurrencia.

$$\mathcal{F}_c\{e^{-x}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x} \cos wx \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-x}}{1+w^2} (-\cos wx + w \sin wx) \Big|_0^{\infty} = \frac{\sqrt{2/\pi}}{1+w^2}.$$

Este resultado concuerda con la fórmula 3 de la tabla 1, sección 10.12, con $a=1$.

¿Qué se ha hecho a fin de introducir las dos transformadas integrales bajo consideración? No mucho en realidad: Se han cambiado las notaciones A y B para obtener una distribución "simétrica" de la constante $2/\pi$ en las fórmulas originales (10)-(13), sección 10.9. Esta redistribución es una convención común, pero no es esencial. También podría hacerse sin ella.

¿Qué se ha ganado? Se demuestra en seguida que estas transformadas tienen propiedades operacionales que les permiten convertir diferenciaciones en operaciones algebraicas (como la transformada de Laplace). Esta es la clave de su aplicación en la solución de ecuaciones diferenciales.

Linealidad, transformadas de derivadas

Si $f(x)$ es absolutamente integrable (ver la sección 10.9) en el eje x positivo y es continua por secciones (ver la sección 6.1) en todo intervalo finito, entonces las transformadas de Fourier de coseno y de seno de f existen.

Además, para una función $af(x) + bg(x)$ se tiene por (2)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c\{af + bg\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [af(x) + bg(x)] \cos wx \, dx \\ &= a \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos wx \, dx + b \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g(x) \cos wx \, dx. \end{aligned}$$

El segundo miembro es $a\mathcal{F}_c\{f\} + b\mathcal{F}_c\{g\}$. Por (5) se llega a una expresión análoga para \mathcal{F}_s . Se demuestra así que las transformadas de Fourier de coseno y de seno son **operaciones lineales**,

$$\begin{aligned} (a) \quad \mathcal{F}_c\{af + bg\} &= a\mathcal{F}_c\{f\} + b\mathcal{F}_c\{g\}, \\ (b) \quad \mathcal{F}_s\{af + bg\} &= a\mathcal{F}_s\{f\} + b\mathcal{F}_s\{g\}. \end{aligned}$$

Teorema 1 (Transformadas coseno y seno de derivadas)

Sea $f(x)$ continua y absolutamente integrable en el eje x , sea $f'(x)$ continua por secciones en todo intervalo finito y sea que $f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$. Entonces

$$\begin{aligned} (a) \quad \mathcal{F}_c\{f'(x)\} &= w\mathcal{F}_s\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0), \\ (b) \quad \mathcal{F}_s\{f'(x)\} &= -w\mathcal{F}_c\{f(x)\}. \end{aligned}$$

Demostración. Esto se sigue de las definiciones al integrar por partes, a saber,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c\{f'(x)\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f'(x) \cos wx \, dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[f(x) \cos wx \Big|_0^{\infty} + w \int_0^{\infty} f(x) \sin wx \, dx \right] \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0) + w\mathcal{F}_s\{f(x)\}; \end{aligned}$$

de manera similar,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s\{f'(x)\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f'(x) \sin wx \, dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[f(x) \sin wx \Big|_0^{\infty} - w \int_0^{\infty} f(x) \cos wx \, dx \right] \\ &= 0 - w\mathcal{F}_c\{f(x)\}. \end{aligned}$$

La fórmula (8a) con f' en lugar de f da como resultado

$$\mathcal{F}_c\{f''(x)\} = w\mathcal{F}_s\{f'(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0);$$

en consecuencia, por (8b),

$$(9a) \quad \boxed{\mathcal{F}_c\{f''(x)\} = -w^2\mathcal{F}_c\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0).}$$

De manera similar,

$$(9b) \quad \boxed{\mathcal{F}_s\{f''(x)\} = -w^2\mathcal{F}_s\{f(x)\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} wf(0).}$$

Una aplicación de (9) a ecuaciones diferenciales se presentará en la sección 11.14. Por el momento, se indica cómo puede usarse (9) para derivar transformadas.

EJEMPLO 3 Una aplicación de la fórmula operacional (9)

Encontrar la transformada de Fourier de coseno de $f(x) = e^{-ax}$, donde $a > 0$.

Solución. Por diferenciación, $(e^{-ax})' = -ae^{-ax}$; por tanto, $a^2f(x) = f''(x)$. A partir de esta expresión y de (9a),

$$a^2\mathcal{F}_c\{f\} = \mathcal{F}_c\{f''\} = -w^2\mathcal{F}_c\{f\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0) = -w^2\mathcal{F}_c\{f\} + a \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Por tanto, $(a^2 + w^2)\mathcal{F}_c(f) = a\sqrt{2/\pi}$. La respuesta es (ver la tabla I, sección 10.12)

$$\mathcal{F}_c(e^{-ax}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{a}{a^2 + w^2} \right) \quad (a > 0).$$

En la sección 10.12 se incluyen **tablas** de transformadas de Fourier de coseno y de seno. Para tablas más extensas, ver la referencia [C4] en el apéndice 1.

Problemas de la sección 10.10

1. Sea $f(x) = -1$ si $0 < x < 1$, $f(x) = 1$ si $1 < x < 2$. Encontrar $\hat{f}_c(w)$.
2. Deducir $f(x)$ del problema 1 a partir de la respuesta del mismo. *Sugerencia.* Usar el problema 4 de la sección 10.9.
3. Encontrar la transformada de Fourier de coseno de $f(x) = x$ si $0 < x < a$, $f(x) = 0$ si $x > a$.
4. Encontrar $\mathcal{F}_c(e^{-ax})$, $a > 0$, por integración.
5. Deducir la fórmula 3 de la tabla I de la sección 10.12 por integración.
6. Obtener la respuesta del problema 4 a partir de (9b).
7. Obtener $\mathcal{F}_c(1/(1+x^2))$ a partir del problema 3 de la sección 10.9.
8. Obtener la transformada de coseno inversa de Fourier de e^{-x} .
9. Encontrar la transformada senoidal de Fourier de $f(x) = x^2$ si $0 < x < 1$, $f(x) = 0$ si $x > 1$.
10. Encontrar la transformada de Fourier de coseno de la función del problema 9.
11. Obtener $\mathcal{F}_c(x^{-1} - x^{-1} \cos \pi x)$. *Sugerencia.* Usar el problema 6, sección 10.9, con w y x intercambiadas.
12. Obtener la fórmula 10 de la tabla I de la sección 10.12 con $a = 1$ a partir del ejemplo 2 de la sección 10.9.
13. Encontrar $\mathcal{F}_c\{(\cos \pi x/2)/(1+x^2)\}$. *Sugerencia.* Usar el problema 7 de la sección 10.9.
14. Usando (8b), obtener $\mathcal{F}_c(xe^{x^2/2})$ a partir de una fórmula adecuada de la tabla I, sección 10.12.
15. Encontrar $\mathcal{F}_c(e^{-x})$ a partir de (8a) y de la fórmula 3 de la tabla I, sección 10.12.
16. Usando $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, obtener la fórmula 2 de la tabla II, sección 10.12, a partir de la fórmula 4 de dicha tabla.
17. Sea $f(x) = x^3/(x^4 + 4)$. Encontrar $\hat{f}_c(w)$ para $w > 0$. *Sugerencia.* Usar el problema 2 de la sección 10.9.
18. Demostrar que $f(x) = 1$ no tiene transformada de Fourier de coseno ni de seno.
19. ¿Existen las transformadas de coseno y de seno de Fourier de $f(x) = e^x$?
20. ¿Existe la transformada de Fourier de coseno de $(\cos x)/x$? ¿De $(\sin x)/x$?

10.11 TRANSFORMADA DE FOURIER

La sección anterior se ocupó de dos transformadas obtenidas a partir de las integrales de Fourier de coseno y de seno de la sección 10.9. Se considera ahora una tercera transformada, la *transformada de Fourier*, que se obtiene a partir de la forma compleja de la integral de Fourier. (Como motivación de esta transformada, ver el principio de la sección 10.10.) Por lo tanto, se considera primero la forma compleja de la integral de Fourier.

Forma compleja de la integral de Fourier

La integral de Fourier (real) es [ver (4), (5), sección 10.9]

$$f(x) = \int_0^\infty [A(w) \cos wx + B(w) \sin wx] dw$$

donde

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(v) \cos wv dv, \quad B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(v) \sin wv dv.$$

Al sustituir A y B en la integral de f , se tiene

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(v) [\cos wv \cos wx + \sin wv \sin wx] dv dw.$$

Por la fórmula de adición del coseno [(6) en el apéndice 3.1], la expresión entre corchetes $[\cdot \cdot]$ es igual a $\cos(wv - wx)$ o, ya que el coseno es par, $\cos(wx - wv)$, de donde se obtiene

$$(1^*) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(v) \cos(wx - wv) dv \right] dw.$$

La integral entre corchetes es una función *par* de w , denótese $F(w)$, ya que $\cos(wx - wv)$ es una función par de w , la función f no depende de w y se integra con respecto a v (no a w). En consecuencia, la integral de $F(w)$ de $w = 0$ a ∞ es $1/2$ vez la integral de $F(w)$ de $-\infty$ a ∞ . Por tanto,

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(v) \cos(wx - wv) dv \right] dw.$$

Se afirma que la integral de la forma (1) con \sin en lugar de \cos es cero:

$$(2) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(v) \sin(wx - wv) dv \right] dw = 0.$$

Esta igualdad es válida ya que $\sin(wx - wv)$ es una función impar de w , lo que hace que la integral entre corchetes sea una función impar de w , denótese $G(w)$, por lo que la integral de $G(w)$ de $-\infty$ a ∞ es cero, como se afirmó. Se usa ahora la **fórmula de Euler**

$$(3) \quad e^{it} = \cos t + i \sin t$$

de la función exponencial compleja [fórmula (8) de la sección 2.3]. Al hacer $t = wx - wv$ y sumando (1) e i veces (2), se obtiene

$$(4) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{i w(x-v)} dv dw \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Esta expresión se conoce como la **integral compleja de Fourier**.

Basta un paso para llegar de esta expresión a la transformada de Fourier, el objetivo presente.

Transformadas de Fourier

Al escribir la función exponencial de (4) como un producto de funciones exponenciales, se tiene

$$(5) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-i w v} dv \right] e^{i w x} dw.$$

La expresión entre corchetes es una función de w , se denota por $\hat{f}(w)$ y se llama la **transformada de Fourier** de f ; al escribir $v = x$, se tiene

$$(6) \quad \hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i w x} dx.$$

Con esta expresión, (5) queda

$$(7) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{i w x} dw$$

y se llama la **transformada inversa de Fourier** de $\hat{f}(w)$.

Otra notación es $\mathcal{F}(f) = \hat{f}(w)$ y \mathcal{F}^{-1} para la inversa.

Al proceso de obtener la transformada de Fourier $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ a partir de una f dada también se le llama la **transformación de Fourier** o el **método de transformación de Fourier**.

Existencia. Las dos condiciones siguientes son suficientes para la existencia de la transformada de Fourier (6) de una función $f(x)$ definida sobre el eje x , como se menciona sin demostración.

1. $f(x)$ es continua por secciones en todo intervalo finito.
2. $f(x)$ es absolutamente integrable sobre el eje x .

(Para las definiciones de continuidad por secciones y de integrabilidad absoluta, ver las secciones 6.1 y 10.9, respectivamente.)

EJEMPLO 1 Transformada de Fourier

Encontrar la transformada de Fourier de $f(x) = k$ si $0 < x < a$ y $f(x) = 0$ en caso contrario.

Solución. A partir de (6), por integración,

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a k e^{-i w x} dx = \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-i w a} - 1}{-i w} \right) = \frac{k(1 - e^{-i w a})}{i w \sqrt{2\pi}}.$$

Se demuestra así que la transformada de Fourier será en general una función con valores complejos.

EJEMPLO 2 Transformada de Fourier

Encontrar la transformada de Fourier de e^{-ax^2} , donde $a > 0$.

Solución. Se usa la definición, se completa el cuadrado en el exponente y se saca el factor exponencial que no contiene términos en x :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e^{-ax^2}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-ax^2 - i w x] dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[- \left(\sqrt{a} x + \frac{i w}{2\sqrt{a}} \right)^2 + \left(\frac{i w}{2\sqrt{a}} \right)^2 \right] dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(- \frac{w^2}{4a} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[- \left(\sqrt{a} x + \frac{i w}{2\sqrt{a}} \right)^2 \right] dx. \end{aligned}$$

La integral se denota por I y se demuestra que es igual a $\sqrt{\pi/a}$. Para ello se usa $\sqrt{a}x + i w / 2\sqrt{a}$ como nueva variable de integración. Entonces $dx = dv / \sqrt{a}$, de donde

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv.$$

Se llega ahora al resultado mediante el siguiente recurso. Se eleva al cuadrado la integral, se convierte en una integral doble y se usan las coordenadas polares $r = \sqrt{u^2 + v^2}$ y θ . Puesto que $du dv = r dr d\theta$, se obtiene

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} du dv \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \frac{2\pi}{a} \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{a}. \end{aligned}$$

Por tanto, $I = \sqrt{\pi/a}$. A partir de esta expresión y de la primera fórmula de esta solución,

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(- \frac{w^2}{4a} \right) \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-w^2/4a}.$$

Este resultado concuerda con la fórmula 9 de la tabla III, sección 10.12.

Interpretación física: Espectro

La naturaleza de la representación (7) de $f(x)$ se pone de manifiesto si se le piensa como una superposición de oscilaciones senoidales de todas las frecuencias posibles,

llamada **representación espectral**. El nombre se origina en la óptica, donde la luz es una superposición de colores (frecuencias). En (7), la “densidad espectral” $\hat{f}(w)$ mide la intensidad de $f(x)$ en el intervalo de frecuencias entre w y $w + \Delta w$ (Δw pequeño, fijo). Se afirma que en relación con oscilaciones, la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w)|^2 dw$$

puede interpretarse como la **energía total** del sistema físico; en consecuencia, una integral de $|\hat{f}(w)|^2$ de a a b da la contribución de las frecuencias w entre a y b a la energía total.

A fin de hacer plausible lo anterior, se empieza con un sistema mecánico que da una sola frecuencia, a saber, el oscilador armónico (masa en un resorte, sección 2.5)

$$my'' + ky = 0,$$

denotando el tiempo t por x . Al multiplicar por y' e integrar se obtiene

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ky^2 = E_0 = \text{const},$$

donde $v = y'$ es la velocidad, el primer término es la energía cinética, el segundo la energía potencial y E_0 es la energía total del sistema. Entonces una solución general es [usar (4), (5), sección 10.6]

$$y = a_1 \cos w_0 x + b_1 \sin w_0 x = c_1 e^{iw_0 x} + c_{-1} e^{-iw_0 x}, \quad w_0^2 = k/m,$$

donde $c_1 = (a_1 - ib_1)/2$, $c_{-1} = \bar{c}_1 = (a_1 + ib_1)/2$. Puesto que $mw_0^2 = k$ e $(iw_0)^2 = -w_0^2$, por cálculos directos y simplificando se obtiene

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{2}m(c_1 iw_0 e^{iw_0 x} - c_{-1} iw_0 e^{-iw_0 x})^2 + \frac{1}{2}k(c_1 e^{iw_0 x} + c_{-1} e^{-iw_0 x})^2 \\ &= 2kc_1 c_{-1} = 2k|c_1|^2. \end{aligned}$$

Por tanto, la energía es proporcional al cuadrado de la amplitud $|c_1|$.

Como paso siguiente, si un sistema más complicado lleva a una solución periódica de $y = f(x)$ que puede representarse por una serie de Fourier, entonces en lugar del término de energía $|c_1|^2$ único se obtiene una serie de cuadrados $|c_n|^2$ de coeficientes de Fourier c_n dada por (8), sección 10.6. En este caso se tiene un “espectro discreto” (o “espectro puntual”) que consta de un conjunto numerable de frecuencias aisladas (una infinidad, en general), siendo las $|c_n|^2$ correspondientes las contribuciones a la energía total.

Por último, un sistema cuya solución puede representarse por una integral de Fourier (7) lleva a la integral anterior para la energía, como es razonable esperar por los casos que acaban de discutirse.

Linealidad. Transformación de Fourier de derivadas

Es posible obtener nuevas transformadas a partir de las que se obtienen por el

Teorema 1 (Linealidad de la transformación de Fourier)

La transformación de Fourier es una operación lineal; es decir, para cualesquiera funciones $f(x)$ y $g(x)$ cuyas transformadas de Fourier existen y para constantes a y b cualesquiera,

$$(8) \quad \mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g).$$

Demostración. Esta expresión es válida ya que la integración es una operación lineal, de donde por (6) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{af(x) + bg(x)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [af(x) + bg(x)]e^{-iwx} dx \\ &= a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx} dx + b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-iwx} dx \\ &= a\mathcal{F}\{f(x)\} + b\mathcal{F}\{g(x)\}. \end{aligned}$$

En la aplicación de la transformada de Fourier a ecuaciones diferenciales, la propiedad clave es que la diferenciación de funciones corresponde a la multiplicación de las transformadas por iw :

Teorema 2 [Transformada de Fourier de la derivada de $f(x)$]

Sea $f(x)$ continua en el eje x y sea que $f(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$. Además, sea $f'(x)$ absolutamente integrable sobre el eje x . Entonces

$$(9) \quad \mathcal{F}\{f'(x)\} = iw\mathcal{F}\{f(x)\}.$$

Demostración. Al integrar por partes y usar $f(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f'(x)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-iwx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x)e^{-iwx} \Big|_{-\infty}^{\infty} - (-iw) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx} dx \right] \\ &= 0 + iw\mathcal{F}\{f(x)\}. \end{aligned}$$

Mediante dos aplicaciones sucesivas de (9) se obtiene

$$\mathcal{F}(f'') = iw\mathcal{F}(f') = (iw)^2\mathcal{F}(f).$$

Puesto que $(i\omega)^2 = -\omega^2$, para la transformada de la segunda derivada de f se tiene

$$(10) \quad \mathcal{F}\{f''(x)\} = -\omega^2 \mathcal{F}\{f(x)\}.$$

Se aplica lo mismo para derivadas superiores.

En la sección 11.14 se presentará una aplicación de (10) a las ecuaciones diferenciales. Ente tanto, se muestra cómo puede usarse (9) para derivar transformadas.

EJEMPLO 3 Una aplicación de la fórmula operacional (9)

Encontrar la transformada de Fourier de xe^{-x^2} a partir de la tabla III, sección 10.12.

Solución. Se usa (9). Por la fórmula 9 de la tabla III.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(xe^{-x^2}) &= \mathcal{F}\left\{-\frac{1}{2}(e^{-x^2})'\right\} = -\frac{1}{2}\mathcal{F}\{(e^{-x^2})'\} \\ &= -\frac{1}{2}i\omega\mathcal{F}(e^{-x^2}) = -\frac{1}{2}i\omega\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\omega^2/4} = -\frac{i\omega}{2\sqrt{2}}e^{-\omega^2/4}. \end{aligned}$$

Convolución

La convolución $f * g$ de las funciones f y g se define por

$$(11) \quad h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p) dp = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-p)g(p) dp.$$

El objetivo es el mismo que en el caso de las transformadas de Laplace (sección 6.6); la convolución de funciones corresponde a la multiplicación de sus transformadas de Fourier (excepto por un factor $\sqrt{2\pi}$):

Teorema 3 (Teorema de convolución)

Suponer que $f(x)$ y $g(x)$ son continuas por secciones, acotadas y absolutamente integrables en el eje x . Entonces

$$(12) \quad \mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g).$$

Demostración. Por la definición y un intercambio del orden de integración

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p)e^{-i\omega x} dp dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p)e^{-i\omega x} dx dp. \end{aligned}$$

En lugar de x se toma ahora $x-p = q$ como nueva variable de integración. Entonces $x = p + q$ y

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(q)e^{-i\omega(p+q)} dq dp \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(p)e^{-i\omega p} dp \int_{-\infty}^{\infty} g(q)e^{-i\omega q} dq \\ &= \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g). \end{aligned}$$

Al tomar la transformada inversa de Fourier en ambos miembros de (12), escribiendo $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ y $\hat{g} = \mathcal{F}(g)$ como antes, y observando que $\sqrt{2\pi}$ y $1/\sqrt{2\pi}$ se cancelan entre sí, se obtiene

$$(13) \quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)e^{i\omega x} d\omega,$$

una fórmula que ayudará a resolver ecuaciones diferenciales parciales (sección 11.14).

En la siguiente sección se incluye una tabla de transformadas de Fourier. Para tablas más extensas, ver la referencia [C4] en el apéndice 1.

Concluye así el capítulo 10 sobre series de Fourier, integrales de Fourier y transformadas de Fourier. La introducción de las series de Fourier (y de las integrales de Fourier) fue uno de los mayores avances jamás realizados en la física matemática y en sus aplicaciones en la ingeniería, ya que las series de Fourier (y las integrales de Fourier) son probablemente la herramienta más importante en la solución de problemas con valores en la frontera. Esto se explicará en el capítulo siguiente.

Problemas de la sección 10.11

Encontrar las transformadas de Fourier de las siguientes funciones $f(x)$ (sin usar la tabla III, sección 10.12).

- $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} e^{2ix} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

9. Deducir la fórmula 1 de la tabla III, sección 10.12.
10. Usando la respuesta $\hat{f}(w)$ del problema 9, obtener $f(x)$ a partir de (7). *Sugerencia.* Usar (7*) de la sección 10.9.
11. Obtener la fórmula 1 de la tabla III, sección 10.12, a partir de la fórmula 2 de la misma tabla.
12. Resolver el problema 6 por (9), usando la respuesta del problema 1.
13. (Cambio) Demostrar que si $f(x)$ tiene una transformada de Fourier, también la tiene $f(x-a)$ y que

$$\mathcal{F}\{f(x-a)\} = e^{-iwa} \mathcal{F}\{f(x)\}.$$

14. Resolver el problema 6 por convolución. *Sugerencia.* Demostrar que $xe^x = e^x * e^x$ ($x > 0$).
15. Usando el problema 13, obtener la fórmula 1 de la tabla III, sección 10.12, a partir de la fórmula 2 (con $c = 3b$).
16. Usando la respuesta del problema 8, escribir la representación en integral de Fourier de $f(x)$ y convertirla a una integral de Fourier de coseno (ver la sección 10.9).
17. (Cambio sobre el eje w) Demostrar que si $\hat{f}(w)$ es la transformada de Fourier de $f(x)$, entonces $f(w-a)$ es la transformada de Fourier de $e^{iaw}f(x)$.
18. Usando el problema 17, obtener la fórmula 7 de la tabla III, sección 10.12, a partir de la fórmula 1 de la misma tabla.
19. Usando el problema 17, obtener la fórmula 8 de la tabla III, sección 10.12, a partir de la fórmula 2 de la misma tabla.
20. Comprobar la fórmula 3 de la tabla III, sección 10.12, con $a = 1$. *Sugerencia.* Usar (15) de la sección 10.9 y (3) de esta sección.

10.12 TABLAS DE TRANSFORMADAS

Para tablas más extensas, ver la referencia [C4] en el apéndice 1.

Tabla I. Transformada de Fourier de coseno
Ver (2) en la sección 10.10

	$f(x)$	$\hat{f}_c(w) = \mathcal{F}_c(f)$
1	$\begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin aw}{w}$
2	$x^{a-1} \quad (0 < a < 1)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(a)}{w^a} \cos \frac{aw}{2} \quad (\Gamma(a) \text{ ver en el Apéndice 3.1.})$
3	$e^{-ax} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{a}{a^2 + w^2} \right)$
4	$e^{-x^2/2}$	$e^{-w^2/2}$
5	$e^{-ax^2} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-w^2/4a}$
6	$x^n e^{-ax} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n!}{(a^2 + w^2)^{n+1}} \operatorname{Re} (a + iw)^{n+1} \quad \operatorname{Re} = \text{parte real}$
7	$\begin{cases} \cos x & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin a(1-w)}{1-w} + \frac{\sin a(1+w)}{1+w} \right]$
8	$\cos ax^2 \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos \left(\frac{w^2}{4a} - \frac{\pi}{4} \right)$
9	$\sin ax^2 \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos \left(\frac{w^2}{4a} + \frac{\pi}{4} \right)$
10	$\frac{\sin ax}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} u(a-w) \quad (\text{Ver sección 6.3})$
11	$\frac{e^{-x} \sin x}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \arctan \frac{2}{w^2}$
12	$J_0(ax) \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{u(a-w)}{\sqrt{a^2 - w^2}} \quad (\text{Ver secciones 5.5, 6.3})$

Tabla II. Transformadas de Fourier de seno.
Ver (5) en la sección 10.10.

	$f(x)$	$\hat{f}_s(w) = \mathcal{F}_s(f)$
1	$\begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{1 - \cos aw}{w} \right]$
2	$1/\sqrt{x}$	$1/\sqrt{w}$
3	$1/x^{3/2}$	$2\sqrt{w}$
4	$x^{a-1} \quad (0 < a < 1)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(a)}{w^a} \sin \frac{a\pi}{2} \quad (\Gamma(a) \text{ ver en el Apéndice 3.1.})$
5	e^{-x}	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{w}{1+w^2} \right)$
6	$e^{-ax/x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \arctan \frac{w}{a}$
7	$x^n e^{-ax} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n!}{(a^2 + w^2)^{n+1}} \operatorname{Im} (a + iw)^{n+1}$ $\operatorname{Im} = \text{parte imaginaria}$
8	$x e^{-x^2/2}$	$w e^{-w^2/2}$
9	$x e^{-ax^2} \quad (a > 0)$	$\frac{w}{(2a)^{3/2}} e^{-w^2/4a}$
10	$\begin{cases} \sin x & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin a(1-w)}{1-w} - \frac{\sin a(1+w)}{1+w} \right]$
11	$\frac{\cos ax}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} u(w-a) \quad (\text{Ver sección 6.3})$
12	$\arctan \frac{2a}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{2\pi} \frac{\operatorname{senh} aw}{w} e^{-aw}$

Tabla III. Transformadas de Fourier.
Ver (6) en la sección 10.11.

	$f(x)$	$\hat{f}(w) = \mathcal{F}(f)$
1	$\begin{cases} 1 & \text{si } -b < x < b \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{sen} bw}{w}$
2	$\begin{cases} 1 & \text{si } b < x < c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{e^{-ibw} - e^{-icw}}{iw\sqrt{2\pi}}$
3	$\frac{1}{x^2 + a^2} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a w }}{a}$
4	$\begin{cases} x & \text{si } 0 < x < b \\ 2x - a & \text{if } b < x < 2b \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$	$\frac{-1 + 2e^{ibw} - e^{2ibw}}{\sqrt{2\pi} w^2}$
5	$\begin{cases} e^{-ax} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(a + iw)}$
6	$\begin{cases} e^{ax} & \text{si } b < x < c \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$	$\frac{e^{(a-iw)c} - e^{(a-iw)b}}{\sqrt{2\pi}(a - iw)}$
7	$\begin{cases} e^{iax} & \text{si } -b < x < b \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{sen} b(w-a)}{w-a}$
8	$\begin{cases} e^{iax} & \text{si } b < x < c \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$	$\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ib(a-w)} - e^{ic(a-w)}}{a-w}$
9	$e^{-ax^2} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-w^2/4a}$
10	$\frac{\operatorname{sen} ax}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{si} w < a; \quad 0 \operatorname{si} w > a$

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 10

- ¿Qué se entiende por serie trigonométrica? ¿Por serie de Fourier?
- ¿Qué se entiende por ortogonalidad? ¿Qué papel desempeña en la derivación de las fórmulas de Euler?
- ¿Cómo se consiguió la transición de una función de periodo 2π a una función con un periodo arbitrario?
- ¿Qué es una función periódica impar? ¿A qué forma se reduce su serie de Fourier?
- Responder las mismas preguntas del problema 4 para una función periódica par.
- ¿Qué se entiende por desarrollos de medio rango?
- ¿Una función discontinua puede tener una serie de Fourier? ¿Una serie de Taylor?
- Si la serie de Fourier de una función $f(x)$ tiene términos tanto coseno como seno, ¿cuál es la suma de los términos coseno expresada en términos de $f(x)$? ¿La suma de los términos seno?
- ¿Qué es la continuidad por secciones? ¿En relación con qué se presentó en este capítulo?
- ¿Qué es un polinomio trigonométrico? ¿Por qué se le consideró?
- ¿Qué es el error cuadrático medio? ¿Por qué se le consideró?
- ¿Qué es una serie compleja de Fourier? ¿Cómo se relaciona con la forma real común de una serie de Fourier?
- ¿Cuál es la diferencia básica en las oscilaciones de un sistema masa-resorte gobernadas por $my'' + cy' + ky = r(t)$ con fuerza impulsora periódica arbitraria en comparación con una fuerza impulsora senoidal pura?
- ¿Qué es la transformada de Fourier? ¿Cómo se obtuvo a partir de la integral de Fourier?
- ¿Toda función continua tiene transformada de Fourier de coseno o de seno? ¿Una función discontinua puede tener transformada de Fourier de coseno o de seno?

Encontrar la serie de Fourier de las funciones dadas, las cuales se supone tienen periodo 2π

- $f(x) = \begin{cases} k & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ -k & \text{si } \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\pi < x < -\pi/2 \\ -1 & \text{si } -\pi/2 < x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$
- $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x) \quad (0 < x < 2\pi)$
- $f(x) = \frac{1}{2}kx|x| \quad (-\pi < x < \pi)$
- $f(x) = x^4 \quad (-\pi < x < \pi)$
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \pi x & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} x/a & \text{si } -a < x < a < \pi \\ \frac{\pi - x}{\pi - a} & \text{si } a < x < 2\pi - a \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < \pi \\ 1 & \text{si } \pi < x < 2\pi \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi < x < -\pi/2 \\ 0 & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 1 & \text{si } \pi/2 < x < \pi \end{cases}$
- $f(x) = |x| \quad (-\pi < x < \pi)$
- $f(x) = -x/2 \quad (-\pi < x < \pi)$
- $f(x) = \pi - 2|x| \quad (-\pi < x < \pi)$
- $f(x) = \begin{cases} x^2/2 & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \pi^2/8 & \text{si } \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \pi x + x^2 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \pi x - x^2 & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$

Encontrar la serie de Fourier de las siguientes funciones, las cuales se supone tienen periodo $p = 2L$.

- $f(x) = 1 \quad (-1 < x < 0), \quad f(x) = -1 \quad (0 < x < 1), \quad p = 2L = 2$
- $f(x) = 1 \quad (-1 < x < 1), \quad f(x) = 0 \quad (1 < x < 3), \quad p = 2L = 4$
- $f(x) = x \quad (-2 < x < 2), \quad p = 2L = 4$
- $f(x) = 0 \quad (-1 < x < 0), \quad f(x) = x \quad (0 < x < 1), \quad p = 2L = 2$
- $f(x) = -x \quad (-1 < x < 0), \quad f(x) = 0 \quad (0 < x < 1), \quad p = 2L = 2$
- $f(x) = x \quad (-4 < x < 4), \quad p = 2L = 8$
- $f(x) = -1 \quad (-1 < x < 0), \quad f(x) = 2x \quad (0 < x < 1), \quad p = 2L = 2$
- $f(x) = 1 - x^2 \quad (0 < x < 2), \quad p = 2L = 2$
- $f(x) = x - x^2 \quad (-1 < x < 1), \quad p = 2L = 2$
- $f(x) = 1 \quad (-2 < x < 0), \quad f(x) = e^{-x} \quad (0 < x < 2), \quad p = 2L = 4$

Encontrar la suma de

- $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ (Usar el problema 17.)
- $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots$ (Usar el problema 21.)
- $1 - 3^{-3} + 5^{-3} - 7^{-3} + \dots$ (Usar el problema 29.)

Usando la identidad de Parseval, demostrar que

- $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$ (Usar el problema 23.)
- $1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96}$ (Usar el problema 25.)
- $1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \dots = \frac{\pi^6}{960}$ (Usar el problema 29.)

Calcular los seis primeros errores cuadráticos mínimos E^* correspondientes a las primeras sumas parciales:

- En el problema 21.
- En el problema 29.

Encontrar una solución general de $y'' + \omega^2 y = r(t)$, donde

- $r(t) = t^2/4 \quad (-\pi < t < \pi), \quad r(t + 2\pi) = r(t), \quad |\omega| \neq 0, 1, 2, \dots$
- $r(t) = t(\pi^2 - t^2)/12 \quad (-\pi < t < \pi), \quad r(t + 2\pi) = r(t), \quad |\omega| \neq 1, 2, \dots$

Resumen del capítulo 10

Series, integrales y transformadas de Fourier

Una serie trigonométrica (sección 10.1) es una serie de la forma

$$(1) \quad a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

La **serie de Fourier** de una función periódica $f(x)$ dada de periodo 2π es una serie trigonométrica (1) cuyos coeficientes son los **coeficientes de Fourier** de $f(x)$ dados por las **fórmulas de Euler** (sección 10.2)

$$(2) \quad \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, & a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \end{aligned}$$

Para una función $f(x)$ de cualquier periodo $p = 2L$ la **serie de Fourier** es (sección 10.3)

$$(3) \quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

con los coeficientes de Fourier de $f(x)$ dados por las **fórmulas de Euler**

$$(4) \quad \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx, & a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \end{aligned}$$

Estas series son fundamentales en relación con fenómenos periódicos, en particular en modelos que incluyen ecuaciones diferenciales (sección 10.7 y capítulo 11). Si $f(x)$ es par [$f(-x) = f(x)$] o impar [$f(-x) = -f(x)$], puede reducirse a una **serie de Fourier de coseno** o de **seno**, respectivamente (sección 10.4).

Una función $f(x)$ dada en un intervalo $0 \leq x \leq L$ puede desarrollarse en una serie de Fourier de coseno o de seno de periodo $2L$; estas se llaman **desarrollos de medio rango** de $f(x)$; ver la sección 10.5.

Al conjunto de funciones de coseno y de seno de (3) se le llama **sistema trigonométrico**. Su propiedad más importante es su **ortogonalidad** en un intervalo de longitud $2L$, es decir, para todos los enteros m y $n \neq m$ se tiene

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0, \quad \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0$$

y para todos los enteros m y n ,

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0.$$

Esta ortogonalidad fue crucial para deducir las fórmulas de Euler para los coeficientes de Fourier.

Las sumas parciales de Fourier minimizan el error cuadrático (sección 10.8).

Las ideas y técnicas de las series de Fourier se extienden a funciones $f(x)$ no periódicas definidas en la recta real completa; esto lleva a la **integral de Fourier**

$$(5) \quad f(x) = \int_0^{\infty} [A(w) \cos wx + B(w) \sin wx] dw$$

(sección 10.9), donde

$$(6) \quad A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv dv, \quad B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin wv dv$$

o, en forma compleja (sección 10.11),

$$(7) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx} dw \quad (i = \sqrt{-1}),$$

donde

$$(8) \quad \hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx.$$

La fórmula (8) transforma $f(x)$ en su **transformada de Fourier** $\hat{f}(w)$.

Con la expresión anterior se relacionan la **transformada de Fourier de coseno**

$$(9) \quad \hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos wx dx$$

y la **transformada de Fourier de seno** (sección 10.10)

$$(10) \quad \hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin wx dx.$$