ANÁLISIS NUMÉRICO

Ingeniería en Sistemas de Información

3er año - Anual

Docentes: Prof. Diego Amiconi
Prof. Marcelo Cappelletti
Ay. Demian Bogado

INGENIERÍA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN
U.T.N. F.R.L.P.

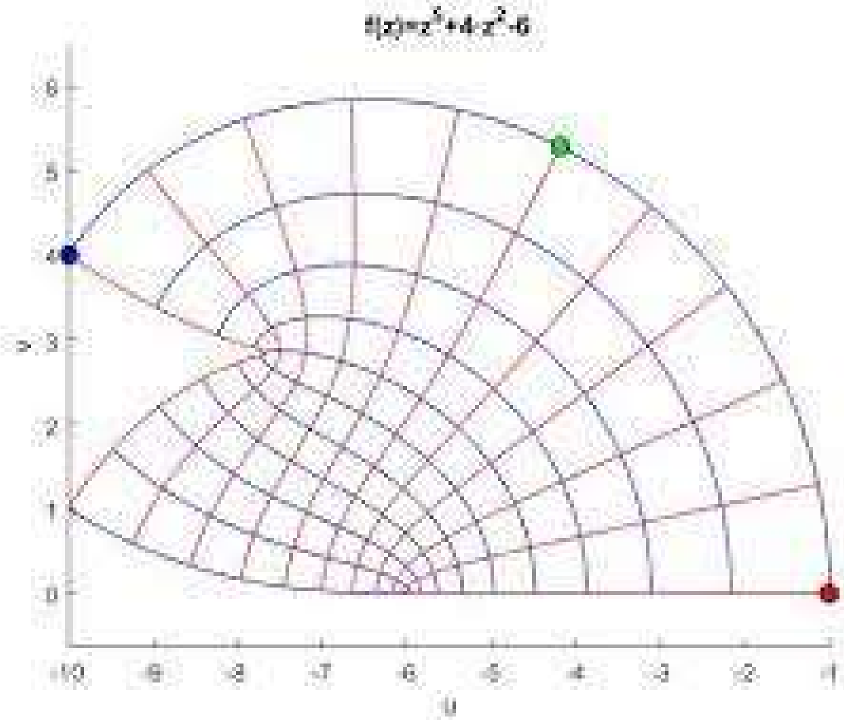
ANÁLISIS NUMÉRICO

Unidades Temáticas:

- **UNIDAD Nº 1:** "Señales continuas y su representación por medio de Series y Transformadas de Fourier"
- **UNIDAD Nº 2: "Fundamentos de Análisis de Variable Compleja"**
- **UNIDAD Nº 3:** "Transformada de Laplace. Aplicación a la Resolución de Ecuaciones Diferenciales"
- **UNIDAD Nº 4:** "Transformada en Z"

ANÁLISIS NUMÉRICO

- UNIDAD Nº 2: “Fundamentos de Análisis de Variable Compleja”

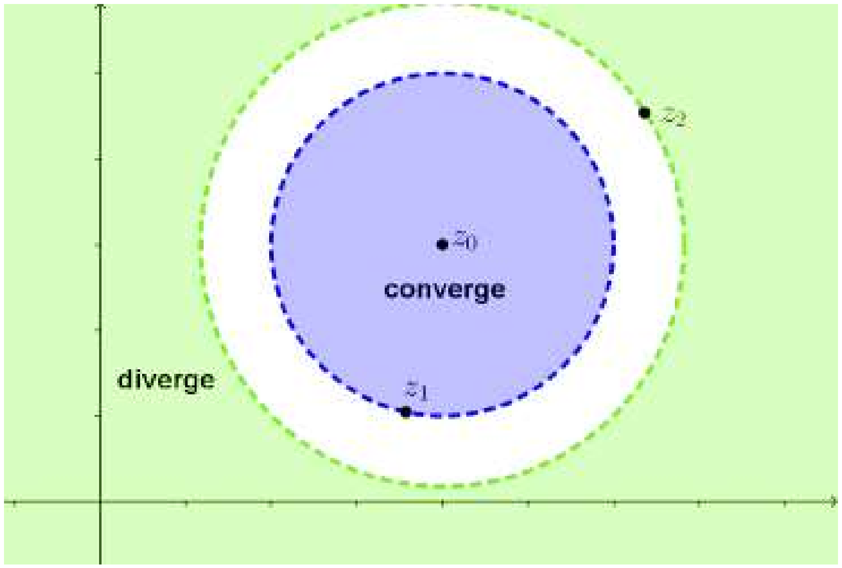


- UNIDAD Nº 2: “Fundamentos de Análisis de Variable Compleja”

CONTENIDOS:

a) **Repaso de números complejos.**
b) **Funciones de variable compleja. Límite y continuidad.**
c) **Diferenciabilidad. Funciones analíticas.**
d) **Transformaciones. Transformación conforme.**
e) **Integración en el campo complejo.**
f) **Series de potencias en el plano complejo.**
g) **Serie de Taylor. Serie de Laurent.**
h) **Singularidades. Residuos. Teorema de los residuos.**
i) **Resolución de integrales en el campo complejo mediante residuos.**

5. SERIES DE POTENCIAS



INGENIERÍA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN
U.T.N. F.R.L.P.

Series de Potencias

- Sucesión de números complejos:

Definición *Una* ***sucesión infinita de números complejos*** *es una función que a cada número natural n le asigna un número complejo z_n*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ & n & \mapsto & z_n \end{array}$$

De este modo se obtiene una lista ordenada de números complejos:

$$z_1, z_2, z_3, ..., z_n, ...$$

donde z_1 es el primer término de la sucesión, z_2 es el segundo término , etc. El término z_n es el término n-ésimo o general y la sucesión $z_1, z_2, z_3, ..., z_n, ...$ se anota $\{z_n\}_{n\geq 1}$ o simplemente $\{z_n\}$.

Series de Potencias

➢ Sucesión de números complejos:

Nos interesa analizar cómo se comportan los términos de la sucesión cuando n crece sin límite: si se acercan o no a un valor definido. Es decir nos interesa saber si existe el $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Definición *Si los términos de una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ se acercan a un número L tanto como queramos para n suficientemente grande, diremos que el*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = L$$

*En este caso se dice que **la sucesión es convergente** y que **converge a** L .*
*Si el límite no existe, se dice que la sucesión es **divergente**.*

Teorema *Sea una sucesión de números complejos $\{z_n\}$, donde $z_n = x_n + iy_n$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = L_1 + iL_2 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = L_1 \wedge \lim_{n\to\infty} y_n = L_2$$

Es decir que una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ converge a un número $L = L_1 + iL_2$ si y solo si la sucesión de las partes reales $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ converge a L_1 y la sucesión de las partes imaginarias $y_1, y_2, y_3, ..., y_n, ...$ converge a L_2.

Series de Potencias

➢ Series de números complejos:

Sea una sucesión de números complejos $\{z_n\}$.

Consideremos la expresión $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + ... + z_n + ...$ que indica la suma de los infinitos términos de la sucesión $\{z_n\}$ y que se denomina **serie infinita asociada a la sucesión** o simplemente **serie**. ¿Cómo se interpreta la suma de infinitos términos?

Consideremos las sumas:

$S_1 = z_1$

$S_2 = z_1 + z_2$

$S_3 = z_1 + z_2 + z_3$

....

$S_n = z_1 + z_2 + z_3 + ... + z_n$

....

De este modo se obtiene una sucesión $\{S_n\}$, denominada **sucesión de sumas parciales** o **serie.**

Es decir que con la notación $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ significamos la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$, donde S_n se denomina **suma parcial n-ésima** de la serie y z_n se denomina **el término general de la serie.**

Series de Potencias

➢ Series de números complejos:

Definición *Decimos que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *es* ***convergente*** *si la sucesión de sumas parciales* $\{S_n\}$ *es convergente, es decir si existe el límite* $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.
Al valor $\boldsymbol{S}$ *se lo denomina* ***suma de la serie*** *y se indica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$$

En síntesis

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k$$

Si la sucesión $\{S_n\}$ *es divergente, es decir si no existe el límite* $\lim_{n\to\infty} S_n$*, se dice que* ***la serie es divergente y no tiene suma.***

Series de Potencias

➢ Series de números complejos:

Recordemos algunos de los criterios utilizados para analizar la convergencia o divergencia de una serie de números reales adaptados ahora al caso de las series de números complejos.

Teorema ***Condición necesaria de convergencia***

Si $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *es convergente entonces* $\lim_{n\to\infty} z_n = 0.$

Teorema ***Condición suficiente de divergencia***

Si $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$ *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *es divergente.*

Series de Potencias

➢ Series de números complejos:

Definición

Si $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ *es convergente, se dice que* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *es absolutamente convergente.*

El resultado siguiente afirma que toda serie absolutamente convergente es convergente.

Teorema

Si $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ *es convergente entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *es convergente y vale:* $\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$

Series de Potencias

- Series de números complejos:

Proposición *Criterio de comparación.*

Sean las series $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$:

a) *Si* $|z_n| \leq |w_n|$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ *es convergente, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ *es convergente.*

b) *Si* $|z_n| \leq |w_n|$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ *es divergente, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ *es divergente.*

Series de Potencias

- Series de números complejos:

Proposición *Criterio del cociente.*

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$

a) Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L < 1$, *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge absolutamente.*

b) Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L > 1$ *o* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \infty$, *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *es divergente.*

c) Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L = 1$ *el criterio no decide.*

Series de Potencias

➢ Series de números complejos:

Definición *Serie geométrica*

Una serie geométrica es una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots$

donde r *se denomina* ***la razón*** *de la serie.*

- *Si* $|r| < 1$ *la serie es convergente y su suma es* $S = \dfrac{a}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n$
- *Si* $|r| \geq 1$ *la serie diverge*

Observación Si $\sum_{n=k}^{\infty} ar^n = ar^k + ar^{k+1} + ar^{k+2} + \ldots$ y $|r| < 1$, la serie geométrica converge y su suma es $S = \dfrac{ar^k}{1-r} = \sum_{n=k}^{\infty} ar^n$.

Series de Potencias

➢ Series de números complejos:

La convergencia de una serie de números complejos equivale a la convergencia de la serie de las partes reales de z_n y a la convergencia de la serie de las partes imaginarias de z_n.

Teorema *Sea una serie de números complejos* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, *entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n) = S = X + iY \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n = X \quad \wedge \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n = Y$$

Series de Potencias

➢ Series de Potencias:

Definición ***Serie de potencias.*** *Una serie de potencias de $(z-z_0)$ (o desarrollada en z_0 o centrada en z_0) es una serie de la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots$$

donde $c_n \in \mathbb{C}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ son los denominados ***coeficientes*** *de la serie (no dependen de z) y $z_0 \in \mathbb{C}$ se denomina* ***centro*** *de la serie.*

Reemplazando z por un determinado número complejo se obtiene una serie numérica la que puede ser o no convergente. El conjunto de los valores de z para los que la serie de potencias es convergente se denomina **región de convergencia**.

Una serie de potencias siempre converge en z_0, ya que al reemplazarlo en la serie se obtiene $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0-z_0)^n = c_0$, es decir $S(z_0) = c_0$.

Veremos que en el caso de las series de potencias en variable compleja la región de convergencia es, en general, un disco (que puede ser acotado o no) centrado en z_0.

Series de Potencias

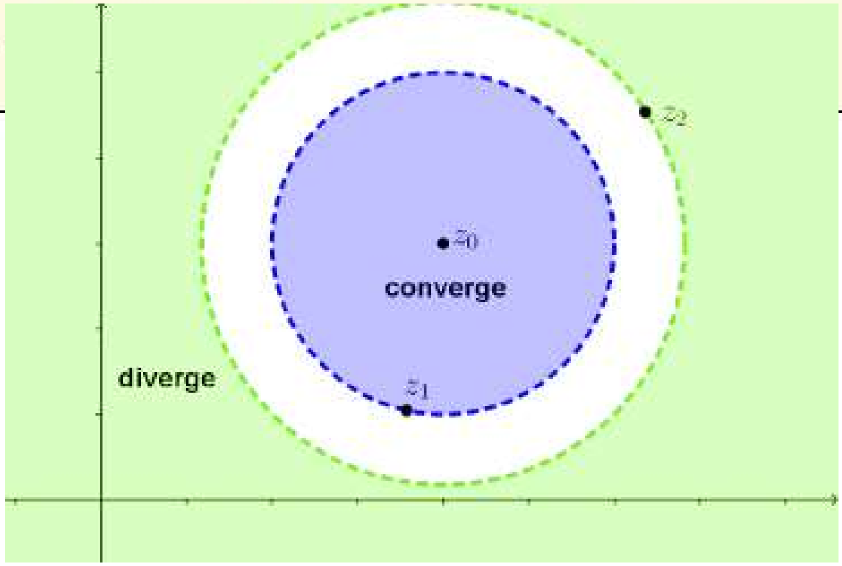
➢ Convergencia de Series de Potencias:

Teorema *Convergencia de una serie de potencias*

Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$

1. *Si converge en un punto* $z = z_1 \neq z_0$, *entonces converge absolutamente para todo* z *tal que* $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$ *(es decir para todos los puntos que están a una distancia de* z_0 *menor que la distancia a la que está* z_1 *respecto de* z_0*).*

2. *Si diverge en* $z = z_2$, *entonces diverge para todo* z *tal que* $|z-z_0| > |z_2 - z_0|$ *(es decir para todos los puntos que están a una distancia de* z_0 *mayor que la distancia que está* z_2 *respecto a* z_0*).*



Series de Potencias

- Convergencia de Series de Potencias:

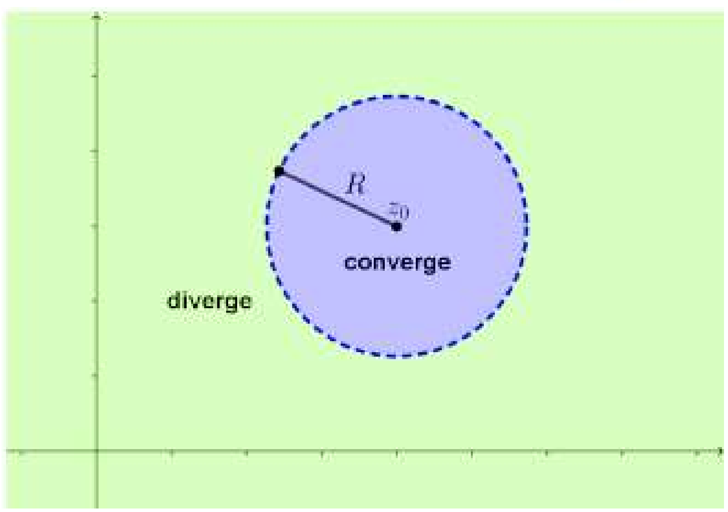
Observaciones

Para una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ pueden ocurrir solamente estas tres posibilidades:

1. La serie solamente converge en z_0. En este caso el radio de convergencia es cero: $R = 0$.

2. La serie converge para todo z. En este caso se dice que el radio de convergencia es infinito y lo indicamos $R = \infty$

3. Existe un número positivo R tal que la serie converge absolutamente para todo z tal que $|z - z_0| < R$ y diverge para los z tales que $|z - z_0| > R$.



Series de Potencias

➢ Función suma de una Serie de Potencias:

En todos los puntos del disco de convergencia la serie de potencias tiene suma, por lo cual en cada punto del mismo queda definida una función $f(z)$ que en cada z vale la suma de la serie en dicho punto:

$$f(z) = S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad \forall z : |z - z_0| < R$$

En este caso diremos que $f(z)$ está representada por una serie de potencias de $(z - z_0)$ o que está desarrollada en serie de potencias de $(z - z_0)$. La función $f(z)$ que está definida en el disco de convergencia de la serie que la representa tiene propiedades muy importantes.

Teorema *Sea* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad \forall z : |z - z_0| < R, \quad 0 < R \leq \infty$

Entonces, $f(z)$ es analítica en todos los puntos del disco de convergencia

Series de Potencias

➢ Derivación de Series de Potencias:

Teorema ***Derivación de series de potencias***

Sea $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,\ \forall z:|z-z_0|<R\ \ 0<R\leq\infty$

Entonces:

1. $f(z)$ *es derivable en todos los puntos del disco de convergencia y su derivada* $f'(z)$ *se obtiene derivando término a término la serie que la representa*

   $$f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n n(z-z_0)^{n-1},\ \forall z:|z-z_0|<R,\quad 0<R\leq\infty$$

2. *Repitiendo esta propiedad para* $f''(z)$ *se obtiene que*

   $$f''(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)(z-z_0)^{n-2},\ \forall z:|z-z_0|<R,\quad 0<R\leq\infty$$

3. *En general* $\forall k\geq 1:$

   $$f^{(k)}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)\cdots(n-(k-1))(z-z_0)^{n-k},\ \forall z:|z-z_0|<R,\quad 0<R\leq\infty$$

Las series de las derivadas tienen todas el mismo radio de convergencia que el de la serie sin derivar.

Series de Potencias

➢ Integración de Series de Potencias:

Teorema ***Integración de series de potencias***

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \ \forall z : |z - z_0| < R, \ 0 < R \leq \infty$

Entonces:

1. $$\int f(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int (z - z_0)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(z - z_0)^{n+1}}{n+1} + C,$$

   $\forall z : |z - z_0| < R, \quad 0 < R \leq \infty$

   Una serie de potencias se puede integrar término a término y la serie resultante tiene el mismo radio de convergencia que la serie original.

2. *Para todo par* $z_1, z_2 \in D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < R\}$

   $$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left[\frac{(z_2 - z_0)^{n+1}}{n+1} - \frac{(z_1 - z_0)^{n+1}}{n+1} \right]$$

Series de Potencias

➢ Serie de Taylor:

Vimos que toda serie de potencias representa a una función analítica.
Ahora veremos que toda función analítica se puede representar por una serie de potencias denominada **serie de Taylor** de la función.

Teorema ***Teorema de Taylor***
Sea $f(z)$ *analítica en* z_0*. Sea* $D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < R\}$ *el mayor disco abierto centrado en* z_0 *y de radio* R *donde* $f(z)$ *es analítica.*

Entonces existe una serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ *que converge a* $f(z)$ *en* D

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad , \ \forall z : \ |z - z_0| < R \quad , \ 0 < R < \infty$$

donde $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad n = 0, 1, 2, 3 \cdots$
Esta serie de potencias se denomina el desarrollo en serie de Taylor de $f(z)$ *alrededor de* z_0*. Para el caso en que* $z_0 = 0$ *, la serie de Taylor se denomina de serie de Maclaurin.*

Series de Potencias

- Serie de Taylor:

Teorema *Teorema de unicidad de Taylor*

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \ \forall z : |z - z_0| < R, \ 0 < R \leq \infty$

entonces $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad n = 0, 1, 2, 3 \cdots$

El Teorema de unicidad nos proporciona una herramienta fundamental para poder encontrar un desarrollo de Taylor sin hallar los coeficientes calculando las derivadas, las cuales pueden ser muy complicadas para algunas funciones. En su lugar, se utiliza un desarrollo de Taylor conocido y se raliza una sustitución conveniente o derivación o integración.

Series de Potencias

➢ Ceros de Funciones Analíticas:

Definición *Sea $f(z)$ analítica en un dominio $D \subset \mathbb{C}$. Decimos que $z_0 \in D$ es un* ***cero de*** *$f(z)$ si $f(z_0) = 0$.*

Definición *Sea $f(z)$ analítica en un dominio $D \subset \mathbb{C}$.*
Decimos que $z_0 \in D$ es un ***cero de orden*** *$k \geq 1$ de $f(z)$ si*
$f(z_0) = f^{(1)}(z_0) = f^{(2)}(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \quad y \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0$
Decimos que z_0 es ***cero de orden cero*** *si $f(z_0) \neq 0$*

Teorema **Teorema de caracterización de ceros**
Sea $f(z)$ analítica en un dominio $D \subset \mathbb{C}$,
$z_0 \in D$ es un cero de orden k de $f(z) \Longleftrightarrow f(z) = (z - z_0)^k g(z)$, donde $g(z)$ es analítica en z_0 y $g(z_0) \neq 0$

Series de Potencias

➢ Serie de Laurent:

Si $f(z)$ es analítica en z_0 se la puede desarrollar en serie de Taylor en algún entorno de z_0. Si f no es analítica en z_0 pero lo es en un anillo centrado en z_0, se la puede representar mediante una serie de potencias positivas y negativas, denominada serie de Laurent.

Teorema **Serie de Laurent.** *Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio con forma de anillo o corona $r < |z - z_0| < R$ (r puede ser cero y R puede ser infinito) y sea C una curva cerrada, simple, suave o suave a trozos y recorrida en sentido antihorario, contenida en el anillo $r < |z - z_0| < R$ y que rodea a z_0. Entonces, para todo z del anillo $r < |z - z_0| < R$, $f(z)$ puede representarse mediante* ***la serie de Laurent***

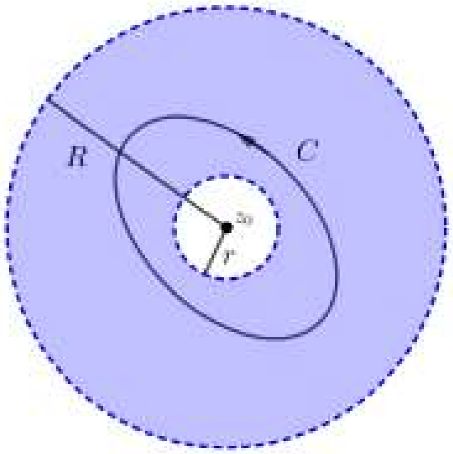
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad , \quad si \quad r < |z - z_0| < R$$

donde $a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\oint_C \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \quad y \quad b_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\oint_C \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}}\, dz$

Series de Potencias

- Serie de Laurent:

Región de convergencia de una serie de Laurent:
$r < |z - z_0| < R$



Teorema **Teorema de unicidad de Laurent**

Si una serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$, *converge a una función* $f(z)$ *en todos los puntos de la corona centrada en* z_0, $r < |z - z_0| < R$, *entonces es la serie de Laurent de* $f(z)$ *en potencias de* $(z - z_0)$ *en* $r < |z - z_0| < R$.

Series de Potencias

- **Serie de Laurent:**

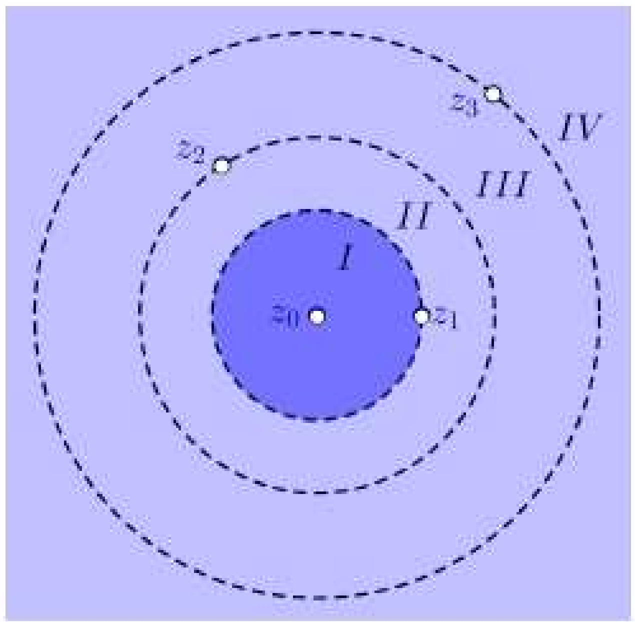
Observaciones

1. Si f es analítica en z_0, es decir que hay un disco centrado en z_0 (cuyo radio es la distancia de z_0 al punto más cercano donde la función deja de ser analítica), se obtendrá una serie de potencias positivas de $(z - z_0)$, es decir la serie de Taylor de la función.

2. Si f no es analítica en z_0 y es analítica en una corona o anillo centrado en z_0: $r < |z - z_0| < R$, se obtendrá una serie de potencias positivas y negativas de $(z - z_0)$, es decir, la serie de Laurent.

Propiedad *Las series de Laurent, como en el caso de las series de potencias, pueden derivarse término a término en su corona de convergencia, obteniéndose una nueva serie que converge en la misma corona a la derivada de* $f(z)$.

6. TEOREMA DE LOS RESIDUOS



INGENIERÍA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN
U.T.N. F.R.L.P.

Teorema de los Residuos

➢ Importancia del Teorema de los Residuos:

El Teorema de los Residuos es una herramienta muy eficaz para:

- calcular integrales de una función de variable compleja a lo largo de una curva cerrada cuando la función tiene un número finito de puntos singulares en el interior de la curva.
- calcular determinadas integrales reales que son muy difciles de resolver en variable real.
- hallar la transformada inversa de Laplace, mediante la integral de inversión compleja.

Teorema de los Residuos

- Singularidades:

Definición *Se dice que z_0 es un **punto singular** o una **singularidad** de la función $f(z)$, si $f(z)$ no es analítica en z_0 pero es analítica en algún punto de todo entorno de z_0.*

Definición . *Se dice que z_0 es una **singularidad aislada** de $f(z)$ si $f(z)$ no es analítica en z_0, pero para todos los puntos de algún entorno reducido de z_0, $f(z)$ es analítica. Es decir que existe algún número positivo R tal que $f(z)$ es analítica en todos los puntos del conjunto $E^*(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$*

Definición *Se dice que z_0 es una **singularidad no aislada** de $f(z)$ si $f(z)$ no es analítica en z_0 y para todo entorno reducido de z_0 hay al menos un punto donde $f(z)$ no es analítica. Es decir que para todo número positivo R, $f(z)$ no es analítica en algún punto del conjunto $E^*(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$*

Teorema de los Residuos

➢ Clasificación de Singularidades Aisladas:

Sea z_0 una singularidad aislada de $f(z)$. Entonces $f(z)$ es analítica en algún entorno reducido de z_0, $E^*(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$, por lo cual,

$f(z)$ admite un desarrollo en serie de Laurent en el mismo:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}}_{\text{parte principal}}, \qquad 0 < |z - z_0| < R$$

Se denomina **parte principal de la serie de Laurent** a los términos correspondientes a las potencias negativas de $(z - z_0)$.

Analizando el comportamiento de la parte principal de la serie de Laurent en un entorno reducido de la singularidad aislada z_0, podremos clasificarla como singularidad evitable, singularidad esencial o polo.

Teorema de los Residuos

➢ Clasificación de Singularidades Aisladas:

Definición *La función $f(z)$ tiene una* ***singularidad evitable*** *en z_0, si la parte principal del desarrollo de Laurent de $f(z)$ en z_0, convergente en $0 < |z - z_0| < R$, no tiene términos; es decir, $b_n = 0 \ \forall n \geq 1$.*

Observación. $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe si y solo z_0 es una singularidad evitable de $f(z)$. En este caso, dicho límite debe ser igual al coeficiente a_0 del desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ en un entorno reducido de z_0, ya que en el mismo solamente aparecen potencias positivas de $(z - z_0)$.

Por lo tanto si una función $f(z)$ tiene una singularidad evitable en z_0, se puede considerar una nueva función $g(z)$ que resulta analítica en z_0 definiendo $g(z_0) = \lim_{z \mapsto z_0} f(z) = a_0$:

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq z_0 \\ \lim_{z \mapsto z_0} f(z) = a_0, & z = z_0 \end{cases}$$

Por ello este tipo de singularidad aislada se denomina evitable o, también, removible.

Teorema de los Residuos

➢ Clasificación de Singularidades Aisladas:

Definición *La función $f(z)$ tiene un* **polo de orden k** *en z_0, si la parte principal del desarrollo de Laurent de $f(z)$ en z_0, convergente en $0 < |z - z_0| < R$, tiene finitos términos no nulos; es decir, $b_n = 0\ \forall n > k$ y $b_k \neq 0$.*
Si **k=1**, *decimos que z_0 es un* **polo simple**.

Observaciones

1. $f(z)$ tiene un polo en $z = z_0$ si y solo si $\lim\limits_{z \mapsto z_0} f(z) = \infty$.
2. Si z_0 es un polo de orden k de $f(z)$ entonces $-k$ es la menor potencia negativa de $(z - z_0)$ que aparece en la parte principal del desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ en z_0.

Teorema ***Caracterización de polos***
z_0 es un polo de orden k de $f(z)$ si y solo si $f(z) = \dfrac{h(z)}{(z - z_0)^k}$ con $h(z)$ analítica en z_0 y $h(z_0) \neq 0$.

Teorema de los Residuos

- Clasificación de Singularidades Aisladas:

Definición *La función $f(z)$ tiene una* ***singularidad esencial*** *en z_0, si la parte principal del desarrollo de Laurent de $f(z)$ en z_0, convergente en $0 < |z - z_0| < R$, tiene infinitos términos no nulos; es decir, si $b_n \neq 0$ para infinitos valores de n.*

Observación. El comportamiento de $f(z)$ en un entorno reducido de z_0 cuando z_0 es una singularidad esencial, es diferente al comportamiento en un polo o en una singularidad evitable, en este caso $\lim\limits_{z \mapsto z_0} f(z)$ no es un valor finito ni tampoco ∞

Teorema de los Residuos

- Clasificación de Singularidades Aisladas:

Criterio de clasificación de singularidades aisladas de funciones que son cociente de funciones analíticas

Teorema . *Sea* $f(z) = \dfrac{N(z)}{D(z)}$, *donde* $N(z)$ *y* $D(z)$ *son analíticas en* z_0 *tal que* $N(z)$ *tiene un cero de orden* p *en* z_0 *y* $D(z)$ *tiene un cero de orden* q *en* z_0, *entonces*

i) Si $p < q$, z_0 *es un polo de orden (q-p) de* $f(z)$

ii) Si $p \geq q$, z_0 *es una singularidad evitable de* $f(z)$

Teorema de los Residuos

- Residuos:

Definición *Sea z_0 una singularidad aislada de $f(z)$. Se denomina* ***residuo*** *de $f(z)$ en z_0 al coeficiente b_1 de la potencia $(z-z_0)^{-1}$ del desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ en un entorno reducido de z_0, $0<|z-z_0|<R$, y se indica $Res_{z_0}f(z)$.*

Observación. El residuo en una singularidad evitable es igual a cero. Este resultado es evidente ya que si z_0 es una singularidad evitable de $f(z)$, se cumple que todos los coeficientes b_n de la parte principal del desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ en z_0, convergente en $0<|z-z_0|<R$, son iguales a cero. Por lo tanto $Res_{z_0}f(z)=b_1=0$.

Proposición ***Cálculo de residuos en polos***

i) Si z_0 es un polo de orden $k>1$ de $f(z)$, entonces

$$Res_{z_0}f(z)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[(z-z_0)^k f(z)\right]\right\}$$

ii) Si $k=1$ (polo simple), entonces

$$Res_{z_0}f(z)=\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)f(z)\right]$$

Teorema de los Residuos

- Teorema de los Residuos:

Teorema ***Teorema de los residuos***

Sea C una curva cerrada, simple, suave o suave a trozos y recorrida en sentido antihorario Sea $f(z)$ una función analítica sobre C y en su interior, salvo en un número finito de puntos singulares $z_1, z_2, ..., z_n$ interiores a C. Entonces:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res_{z_i} f(z)$$