

ANÁLISIS NUMÉRICO

Ingeniería en Sistemas de Información
3er año - Anual

Docentes: Prof. Diego Amiconi
Prof. Marcelo Cappelletti
Ay. Demian Bogado

INGENIERÍA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN
U.T.N. F.R.L.P.

ANÁLISIS NUMÉRICO

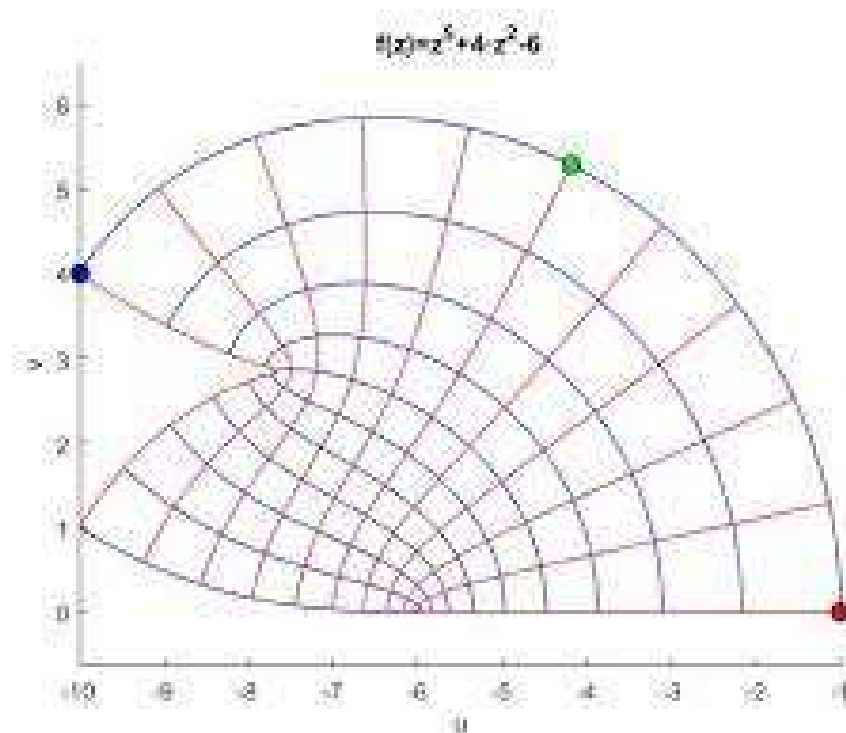
Unidades Temáticas:

- **UNIDAD Nº 1:** “Señales continuas y su representación por medio de Series y Transformadas de Fourier”
- **UNIDAD Nº 2:** “Fundamentos de Análisis de Variable Compleja”
- **UNIDAD Nº 3:** “Transformada de Laplace. Aplicación a la Resolución de Ecuaciones Diferenciales”
- **UNIDAD Nº 4:** “Transformada en Z”

INGENIERÍA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN
U.T.N. F.R.L.P.

ANÁLISIS NUMÉRICO

- UNIDAD Nº 2: “Fundamentos de Análisis de Variable Compleja”

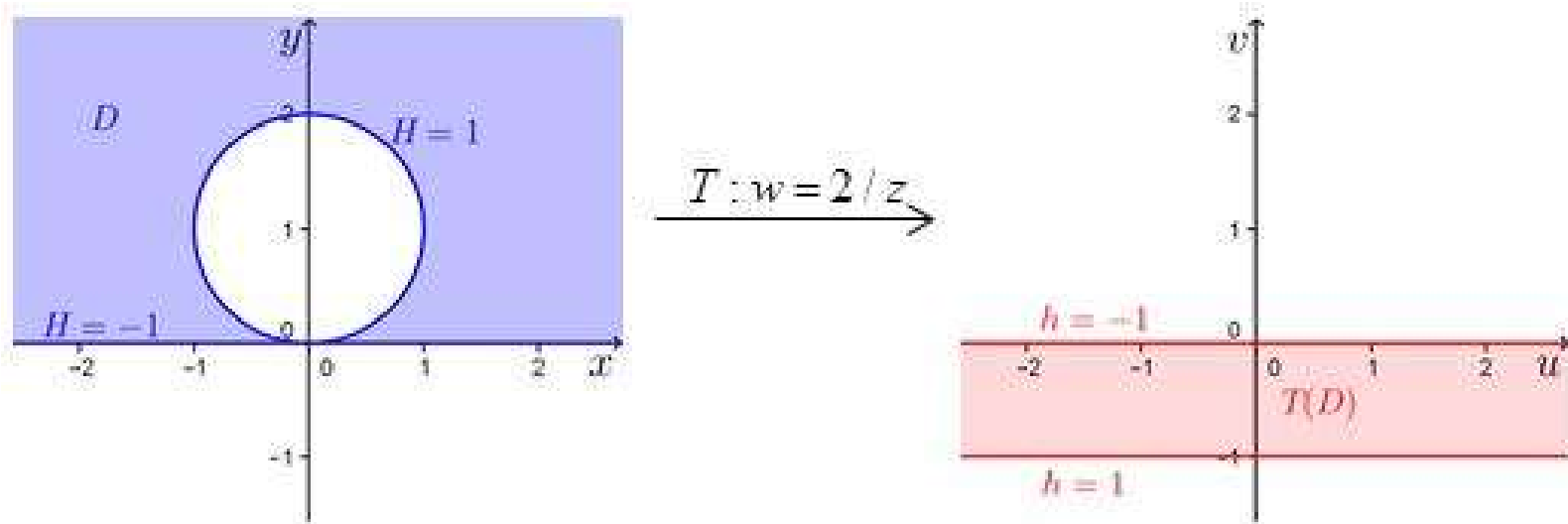


- UNIDAD Nº 2: “Fundamentos de Análisis de Variable Compleja”

CONTENIDOS:

- a) Repaso de números complejos.
- b) Funciones de variable compleja. Límite y continuidad.
- c) Diferenciabilidad. Funciones analíticas.
- d) Transformaciones. Transformación conforme.
- e) Integración en el campo complejo.
- f) Series de potencias en el plano complejo.
- g) Serie de Taylor. Serie de Laurent.
- h) Singularidades. Residuos. Teorema de los residuos.
- i) Resolución de integrales en el campo complejo mediante residuos.

3. TRANSFORMACIONES DEL PLANO COMPLEJO



Transformaciones del plano complejo

Sobre este tema estudiaremos las transformaciones del plano complejo como perspectiva geométrica de la noción de función. Veremos que las transformaciones poseen propiedades muy interesantes cuando están asociadas con funciones analíticas.

- ❑ **Transformaciones Lineales**

- ❑ **Inversión**

- ❑ **Transformación Lineal Fraccionaria**

- ❑ **Transformación Potencia**

- ❑ **Transformaciones Conformes**

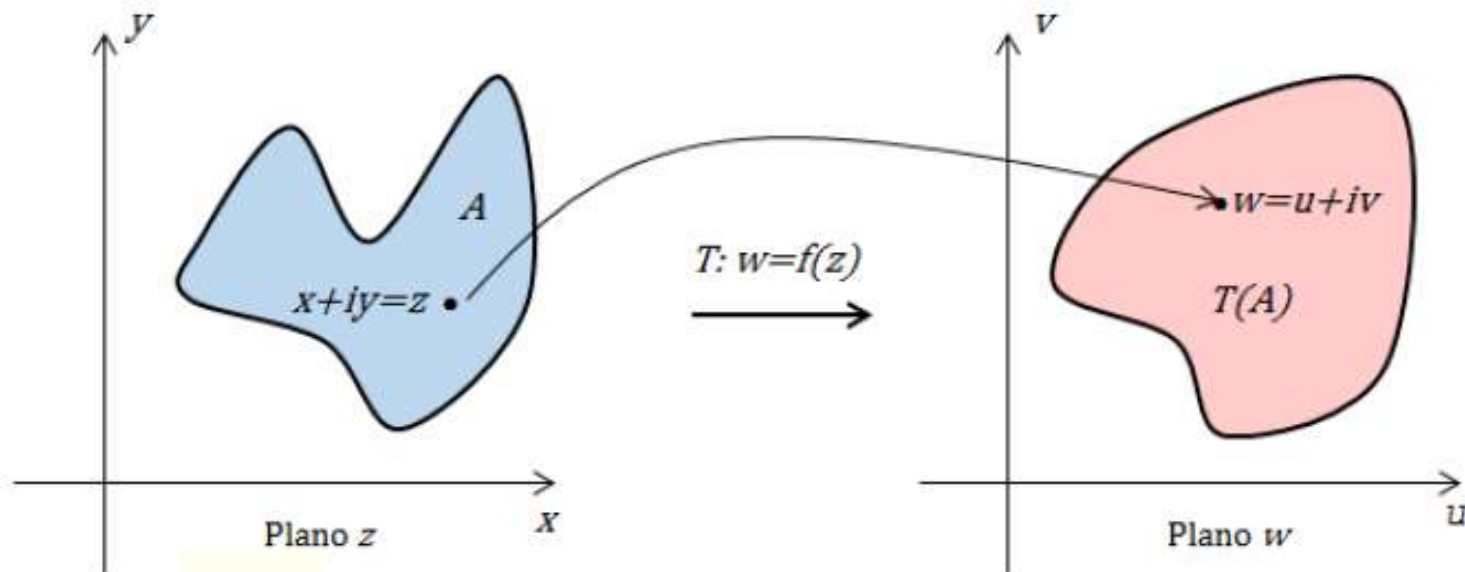
Transformaciones del plano complejo

Para referirnos a la transformación T asociada a $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ anotaremos:

$$T : w = f(z) \quad \text{o equivalentemente} \quad T : \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

En general, si A es un subconjunto del dominio de T , se define la **imagen por T de A** como el conjunto que reúne a las imágenes de los puntos de A , es decir:

$$T(A) = \{T(z) : z \in A\}$$

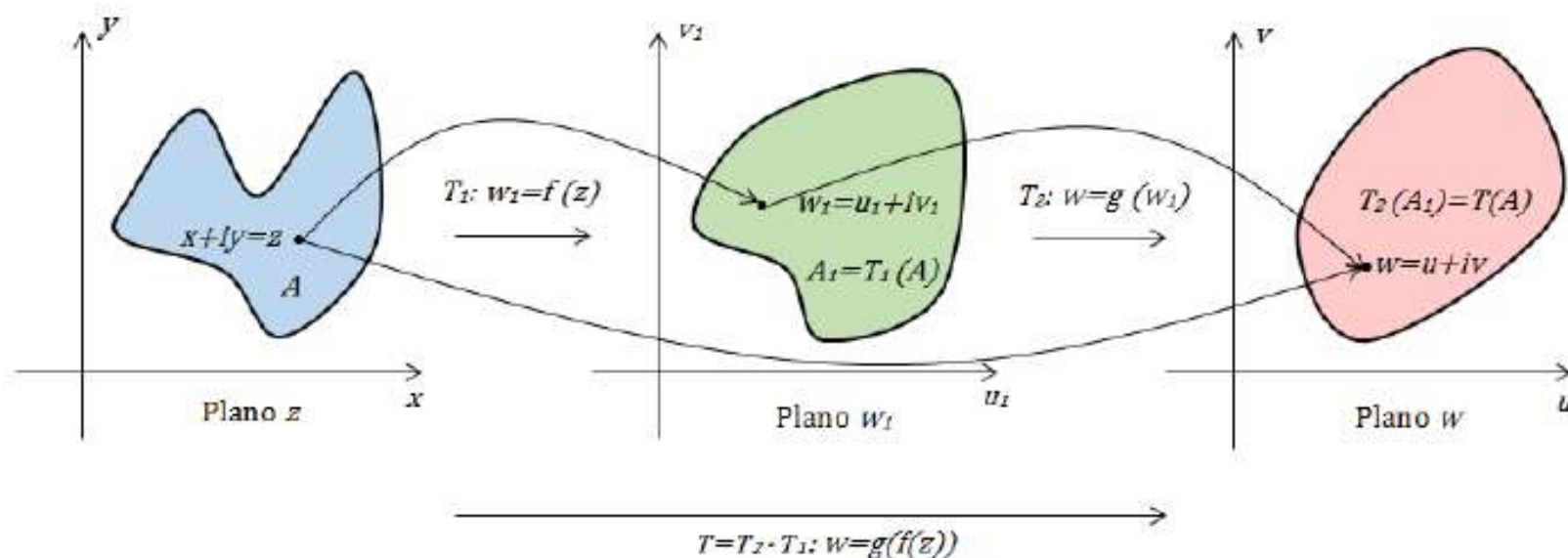


Definición Dada una transformación $T : w = f(z)$, se dice que z_0 es un **punto fijo de T** si $f(z_0) = z_0$

Composición de Transformaciones

Se trata de una operación muy útil que permite **construir transformaciones a partir de otras que actúan secuencialmente**. Corresponde a la idea de **concatenar transformaciones en un orden dado**, es decir, una primera actúa y a continuación una segunda actúa sobre la imagen de la anterior. Esto último es importante pues alterando el orden de las transformaciones sucesivas, la composición y por ende su efecto geométrico puede resultar cualitativamente muy diferente. Dicho en otras palabras, **la composición de transformaciones no es conmutativa en general**. Por otra parte la operación de composición nos permitirá analizar transformaciones en términos de otras más sencillas actuando en secuencia. La definición formal es la siguiente.

Dadas las transformaciones $T_1 : w = f_1(z)$ y $T_2 : w = f_2(z)$, la **composición** de T_1 con T_2 es la transformación $T : w = f(z)$ donde $f(z) = f_2(f_1(z))$. Anotamos $T = T_2 \circ T_1$. Podemos referirnos a ella como T_1 compuesta con T_2 o alternativamente T_2 luego de T_1 .



Transformaciones Lineales

Definición Una transformación $T : w = f(z)$ del plano complejo se dice *lineal* si es de la forma $f(z) = Az + B$ para ciertas constantes $A, B \in \mathbb{C}$.

El caso $A = 0$ es trivial dado que se trata de una transformación que colapsa todo el plano complejo en el único punto $z = B$. Exceptuando esta transformación constante, las demás transformaciones lineales son uno a uno (es decir puntos distintos tienen imágenes distintas), por lo que admiten inversa. De hecho, la inversa de una transformación lineal no constante es otra transformación lineal:

$$T : w = Az + B \text{ con } A \neq 0 \text{ entonces } T^{-1} : z = \frac{1}{A}w - \frac{B}{A}$$

Otra transformación lineal especial es la transformación identidad $T : w = z$, que actúa dejando cada punto fijo.

Transformaciones Lineales Elementales

A continuación consideramos algunas transformaciones lineales cuyo efecto geométrico es muy sencillo, por lo que nos referiremos a ellas como transformaciones lineales elementales: **traslación, escalamiento y rotación alrededor del origen.**

➤ *Traslación:*

Traslación $T : w = z + B, B \in \mathbb{C}$

En forma binómica $z = x + iy, w = u + iv, B = b_1 + ib_2$ se tiene

$$T : \begin{cases} u = x + b_1 \\ v = y + b_2 \end{cases}$$

que se corresponde con la suma de vectores. La imagen $w = T(z)$ se obtiene sumando el vector B al vector z . Y dado que B no depende de z , todos los vectores se trasladan en una misma dirección y una misma distancia.

Transformaciones Lineales Elementales

➤ *Escalamiento:*

Escalamiento $T : w = az, a \in \mathbb{R}, a > 0$

En este caso $w = T(z) = az = are^{i\theta}$. Esto significa que si $w = \rho e^{i\phi}$ es la forma exponencial del punto imagen, entonces

$$\begin{cases} \rho = ar \\ \phi = \theta + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \quad \text{o equivalentemente} \quad \begin{cases} |w| = a|z| \\ \arg(w) = \arg(z) \end{cases}$$

La segunda igualdad dice que la imagen del punto z se encuentra sobre la misma semirrecta desde el origen que z . Esto, junto con la primera igualdad, muestra que a se interpreta como un factor de escala. El efecto será una amplificación (o magnificación o dilatación) cuando $a > 1$, y una reducción (o contracción) cuando $0 < a < 1$.

El número real $a > 0$ se llama razón y cuantifica la relación de proporcionalidad entre un conjunto y su imagen. De hecho, a se llama así pues es la razón o cociente

$$\frac{|T(z)|}{|z|} = \frac{|az|}{|z|} = \frac{a|z|}{|z|} = a$$

Transformaciones Lineales Elementales

➤ *Rotación alrededor del origen:*

Rotación alrededor del origen $T : w = Az, |A| = 1$

Expresemos A , z y w en forma exponencial:

$$A = e^{i\alpha}; \alpha \in \arg(A)$$

$$z = re^{i\theta}; r = |z|, \theta \in \arg(z)$$

$$w = \rho e^{i\phi}; \rho = |w|, \phi \in \arg(w)$$

$$\text{Luego: } \rho e^{i\phi} = w = T(z) = Az = e^{i\alpha} r e^{i\theta} = r e^{i(\theta+\alpha)}$$

Entonces, comparando módulos y argumentos:

$$\begin{cases} \rho = r \\ \phi = \theta + \alpha + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \quad \text{o equivalentemente} \quad \begin{cases} |w| = |z| \\ \arg(w) = \arg(z) + \alpha \end{cases}$$

La primera igualdad dice que la imagen del punto z está a la misma distancia del origen que z , de manera que la transformación actúa moviendo z sobre la circunferencia centrada en el origen de radio $|z|$. Esto, junto con la segunda igualdad, muestran que α representa un ángulo de rotación alrededor del origen (α no depende de z , todos los puntos giran el mismo ángulo). Además, su signo determina si la rotación es en sentido antihorario ($\alpha > 0$) u horario ($\alpha < 0$). El caso $\alpha = 0$ corresponde a la transformación identidad.

Transformaciones Lineales Elementales

➤ *Comentarios:*

Teniendo en cuenta el efecto geométrico de las transformaciones lineales elementales (rotaciones, escalamientos y traslaciones) cabe destacar algunas propiedades útiles:

- preservan globalmente la forma de un conjunto. Entre un conjunto y su imagen existe una relación de *semejanza*, es decir se mantiene una misma relación de proporcionalidad entre segmentos y sus imágenes. La forma del conjunto se preserva aunque no necesariamente el tamaño y la posición en el plano.
- envían (biunívocamente) la frontera de un conjunto sobre la frontera de su imagen.
- conservan tanto en magnitud como en orientación (signo) ángulos entre pares de curvas suaves. En particular, si la frontera de una región A es una curva suave o suave a trozos con determinada orientación (por ejemplo si se la recorre dejando A a izquierda), entonces su imagen por una transformación lineal elemental lleva la frontera sobre la frontera y preserva la orientación (la frontera de la imagen se recorre dejando $f(A)$ a izquierda).

Composición de Transformaciones Lineales

Proposición *Toda transformación lineal $T : w = Az + B$ con $A \neq 0$ es composición de transformaciones lineales elementales y admite inversa la cual es también una transformación lineal. La composición de transformaciones lineales es una transformación lineal.*

Inversión

Definición Se llama *inversión* a la transformación $T : w = 1/z$.
En términos de sus componentes

$$T : \begin{cases} u = x / (x^2 + y^2) \\ v = -y / (x^2 + y^2) \end{cases}$$

Es una correspondencia uno a uno de $\mathbb{C} - \{0\}$ sobre $\mathbb{C} - \{0\}$. Además $T^{-1} = T$, entonces

$$T^{-1} : \begin{cases} x = u / (u^2 + v^2) \\ y = -v / (u^2 + v^2) \end{cases}$$

Sea $A = \{z : |z| \leq R\}$ con $R > 0$. Hallemos su imagen por la inversión:

$$|z| \leq R \Leftrightarrow \frac{1}{|z|} \geq \frac{1}{R} \Leftrightarrow \left| \frac{1}{z} \right| \geq \frac{1}{R} \Leftrightarrow |w| \geq \frac{1}{R}$$

Inversión

- La imagen de una circunferencia centrada en el origen es una circunferencia centrada en el origen.
- Los puntos de la circunferencia de radio R centrada en el origen son enviados sobre los puntos de la de radio $1/R$ centrada en el origen. En particular la circunferencia $|z| = 1$ permanece invariante bajo una inversión.
- Los puntos interiores a la circunferencia de radio R centrada en el origen son enviados sobre los puntos exteriores de la de radio $1/R$ centrada en el origen. Teniendo en cuenta que T es inversa de sí misma, los puntos exteriores a la circunferencia de radio R centrada en el origen son enviados sobre los puntos interiores de la de radio $1/R$ centrada en el origen.

Proposición *La inversión $T : w = 1/z$ envía*

i) rectas en rectas o en circunferencias.

ii) circunferencias en rectas o en circunferencias.

Además, si en el plano z la recta o circunferencia pasa por el origen entonces su imagen en el plano w es una recta. Por el contrario, si la recta o circunferencia no pasa por el origen, su imagen es una circunferencia.

Transformación Lineal Fraccionaria

Definición *Una transformación se dice lineal fraccionaria si es de la forma*

$$T : w = \frac{Az + B}{Cz + D} \text{ donde } A, B, C, D \in \mathbb{C} \text{ son constantes tales que } AD - BC \neq 0$$

En particular si $C = 0$ se obtienen las transformaciones lineales, en tanto que cuando $A = D = 0, B = C \neq 0$ se obtiene la inversión.

La condición $AD - BC \neq 0$ garantiza que T no se reduce a una transformación constante.

Propiedad *El grupo de las transformaciones lineales fraccionarias tiene las siguientes propiedades.*

- i) La composición de dos TLF es también una TLF. Toda TLF admite inversa, la cual es también una TLF.*
- ii) La familia de las TLF es la que se obtiene componiendo las transformaciones lineales no constantes con la inversión.*
- iii) Toda TLF envía rectas en rectas o en circunferencias y envía circunferencias en rectas o en circunferencias.*

Transformación Potencia

Definición Si $n \in \mathbb{N}$ la transformación potencia n -ésima es $T : w = z^n$.

Dado que es más sencillo calcular potencias de un complejo en notación exponencial, escribamos $z = re^{i\theta}$ y $w = \rho e^{i\phi}$. Entonces: $\rho e^{i\phi} = w = z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$ Comparando módulos y argumentos de z y w deducimos que:

$$\begin{cases} \rho = r^n \\ \phi = n\theta + 2k\pi \text{ para cierto entero } k \end{cases}$$

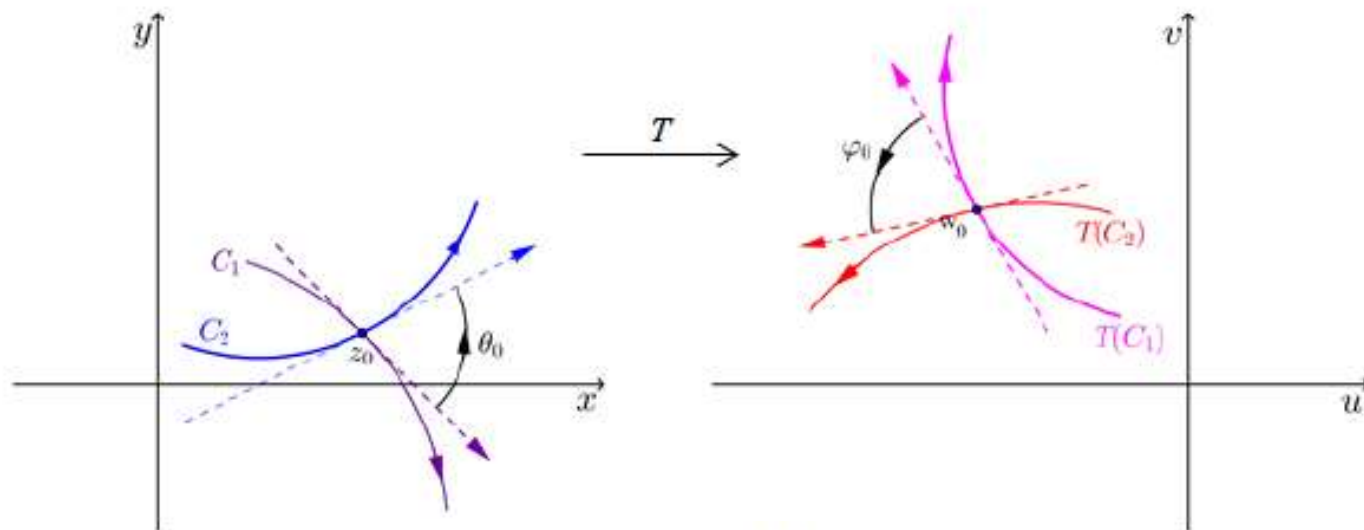
que representan las coordenadas polares del punto imagen.

El origen es claramente un punto fijo. Veamos la imagen por T de un punto $z \neq 0$. Como en general la transformación potencia no es uno a uno, para hallar imágenes por T de conjuntos no podemos trabajar con la transformación inversa. Pero aún si resultara inversible restringida al conjunto que se quiere transformar, la expresión para la transformación inversa no es sencilla porque presupone elegir una rama particular de la raíz n -ésima.

Transformación Conforme

Definición Se dice que $T : w = f(z)$ es una *transformación conforme* en el punto z_0 si preserva, tanto en magnitud como en orientación, el ángulo entre pares de curvas suaves por dicho punto. La transformación es conforme en un dominio D del plano si lo es en cada punto de D .

Para precisar la condición de conformidad en un punto, consideremos dos curvas suaves C_1, C_2 por z_0 y sean $f(C_1), f(C_2)$ sus imágenes, las cuales pasan por $w_0 = f(z_0)$. Sea θ_0 el ángulo orientado cuyo lado inicial es la tangente a C_1 en z_0 y cuyo lado final es la tangente a C_2 en z_0 . Sea φ_0 el ángulo orientado cuyo lado inicial es la tangente a $f(C_1)$ en w_0 y cuyo lado final es la tangente a $f(C_2)$ en w_0 . La conformidad establece que $\varphi_0 = \theta_0$.



Transformación conforme en z_0

Transformación Conforme

Definición Se dice que $T : w = f(z)$ es una transformación conforme en el punto z_0 si preserva, tanto en magnitud como en orientación, el ángulo entre pares de curvas suaves por dicho punto. La transformación es conforme en un dominio D del plano si lo es en cada punto de D .

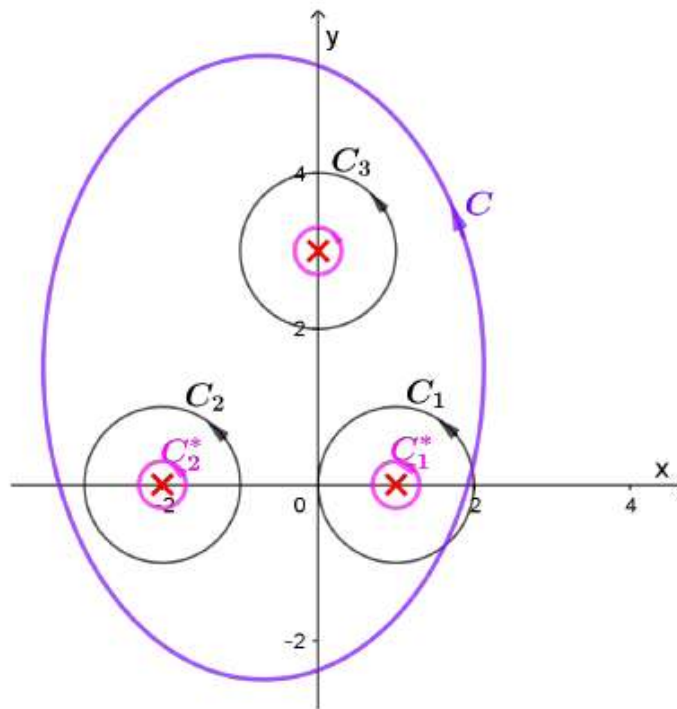
Es claro que la composición de dos transformaciones conformes es conforme. Se deduce que las transformaciones lineales no constantes también lo son en todo punto del plano complejo, pues se obtienen por composición de elementales que son conformes.

Para una transformación cualquiera no es posible mostrar la conservación del ángulo para todo par de curvas suaves por un punto dado. Necesitaremos algún criterio que permita decidir de un modo sencillo si $T : w = f(z)$ es conforme en un punto z_0 .

Teorema Sea $f(z)$ analítica en el punto z_0 . Son equivalentes:

- i) La transformación $T : w = f(z)$ es conforme en z_0
- ii) $f'(z_0) \neq 0$

4. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES COMPLEJAS



INGENIERÍA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN
U.T.N. F.R.L.P.

Integración de funciones complejas

➤ Integración de funciones complejas de variable real:

Dadas funciones $G(t)$ y $g(t)$ a valores complejos continuas en un intervalo I se dice que $G(t)$ es una **primitiva de $g(t)$ en I** si $G'(t) = g(t)$ para todo $t \in I$. Si $G(t) = U(t) + iV(t)$ y $g(t) = u(t) + iv(t)$, es inmediato que $G(t)$ es una primitiva de $g(t)$ en I si y solo si $U(t)$ es primitiva de $u(t)$ en I y $V(t)$ es primitiva de $v(t)$ en I .

■ *Integral indefinida:*

Para una función $g : I \rightarrow \mathbb{C}$ continua en el intervalo I , se llama **integral indefinida de $g(t)$ en I** al conjunto de todas sus primitivas en ese intervalo. Si $g(t) = u(t) + iv(t)$ y $U(t)$ y $V(t)$ son primitivas en I de sus partes real e imaginaria respectivamente, entonces:

$$\int u(t) dt = U(t) + C_1 \qquad \int v(t) dt = V(t) + C_2$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración reales. Así, llamando $G(t) = U(t) + iV(t)$ y continuando con la notación clásica podemos escribir:

$$\begin{aligned} \int g(t) dt &= \int u(t) dt + i \int v(t) dt = (U(t) + C_1) + i (V(t) + C_2) = \\ &= (U(t) + iV(t)) + (C_1 + iC_2) = G(t) + C \end{aligned}$$

donde $C = C_1 + iC_2 \in \mathbb{C}$ es una constante general de integración.

Integración de funciones complejas

- *Integral definida:*

Definición Dada una función acotada $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $g(t) = u(t) + i v(t)$, se dice que g es integrable en $[a, b]$ si las funciones reales $u(t)$ y $v(t)$ lo son. En tal caso la *integral* de g en el intervalo $[a, b]$ se define por:

$$\int_a^b g(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt$$

Dicho de otro modo, la integración se realiza componente a componente:

$$\operatorname{Re} \left(\int_a^b g(t) dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re} (g(t)) dt \qquad \operatorname{Im} \left(\int_a^b g(t) dt \right) = \int_a^b \operatorname{Im} (g(t)) dt$$

Si queremos invertir el orden de los límites de integración manteniendo la definición anterior de integración componente a componente, necesariamente admitiremos para $a \leq b$:

$$\int_b^a g(t) dt = - \int_a^b g(t) dt$$

Integración de funciones complejas

- *Propiedades de la Integral definida:*

1) **Linealidad:** Si $g(t)$ y $h(t)$ son integrables en $[a, b]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ son constantes, entonces:

$$\int_a^b [\alpha g(t) + \beta h(t)] dt = \alpha \int_a^b g(t) dt + \beta \int_a^b h(t) dt$$

2) **Aditividad del intervalo de integración:** Si $g(t)$ es integrable en un intervalo que incluye a, b, c entonces:

$$\int_a^b g(t) dt = \int_a^c g(t) dt + \int_c^b g(t) dt$$

3) **Acotamiento:** Si $g(t)$ es integrable en $[a, b]$ entonces

$$\left| \int_a^b g(t) dt \right| \leq \int_a^b |g(t)| dt$$

4) **Conjugación:** Si $g(t)$ es integrable en $[a, b]$ entonces:

$$\int_a^b \overline{g(t)} dt = \overline{\int_a^b g(t) dt}$$

Integración de funciones complejas

- *Teorema Fundamental del Cálculo y Regla de Barrow:*

Teorema Sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continua en $[a, b]$.

(i)) La función $I(t) = \int_a^t g(\tau) d\tau$ es una primitiva de $g(t)$ en $[a, b]$. En particular, toda función $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continua en $[a, b]$ admite primitiva en dicho intervalo.

(ii) Si $G(t)$ es una primitiva de $g(t)$ en $[a, b]$, es decir que G es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y se tiene $G'(t) = g(t)$ para todo $t \in (a, b)$ entonces:

$$\int_a^b g(t) dt = G(t) \Big|_a^b = G(b) - G(a) \qquad \text{Regla de Barrow en intervalos}$$

Integración de funciones complejas

➤ Integración a lo largo de curvas del plano complejo:

Definición Sea $C : z = Z(t)$, $t \in [a, b]$, una curva suave (orientada por valores crecientes del parámetro). Si $f(z)$ es una función a valores complejos continua sobre C , se define la integral de f a lo largo de C mediante:

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(Z(t)) \cdot \overbrace{Z'(t) dt}^{dz(t)}$$

Si C es suave a trozos, unión de la secuencia de curvas suaves C_1, C_2, \dots, C_N , donde el extremo final de C_k coincide con el inicial de C_{k+1} (para $1 \leq k \leq N-1$), se define:

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^N \int_{C_k} f(z) dz$$

Cuando la curva C es cerrada se acostumbra indicar la integral como $\oint_C f(z) dz$

- El valor de la integral a lo largo de C no depende de la representación particular elegida siempre que ella respete la orientación especificada.
- Dos arcos que conecten el mismo extremo inicial y final no necesariamente arrojarán el mismo valor para la integral.

Integración de funciones complejas

■ *Propiedades de la Integración a lo largo de curvas:*

- 1) **Linealidad:** Si α, β son constantes complejas y $f(z), g(z)$ son integrables a lo largo de C , entonces:

$$\int_C (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \left(\int_C f(z) dz \right) + \beta \left(\int_C g(z) dz \right)$$

- 2) **Acotamiento:** Si f es integrable a lo largo de la curva C de longitud L y $|f(z)| \leq M, \forall z \in C$, entonces

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML$$

- 3) **Cambio de signo:** $\int_C f(z) dz = - \int_{-C} f(z) dz$

■ *Relación entre integrales de línea reales y complejas:*

Sea $f(z)$ una función continua sobre el arco suave o suave a trozos C y sean $u(x, y) = \operatorname{Re}(f(z))$ y $v(x, y) = \operatorname{Im}(f(z))$. Se verifica:

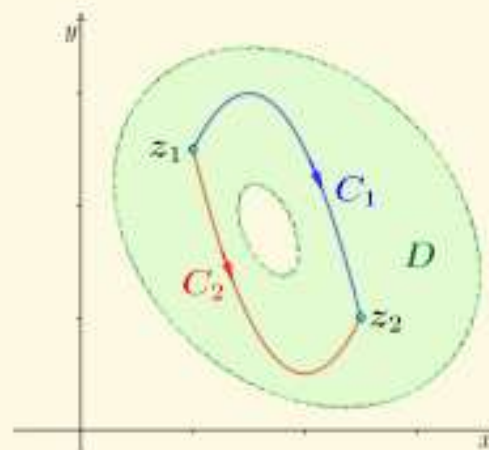
$$\int_C f(z) dz = \left(\int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy \right) + i \left(\int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy \right)$$

Integración de funciones complejas

➤ Independencia del camino:

Definición Dada $f(z)$ continua en un conjunto abierto y conexo D , se dice que la integral $\int_C f(z) dz$ es independiente del camino en D si para todo par de curvas C_1, C_2 incluidas en D , ambas con extremo inicial z_1 y ambas con extremo final z_2 , se cumple:

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$



Cuando la integral tiene esta propiedad anotamos $\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz$.

Propiedad Sea $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ continua en un dominio D . Se verifica: $\int_C f(z) dz$ es independiente del camino en D si y solo si las integrales de línea $\int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy$ y $\int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy$ son independientes del camino en D .

Integración de funciones complejas

➤ Independencia del camino:

Teorema *Independencia del camino*

Sea $f(z)$ función continua en un conjunto D abierto y conexo del plano complejo. Las tres afirmaciones siguientes son equivalentes (es decir todas son verdaderas o todas son falsas):

1. $\int_C f(z) dz$ es independiente del camino en D .
2. $\oint_C f(z) dz = 0$ para toda curva cerrada C incluida en D .
3. $f(z)$ admite primitiva en D .

Además, si $F(z)$ es una primitiva de $f(z)$ en D entonces vale:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1) \quad \text{Regla de Barrow}$$

Cualquiera de las tres afirmaciones implica la siguiente:

4. $f(z)$ es analítica en D .

Cuando D es simplemente conexo las cuatro afirmaciones son equivalentes.

Integración de funciones complejas

➤ **Teorema de Cauchy:** (versión compleja del Teorema de Green para funciones analíticas)

Teorema *Teorema de Cauchy*

Sea C una curva del plano complejo, cerrada, simple, suave o suave a trozos, orientada en sentido antihorario y sea $f(z)$ una función analítica sobre C y en su interior, cuya derivada $f'(z)$ es continua sobre C y en su interior. Se verifica:

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

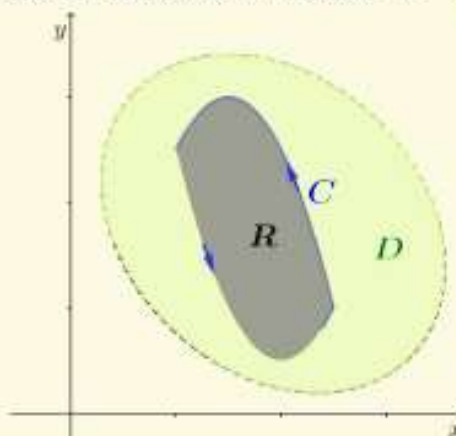
El matemático E. Goursat probó que la hipótesis de continuidad de la derivada resulta innecesaria en el teorema anterior:

Teorema *Teorema de Cauchy-Goursat*

Si C es una curva del plano complejo, cerrada, simple, suave o suave a trozos, orientada en sentido antihorario y $f(z)$ es una función analítica sobre C y en su interior,

entonces:

$$\oint_C f(z) dz = 0$$



Integración de funciones complejas

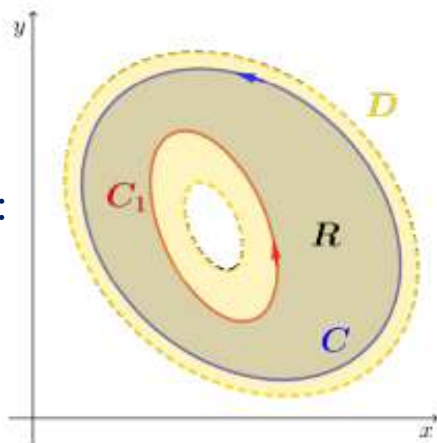
➤ Corolario

Otra consecuencia importante del teorema de Cauchy-Goursat es la siguiente versión para funciones analíticas de la generalización del teorema de Green a regiones cuyo contorno consta de varias curvas cerradas.

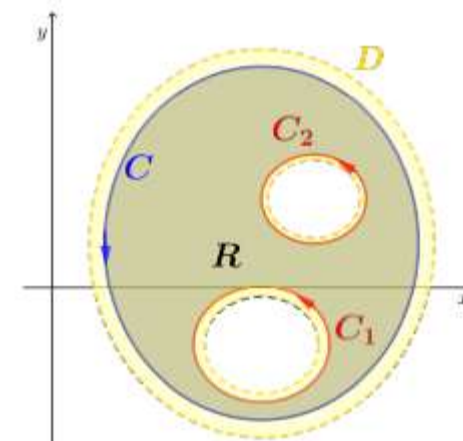
Corolario Sean C, C_1, \dots, C_N curvas cerradas, simples y suaves o suaves a trozos, todas con la misma orientación (todas antihorarias o todas horarias), C_1, \dots, C_N interiores a C y cuyos interiores no tienen puntos en común. Sea R la región limitada por C, C_1, \dots, C_N . Si $f(z)$ es analítica sobre C, C_1, \dots, C_N y en R entonces se verifica:

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \dots + \oint_{C_N} f(z) dz$$

Caso N=1:



Caso N=2:



Integración de funciones complejas

➤ Fórmula integral de Cauchy:

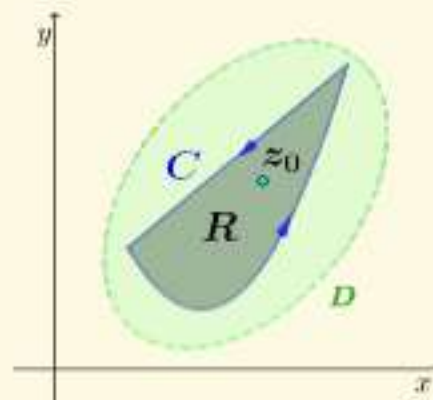
Como hemos visto, para poder aplicar el teorema de Cauchy-Goursat es necesario que el integrando sea analítico sobre la curva y su interior. El resultado que presentaremos permite la existencia de un único punto de no analiticidad, z_0 interior a C , atribuible exclusivamente a un denominador polinómico de la forma $z - z_0$.

Teorema *Fórmula integral de Cauchy*

Sea C una curva cerrada, simple, suave o suave a trozos, con orientación antihoraria.

Si $f(z)$ es una función analítica sobre C y en su interior, z_0 un punto interior a C , entonces se verifica:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$



Integración de funciones complejas

➤ Fórmula integral de Cauchy para derivadas:

Teorema *Fórmula integral de las derivadas*

Sea C una curva cerrada, simple, suave o suave a trozos, orientada en sentido antihorario y sea z_0 un punto interior a C . Si $f(z)$ es una función analítica sobre C y en su interior, entonces para cualquier entero $n \geq 1$ existe la derivada $f^{(n)}(z_0)$ y se verifica:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = 2\pi i \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Observaciones

1. En el integrando la potencia del denominador es de orden $n + 1$ en tanto que en el miembro de la derecha el orden de derivación y el orden del factorial es n .
2. Si en la fórmula de las derivadas se reemplaza n por 0 se obtiene precisamente la fórmula integral de Cauchy.
3. La fórmula integral de las derivadas resulta útil para calcular integrales a lo largo de curvas cerradas cuando el integrando deja de ser analítico en un único punto z_0 interior a C , siendo el responsable de la no analiticidad un factor lineal $(z - z_0)$ del denominador, que se encuentra repetido al menos dos veces.