ANÁLISIS NUMÉRICO

Ingeniería en Sistemas de Información

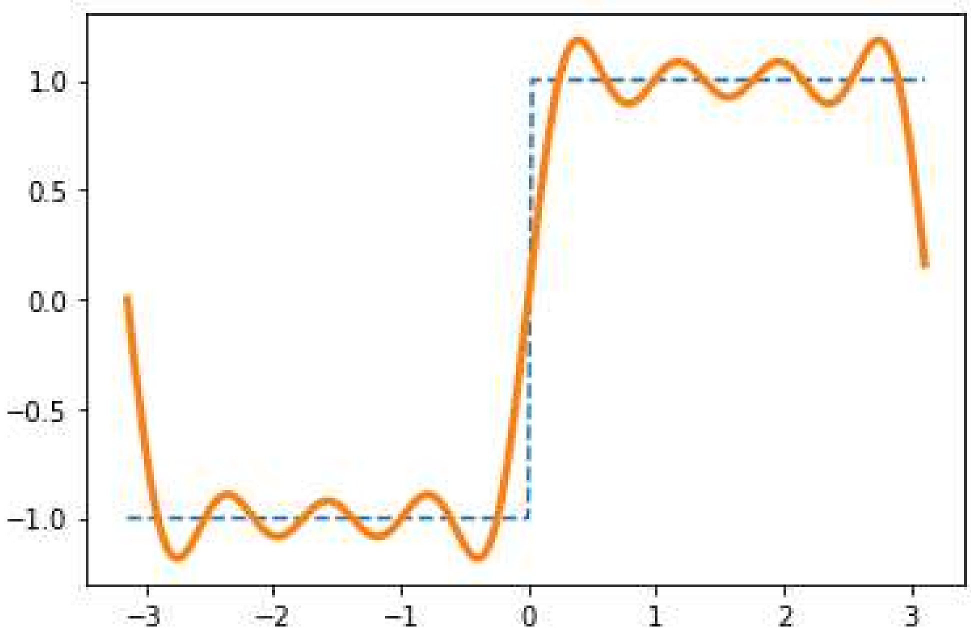
3er año - Anual

Docentes: Prof. Diego Amiconi
Prof. Marcelo Cappelletti
Ay. Demian Bogado

INGENIERÍA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN
U.T.N. F.R.L.P.

ANÁLISIS NUMÉRICO

- UNIDAD Nº 1: “Señales continuas y su representación por medio de Series y Transformadas de Fourier”



(Parte II)

- UNIDAD Nº 1: "Señales continuas y su representación por medio de Series y Transformadas de Fourier"

CONTENIDOS:

a) **Concepto de señal en tiempo continuo. Funciones periódicas.**

b) **Series de Fourier. Convergencia y suma de las series de Fourier.**

c) **Forma exponencial de la serie de Fourier.**

d) **Problemas de aplicación.**

e) **Integrales de Fourier.**

f) **Transformada de Fourier. Propiedades.**

g) **Convolución en el dominio temporal y frecuencia.**

h) **Transformada discreta de Fourier. Transformada rápida de Fourier.**

i) **Aplicaciones a la Ingeniería.**

Problemas de Aplicación

Las series de Fourier tienen aplicaciones importantes en:

- la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias (**ODE**)

- la resolución de ecuaciones en derivadas parciales (**PDE**)

En esta sección, se presentará un ejemplo de un problema básico modelado por una ODE.

Las ODE en una dimensión, son aquellas cuyas funciones incógnitas dependen de una sola variable. Por ejemplo, una ODE de segundo orden tiene la forma:

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t)$$

Vamos a ver ahora cómo se calcula la solución en estado estacionario de la ecuación anterior en el caso que *f(t)* sea una función periódica arbitraria (es decir no sea un seno o coseno).

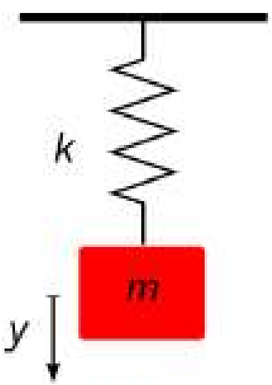
Problemas de Aplicación

Oscilaciones forzadas

- **Sistema masa-resorte**

Un sistema masa-resorte con oscilación forzada es gobernado por la siguiente ODE:

$$my'' + cy' + ky = r(t)$$



donde:
m es la masa del cuerpo,
k es la constante del resorte (sin masa),
c es la constante de amortiguamiento,
r(t) es la fuerza externa dependiente del tiempo,
y(t) es el desplazamiento desde el reposo en *t*=0.

Problemas de Aplicación

Oscilaciones forzadas

➢ Sistema masa-resorte

Un sistema masa-resorte con oscilación forzada es gobernado por la siguiente ODE:

$$my'' + cy' + ky = r(t)$$

En el caso que *r(t)* sea una función seno o coseno y si existe amortiguamiento ($c>0$), entonces la solución en estado estacionario es una oscilación armónica con frecuencia igual a la de *r(t)*.

Sin embargo, si *r(t)* no es una función seno o coseno, pero si es cualquier otra función periódica, entonces la solución en estado estacionario será una superposición de oscilaciones armónicas con frecuencias igual a la de *r(t)* y los múltiplos enteros de ella.

Problemas de Aplicación

Oscilaciones forzadas

➢ **Sistema masa-resorte**

Ejemplo:
Oscilaciones forzadas bajo una fuerza impulsora periódica no sinusoidal.

Sea un sistema masa-resorte con oscilación forzada con los siguientes datos:
m = 1 grm; c = 0.05 grm/seg; k = 25 grm/seg^2; entonces la ODE resulta:

$$y'' + 0.05y' + 25y = r(t)$$

donde: $r(t) = \begin{cases} t + \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad -\pi < t < 0, \\ -t + \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad 0 < t < \pi, \end{cases} \qquad r(t + 2\pi) = r(t)$ medida en grm.cm/seg^2.

Encontrar la solución de estado estacionario *y(t)*.

Problemas de Aplicación

Oscilaciones forzadas

- **Sistema masa-resorte**

Solución:

El desarrollo en series de Fourier de *r(t)* resulta:

$$r(t)=\frac{4}{\pi}\left(\cos(t)+\frac{1}{3^2}\cos(3t)+\frac{1}{5^2}\cos(5t)+\ldots\right)$$

Luego, la ODE puede ser escrita como:

$$y''+0.05y'+25y=\frac{4}{n^2\pi}\cos(nt) \qquad (n=1,3,5,\ldots)$$

donde el miembro derecho es un simple término de *r(t)*.

Problemas de Aplicación

Oscilaciones forzadas

- **Sistema masa-resorte**

Solución:

La solución de estado estacionario $y_n(t)$ de la ODE anterior es de la forma:

$$y_n = A_n \cos(nt) + B_n \operatorname{sen}(nt)$$

Sustituyendo esta ecuación en la ODE se obtiene:

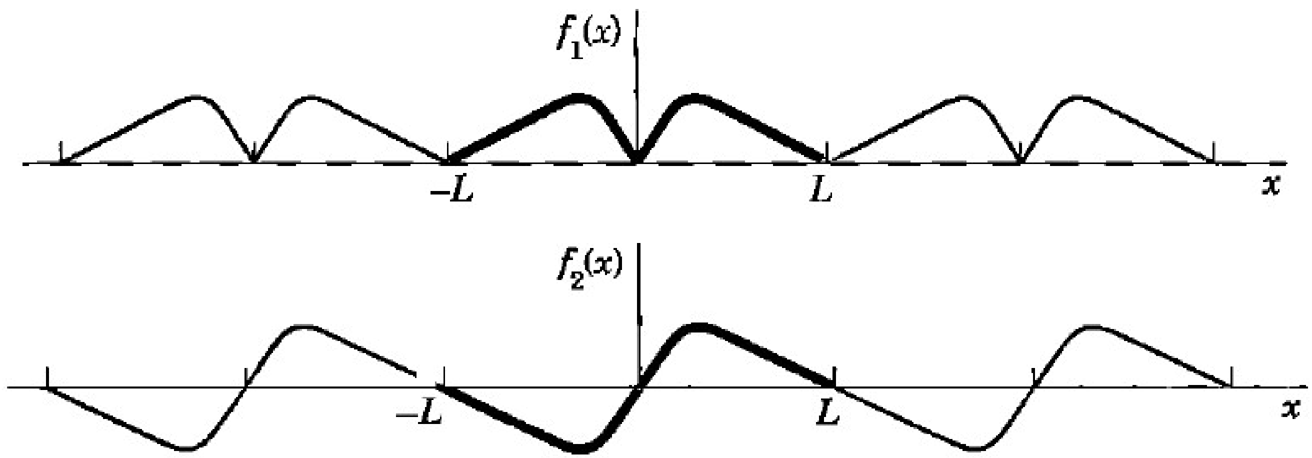
$$A_n = \frac{4\left(25 - n^2\right)}{n^2 \pi D_n}, \quad B_n = \frac{0.2}{n \pi D_n}, \text{ donde } D_n = \left(25 - n^2\right)^2 + \left(0.05n\right)^2$$

Dado que la ODE es lineal, entonces, la solución de estado estacionario es:

$$\boxed{y = y_1 + y_3 + y_5 + \ldots}$$

Desde la Serie a la Integral de Fourier

Las **series de Fourier** son una herramienta poderosa parar resolver problemas que involucran **funciones periódicas** o que son de interés en un intervalo finito, en cuyo caso hemos visto que se podía extender la función no periódica en una periódica a partir de la **expansión de medio rango**.

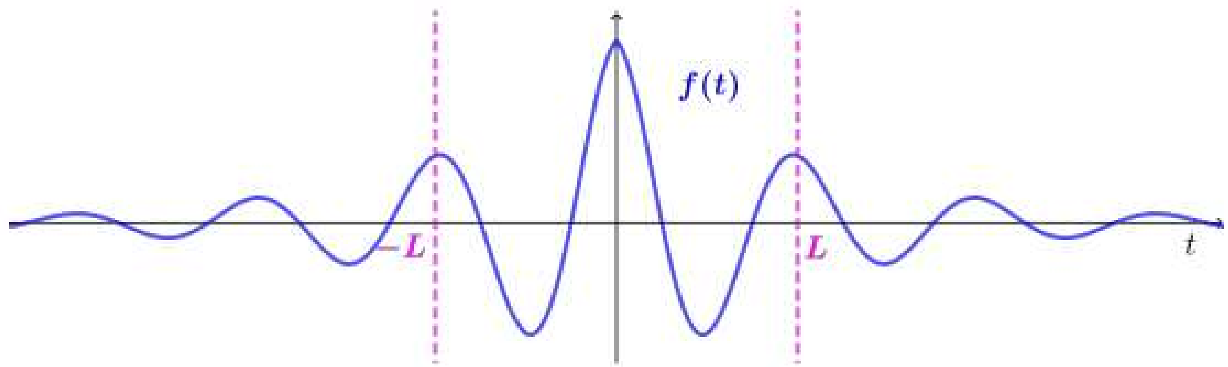


Sin embargo, existen muchos problemas que involucran **funciones que son no periódicas** y que son de **interés en el eje *x* entero, es decir, entre -∞** y **+∞.**

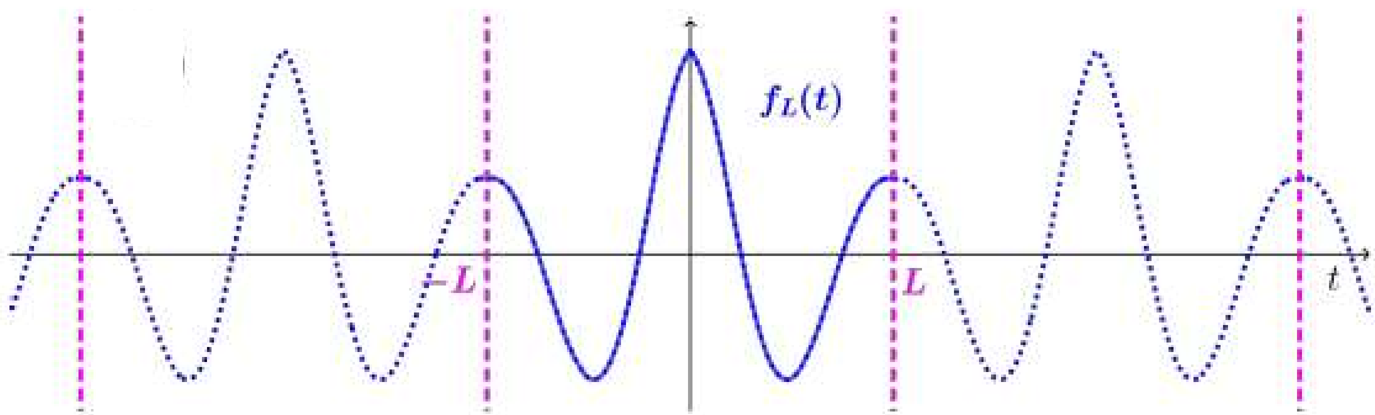
Para resolver este tipo de situaciones es que surgen las Integrales de Fourier.

Desde la Serie a la Integral de Fourier

Las series de Fourier surgieron por la necesidad de resolver ciertas ecuaciones diferenciales parciales sujetas a condiciones de contorno que involucran funciones periódicas. Para los casos de funciones aperiódicas entre -∞ y +∞, es posible introducir las **integrales de Fourier** a partir de las series de Fourier.



Sea $f_L(t) = f(t)$, $t \in (-L, L)$, periódica de período $2L$.

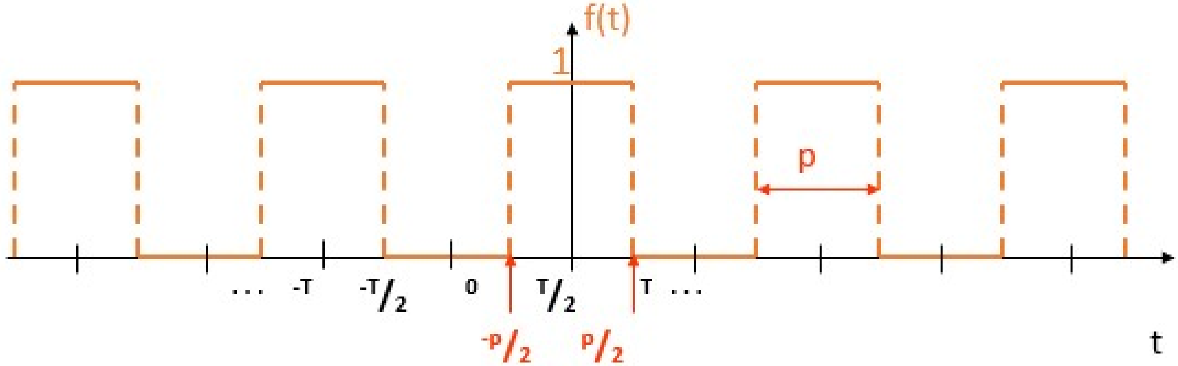


observamos que cuando L crece $f_L(t)$ tiende a $f(t)$.

Desde la Serie a la Integral de Fourier

Consideremos la siguiente función periódica de periodo T

Tren de pulsos de amplitud 1, ancho p y periodo T:



$$f(t) = \begin{cases} 0 & \frac{-T}{2} < t < \frac{-p}{2} \\ 1 & \frac{-p}{2} < t < \frac{p}{2} \\ 0 & \frac{p}{2} < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

Desde la Serie a la Integral de Fourier

Los coeficientes de la Serie Compleja de Fourier en este caso resultan puramente reales:

$$c_n = \left(\frac{p}{T}\right)\frac{\operatorname{sen}(n\omega_0 \frac{p}{2})}{(n\omega_0 \frac{p}{2})}$$

El espectro de frecuencia correspondiente lo obtenemos graficando c_n contra $w=nw_0$.

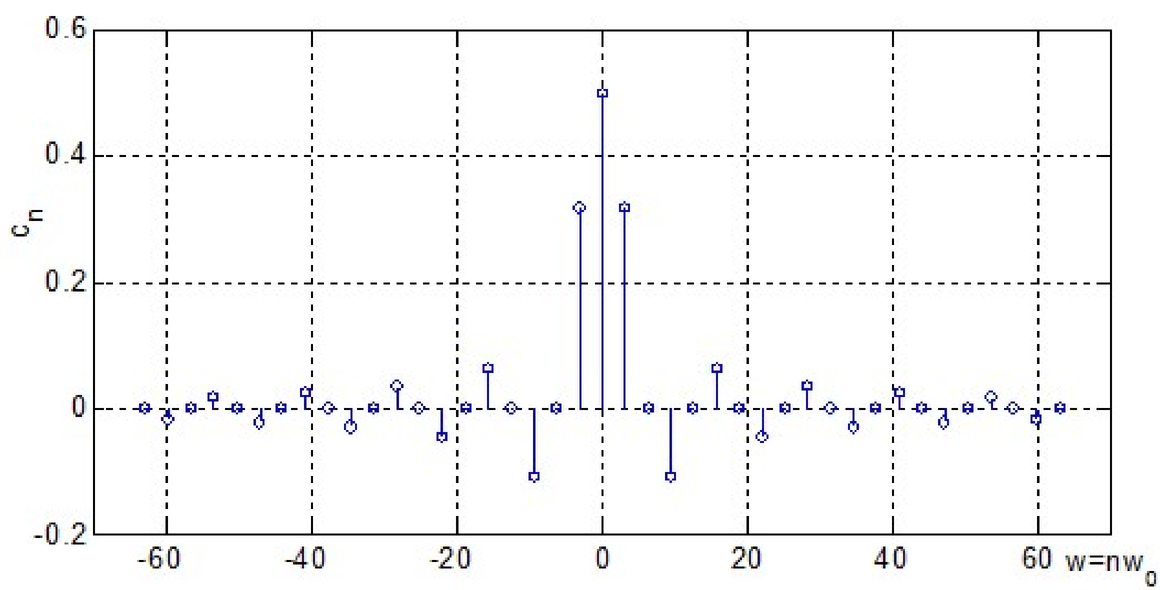
Desde la Serie a la Integral de Fourier

Los coeficientes de la Serie Compleja de Fourier en este caso resultan puramente reales:

$$c_n = \left(\tfrac{p}{T}\right)\frac{\operatorname{sen}(n\omega_0 \tfrac{p}{2})}{(n\omega_0 \tfrac{p}{2})}$$

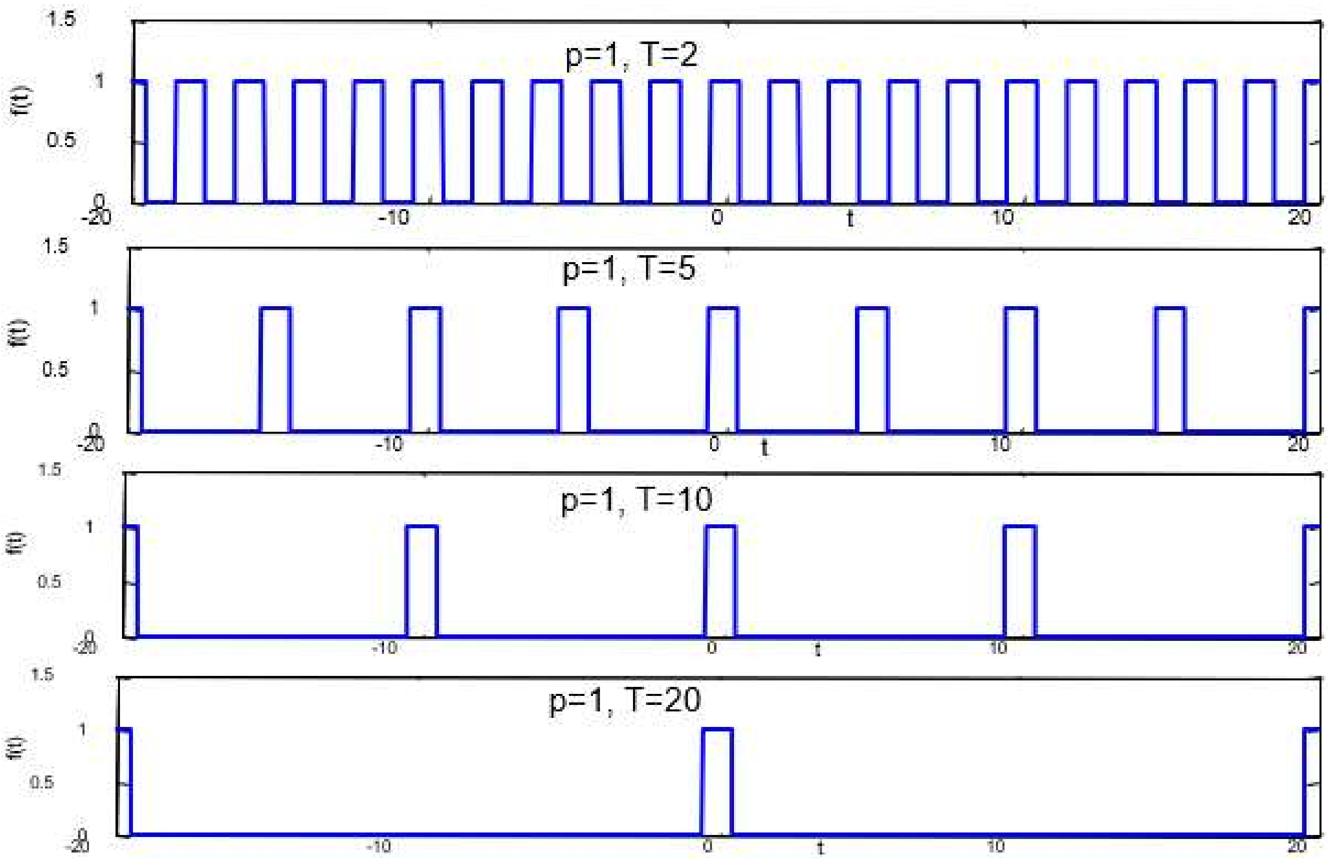
El espectro de frecuencia correspondiente lo obtenemos graficando c_n contra $w=nw_0$.

Espectro del tren de pulsos para p=1, T=2



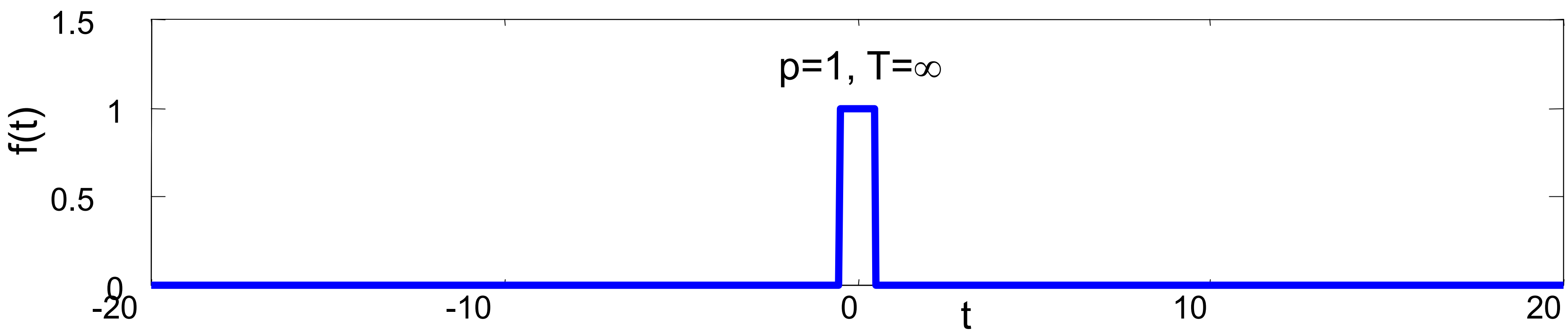
Desde la Serie a la Integral de Fourier

Si el periodo del tren de pulsos aumenta:



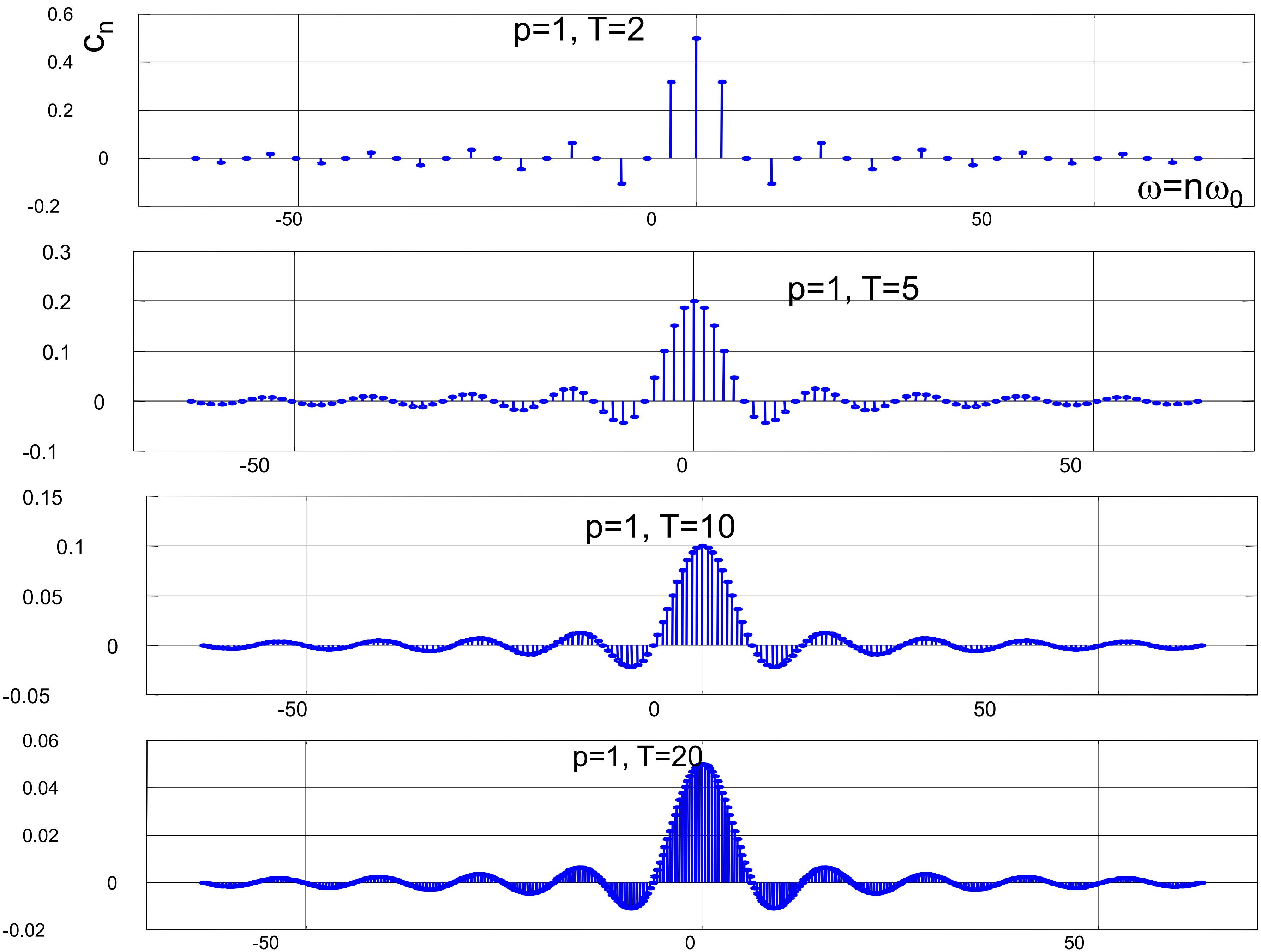
Desde la Serie a la Integral de Fourier

En el límite cuando $T \to \infty$, la función deja de ser periódica:



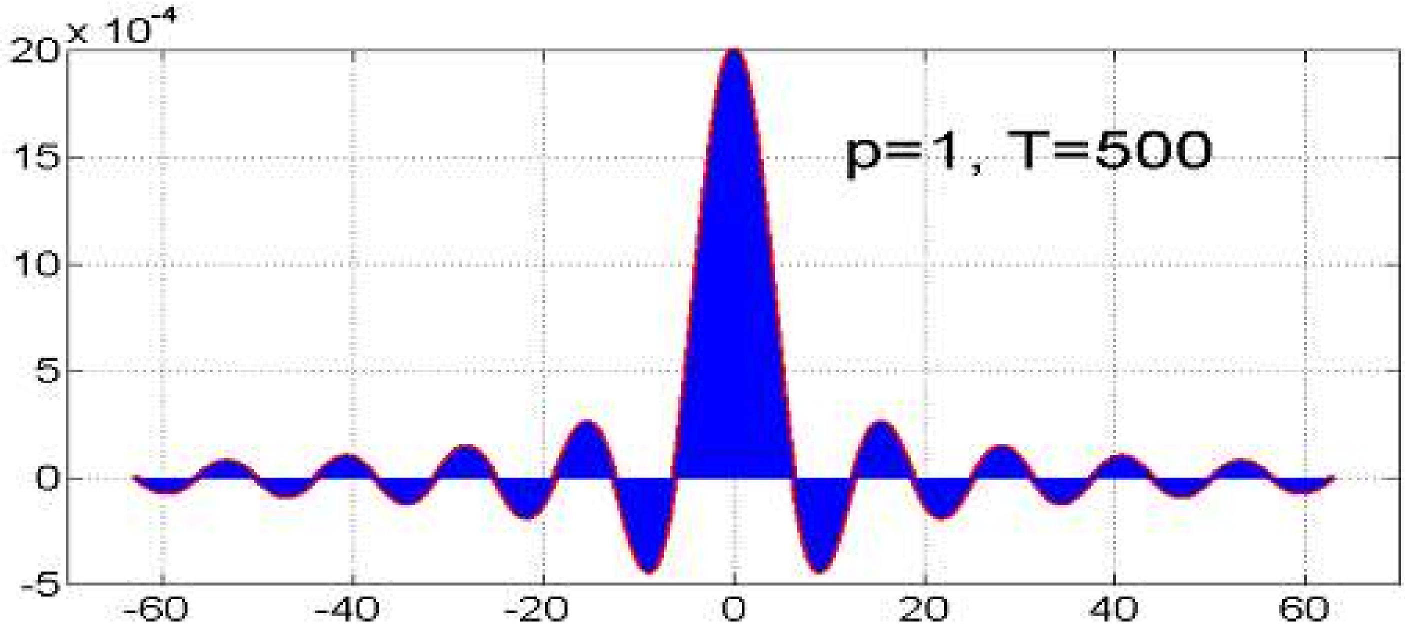
¿Qué pasa con los coeficientes de la serie de Fourier?

➢ *Integrales de Fourier*



Desde la Serie a la Integral de Fourier

Si hace T muy grande ($T \to \infty$): El espectro se vuelve ¡*continuo*!



Integrales de Fourier

Definición

Sea *f(x)* una función definida en $(-\infty,+\infty)$ seccionalmente continua en cada intervalo finito, con derivadas por la derecha e izquierda en todo punto, y tal que $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx$ converge, entonces la integral de Fourier de *f(x)* se define como:

$$\boxed{f(x)=\int_{0}^{+\infty}\left[A(\omega)\cos(\omega x)+B(\omega)\operatorname{sen}(\omega x)\right]d\omega}$$

donde: $A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos(\omega u)\,du$ y $B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\operatorname{sen}(\omega u)\,du$

son los coeficientes de la integral de Fourier de *f(x)*.

Integrales de Fourier

Criterio de Convergencia

Sea *f(x)* una función definida en $(-\infty,+\infty)$ seccionalmente continua en el intervalo finito $[-L,L]$ $\forall\ L>0$, con derivadas por la derecha e izquierda en todo punto y tal que $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ existe, entonces la integral de Fourier de *f(x)* converge a $f(x_0)=\frac{1}{2}\left(f(x_0^+)+f(x_0^-)\right)$ $\forall\ x=x_0$

donde: $f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\left(f(x)\right)$ y $f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\left(f(x)\right)$.

Integrales de Fourier

Ejemplo 6

Enunciado:

a) Encontrar la representación por medio de la integral de Fourier de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| < 1 \\ 0 & , \quad |x| > 1 \end{cases}$$

b) Estudiar la convergencia de la integral de Fourier encontrada.

Integrales de Fourier

Integrales de Fourier de cosenos y senos

Si *f(x)* es una función par o una función impar entonces se puede facilitar el cálculo de la integral de Fourier, tal como fue el caso de las series de Fourier.

- Si *f(x)* es una función ***con simetría par***, entonces:

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(u)\cos(\omega u)\,du \quad \text{y} \quad B(\omega) = 0 \Longrightarrow \boxed{f(x) = \int_0^{+\infty}\left[A(\omega)\cos(\omega x)\right]d\omega}$$

- Si *f(x)* es una función ***con simetría impar***, entonces:

$$A(\omega) = 0 \quad \text{y} \quad B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(u)\,\text{sen}(\omega u)\,du \Longrightarrow \boxed{f(x) = \int_0^{+\infty}\left[B(\omega)\,\text{sen}(\omega x)\right]d\omega}$$

Transformadas Integrales

Las **transformaciones** ayudan a simplificar la resolución de algunos problemas. Lo mismo sucede con las transformaciones llamadas integrales:

Una **transformación integral** es una transformación en la forma de una integral que produce a partir de funciones dadas, nuevas funciones que dependen de una variable diferente.

Sea $N(t, s)$ una función de las variables t y s. Si $f(t)$ es una función (real o compleja) entonces la transformada integral $\mathscr{I}$ de la función $f(t)$ respecto al núcleo $N(t, s)$ es

$$\mathscr{I}\{f(t)\} = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) N(t, s) dt$$

cuando la integral existe.

Diversos núcleos originan diferentes transformadas integrales. Abordaremos los casos con $N(t, s) = e^{-i2\pi ts}$ y $N(t, s) = e^{-ts}$ que corresponden a casos particulares vastamente conocidos, la transformada de Fourier y la transformada de Laplace respectivamente.

Estas transformaciones se las utiliza principalmente como herramientas para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE) y ecuaciones en derivadas parciales (PDE), dado que permiten convertir derivadas en operaciones algebraicas.

Transformada de Fourier

Transformadas de Fourier de cosenos

Se había visto previamente que para una **función par *f(x)***, la integral de Fourier es la integral coseno de Fourier dada por:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \left[A(\omega)\cos(\omega x) \right] d\omega \quad \text{, donde } A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(u)\cos(\omega u)\,du$$

Si definimos $A(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} F_C(\omega)$, y reemplazamos *u*=*x*, luego:

$$\boxed{F_C(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx}$$

➡ ***Transformada coseno de Fourier de f(x)***

$$\boxed{F_C^{-1}(\omega) = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_C(\omega)\cos(\omega x)\,d\omega}$$

➡ ***Transformada inversa coseno de Fourier de $F_C(\omega)$***

Transformada de Fourier

Transformadas de Fourier de senos

Similarmente al análisis anterior, para una **función impar *f(x)***, la integral de Fourier es la integral seno de Fourier dada por:

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\left[B(\omega)\operatorname{sen}(\omega x)\right]d\omega \quad \text{, donde} \quad B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(u)\operatorname{sen}(\omega u)\,du$$

Si definimos $B(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}F_S(\omega)$, y reemplazamos *u*=*x*, luego:

$$\boxed{F_S(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\operatorname{sen}(\omega x)\,dx}$$

➡ ***Transformada seno de Fourier de f(x)***

$$\boxed{F_S^{-1}(\omega)=f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} F_S(\omega)\operatorname{sen}(\omega x)\,d\omega}$$

➡ ***Transformada inversa seno de Fourier de $F_S(\omega)$***

Transformada de Fourier

Observación

En la **Transformada coseno de Fourier** y en la **Transformada seno de Fourier** de una función *f(x)*, se integra respecto de la variable *x* y se obtiene una función en la variable ω.

Por su parte, en la **Transformada inversa coseno de Fourier** y en la **Transformada inversa seno de Fourier** de una función *F(ω)*, se integra respecto de la variable ω y se obtiene una función en la variable *x*.

Ejemplo 7

Dada la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} k & , \ 0<x<a \\ 0 & , \ x>a \end{cases}$$

a) Determinar la transformada coseno de Fourier.
b) Determinar la transformada seno de Fourier.

Transformada de Fourier

Transformadas de Fourier

Las Transformadas de Fourier de coseno y seno son funciones reales.
Vamos a considerar ahora una transformada que es una función compleja, llamada **Transformada de Fourier**.

La Transformada de Fourier es obtenida a partir de la integral de Fourier compleja, dada a continuación:

Sea *f(x)* una función definida en $(-\infty,+\infty)$ seccionalmente continua en cada intervalo finito, con derivadas por la derecha e izquierda en todo punto, y tal que $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ converge, entonces la ***integral compleja de Fourier de f(x)*** se define como:

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{i\omega(x-u)}du\right]d\omega}$$

donde $\left(i=\sqrt{-1}\right)$.

Transformada de Fourier

Transformadas de Fourier

Reescribiendo la integral compleja de Fourier de *f(x)* de la siguiente manera:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\omega u} du \right] e^{i\omega x} d\omega$$

La expresión entre corchetes es la Transformada de Fourier de *f(x)*.
Si reemplazamos *u*=*x*, luego:

$$\boxed{F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx} \Rightarrow$$

Transformada de Fourier de f(x)

$$\boxed{F^{-1}(\omega) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega} \Rightarrow$$

Transformada inversa de Fourier de F(ω)

Transformada de Fourier

Condición de existencia

Si *f(x)* es absolutamente integrable sobre el eje *x* y seccionalmente continua en cada intervalo finito, entonces la Transformada de Fourier de *f(x)* existe.

Teorema ***Condiciones suficientes (de Dirichlet) para la existencia***

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *cumple las siguientes condiciones:*

- $f(t)$ *y* $f'(t)$ *son seccionalmente continuas dentro de cualquier intervalo finito*
- $f(t)$ *es absolutamente integrable, es decir* $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$

entonces, existe y es continua la transformada de Fourier de $f(t)$

Ejemplo 8

Determinar la Transformada de Fourier de las siguientes funciones:

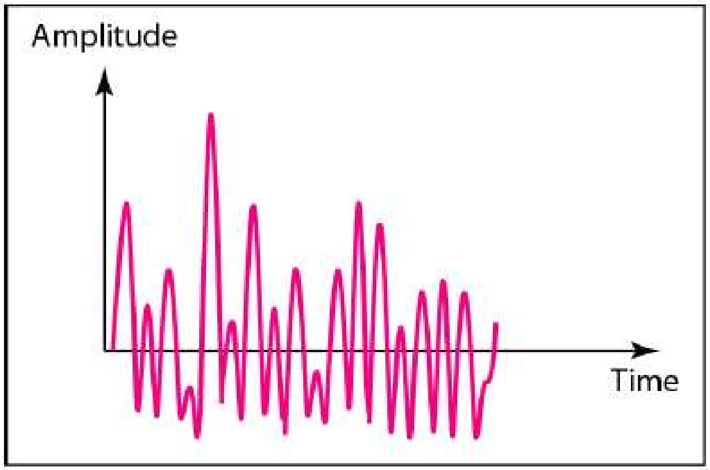
a) $f(x) = \begin{cases} 1 & , \ |x| < 1 \\ 0 & , \ |x| > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x < 0 \end{cases} \quad , \ a > 0$

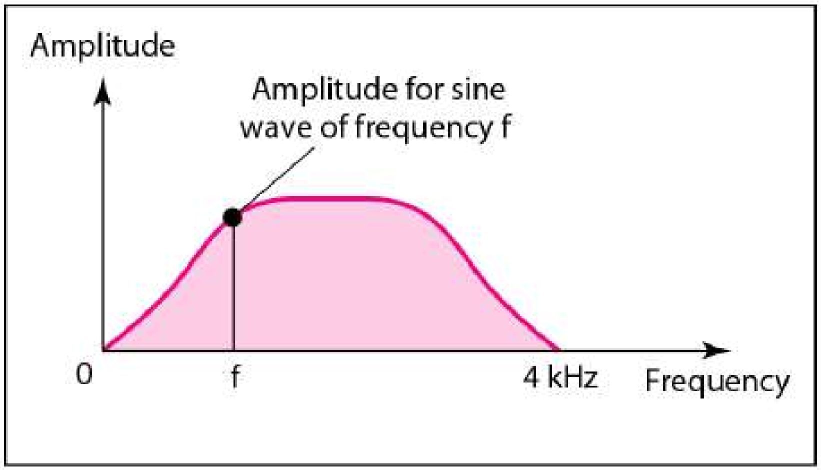
Transformada de Fourier

Espectro de la señal

Si la señal es no periódica, la descomposición se traduce a un espectro continuo.



a. Time domain



b. Frequency domain

Transformada de Fourier

Propiedades

1. $\mathcal{F}\{a \cdot f + b \cdot g\} = a\mathcal{F}\{f\} + b\mathcal{F}\{g\}$ Linealidad
2. $\mathcal{F}\{f(at)\}(\omega) = \frac{1}{|a|} \cdot \mathcal{F}\{f\}\left(\frac{\omega}{a}\right)$ Cambio de escala
3. $\mathcal{F}\{f(t-a)\}(\omega) = e^{-i\omega a} \cdot \mathcal{F}\{f\}(\omega)$ Traslación
4. $\mathcal{F}\{f\}(\omega - a) = \mathcal{F}\{e^{iat} f(t)\}(\omega)$ Traslación en la variable transformada
5. $\mathcal{F}\{f'\}(\omega) = i\omega \cdot \mathcal{F}\{f\}(\omega)$ Transformada de la derivada
6. $\mathcal{F}\{f\}'(\omega) = \mathcal{F}\{(-it) \cdot f(t)\}(\omega)$ Derivada de la transformada
7. $(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cdot g(x-y)\, dy$ Definición de la convolución
8. $\mathcal{F}\{f * g\} = \mathcal{F}\{f\} \cdot \mathcal{F}\{g\}$ Convolución
9. $\mathcal{F}\{f \cdot g\} = \mathcal{F}\{f\} * \mathcal{F}\{g\}$ Producto

Transformada de Fourier

Propiedades

➢ ***Propiedad de Linealidad:***

Si las funciones *f(x)* y *g(x)* son tales que existen sus transformadas de Fourier *F (ω)* y *G (ω)*, respectivamente, y sean a y b constantes, entonces:

la función $h(x) = a \cdot f(x) + b \cdot g(x)$ tiene como transformada de Fourier a:

$$H(\omega) = a \cdot F(\omega) + b \cdot G(\omega)$$

Transformada de Fourier

Propiedades

➢ ***Transformada de Derivadas:***

Sea la función *f(x)* continua sobre el eje *x* y $f(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$.
Sea además *f´(x)* absolutamente integrable sobre el eje *x*, entonces:

$$F\{f'(x)\} = i\omega F\{f(x)\}$$

Ejemplo 9

Determinar la Transformada de Fourier de la función $f(x) = xe^{-x^2}$

Transformada de Fourier

Propiedades:

➢ *Convolución de funciones:*

Definición *Sean $f(t)$, $g(t)$ funciones seccionalmente continuas definidas para $t \in \mathbb{R}$. Se define la operación* **producto de convolución** *o* **convolución** *de f y g, cuya notación es $f * g$, como*

$$f * g\,(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

También suele escribirse $(f * g)(t)$ o $f(t) * g(t)$.

Propiedades

Conmutatividad: $f * g = g * f$

Asociatividad: $(f * g) * h = f * (g * h)$

Distributividad con respecto a la suma: $(f + g) * h = f * h + g * h$

Transformada de Fourier

	$f(x)$	$\hat{f}(w) = \mathcal{F}(f)$
1	$\begin{cases} 1 & \text{si } -b < x < b \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{sen} bw}{w}$
2	$\begin{cases} 1 & \text{si } b < x < c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{e^{-ibw} - e^{-icw}}{iw\sqrt{2\pi}}$
3	$\frac{1}{x^2 + a^2} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a\|w\|}}{a}$
4	$\begin{cases} x & \text{si } 0 < x < b \\ 2x - a & \text{if } b < x < 2b \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$	$\frac{-1 + 2e^{ibw} - e^{-2ibw}}{\sqrt{2\pi}\, w^2}$
5	$\begin{cases} e^{-ax} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(a + iw)}$
6	$\begin{cases} e^{ax} & \text{si } b < x < c \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$	$\frac{e^{(a-iw)c} - e^{(a-iw)b}}{\sqrt{2\pi}(a - iw)}$
7	$\begin{cases} e^{iax} & \text{si } -b < x < b \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{sen} b(w - a)}{w - a}$
8	$\begin{cases} e^{iax} & \text{si } b < x < c \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$	$\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ib(a-w)} - e^{ic(a-w)}}{a - w}$
9	$e^{-ax^2} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-w^2/4a}$
10	$\frac{\operatorname{sen} ax}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ si $\|w\| < a$; 0 si $\|w\| > a$

Transformada de Fourier

Si $f(x)=e^{-a|x|}$ entonces $F(\omega)=\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$

Ejemplos:

Si $f(x)=e^{-8|x|}$ entonces $F(\omega)=\dfrac{16}{64+\omega^2}$

- Cambio de escala:

Si $g(x)=f(2x)=e^{-16|x|}$ entonces $G(\omega)=\dfrac{1}{2}F\left(\dfrac{\omega}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\dfrac{16}{64+\left(\dfrac{\omega}{2}\right)^2}=\dfrac{8}{64+\dfrac{\omega^2}{4}}$

- Traslación:

Si $h(x)=f(x-2)=e^{-8|x-2|}$ entonces $H(\omega)=e^{-i2\omega}F(\omega)=e^{-i2\omega}\dfrac{16}{64+\omega^2}$

- Traslación en la variable transformada:

Si $j(x)=e^{i2x}f(x)=e^{i2x}e^{-8|x|}$ entonces $J(\omega)=F(\omega-2)=\dfrac{16}{64+(\omega-2)^2}$