ANÁLISIS NUMÉRICO

Ejemplos de la Unidad N° 1: Señales continuas y su representación por medio de Series y Transformadas de Fourier

- **Ejemplo 1: Funciones Periódicas**

Dadas las siguientes funciones determinar si son funciones periódicas o no. En caso de que sí lo sean determinar el período fundamental.

a) $f(x) = 3\ \mathrm{sen}(4x) + 2\cos(\pi x)$

b) $g(x) = \mathrm{sen}(3x) - 4\cos(2x)$

- **Ejemplo 2: Serie de Fourier**

a) Obtener la serie de Fourier de la función periódica f(x) siguiente, de período T = 4:

$$f(x) = \begin{cases} 3, & 0 < x < 1 \\ -3, & 1 < x < 3 \\ 3, & 3 < x < 4 \end{cases} \quad \textbf{\textit{con}} \quad f(x) = f(x+4)$$

b) Indicar a qué valor converge la serie de Fourier en x=0, x=1, x=3 y x=4.

c) Escribir las primeras tres sumas parciales y graficarlas.

- **Ejemplo 3: Serie de Fourier**

Obtener la serie de Fourier de las siguientes funciones periódicas, utilizando propiedades de simetría. Escribir y graficar las primeras tres sumas parciales.

a) $f(x) = x, \quad -1 \le x \le 1, \qquad f(x+2) = f(x)$

b) $f(x) = \begin{cases} 3, & 0 < x < 1 \\ -3, & 1 < x < 3 \\ 3, & 3 < x < 4 \end{cases} \quad$ ***con*** $\ f(x) = f(x+4)$

- <u>**Ejemplo 4: Serie de Fourier**</u>

Obtener la serie de Fourier de la siguiente función no periódica,

$$f(x) = x^2, \quad 0 \le x \le 2$$

utilizando la expansión de medio rango mediante una función par. Escribir y graficar las primeras sumas parciales.

- <u>**Ejemplo 5: Serie Compleja de Fourier**</u>

a) Obtener la forma compleja de la serie de Fourier de la función periódica f(x) siguiente, de período T = 3:

$$f(x) = 2e^{-x}, \quad \mathrm{x} \in (0,3) \quad \textbf{\textit{con}} \quad f(x) = f(x+3)$$

b) Graficar el espectro en amplitud de f(x).

- **Ejemplo 1: Funciones Periódicas**

Dadas las siguientes funciones determinar si son funciones periódicas o no. En caso de que sí lo sean determinar el período fundamental.

a) $f(x) = 3\,\text{sen}(4x) + 2\cos(\pi x)$

Comparando el primer y segundo término de la función *f(x)* con la expresión general de las funciones trigonométricas $A_1\,\text{sen}(\omega_1 x + \phi_1)$ y $A_2\cos(\omega_2 x + \phi_2)$ respectivamente, es posible escribir:

$$\omega_1 = 4 = \frac{2\pi}{T_1} \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$
$$\omega_2 = \pi = \frac{2\pi}{T_2} \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

Luego, la suma de dos funciones periódicas de períodos T_1 y T_2 da como resultado una función periódica únicamente si el cociente de los períodos es un número racional:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \notin Q$$

Dado que en este caso no es un número racional, por lo tanto, *f(x)* no es una función periódica, como puede observarse en la figura siguiente:

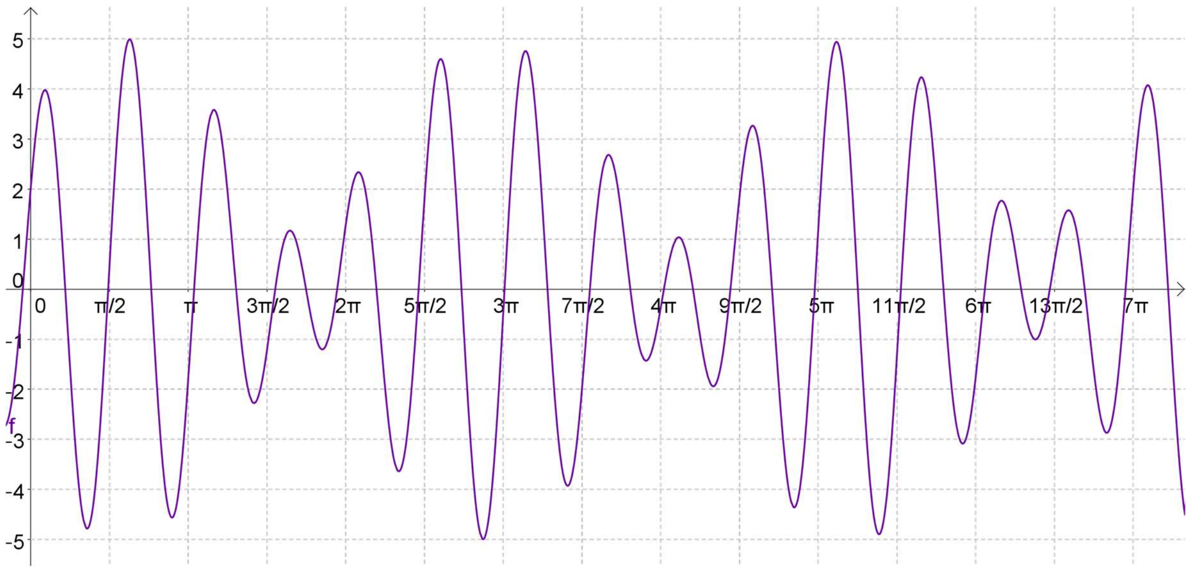


Gráfico de la función $f(x) = 3\ \mathrm{sen}(4x) + 2\cos(\pi x)$.

b) $g(x) = \mathrm{sen}(3x) - 4\cos(2x)$

Repitiendo el mismo procedimiento realizado en la parte a), se obtiene:

$$\omega_1 = 3 = \frac{2\pi}{T_1} \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{3}$$

$$\omega_2 = 2 = \frac{2\pi}{T_2} \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Luego, el cociente de ambos períodos resulta:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\pi} = \frac{2}{3} \in Q$$

Dado que en este caso sí es un número racional, por lo tanto, *g(x)* es una función periódica.

Calculemos ahora su período fundamental, el cual es el valor de *T* más pequeño tal que existan números enteros positivos *m* y *n* de manera que:

$$3(x+T)=3x+3T=3x+m2\pi$$
$$2(x+T)=2x+2T=2x+n2\pi$$

Luego:

$$3T=m2\pi \Rightarrow T=\frac{m2\pi}{3}$$
$$2T=n2\pi \Rightarrow T=\frac{n2\pi}{2}$$

Igualando las dos expresiones para *T*, resulta: $\frac{m2\pi}{3}=\frac{n2\pi}{2}\Rightarrow\frac{m}{3}=\frac{n}{2}$

Por lo tanto, los enteros positivos *m* y *n* más pequeños para los que se cumple la igualdad anterior son *m* = 3 y *n* = 2, obteniendo para esos valores: $T=2\pi$.

En conclusión, la función $g(x)=\operatorname{sen}(3x)-4\cos(2x)$ es una función periódica de período $T=2\pi$, como puede observarse en la figura siguiente:

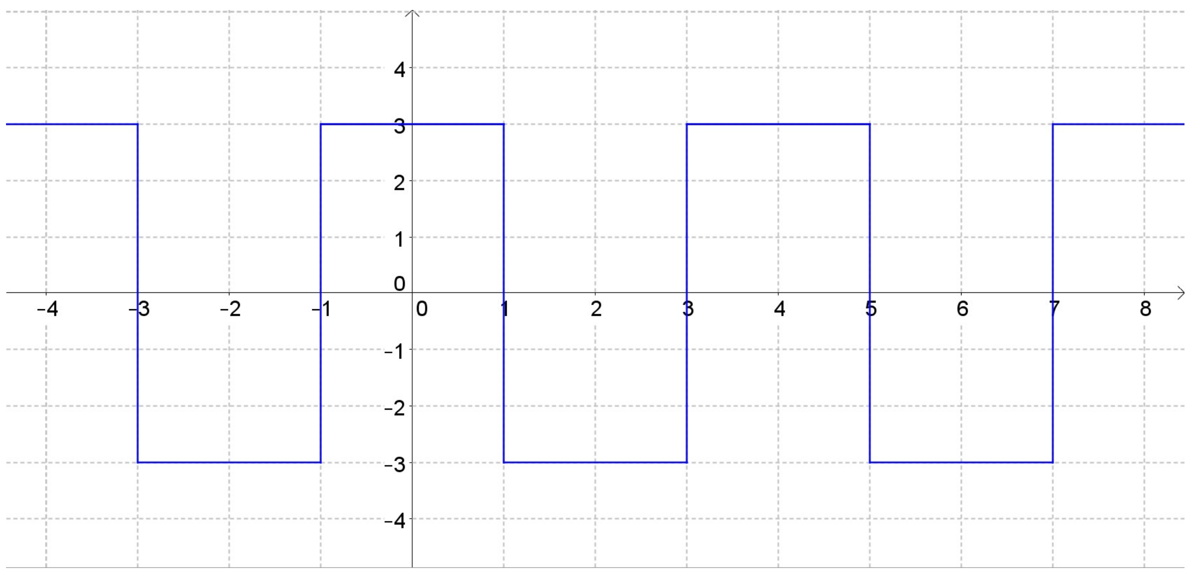
Gráfico de la función $g(x)=\operatorname{sen}(3x)-4\cos(2x)$ ***.***

➢ **Ejemplo 2: Serie de Fourier**

a) Obtener la serie de Fourier de la función periódica f(x) siguiente, de período T = 4:

$$f(x)=\begin{cases}3, & 0<x<1\\ -3, & 1<x<3\\ 3, & 3<x<4\end{cases} \quad \textbf{con} \quad f(x)=f(x+4)$$

La gráfica de la función *f(x)* es la siguiente:



Si se elige el intervalo de integración de 0 a 4 (también se podría haber elegido de -1 a 3 o de -2 a 2), el cálculo de los coeficientes de Fourier resulta:

- Cálculo de a_0:

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{4}\left[\int_0^1 3dx+\int_1^3(-3)\,dx+\int_3^4 3dx\right]=\frac{1}{4}\left[3(1-0)-3(3-1)+3(4-3)\right]=\frac{1}{4}[3-6+3]=0$$

- Cálculo de a_n:

$$a_n=\frac{2}{4}\left[\int_0^1 3\cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)dx+\int_1^3(-3)\cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)dx+\int_3^4 3\cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[3\cdot\frac{2}{\pi n}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)-\operatorname{sen}(0)\right)-3\cdot\frac{2}{\pi n}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi n}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)+3\cdot\frac{2}{\pi n}\left(\operatorname{sen}(2\pi n)-\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi n}{2}\right)\right)\right]=$$

$$=\frac{3}{\pi n}\left[\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi n}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi n}{2}\right)\right)\right]=\frac{6}{\pi n}\left[\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi n}{2}\right)\right)\right],\ n=1,2,3,\ldots$$

Calculando para los valores de n = 1,2,3,…, se tiene:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{12}{\pi n}, n = 1,5,9,... \\ \dfrac{-12}{\pi n}, n = 3,7,11,... \\ 0, \qquad n\ par \end{cases}$$

- Cálculo de b_n:

$$b_n = \frac{2}{4}\left[\int_0^1 3\ \text{sen}\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx + \int_1^3 (-3)\ \text{sen}\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx + \int_3^4 3\ \text{sen}\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[3\cdot\frac{2}{\pi n}\left(\cos(0) - \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right) - 3\cdot\frac{2}{\pi n}\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\pi n}{2}\right)\right) + 3\cdot\frac{2}{\pi n}\left(\cos\left(\frac{3\pi n}{2}\right) - \cos(2\pi n)\right)\right] =$$

$$= \frac{3}{\pi n}\left[\left(1 - \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi n}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi n}{2}\right) - 1\right)\right] = \frac{6}{\pi n}\left[\left(\cos\left(\frac{3\pi n}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)\right], n = 1,2,3,...$$

Calculando para los valores de n = 1,2,3,…, se tiene: $b_n = 0$, para todo n

Por lo tanto, la Serie de Fourier de $f(x)$ es:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{12}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{m+1}}{2m-1}\cos\left(\frac{(2m-1)2\pi x}{4}\right)\right)$$

b) Indicar a qué valor converge la serie de Fourier en x=0, x=1, x=3 y x=4.

$$f(0) = \frac{1}{2}\left(f(0^+) + f(0^-)\right) = \frac{1}{2}(3+3) = 3$$

$$f(1) = \frac{1}{2}\left(f(1^+) + f(1^-)\right) = \frac{1}{2}(-3+3) = 0$$

$$f(3) = \frac{1}{2}\left(f(3^+) + f(3^-)\right) = \frac{1}{2}(3+(-3)) = 0$$

$$f(4) = \frac{1}{2}\left(f(4^+) + f(4^-)\right) = \frac{1}{2}(3+3) = 3$$

c) Escribir las primeras tres sumas parciales y graficarlas.

A partir de la serie de Fourier de *f(x)* hallada:

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{12}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{m+1}}{2m-1}\cos\left(\frac{(2m-1)2\pi x}{4}\right)\right)$$

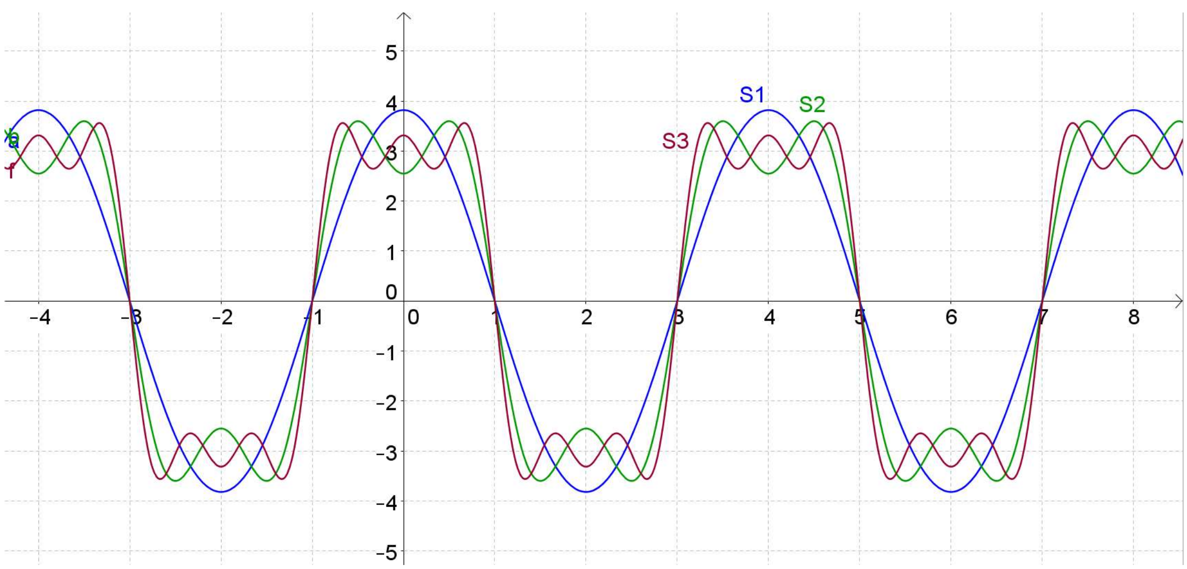
Las primeras tres sumas parciales son:

$$S_1=\frac{12}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$S_2=\frac{12}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-\frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$$

$$S_3=\frac{12}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-\frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)+\frac{12}{5\pi}\cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right)$$

En el siguiente gráfico se observan las primeras tres sumas parciales: S1 (color azul), S2 (color verde) y S3 (color rojo).



A medida que aumente el número de sumas parciales, la gráfica se va a acercar a la onda cuadrada original.

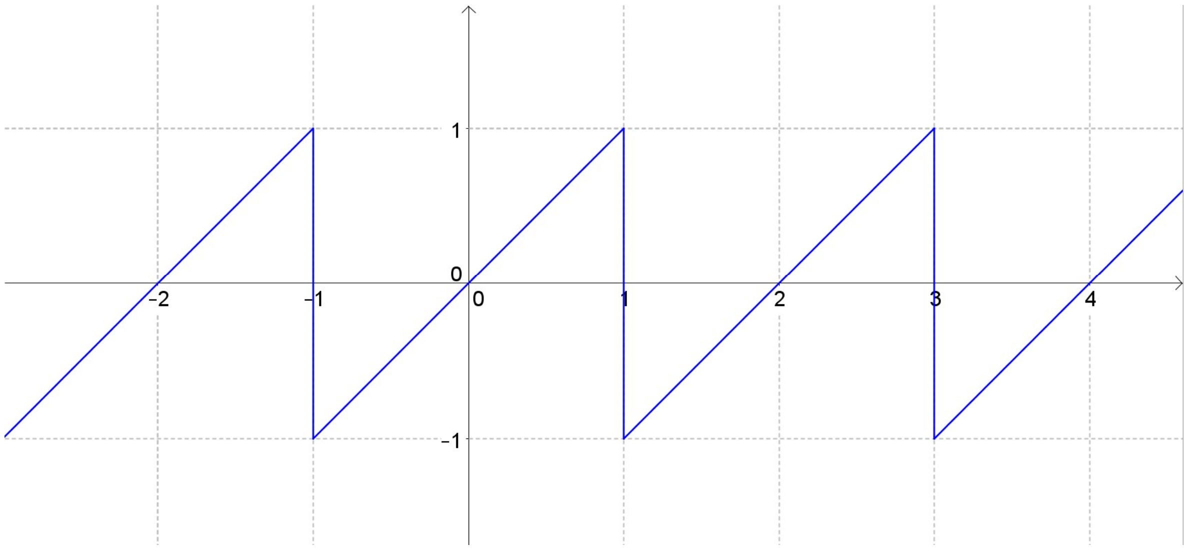
Puede observarse también que en los puntos de discontinuidades, donde *f(x)* salta de -3 a 3 y viceversa, las sumas parciales de la Serie de Fourier (S1, S2 y S3), toman el valor promedio de los límites laterales (por izquierda y derecha) de *f(x), es decir: [(-3)+3]/2=0.*

- **Ejemplo 3: Serie de Fourier**

Obtener la serie de Fourier de las siguientes funciones periódicas, utilizando propiedades de simetría. Escribir y graficar las primeras tres sumas parciales.

c) $f(x) = x, \quad -1 \le x \le 1, \quad f(x+2) = f(x)$

La gráfica de la función *f(x)* es la siguiente:



Dado que *f(x)* tiene simetría impar ($f(-x) = -f(x)$), entonces: $a_0 = 0, a_n = 0$ y

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\ \mathrm{sen}(n\omega x)\,dx = \frac{4}{2}\int_0^{2/2} x\ \mathrm{sen}\left(\frac{n2\pi x}{2}\right)dx = 2\int_0^1 x\ \mathrm{sen}(n\pi x)\,dx =$$

$$= 2\left[\frac{-x}{n\pi}\cos(n\pi x)\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{1}{n\pi}\ \cos(n\pi x)\,dx = 2\left[\frac{-1}{n\pi}\cos(n\pi)\right] + 2\left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \left(\mathrm{sen}(n\pi) - \mathrm{sen}(0)\right) =$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\cos(n\pi) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

Por lo tanto, la Serie de Fourier de *f(x)* presenta únicamente senos para todos los valores de *n*. Es decir:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\ \mathrm{sen}(n\pi x)\right)$$

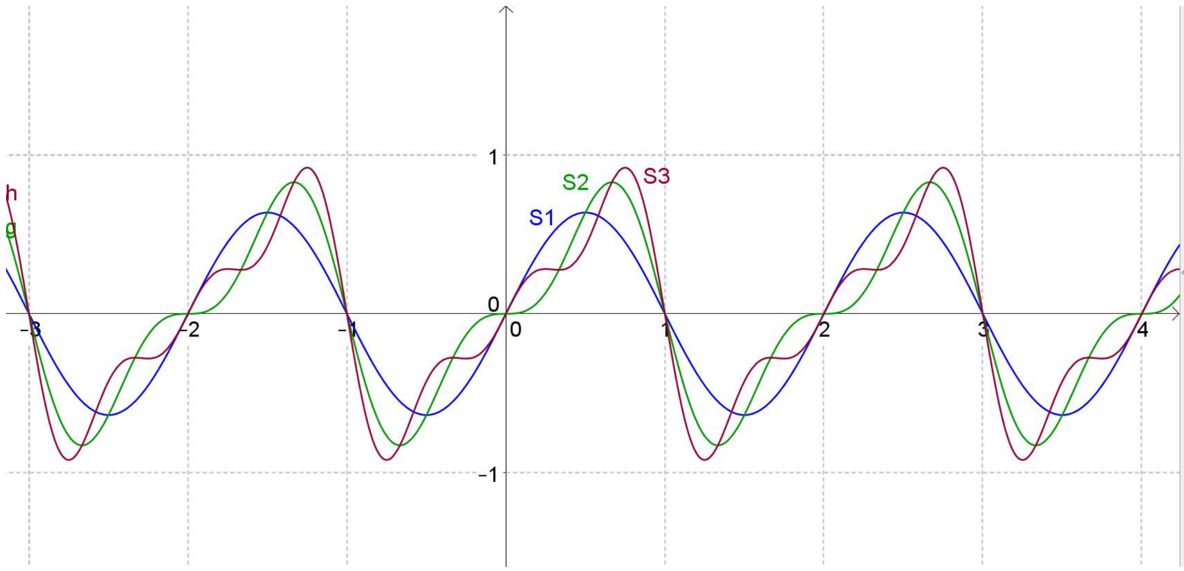
Las primeras tres sumas parciales son:

$$S_1 = \frac{2}{\pi}\mathrm{sen}(\pi x)$$

$$S_2 = \frac{2}{\pi}\operatorname{sen}(\pi x) - \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}(2\pi x)$$

$$S_3 = \frac{2}{\pi}\operatorname{sen}(\pi x) - \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}(2\pi x) + \frac{2}{3\pi}\operatorname{sen}(3\pi x)$$

En el siguiente gráfico se observan las primeras tres sumas parciales: S1 (color azul), S2 (color verde) y S3 (color rojo).



Observación:

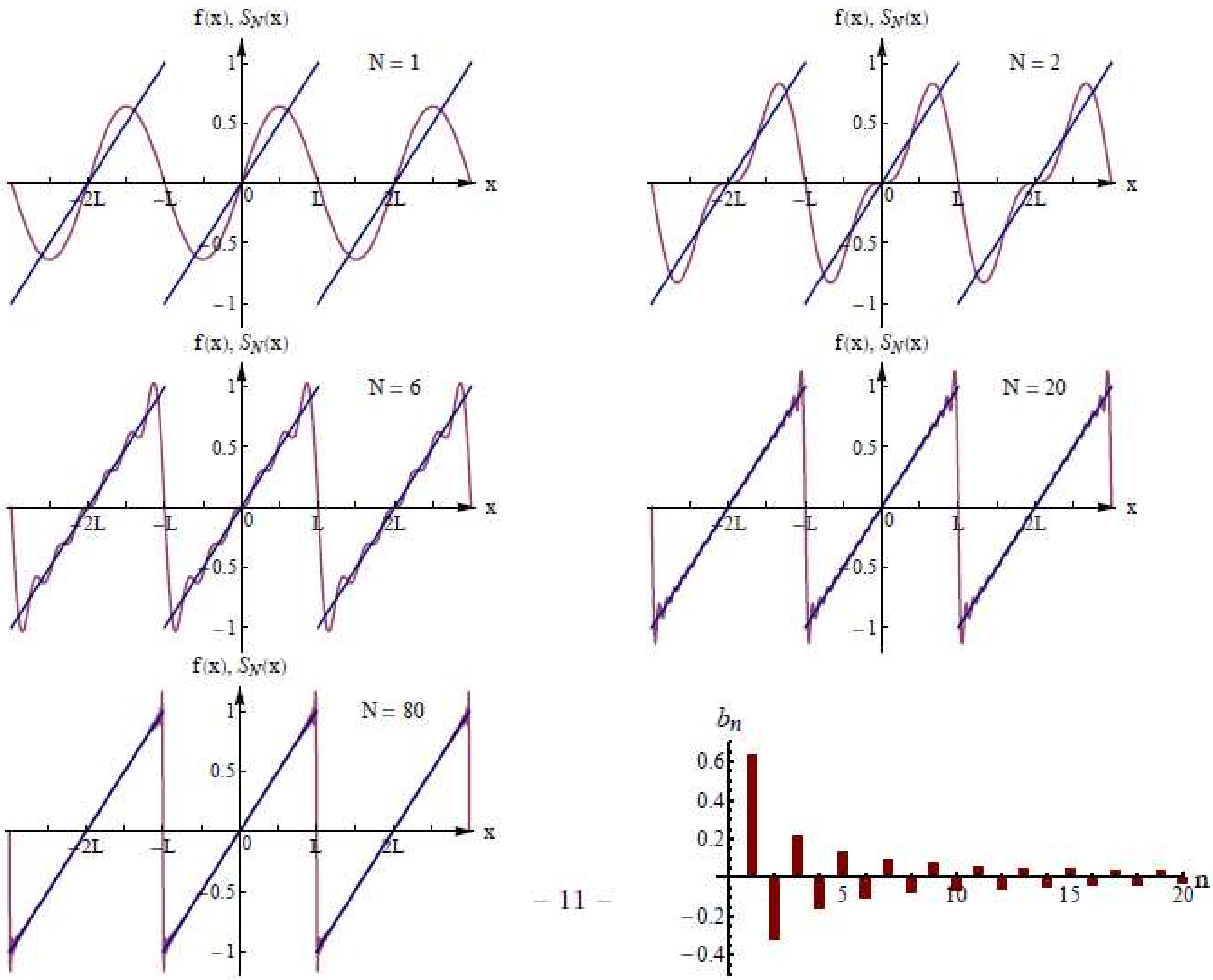
En general, puede demostrarse que si $f(x) = x/L, \quad -L \le x \le L, \quad f(x+2L) = f(x)$

dado que *f(x)* tiene simetría impar, entonces: $a_0 = 0, a_n = 0$ y $b_n = (-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}$

Por lo tanto, la Serie de Fourier de *f(x)* presenta únicamente senos para todos los valores de *n*. Es decir:

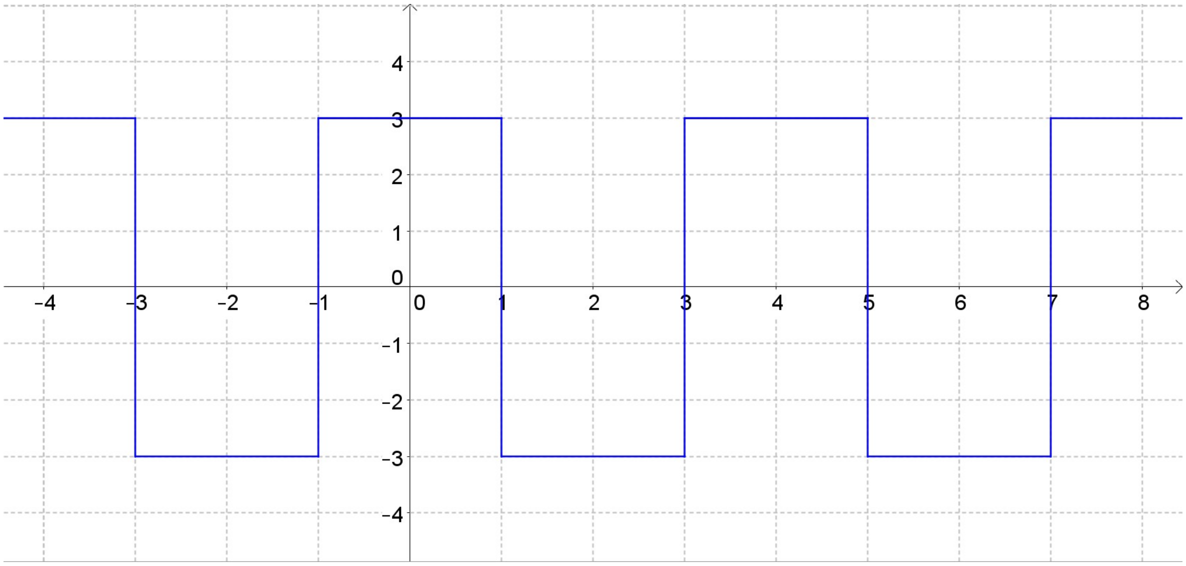
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Debajo se muestran las sumas parciales $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ y los coeficientes b_n.



d) $$f(x)=\begin{cases}3, & 0<x<1\\ -3, & 1<x<3\\ 3, & 3<x<4\end{cases} \quad \textbf{\textit{con}} \quad f(x)=f(x+4)$$

Esta función es la misma que la del Ejemplo 2. La gráfica de esta función es:



Podemos ver que *f(x)* tiene simetría de media onda ($f(x+\frac{T}{2})=-f(x)$) y además es una función par ($f(-x)=f(x)$), por lo tanto *f(x)* tiene simetría de cuarto de onda par. Entonces: $b_n = 0$ y

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \dfrac{8}{T}\displaystyle\int_0^{T/4} f(x)\cos(n\omega x)dx, & n \text{ impar} \end{cases} = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \dfrac{8}{4}\displaystyle\int_0^{1} 3\cos\left(\dfrac{\pi n x}{2}\right)dx, & n \text{ impar} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ 6\cdot\dfrac{2}{\pi n}\left(\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)-\operatorname{sen}(0)\right), & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n = \begin{cases} \dfrac{12}{\pi n}, n = 1,5,9,\ldots \\ \dfrac{-12}{\pi n}, n = 3,7,11,\ldots \\ 0, \quad n \; par \end{cases}$$

y la Serie de Fourier de *f(x)* presenta únicamente cosenos para valores de *n* impares. Es decir:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{12}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{m+1}}{2m-1}\cos\left(\frac{(2m-1)2\pi x}{4}\right)\right)$$

misma Serie de Fourier que la obtenida en el Ejemplo 2. Las primeras tres sumas parciales de esta serie fueron graficadas anteriormente.

Puede concluirse que al reconocer propiedades de simetría de una función periódica *f(x)*, los cálculos de los coeficientes de Fourier se simplifican.

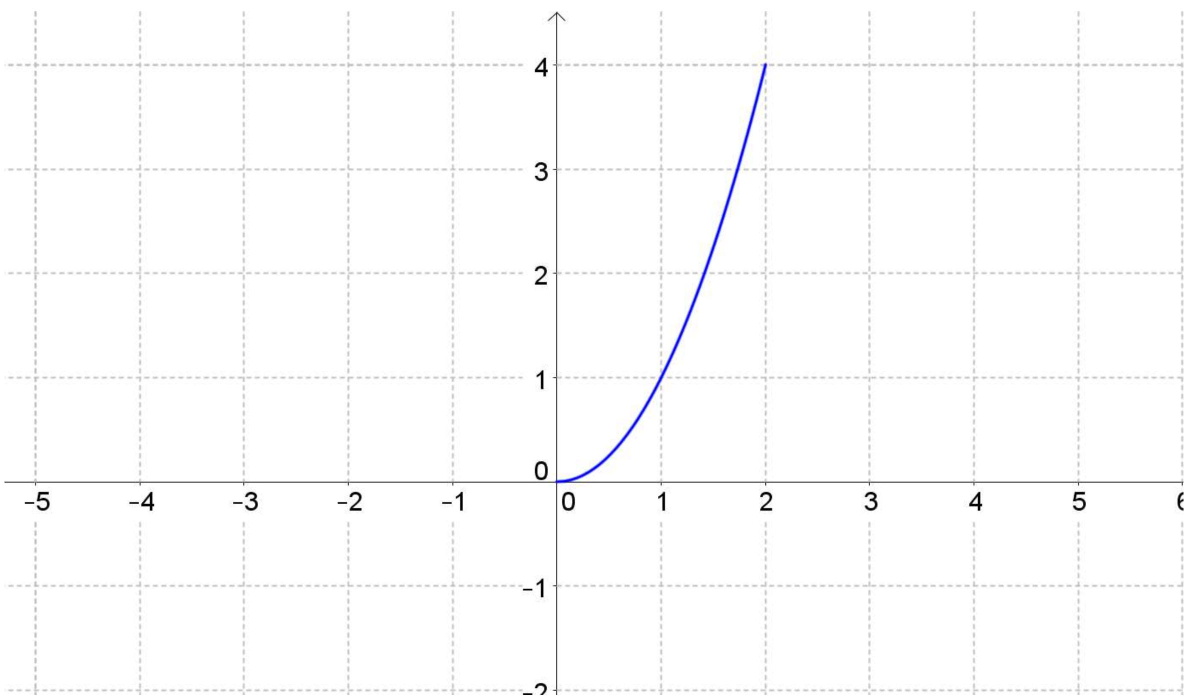
- **Ejemplo 4: Serie de Fourier**

Obtener la serie de Fourier de la siguiente función no periódica,

$$f(x) = x^2, \quad 0 \le x \le 2$$

utilizando la expansión de medio rango mediante una función par. Escribir y graficar las primeras sumas parciales.

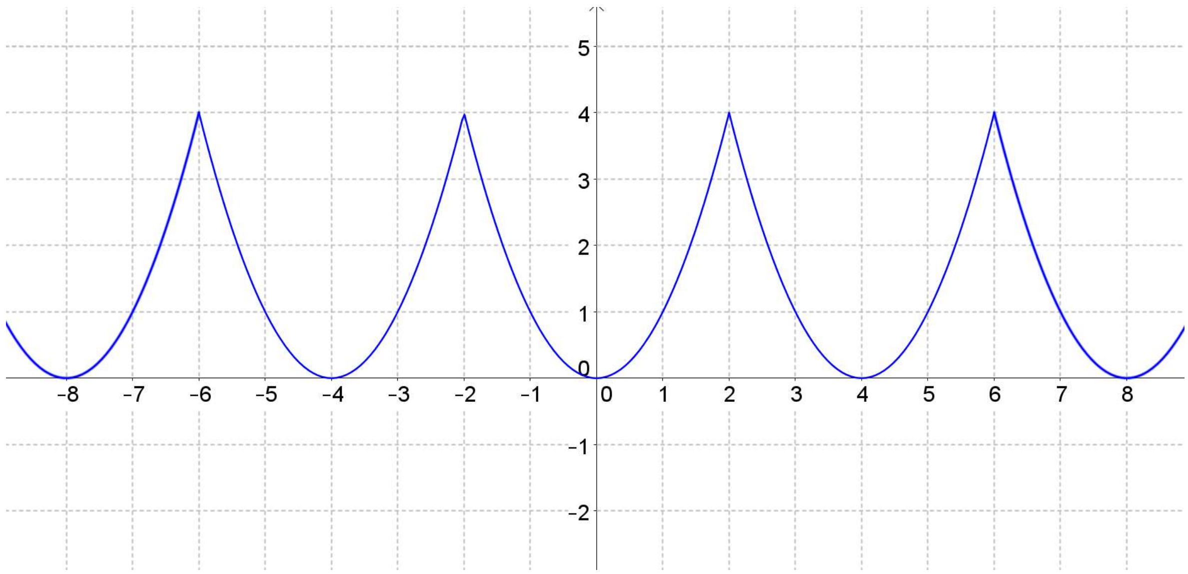
La función *f(x)* tiene largo o duración *L* = 2 y su gráfica es la siguiente:



Claramente no es una función periódica. El enunciado nos indica transformarla en una función periódica utilizando la expansión par, por lo que la función a analizar resulta:

$$g(x) = x^2, \quad -2 \le x \le 2, \qquad g(x+4) = g(x)$$

de período 2*L* = 4, y su gráfica es:



A partir de las condiciones de simetría de una función par se tiene: $b_n = 0$ y

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} g(x)dx \\ a_n = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} g(x)\cos(n\omega x)dx, \;\; n = 1,2,... \end{cases}$$

Entonces: $a_0 = \dfrac{4}{4}\displaystyle\int_0^{4/2} x^2 dx = \int_0^2 x^2 dx = \dfrac{1}{3}\left(2^3 - 0^3\right) = \dfrac{8}{3}$

y $$a_n = \frac{4}{4}\int_0^{4/2} x^2 \cos(\frac{n2\pi x}{4})dx = \int_0^2 x^2 \cos(\frac{n\pi x}{2})dx =$$

$$= \frac{2x^2}{n\pi}\ \text{sen}(\frac{n\pi x}{2})\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{4x}{n\pi}\ \text{sen}(\frac{n\pi x}{2})dx =$$

$$= \frac{8}{n\pi}\text{sen}(n\pi) - 0\cdot\text{sen}(0) - \frac{4}{n\pi}\left[\frac{-2x}{n\pi}\ \cos(\frac{n\pi x}{2})\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{(-2)}{n\pi}\ \cos(\frac{n\pi x}{2})dx\right] =$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\left[\frac{-4}{n\pi}\cos(n\pi) - 0\cdot\cos(0) + \frac{4}{(n\pi)^2}\left(\text{sen}(n\pi) - \text{sen}(0)\right)\right] =$$

$$= \frac{16}{(n\pi)^2}\cos(n\pi) = \frac{16}{n^2\pi^2}\left(-1\right)^n$$

Por lo tanto, la Serie de Fourier de *g(x)* es: $g(x) = \dfrac{4}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{16}{n^2\pi^2}\left(-1\right)^n\ \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right)$

Las primeras sumas parciales son:

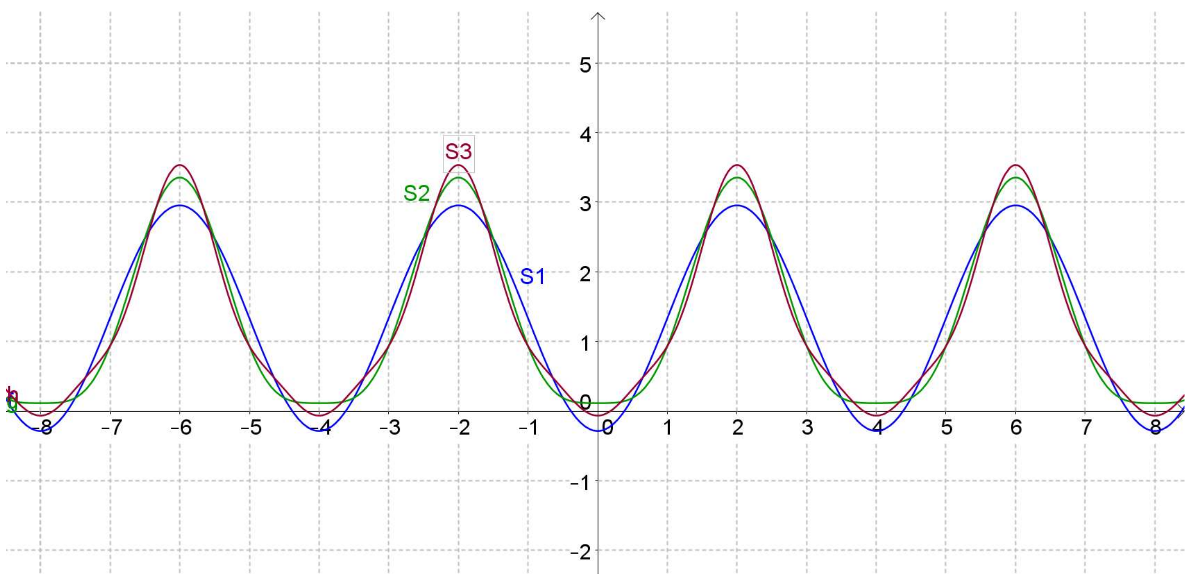
$$S_0 = \frac{4}{3}$$

$$S_1 = \frac{4}{3} - \frac{16}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$S_2 = \frac{4}{3} - \frac{16}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{4}{\pi^2}\cos(\pi x)$$

$$S_3 = \frac{4}{3} - \frac{16}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{4}{\pi^2}\cos(\pi x) - \frac{16}{9\pi^2}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$$

En el siguiente gráfico se observan las sumas parciales: S1 (color azul), S2 (color verde) y S3 (color rojo).

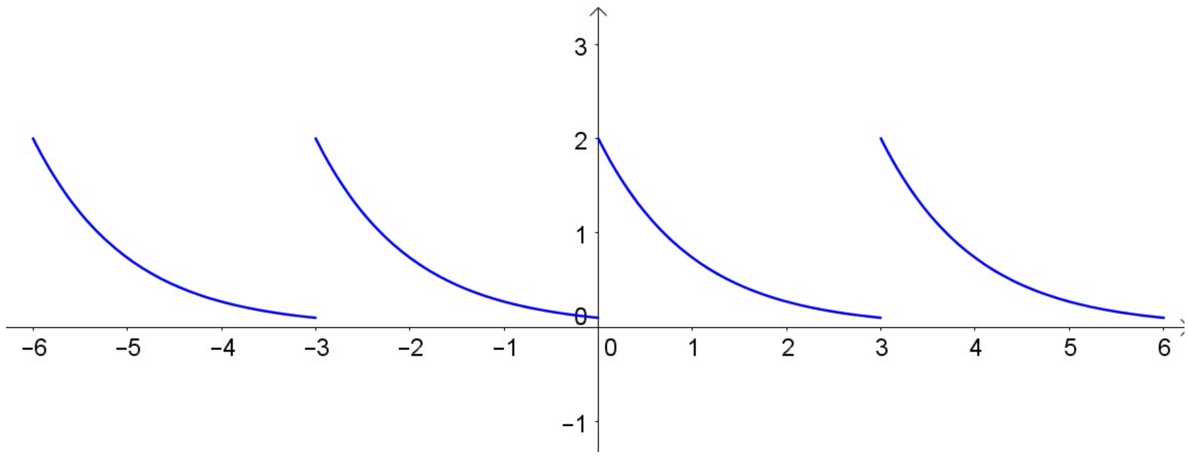


- **<u>Ejemplo 5: Serie Compleja de Fourier</u>**

a) Obtener la forma compleja de la serie de Fourier de la función periódica f(x) siguiente, de período T = 3:

$$f(x) = 2e^{-x}, \quad \mathrm{x} \in (0,3) \quad \textbf{\textit{con}} \quad f(x) = f(x+3)$$

La gráfica de la función *f(x)* es la siguiente:



Para el cálculo de los coeficientes complejos de Fourier utilizo el intervalo de integración entre -1.5 y 1.5:

$$c_n = \frac{1}{3}\int_{-3/2}^{3/2} 2e^{-x} e^{\frac{-in2\pi x}{3}}\, dx = \frac{2}{3}\int_{-3/2}^{3/2} e^{-\left(\frac{in2\pi}{3}+1\right)x}\, dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{(-1)}{\frac{in2\pi}{3}+1} e^{-\left(\frac{in2\pi}{3}+1\right)x}\Bigg|_{-3/2}^{3/2} =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{(-1)}{\frac{in2\pi}{3}+1} e^{-x} e^{-\left(\frac{in2\pi x}{3}\right)}\Bigg|_{-3/2}^{3/2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{(-1)}{\frac{in2\pi}{3}+1}\left[e^{-3/2}e^{-in\pi} - e^{3/2}e^{in\pi}\right]$$

Utilizando las fórmulas de Euler: $e^{ix} = \cos(x) + i\ \mathrm{sen}(x)$ y $e^{-ix} = \cos(x) - i\ \mathrm{sen}(x)$

$$e^{in\pi} = \cos(n\pi) + i\ \mathrm{sen}(n\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$$
$$e^{-in\pi} = \cos(n\pi) - i\ \mathrm{sen}(n\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

$$c_n = \frac{2}{3}\cdot\frac{(-1)}{1+\frac{in2\pi}{3}}\left[e^{-3/2}(-1)^n - e^{3/2}(-1)^n\right] = \frac{2}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{1+\frac{in2\pi}{3}}\left[e^{3/2} - e^{-3/2}\right] = \frac{2}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{1+\frac{in2\pi}{3}}\cdot 2\ \mathrm{senh}\left(\frac{3}{2}\right) =$$

$$c_n = \frac{4}{3}\mathrm{senh}\left(\frac{3}{2}\right)\cdot(-1)^n \frac{1 - i\frac{n2\pi}{3}}{1+\frac{4n^2\pi^2}{9}}$$

Finalmente, la forma compleja de la serie de Fourier de f(x) es:

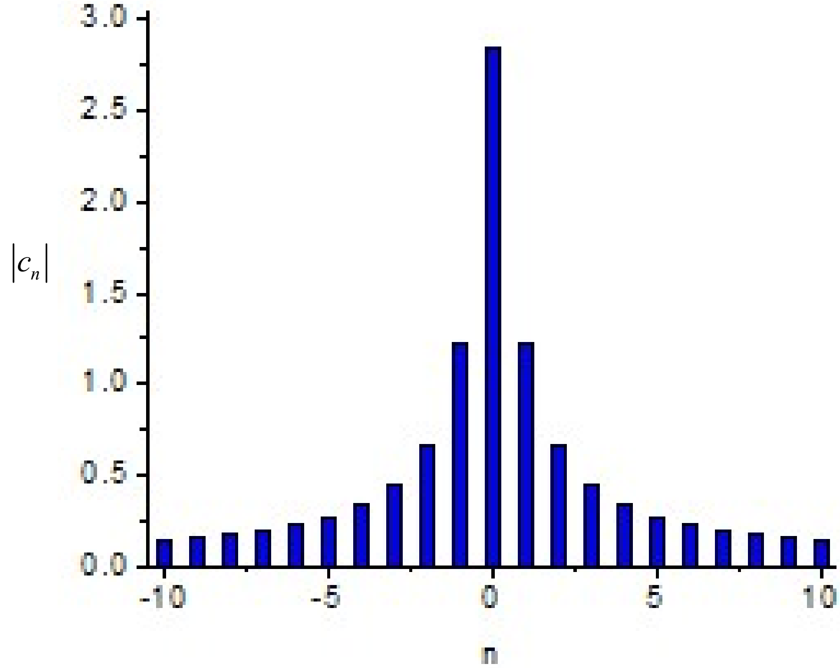
$$f(x)=\frac{4}{3}\operatorname{senh}\left(\frac{3}{2}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{1-i\frac{n2\pi}{3}}{1+\frac{4n^2\pi^2}{9}}\,e^{\frac{in2\pi x}{3}}$$

b) Graficar el espectro en amplitud de f(x).

Calculando los valores de $|c_n|$ para valores de n entre -10 y 10 se obtiene:

n		$\lvert c_n\rvert$
0		***(4/3)senh(3/2)= 2.84***
1	***-1***	***0.43*** c_0 ***=1.22***
2	***-2***	***0.232*** c_0 ***=0.66***
3	***-3***	***0.157*** c_0 ***=0.45***
4	***-4***	***0.118*** c_0 ***=0.34***
5	***-5***	***0.095*** c_0 ***=0.27***
6	***-6***	***0.079*** c_0 ***=0.22***
7	***-7***	***0.068*** c_0 ***=0.19***
8	***-8***	***0.059*** c_0 ***=0.17***
9	***-9***	***0.053*** c_0 ***=0.15***
10	***-10***	***0.047*** c_0 ***=0.13***

El gráfico de estos valores se presenta a continuación:



Se puede observar que el armónico fundamental (n = 1) tiene una importancia casi el doble que el siguiente (n = 2), y a partir de ahí la caída es progresiva. Sin embargo, la mayor parte de la energía de esta señal está en el término continuo (n = 0).