ANÁLISIS NUMÉRICO

Ingeniería en Sistemas de Información

3er año - Anual

Docentes: Prof. Diego Amiconi
Prof. Marcelo Cappelletti
Ay. Demian Bogado

INGENIERÍA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN
U.T.N. F.R.L.P.

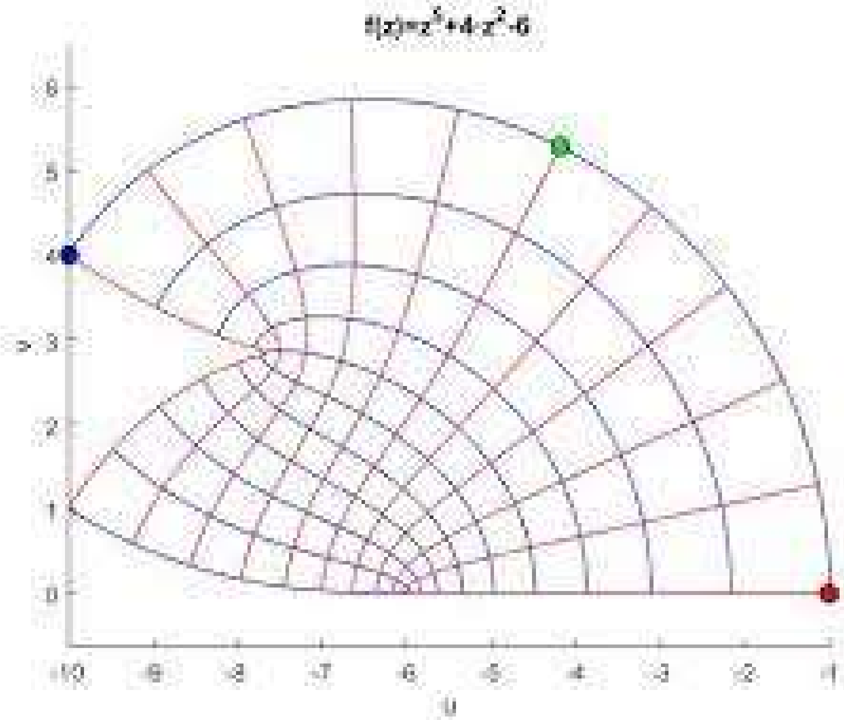
ANÁLISIS NUMÉRICO

Unidades Temáticas:

- **UNIDAD Nº 1:** "Señales continuas y su representación por medio de Series y Transformadas de Fourier"
- **UNIDAD Nº 2: "Fundamentos de Análisis de Variable Compleja"**
- **UNIDAD Nº 3:** "Transformada de Laplace. Aplicación a la Resolución de Ecuaciones Diferenciales"
- **UNIDAD Nº 4:** "Transformada en Z"

ANÁLISIS NUMÉRICO

- UNIDAD Nº 2: “Fundamentos de Análisis de Variable Compleja”



- UNIDAD Nº 2: “Fundamentos de Análisis de Variable Compleja”

CONTENIDOS:

a) **Repaso de números complejos.**
b) **Funciones de variable compleja. Límite y continuidad.**
c) **Diferenciabilidad. Funciones analíticas.**
d) **Transformaciones. Transformación conforme.**
e) **Integración en el campo complejo.**
f) **Series de potencias en el plano complejo.**
g) **Serie de Taylor. Serie de Laurent.**
h) **Singularidades. Residuos. Teorema de los residuos.**
i) **Resolución de integrales en el campo complejo mediante residuos.**

1. REPASO DE NÚMEROS COMPLEJOS

$$i = \sqrt{-1}$$

INGENIERÍA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN
U.T.N. F.R.L.P.

Sistema de números complejos

Los números complejos constituyen una extensión de los números reales, que permite obtener todas las raíces de cualquier polinomio. El conjunto de números complejos, denotado por la letra $\mathbb{C}$, forma así lo que se denomina un conjunto algebraicamente cerrado. Geométricamente, un número complejo puede representarse mediante un punto en un plano. El concepto de número compejo extiende pues la recta real a un espacio bidimensional, denominado *plano complejo*.

El sistema $(\mathbb{C}, +, .)$ de los números complejos es un conjunto numérico con dos operaciones básicas, suma $(+)$ y producto $(.)$. Dicho sistema está sujeto a las siguientes condiciones:

(C1) Las operaciones básicas de suma y producto entre complejos gozan de las propiedades usuales de la aritmética: son asociativas, conmutativas, el producto distribuye con respecto a la suma, poseen elementos neutros, cada complejo admite un opuesto aditivo y cada complejo no nulo posee un inverso multiplicativo.

(C2) Todo número real es un número complejo. La suma y el producto entre complejos extienden a las respectivas operaciones entre números reales (es decir, si dos números reales se suman o multiplican como complejos el resultado es un número real, el mismo que se obtiene al efectuar la operación en los reales).

Forma binómica de un complejo

(C3) Existe un número complejo, llamado **unidad imaginaria y denotado i**, que verifica

$$i^2 = -1$$

(C4) Todo número complejo z se escribe de modo único en **forma binómica**:

$$z = x + iy \quad \text{donde} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Anotamos $x = \text{Re}(z)$, $y = \text{Im}(z)$ y los denominamos respectivamente la **parte real y la parte imaginaria de z**. El complejo $\overline{z} = x - iy$ se denomina el **conjugado de z**.

- La ecuación $z^2 + 1 = 0$ de grado 2, si bien carece de soluciones reales, admite dos soluciones complejas i y $-i$. Este es un caso particular del siguiente resultado general.

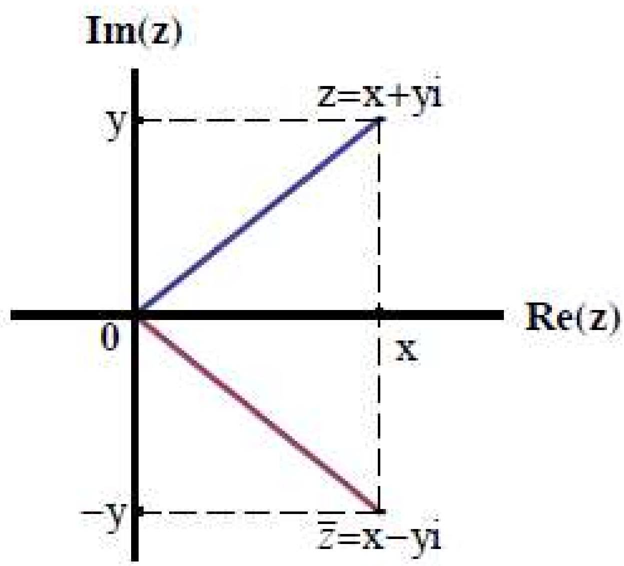
  Teorema Fundamental del Álgebra *Todo polinomio no constante a coeficientes complejos admite al menos una raíz compleja.*
  Se deduce que todo polinomio de grado $n \geq 1$ tiene exactamente n raíces complejas (pueden estar repetidas).

Forma cartesiana de un complejo

Otra posible representación del número complejo $z = x + iy$ es en **forma cartesiana**:

$$z = (x, y)$$

Este par corresponde a un punto o vector en el plano cartesiano, en este contexto se denomina **plano complejo**. Los ejes coordenados x e y se llaman respectivamente *eje real* y *eje imaginario*.



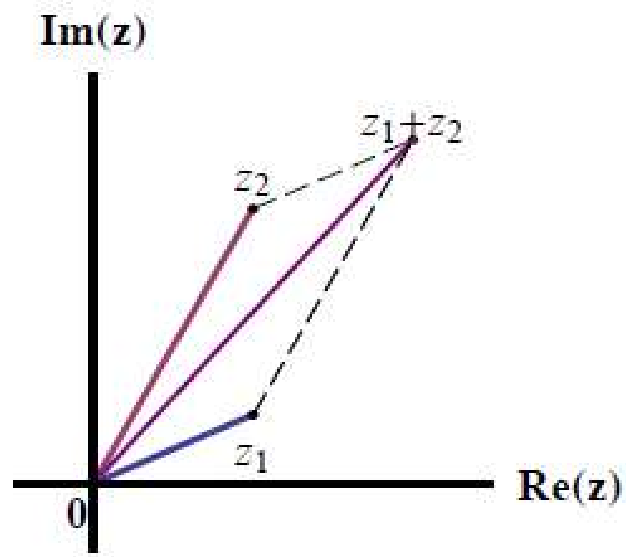
Suma de números complejos

Dados dos números complejos $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, su suma se define como

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

Por ejemplo, $(1 + 2i) + (3 - 4i) = 4 - 2i$.

Geométricamente, $z_1 + z_2$ corresponde al vector suma de los vectores que representan a z_1 y z_2.



La resta $z_1 - z_2$ es la suma de z_1 y el opuesto $-z_2 = -x_2 - y_2 i$ de z_2:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

Por ejemplo, $(1 + 2i) - (3 - 4i) = -2 + 6i$, $(1 + 2i) - (1 + 2i) = 0$.

Producto de números complejos

A partir de la propiedad básica $i^2 = -1$, el producto de dos números complejos $z_1 z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i)$ se realiza aplicando la propiedad distributiva (respecto de la suma) y asociativa (respecto del producto):

$$
\begin{aligned}
(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) &= x_1(x_2 + y_2 i) + y_1 i(x_2 + y_2 i) \\
&= x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 x_2 i - y_1 y_2 \\
&= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2) i
\end{aligned}
$$

Por ejemplo,

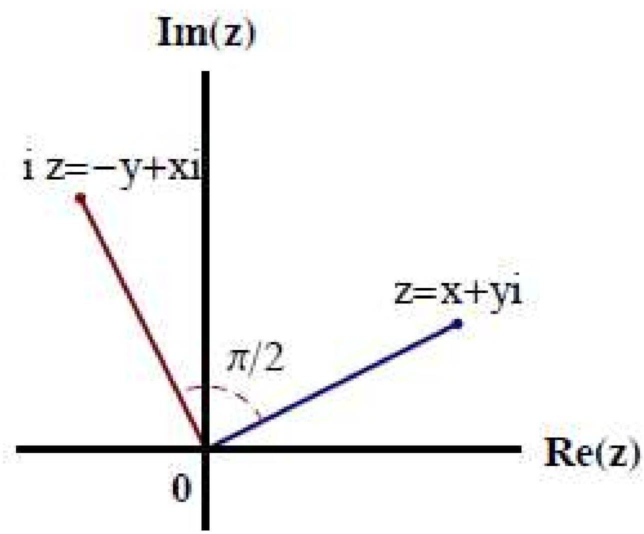
$$
\begin{aligned}
(1 + 2i)(3 - 4i) &= 3 - 4i + 2i(3 - 4i) = 3 - 4i + 6i + 8 \\
&= 11 + 2i
\end{aligned}
$$

Producto de números complejos

En particular, el producto de un número complejo z por un número real α,

$$\alpha(x+yi) = \alpha x + \alpha y i$$

corresponde, geométricamente, a la multiplicación del vector que representa a z por el escalar real α. Por ejemplo, $3(1+i) = 3+3i$.



Por otro lado, el producto de un número complejo z por la unidad imaginaria i,

$$i(x+yi) = -y + xi$$

corresponde, geométricamente, a **rotar** el vector que representa a z un ángulo de 90^o en sentido antihorario. Por ejemplo, $i1 = i$, $ii = -1$, $i(1+i) = -1+i$.

Potencias de *i*

Potencias de i: Las potencias pares son **reales:** $i^2 = -1$, $i^4 = (i^2)^2 = 1$ y en general,

$$i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n$$

Las potencias impares son en cambio **imaginarias:** $i^1 = i$, $i^3 = (i^2)i = -i$ y en general,

$$i^{2n+1} = i^{2n}i = (-1)^n i$$

Módulo de un número complejo

El valor absoluto (o módulo) de un número complejo z se define como

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

y es la longitud del vector que lo representa en el plano complejo. El módulo $|z|$ es siempre un número real no negativo. Por ejemplo: $|3+4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$, $|i| = 1$, $|-2| = 2$.

Es posible expresar $|z|$ mediante z y su conjugado $\bar{z}$ como

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

Inverso de un número complejo

El inverso (o recíproco) z^{-1} de un número complejo $z \neq 0$ es el número complejo que satisface

$$zz^{-1} = 1$$

Para obtenerlo, vimos en el punto anterior que $z\bar{z} = |z|^2 \neq 0$ si $z \neq 0$. Por lo tanto,

$$z(\bar{z}/|z|^2) = |z|^2/|z|^2 = 1$$

de donde

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}, \quad z \neq 0$$

Notamos aquí que el cociente z/α de un número complejo $z = x + yi$ por un número real $\alpha \neq 0$ se define como $(1/\alpha)z$, es decir, $z/\alpha = x/\alpha + (y/\alpha)i$. Por ejemplo, $(2+4i)/2 = 1+2i$.

Cociente de números complejos

Dados ahora dos números complejos z_1 y z_2, con $z_2 \neq 0$, definimos el cociente como

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= z_1 z_2^{-1} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} \\ &= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

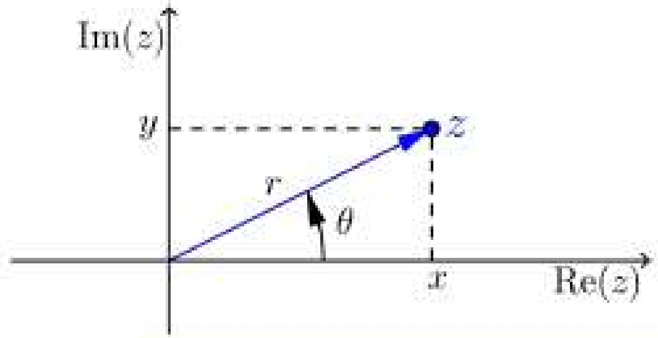
En la práctica, se obtiene este resultado multiplicando numerador y denominador por $\bar{z}_2$.
Por ejemplo:

$$\frac{1+i}{3+4i} = \frac{(1+i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{7-i}{25}$$

Forma polar de un complejo

Alternativamente si en lugar de las coordenadas cartesianas se utilizan coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$



el número complejo $z = x + iy$ queda expresado en su **forma polar o trigonométrica**:

$$z = r(\cos\theta + i\ \mathrm{sen}\,\theta) \ \text{ donde } \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \ \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$$

Forma polar de un complejo

La coordenada polar r se denomina el **módulo de** z y se anota $|z|$. Es el número real no negativo

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

que representa la distancia del punto (x, y) al origen o la longitud del vector z. Además, dados $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ el módulo de la diferencia entre ellos está dado por:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Luego, $|z_1 - z_2|$ mide la distancia entre los puntos z_1 y z_2.

Forma polar de un complejo

Desigualdades importantes

a) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$

b) $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ Desigualdad triangular

c) $|z_1 \pm z_2| \geq \Big| |z_1| - |z_2| \Big|$

- La coordenada θ se dice un **argumento de** z, y se denota $\arg(z)$ al conjunto de todos los argumentos de z, es decir los números $\theta + 2k\pi$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$, donde θ es cualquiera de los ángulos, medido en radianes desde el eje real positivo hasta el vector de componentes (x, y). El signo del ángulo se utiliza para definir su orientación: antihoraria para ángulos positivos y horaria para negativos.
  De acuerdo con la definición, si θ_1 y θ_2 son argumentos de un mismo complejo z, entonces su diferencia es un múltiplo entero de giros completos, es decir que existe algún entero k tal que $\theta_2 - \theta_1 = k2\pi$.

- El único elemento del conjunto $\arg(z)$ que pertenece al intervalo $(-\pi, \pi]$ es la **determinación o valor principal del argumento** o **argumento principal de** z, que indicamos $\mathrm{Arg}(z)$.

Forma polar de un complejo

La forma polar resulta muy conveniente par el **producto y cociente**: Si

$$z_1 = |z_1|(\cos\phi_1 + i\,\mathrm{sen}\,\phi_1),\ z_2 = |z_2|(\cos\phi_2 + i\,\mathrm{sen}\,\phi_2)$$

entonces

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\left[\cos(\phi_1+\phi_2) + i\,\mathrm{sen}(\phi_1+\phi_2)\right]$$

o sea, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$.

Y si $z_2 \neq 0$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos(\phi_1-\phi_2) + i\,\mathrm{sen}(\phi_1-\phi_2)\right]$$

o sea, $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ y $arg(z_1 z_2) = arg(z_1) - arg(z_2)$.

Forma exponencial de un complejo

A partir de la forma polar o trigonométrica y la **identidad de Euler** $\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta = e^{i\theta}$ llegamos a la **forma exponencial**:

$$z = re^{i\theta}$$

Por ejemplo,

$$i = e^{i\pi/2}$$

ya que $|i| = 1$ y $arg(i) = \pi/2$. Se comprueba que $e^{i\pi/2} = \cos\pi/2 + i\,\mathrm{sen}\,\pi/2 = 0 + i = i$. También,

$$-1 = e^{i\pi}$$

ya que $|-1| = 1$, $arg(-1) = \pi$. Se comprueba que $e^{i\pi} = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi = -1 + 0i = -1$.

Potencias de un número complejo

Mediante la forma polar (2.23), resulta muy sencillo calcular cualquier potencia z^n para todo n natural o entero: Dado que $(e^{i\phi})^n = e^{in\phi}$, obtenemos

$$\begin{aligned} z^n &= (|z|e^{i\phi})^n \\ &= |z|^n e^{in\phi} \\ &= |z|^n[\cos(n\phi) + i\,\mathrm{sen}(n\phi)] \end{aligned}$$

La última expresión se denota normalmente fórmula de De Moivre.
Estas expresiones son válidas para $n = 0, 1, 2, \ldots$, y si $z \neq 0$, también para $n = -1, -2, \ldots$.

Raíces de un número complejo

Para resolver empleamos la fórmula:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right] \quad k = 0, 1, \cdots, (n-1)$$

Regiones en el Plano Complejo

Circunferencia

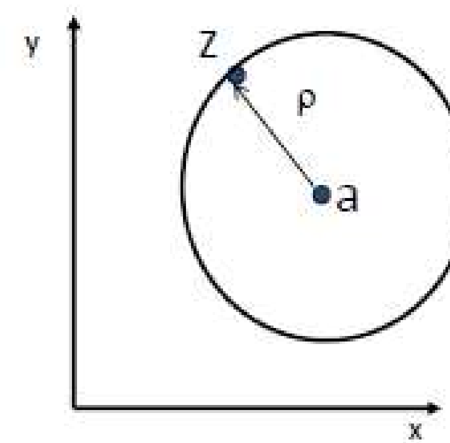
DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS:

La distancia entre dos puntos z y a cualquiera es $|z - a|$.

De modo que un círculo C de radio ρ

y centrado en a, puede expresarse como:

$$|z - a| = \rho$$



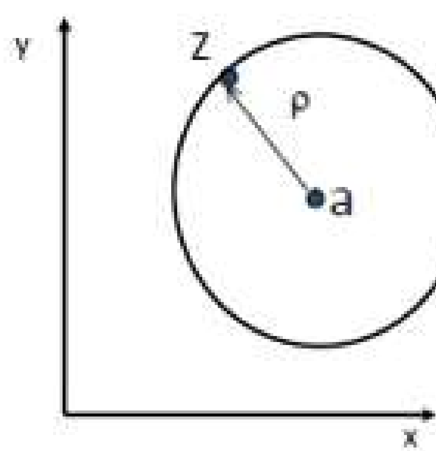
Regiones en el Plano Complejo

Circunferencia

Los puntos dentro del círculo C vienen representados por:

$|z-a| < \rho$ (un **entorno abierto centrado en a**).

$$B(a,\rho) = \{z \in C \,/\, |z-a| < \rho\}$$

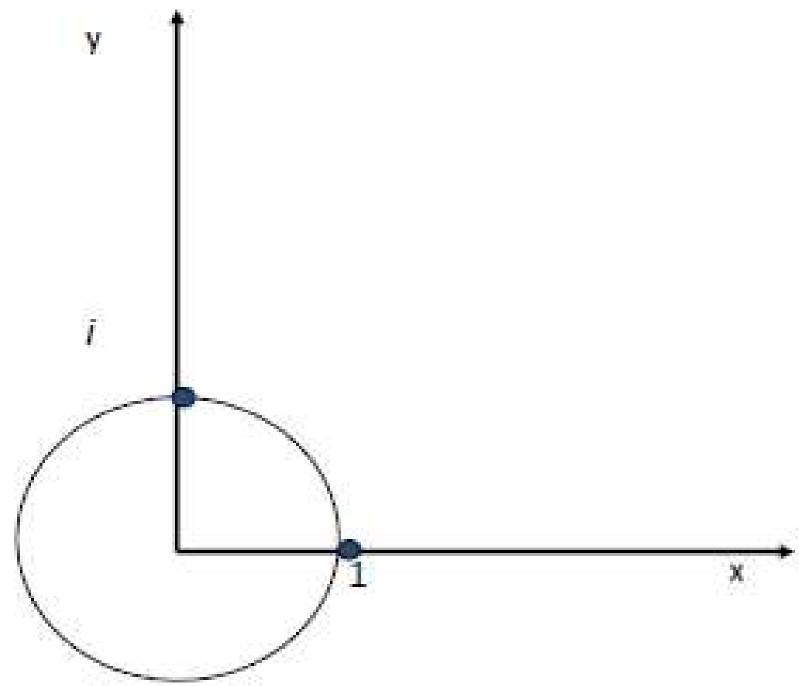


Regiones en el Plano Complejo

Circunferencia

En particular, el círculo de radio unidad centrado en el origen puede escribirse como:

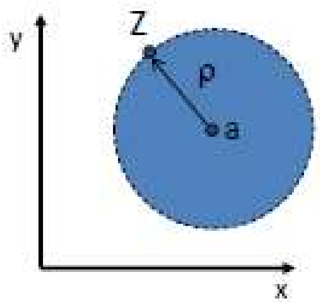
$$|z| = 1$$



Regiones en el Plano Complejo

Circunferencia

La región $|z-a| < \rho$ define un **entorno punteado o reducido**.

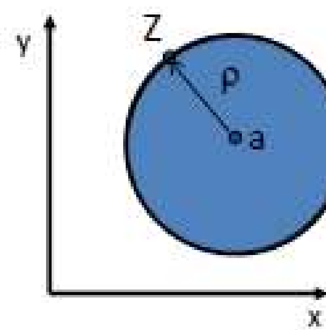


$$B(a,\rho) = \{z \in C \,/\, |z-a| < \rho\}$$

Los puntos $|z\text{-}a| \le \rho$

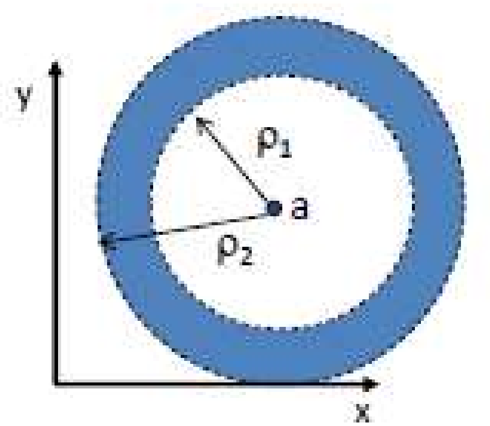
definen un entorno circular cerrado

centrado en a.



Regiones en el Plano Complejo

Anillo abierto

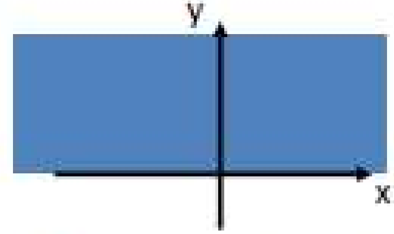


El **anillo abierto** de radios ρ_1 y ρ_2, viene dado por: $\rho_1 < |z-a| < \rho_2$

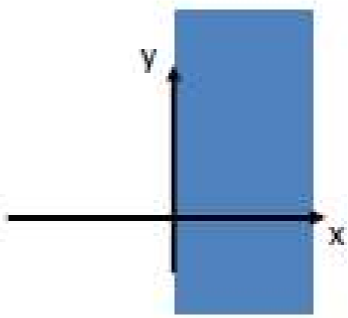
Regiones en el Plano Complejo

Semiplanos infinitos

Semiplano superior: el conjunto de todos los puntos $z = x+iy$ tales que $y > 0$ o $Im(z) > 0$.

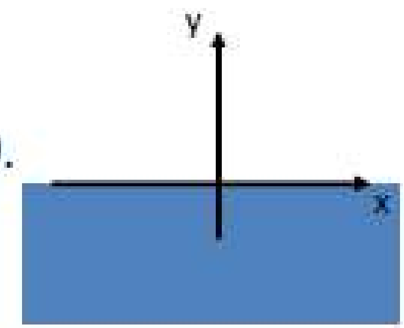


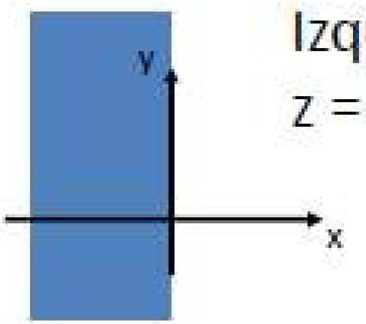
Inferior: $z = x+iy$ tales que $y < 0$ o $Im(z) < 0$.



Derecho:

$z = x+iy$ tales que $x > 0$ o $Re(z) > 0$.





Izquierdo:

$z = x+iy$ tales que $x < 0$ o $Re(z) < 0$

Regiones en el Plano Complejo

Entorno de z_0 de radio $R > 0$: $E(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$
Entorno reducido de z_0 de radio $R > 0$: $E^*(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$

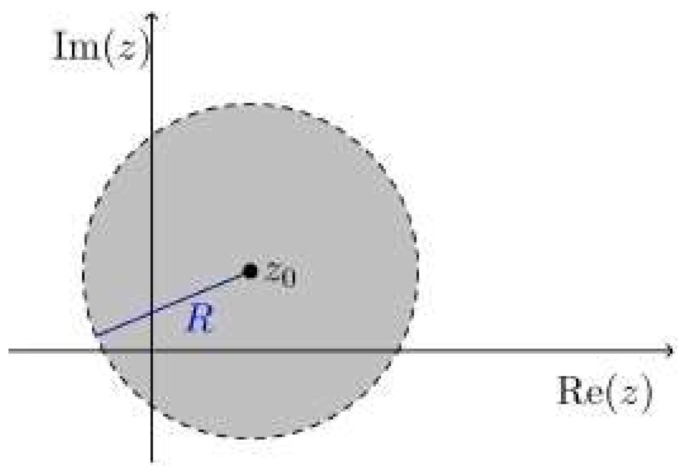


Figura entorno de z_0

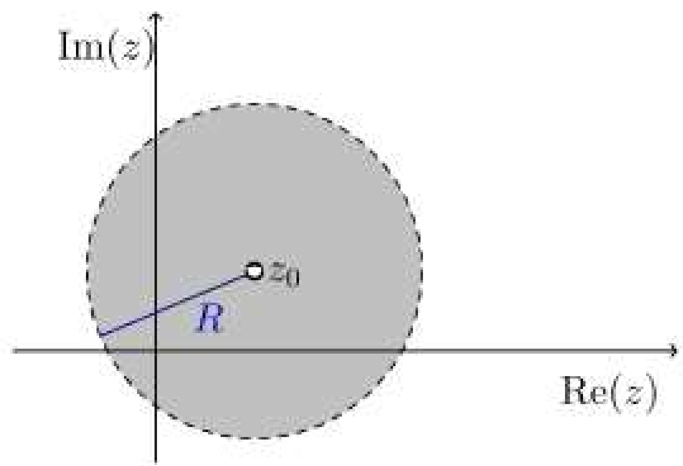


Figura entorno reducido de z_0

Regiones en el Plano Complejo

Sea S un subconjunto de $\mathbb{C}$

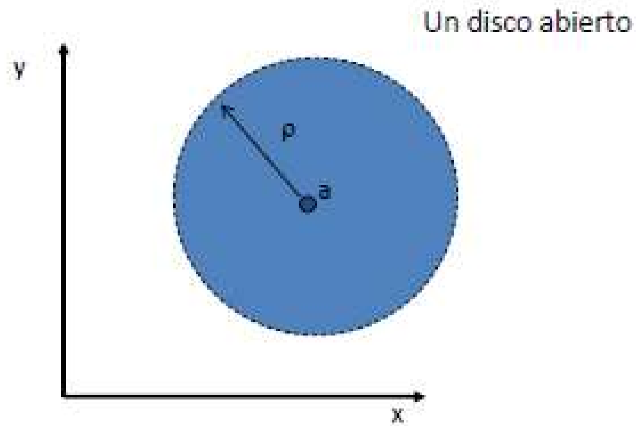
- Un punto z_0 está en la **frontera de** S si en todo entorno de z_0 hay al menos un punto de S y al menos uno que no pertenece a S.
- S **es abierto** si para cada punto $z_0 \in S$ existe un entorno de z_0 incluido en S.
- S **es cerrado** si incluye a su frontera.
- S **es acotado** si existe $M > 0$ tal que S está incluido en el disco $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq M\}$.
- S **es abierto conexo** si es abierto y cualquier par de puntos de S se pueden unir mediante una curva completamente incluida en S. La conexidad corresponde a la idea intuitiva de "conjunto de una sola pieza".
- S **es abierto simplemente conexo** si es abierto conexo y toda curva cerrada simple contenida en S encierra solo puntos de S. Corresponde a la idea intuitiva de "no tiene agujeros".

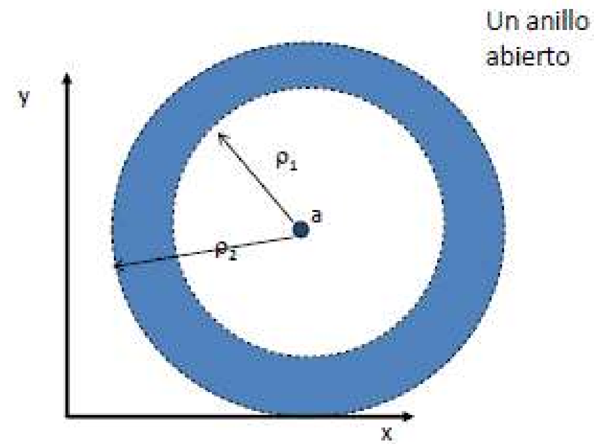
Si S es **abierto** no posee puntos frontera, solo puntos interiores.

Regiones en el Plano Complejo

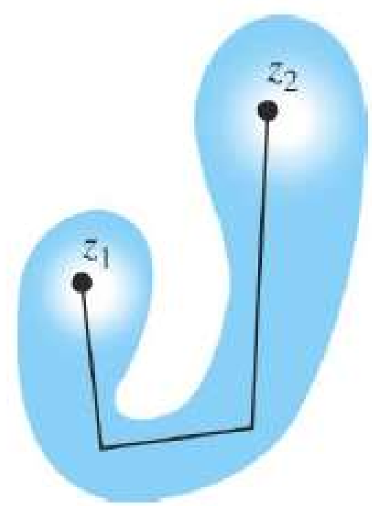
Conjuntos Conexos

Un conjunto S se llama **conexo** si cualquier par de sus puntos pueden conectarse mediante un camino formado por puntos que pertenecen a S.





Cualesquiera dos puntos de un dominio pueden unirse por medio de una línea poligonal contenida en el dominio.



Regiones en el Plano Complejo

Ejemplos

a) $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = -2,\ 0 \leq \mathrm{Im}(z) < 5\}$ no es abierto ni cerrado y es acotado.

b) $B = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 3,\ \mathrm{Im}(z) \geq -2\}$ no es abierto ni cerrado ni acotado.

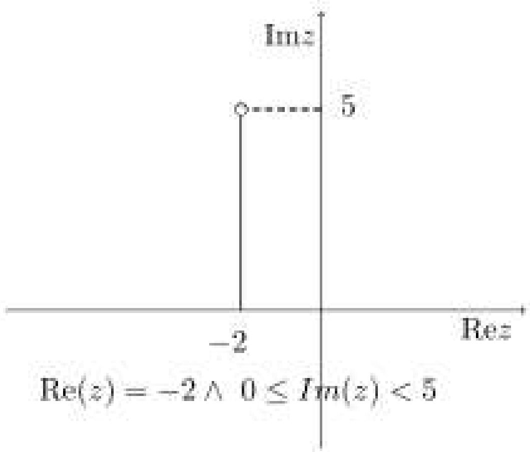


Figura conjunto A

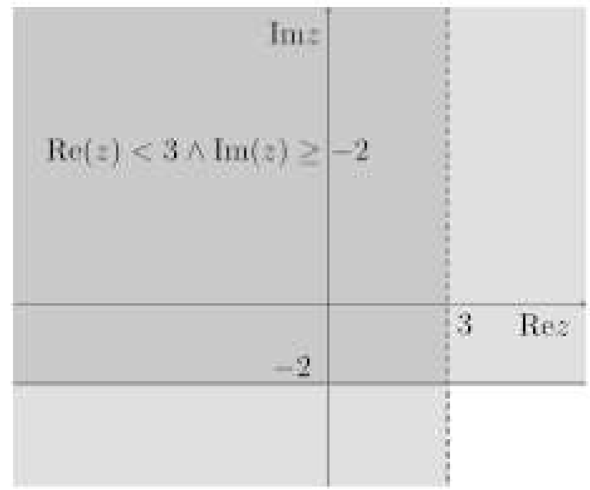


Figura conjunto B

Regiones en el Plano Complejo

Ejemplos

c) $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3 + i2| > 2\}$ es abierto conexo no simplemente conexo ni acotado.

d) $D = \{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} < Arg(z) < \frac{3\pi}{4}\}$ es abierto simplemente conexo y no acotado.

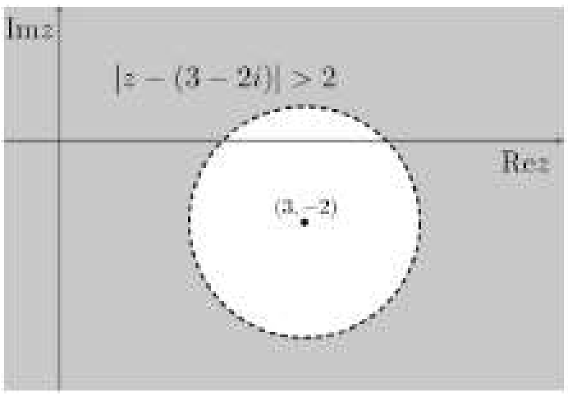


Figura conjunto C

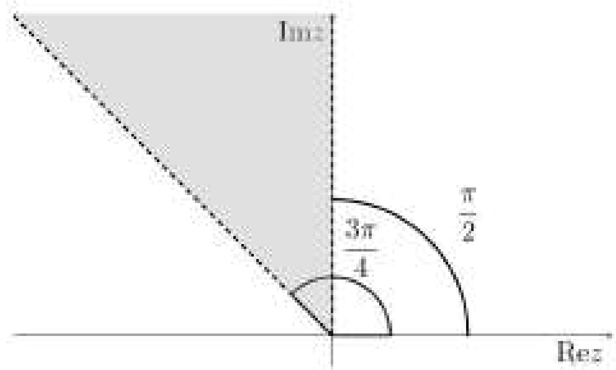


Figura conjunto D

Regiones en el Plano Complejo

Ejemplos

e) $E = \left\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 4, \ |Arg(z)| \leq \frac{\pi}{3}\right\}$ es cerrado y acotado.

f) $F = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| > 1\}$ es abierto no conexo y no acotado.

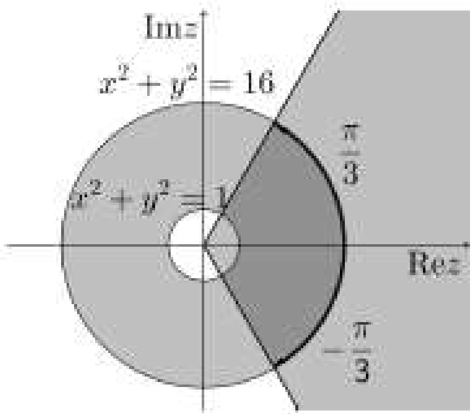


Figura conjunto E

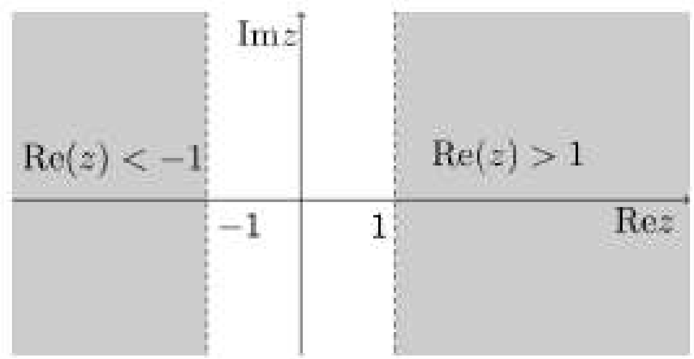
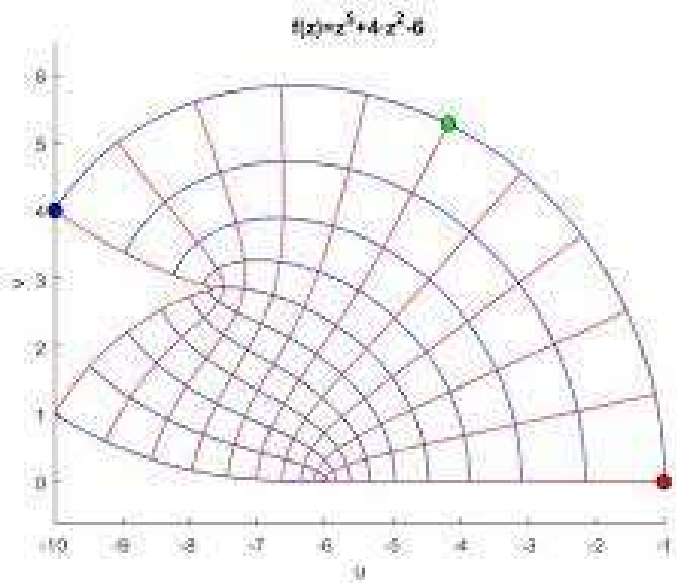


Figura conjunto F

2. FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA



INGENIERÍA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN
U.T.N. F.R.L.P.

Funciones de variable compleja

Si D es un conjunto de números complejos, una función de dominio D y codominio $\mathbb{C}$ es una relación que permite asignar a cada elemento z de D un único número complejo w. Se dice que w es el valor de f en z o la imagen de z por f y se indica $w = f(z)$. Anotamos $f : D \to \mathbb{C}$ y decimos que f es una función de D en $\mathbb{C}$.
Si $z = x + iy$, $w = u + iv$ entonces $w = f(z)$ puede escribirse mediante la igualdad:

$$u + iv = f(x + iy)$$

donde u y v son funciones reales de dos variables reales $(u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$ llamadas respectivamente la **parte real** y la **parte imaginaria** de $f(z)$:

$$\operatorname{Re}(f(z)) = u(x, y) \qquad \operatorname{Im}(f(z)) = v(x, y)$$

La imagen por f de un subconjunto A del dominio D es el conjunto $f(A) = \{f(z) : z \in A\}$.
Se dice que f está acotada si el conjunto $f(D)$ es acotado.

Funciones de variable compleja

Ejemplos:

a) $f(z) = z^2$ es una función de dominio $\mathbb{C}$ que a cada complejo le asigna su cuadrado:

$$w = f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

$$u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = 2xy$$

b) $f(z) = \dfrac{i}{|z|^2}$ es una función de dominio $\mathbb{C} - \{0\}$ que verifica:

$$w = f(z) = \frac{i}{|z|^2} = \frac{i}{x^2+y^2}, \quad \text{donde} \quad u(x,y) = 0, \;\; v(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

c) $\arg(z)$ no es una función, pues cada complejo z no nulo tiene infinitos valores del argumento, en cambio $f(z) = \mathrm{Arg}(z)$ es una función de dominio $\mathbb{C} - \{0\}$ pues el 0 es el único complejo que no tiene argumento y cada complejo no nulo, si bien posee infinitos argumentos, solamente uno de ellos es principal.

Funciones de variable compleja

Otro ejemplo:

$$f(z) = 2iz + 6\bar{z}$$
$$= 2i(x + iy) + 6(x - iy)$$
$$= \underbrace{(6x - 2y)}_{u(x,y)} + i\underbrace{(2x - 6y)}_{v(x,y)}$$

¿Cuál es el valor de $f(z)$ en $z = 3 + 2i$?

$$f(z) = (6x - 2y) + i(2x - 6y)$$
$$= (6\cdot 3 - 2\cdot 2) + i(2\cdot 3 - 6\cdot 2)$$
$$= 14 - 6i$$

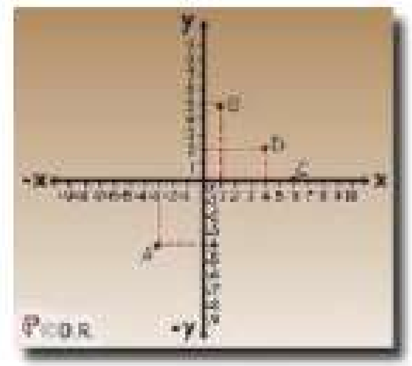
Funciones de variable compleja

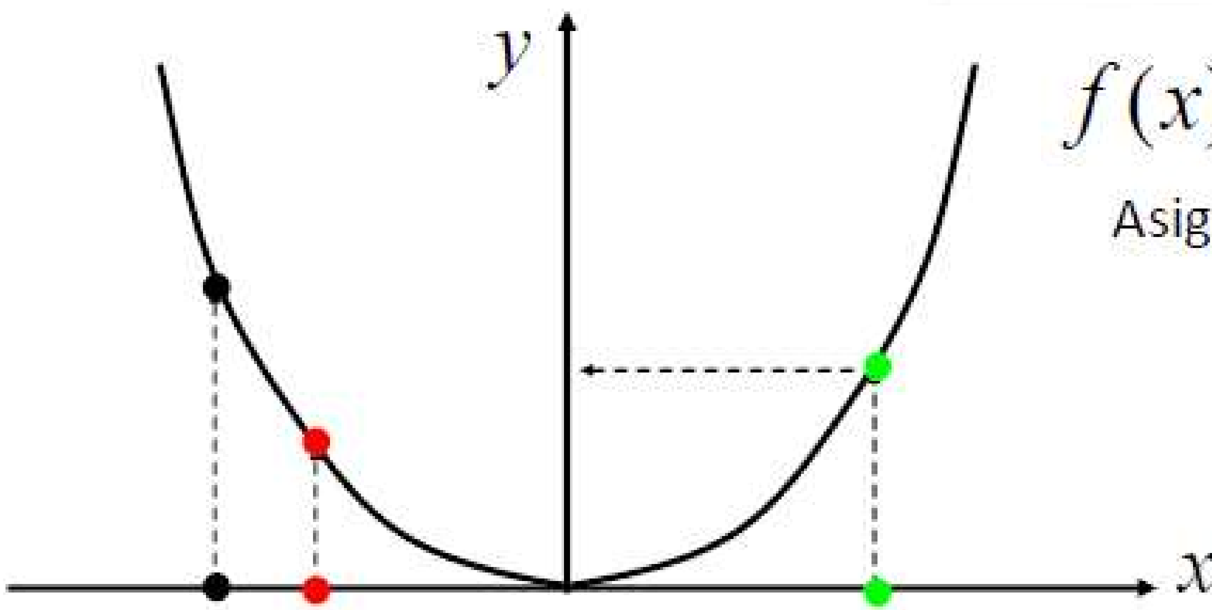
Representación gráfica:

Funciones de variable real

Representación geométrica cartesiana

$$\boxed{y = f(x)}$$



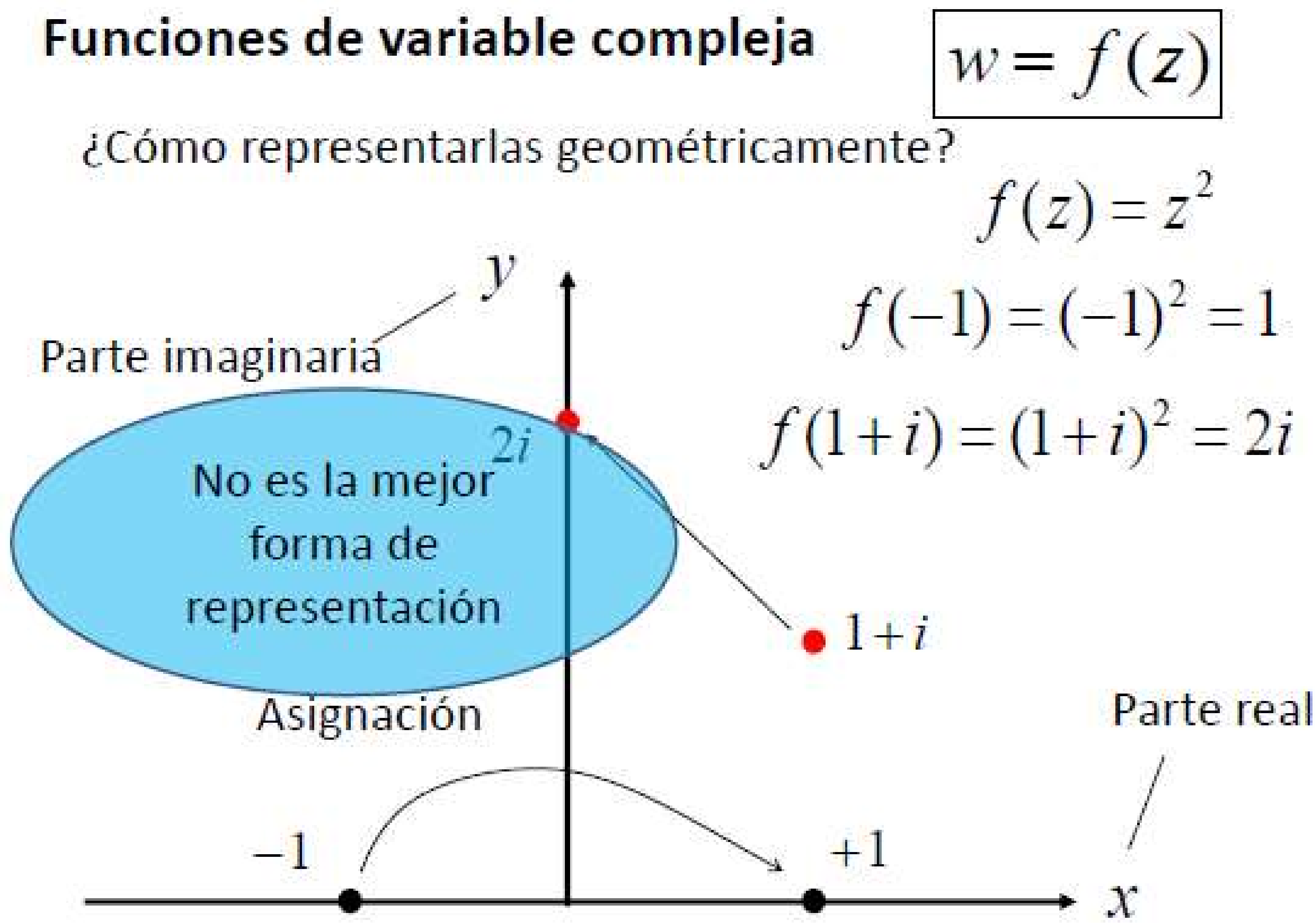


$$f(x) = x^2$$

Asignación

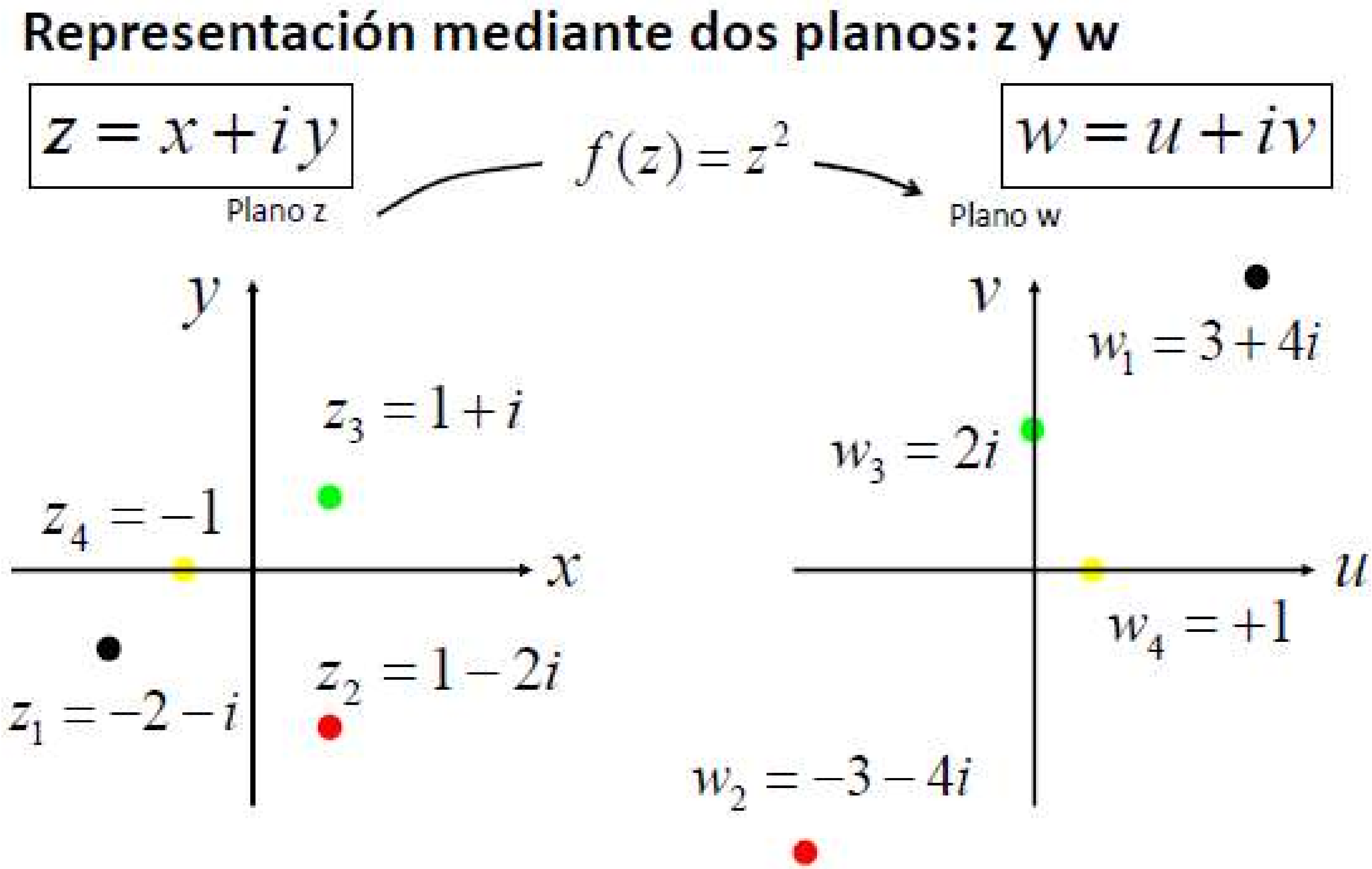
Funciones de variable compleja

Representación gráfica:



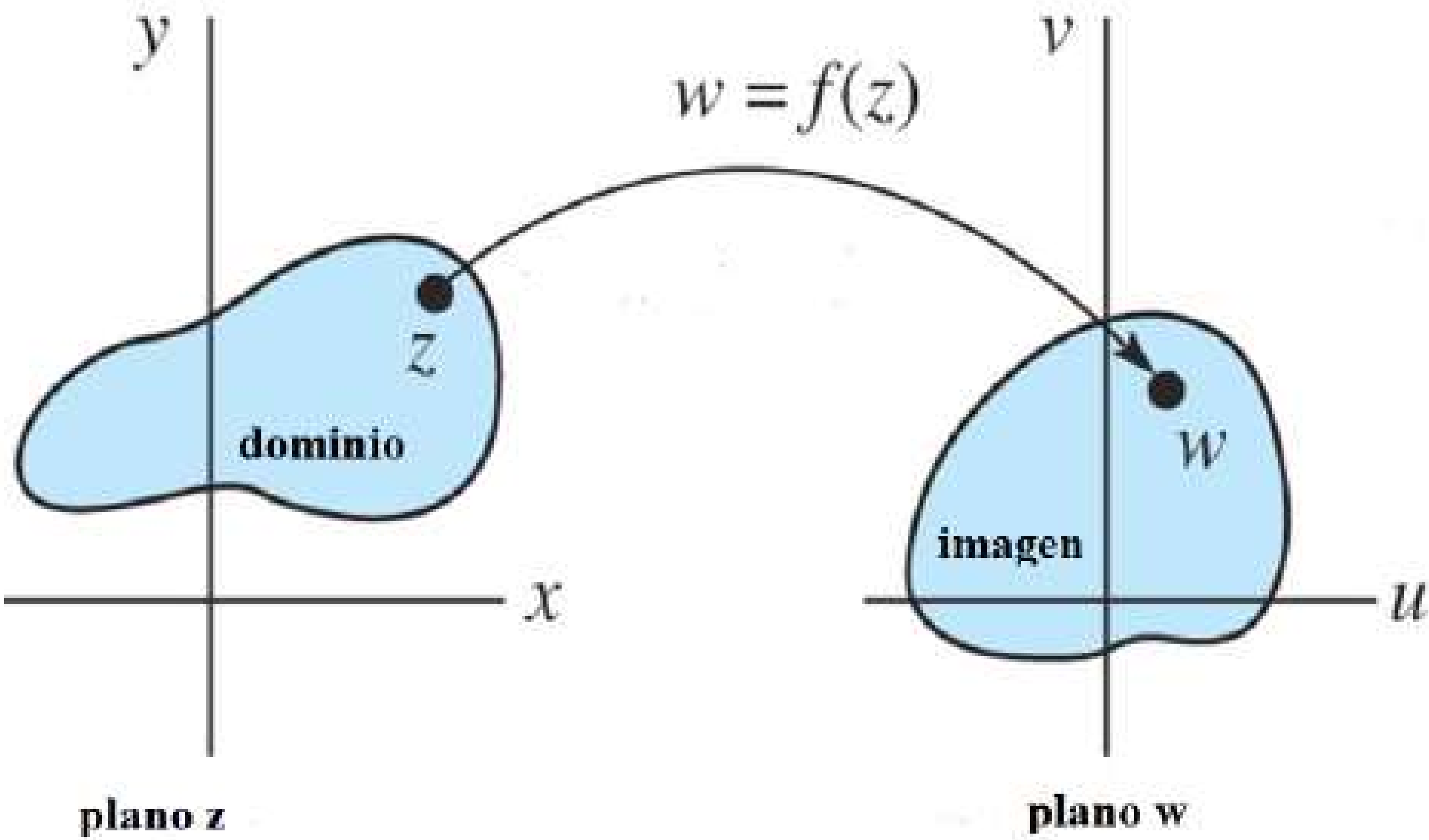
Funciones de variable compleja

Representación gráfica:



Funciones de variable compleja

Representación gráfica:



Límite

Definición *(Intuitiva) Diremos que* $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ *si los valores* $f(z)$ *se acercan arbitrariamente a* L *eligiendo* z *suficientemente cercano a* z_0 *pero distinto de* z_0.

Observaciones

1. En el concepto de límite es irrelevante si z_0 pertenece o no al dominio de la función. Para que esta definición tenga sentido es necesario que existan puntos en el dominio de la función, tan cerca de z_0 como se quiera pero distintos de z_0. Cuando esto ocurre se dice que z_0 es *punto de acumulación* del dominio de f.

2. Cuando el límite existe, su valor no depende del camino por el cual z se acerca a z_0.

Límite

Proposición *Dados* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $L = L_1 + iL_2$.

a) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = L_1 \quad \wedge \quad \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = L_2$

b) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{z\to z_0} |f(z) - L| = 0$

En particular cuando $L = 0$*:* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = 0$

Propiedad Si existen $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ y $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)$ entonces

a) $\lim\limits_{z\to z_0} (f(z) + g(z)) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z) + \lim\limits_{z\to z_0} g(z)$

b) $\lim\limits_{z\to z_0} (f(z)\, g(z)) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \lim\limits_{z\to z_0} g(z)$

c) $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)}$ siempre que $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) \neq 0$

Límite

Proposición *Sean $f(z), g(z)$ funciones complejas.*

a) Si en un entorno reducido de z_0 se verifica $|f(z)| \leq |g(z)|$ y $\lim\limits_{z \to z_0} |g(z)| = 0$ entonces $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = 0$.

b) Si $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = 0$ y $f(z)$ está acotada en un entorno reducido de z_0 entonces $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)g(z) = 0$.

Continuidad

Definición *Dada la función $f(z)$ de variable compleja*

- $f(z)$ *es continua en el punto* z_0 *si y sólo si* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$
- $f(z)$ *es continua en un conjunto* D *si lo es en cada punto de* D

Proposición $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *es continua en* $z_0 = x_0 + iy_0 \Leftrightarrow u(x,y)$ *y* $v(x,y)$ *son continuas en* (x_0, y_0)

Continuidad

Propiedades

La suma y el producto de funciones continuas es continua. El cociente de funciones continuas es continua salvo en los puntos en que se anula el denominador.

Si $\lim_{z \to z_0} g(z) = w_0$ y f es continua en w_0 entonces $\lim_{z \to z_0} f(g(z)) = f\left(\lim_{z \to z_0} g(z)\right)$, esta propiedad se conoce como corrimiento del límite. En particular, la composición de funciones continuas es continua.

Las demostraciones son exactamente las mismas que las utilizadas en el caso real.

Se deduce inmediatamente de las propiedades anteriores:

- Las funciones polinómicas $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ son continuas para todo z.
- Las funciones racionales $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ (p, q polinómicas) son continuas en su dominio, es decir en $\{z \in \mathbb{C} : q(z) \neq 0\}$.

Derivabilidad y Analiticidad

La definición de derivada para funciones complejas de variable compleja es la misma que para funciones reales de variable real.

Definición *Sea $f(z)$ una función compleja de variable compleja definida en un entorno del punto z_0. La* ***derivada de f en el punto z_0*** *es*

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

cuando este límite existe.

Cuando se considera una función que es derivable en un punto y en todo un entorno del mismo, surge el concepto de **analiticidad**, en el que nos enfocaremos en gran parte de este curso.

Definición *Una función de variable compleja $f(z)$ se dice*

- ***analítica en el punto z_0*** *si f es derivable en todo un entorno de z_0.*
- ***analítica en un conjunto D*** *si lo es en cada punto de D.*

Notación
D dominio de f, D_C dominio de continuidad de f, D_D dominio de derivabilidad de f, D_A dominio de analiticidad de f

Derivabilidad y Analiticidad

Continúan válidas las reglas de derivación usuales (cuyas demostraciones son exactamente las mismas que en variable real). Estas reglas permiten analizar la derivabilidad de funciones que se obtienen mediante operaciones combinadas de suma, resta, producto, cociente y composición, a partir de funciones más sencillas cuya derivabilidad es conocida. Análogamente para la analiticidad.

Propiedades. Reglas de derivación

a) Las funciones constantes tienen derivada nula en todo punto.

b) Si k es un número entero, $f(z) = z^k$ es derivable en su dominio y $f'(z) = kz^{k-1}$.

c) Si f y g son derivables en z_0 entonces $f+g$, fg son derivables en z_0, y si $g(z_0) \neq 0$ entonces f/g es derivable en z_0. Se cumple:

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$$
$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{[g(z_0)]^2} \quad \text{si} \quad g(z_0) \neq 0$$

d) Regla de la cadena: si g es derivable en z_0 y f es derivable en $g(z_0)$ entonces la composición $f \circ g$ es derivable en z_0 y $(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0)$

Derivabilidad y Analiticidad

Propiedad Si $f(z)$ es derivable en z_0 entonces $f(z)$ es continua en z_0. Luego, si $f(z)$ es discontinua en z_0 no puede ser derivable en z_0.

Se deducen inmediatamente las propiedades de las funciones analíticas.
Propiedades

a) Si f y g son analíticas en z_0 entonces $f+g$, fg son analíticas en z_0, y si $g(z_0) \neq 0$ entonces f/g es analítica en z_0.

b) Si g es analítica en z_0 y f es analítica en $g(z_0)$ entonces la composición $f \circ g$ es analítica en z_0.

En particular:

- Las funciones polinómicas $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ son derivables y analíticas para todo z.
- Las funciones racionales son derivables y analíticas en todo su dominio.

Anteriormente se justificó que la existencia de límite y la continuidad para funciones complejas de variable compleja equivale a la existencia de los límites y la continuidad de sus partes real e imaginaria. **No sucede lo mismo con la derivabilidad!**

Derivabilidad y Analiticidad

Los siguientes teoremas que enunciaremos a continuación permiten analizar la derivabilidad de una función f(z) sin recurrir a la definición de derivada.

El sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} u_x(x,y) &= \ \ v_y(x,y) \\ u_y(x,y) &= -v_x(x,y) \end{cases}$$

se conoce como las ***condiciones de Cauchy-Riemann*** (CR).

Teorema ***Condición necesaria de derivabilidad***
Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *es derivable en* $z_0 = x_0 + iy_0$ *entonces existen las derivadas parciales* $u_x(x_0, y_0), u_y(x_0, y_0), v_x(x_0, y_0), v_y(x_0, y_0)$ *y verifican las condiciones CR en* (x_0, y_0). *Además*

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

Teorema ***Condición suficiente de derivabilidad***
Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. *Si las derivadas parciales* $u_x(x,y), u_y(x,y), v_x(x,y), v_y(x,y)$ *existen en un entorno de* (x_0, y_0), *son continuas en* (x_0, y_0) *y satisfacen las condiciones de Cauchy Riemann en* (x_0, y_0), *entonces* f *es derivable en* $z_0 = x_0 + iy_0$.

Funciones elementales: Función exponencial compleja

Definición ***Función exponencial***

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x\left(\cos y + i\,\mathrm{sen}\, y\right), \; z = x + iy \in \mathbb{C}$$

- Si $z = x + i0$ entonces $e^z = e^x\left(\cos 0 + i\,\mathrm{sen}\, 0\right) = e^x$. Esto muestra que e^z es una función que extiende la exponencial real al campo complejo.
- Las partes real e imaginaria de e^z son $u(x,y) = e^x \cos y$, $v(x,y) = e^x\,\mathrm{sen}\, y$. Resultan $u_x = e^x \cos y$, $u_y = -e^x\,\mathrm{sen}\, y$, $v_x = e^x\,\mathrm{sen}\, y$, $v_y = e^x \cos y$ continuas en $\mathbb{R}^2$ y las ecuaciones CR se verifican en todo punto. Entonces e^z es derivable y analítica para todo $z \in \mathbb{C}$, además

$$(e^z)' = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = e^x \cos y + ie^x\,\mathrm{sen}\, y = e^x\left(\cos y + i\,\mathrm{sen}\, y\right) = e^z$$

Funciones elementales: Función exponencial compleja

Definición ***Función exponencial***

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)\,,\ \ z = x + iy \in \mathbb{C}$$

Algunas propiedades

a) $\left|e^{iy}\right| = 1$ para todo $y \in \mathbb{R}$
En efecto: $\left|e^{iy}\right| = |\cos y + i \operatorname{sen} y| = \sqrt{(\cos y)^2 + (\operatorname{sen} y)^2} = 1$

b) Si $z = x + iy$:

- $|e^z| = e^x$
En efecto: $|e^z| = \left|e^x e^{iy}\right| = |e^x|\left|e^{iy}\right| = |e^x| = e^x$ porque $|e^x| = e^x$ ya que $e^x > 0$
- $\arg(e^z) = y + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{Arg}(e^z) = y \ \ \Leftrightarrow \ \ -\pi < y \leq \pi$

c) $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$
En efecto, como su módulo e^x no se anula nunca entonces e^z tampoco puede anularse.

d) $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$
$\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$

Funciones elementales: Función logaritmo complejo

$$\boxed{w \in \ln(z) \quad \Leftrightarrow \quad z = e^w}$$

Definición *Conjunto de los logaritmos de un complejo*

Si $z \neq 0$, $z = re^{i\theta}$,

$$\ln(z) = \ln|z| + i\,\arg(z) = \ln r + i\,(\theta + 2k\pi)\,,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

Es importante observar que $\ln(z)$ no es una función ya que dado $z \neq 0$, $\ln(z)$ toma infinitos valores.

Definición *Función logaritmo principal*

Si $z \neq 0$,

$$Ln(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$$

Funciones elementales: Función logaritmo complejo

Definición ***Función logaritmo principal***
Si $z \neq 0$,

$$Ln(z) = \ln|z| + i\ \mathrm{Arg}(z)$$

Ejemplo:

$$\ln(2-2i) = \ln|2-2i| + i\arg(2-2i) = \ln\sqrt{8} + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) =$$
$$= \tfrac{3}{2}\ln 2 + i\left(-\tfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$
$$\mathrm{Ln}(2-2i) = \ln|2-2i| + i\,\mathrm{Arg}(2-2i) = \frac{3}{2}\ln 2 - i\frac{\pi}{4}$$

Ejemplo:

$$\mathrm{Ln}((-1+i)^2) = \mathrm{Ln}(-2i) = \ln|-2i| + i\,\mathrm{Arg}(-2i) = \ln(2) - i\frac{\pi}{2}$$
$$\mathrm{Ln}(-1+i) = \ln|-1+i| + i\,\mathrm{Arg}(-1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i\frac{3\pi}{4} = \frac{\ln(2)}{2} + i\frac{3\pi}{4}$$

Observemos que

$$\mathrm{Ln}((-1+i)^2) \neq 2\mathrm{Ln}((-1+i))$$

Este ejemplo muestra que debemos tener cuidado de no atribuirle al logaritmo complejo algunas propiedades del logaritmo real

Funciones elementales: Función logaritmo complejo

Definición ***Función logaritmo principal***

Si $z \neq 0$,

$$Ln(z) = \ln|z| + i\ \mathrm{Arg}(z)$$

Algunas propiedades

a) Si $z \neq 0$: $\qquad e^{\ln(z)} = z \qquad e^{\mathrm{Ln}(z)} = z$

b) $\ln(e^z) = z + i2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, para todo z.

En general $\mathrm{Ln}(e^z) \neq z$. Por ejemplo para $z = 2\pi i$ resulta:

$$\mathrm{Ln}(e^z) = \mathrm{Ln}\left(e^{2\pi i}\right) = \mathrm{Ln}(1) = 0 \neq 2\pi i$$

c) El dominio de definición $\mathrm{Ln}(z)$ es $\mathbb{C} - \{0\}$. La parte real de $\mathrm{Ln}(z)$ es $\ln|z| = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. La parte imaginaria es $\mathrm{Arg}(z)$, continua excepto en el origen y en el semieje real negativo. Por lo tanto el dominio de continuidad de $\mathrm{Ln}(z)$ es $\mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 0, \mathrm{Re}(z) \leq 0\}$. En particular, $\mathrm{Ln}(z)$ no es derivable ni en el origen ni en el semieje real negativo.

d) $(\mathrm{Ln}(z))' = 1/z$

Funciones elementales: Funciones trigonométricas e hiperbólicas complejas

Definición ***Funciones coseno y seno***

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Definición ***Funciones coseno y seno hiperbólicos***

$$\cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{senh}(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

Aplicando reglas de derivación se prueba fácilmente que $\operatorname{sen}(z), \cos(z), \operatorname{senh}(z), \cosh(z)$ son analíticas en todo el plano complejo y que sus derivadas coinciden con las clásicas:

$$(\cos(z))' = -\operatorname{sen}(z) \qquad (\operatorname{sen}(z))' = \cos(z)$$

$$(\cosh(z))' = \operatorname{senh}(z) \qquad (\operatorname{senh}(z))' = \cosh(z)$$

Funciones elementales: Funciones trigonométricas e hiperbólicas complejas

Propiedad Sea $z = x + i\,y$

a) $\operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen}(x)\cosh(y) + i\cos(x)\operatorname{senh}(y)$

b) $\cos(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)$

c) $\operatorname{senh}(z) = \operatorname{senh}(x)\cos(y) + i\cosh(x)\operatorname{sen}(y)$

d) $\cosh(z) = \cosh(x)\cos(y) + i\operatorname{senh}(x)\operatorname{sen}(y)$

Observaciones

1. Las funciones $\operatorname{sen}(z), \cos(z)$ no son acotadas en $\mathbb{C}$. Se puede comprobar utilizando el hecho que $\operatorname{senh}(y)$ no está acotada y las siguientes igualdades:

$$|\operatorname{sen}(z)| = \sqrt{\operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{senh}^2(y)} \qquad |\cos(z)| = \sqrt{\cos^2(x) + \operatorname{senh}^2(y)}$$

2. Si $t \in [-1, 1]$ entonces $\operatorname{sen} z = t, \cos z = t$ se verifican exactamente en los mismos puntos que $\operatorname{sen} x = t, \cos x = t$. En particular $\operatorname{sen} z, \cos z$ se anulan en los puntos $z = k\pi$ y $z = (2k+1)\pi/2$ respectivamente $(k \in \mathbb{Z})$.

Funciones elementales: Función exponenciación compleja

Definición . ***Exponenciación***
Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq 0$,

$$z_1^{z_2} = e^{z_2 \ln(z_1)}$$

Como el logaritmo complejo es multivaluado, la exponenciación compleja también lo es.

Definición ***Función exponencial principal de base a***
Si $a, z \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$,

$$a^z = e^{z\,Ln(a)}$$

Ejemplo:

$$(-1)^i = e^{i \operatorname{Ln}(-1)} = e^{i[\ln|-1| + i \operatorname{Arg}(-1)]} = e^{i(\ln(1) + i\pi)} = e^{-\pi}$$

Funciones armónicas

Se llama **laplaciano** al operador diferencial parcial de segundo orden en dos variables definido por:

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

La ecuación diferencial parcial de segundo orden

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{o bien} \qquad \nabla^2 u = 0$$

se denomina **ecuación de Laplace**.

Definición *Sea D abierto y conexo en $\mathbb{R}^2$. La función $u(x,y)$ es **armónica en D** si sus derivadas parciales de segundo orden son continuas y satisfacen $\nabla^2 u = 0$ en D.*

La ecuación de Laplace se utiliza para modelizar procesos estacionarios, es decir aquellos sistemas que su respuesta no cambia con el tiempo.

$u(x, y)$ representa por ejemplo, la temperatura estacionaria (en equilibrio) de una lámina delgada conductora de calor en una región R sin fuentes de calor. La distribución estacionaria de temperaturas en el interior de la placa es una función armónica.

Otras aplicaciones: el potencial electrostático en una región del plano que no contiene cargas eléctricas, el potencial asociado al campo de velocidades de un fluido irrotacional y solenoidal, membranas elásticas en equilibrio, etc.

Funciones armónicas

La conexión entre las **funciones armónicas** en dominios del plano y la teoría de **variable compleja** se evidencia en los siguientes resultados:

Teorema *Si* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *es analítica en un conjunto abierto conexo* D *entonces* $u(x,y), v(x,y)$ *son funciones armónicas en* D.

Teorema *Si* $u(x,y)$ *es armónica en un abierto simplemente conexo* D, *entonces existe* $f(z)$ *analítica en* D *tal que* $u(x,y) = \mathrm{Re}\,(f(z))$ *en* D.

Definición *Sean* $u(x,y), v(x,y)$ *armónicas en un conjunto abierto* D. *Se dice que* $v(x,y)$ *es una* ***conjugada armónica*** *de* $u(x,y)$ *en* D *si* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *es analítica en* D.

Toda función armónica en un abierto simplemente conexo, admite conjugada armónica. Por otra parte, conviene advertir que la relación: “es conjugada armónica de …” no es simétrica, pues si *v* es conjugada armónica de *u*, *u* no es conjugada armónica de *v*, en cambio -*u* sí lo es.