ANÁLISIS NUMÉRICO

Ingeniería en Sistemas de Información

3er año - Anual

Docentes: Prof. Diego Amiconi
Prof. Marcelo Cappelletti
Ay. Demian Bogado

INGENIERÍA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN
U.T.N. F.R.L.P.

ANÁLISIS NUMÉRICO

Articulación con Correlativas:

Para cursar		Para rendir el Examen final
Cursada	**Aprobada**	**Aprobada**
Análisis Matemático II	Análisis Matemático I, Algebra y Geometría Analítica	Análisis Matemático II

ANÁLISIS NUMÉRICO

Objetivo General:

El objetivo fundamental de la asignatura es que el alumno adquiera una base sólida en Cálculo Avanzado y Análisis Numérico, mediante un enfoque moderno basado en la interrelación entre el Análisis Matemático, el Algebra Lineal y los métodos numéricos. Utilizar estos conceptos y procedimientos como herramientas necesarias para el desarrollo de aplicaciones en comunicaciones, procesamiento de señales, control, simulación e inteligencia artificial. La resolución de problemas en forma exacta muchas veces no es posible o bien no es suficiente para resolver los diferentes problemas que se plantean en las labores de un ingeniero, y es por eso que en esta asignatura se busca generar que los estudiantes puedan trabajar con la resolución de problemas en forma "aproximada", bajo ciertos criterios de resolución.

ANÁLISIS NUMÉRICO

Unidades Temáticas:

- **UNIDAD Nº 1:** "Señales continuas y su representación por medio de Series y Transformadas de Fourier"
- **UNIDAD Nº 2:** "Fundamentos de análisis de Variable Compleja"
- **UNIDAD Nº 3:** "Transformada de Laplace. Aplicación a la Resolución de Ecuaciones Diferenciales"
- **UNIDAD Nº 4:** "Transformada en Z"
- **UNIDAD Nº 5:** "Introducción al Cálculo Numérico y Errores"

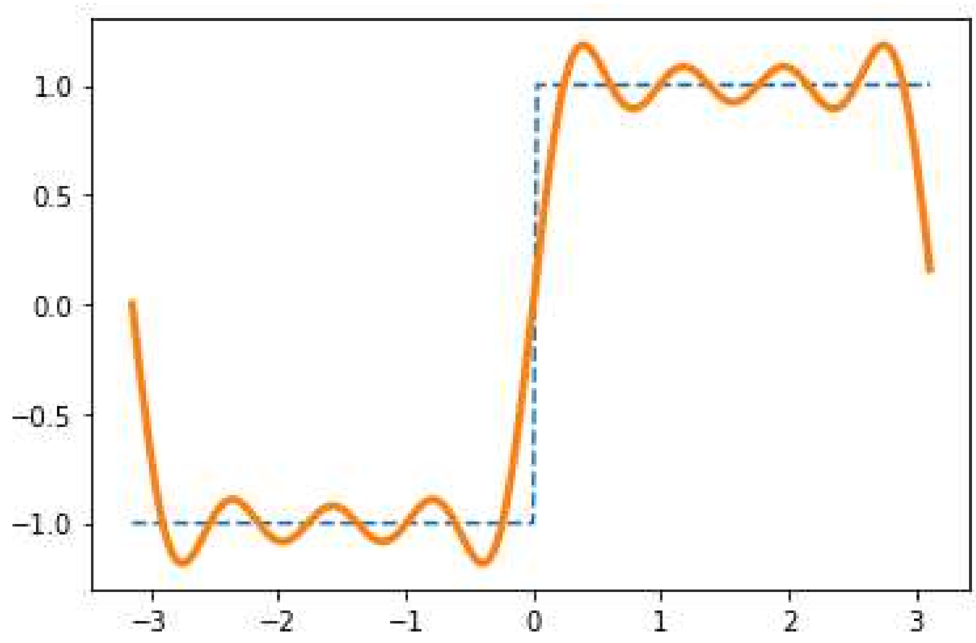
INGENIERÍA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN
U.T.N. F.R.L.P.

ANÁLISIS NUMÉRICO

- **UNIDAD Nº 6:** "Cálculo de Raíces: Soluciones de ecuaciones de una variable"
- **UNIDAD Nº 7:** "Resolución de sistemas de ecuaciones lineales"
- **UNIDAD Nº 8:** "Aproximación discreta y continua por el método de los mínimos cuadrados"
- **UNIDAD Nº 9: "**Resolución de problemas de valor inicial"
- **UNIDAD Nº 10:** "Resolución de problemas de contorno y resolución de ecuaciones diferenciales de segundo orden mediante diferencias finitas"

ANÁLISIS NUMÉRICO

- UNIDAD Nº 1: “Señales continuas y su representación por medio de Series y Transformadas de Fourier”



- UNIDAD Nº 1: “Señales continuas y su representación por medio de Series y Transformadas de Fourier”

<u>CONTENIDOS:</u>

a) **Concepto de señal en tiempo continuo. Funciones periódicas.**

b) **Series de Fourier. Convergencia y suma de las series de Fourier.**

c) **Forma exponencial de la serie de Fourier.**

d) **Problemas de aplicación.**

e) **Integrales de Fourier.**

f) **Transformada de Fourier. Propiedades.**

g) **Convolución en el dominio temporal y frecuencia.**

h) **Transformada discreta de Fourier. Transformada rápida de Fourier.**

i) **Aplicaciones a la Ingeniería.**

- UNIDAD Nº 1: “Señales continuas y su representación por medio de Series y Transformadas de Fourier”

OBJETIVO ESPECÍFICO:

Las **Series de Fourier** describen **señales periódicas** como una combinación de señales armónicas. Con estas herramientas el estudiante podrá analizar una señal periódica en términos de su contenido espectral, establecer la dualidad entre tiempo y frecuencia, de forma que operaciones realizadas en el dominio temporal tendrán su imagen en el dominio frecuencial y viceversa.

Luego, se extenderá el estudio a las **señales no periódicas** introduciendo la **integral de Fourier y el concepto de transformada de Fourier**. Además, en esta sección introducimos dos de las operaciones espaciales que son de la mayor importancia en el procesamiento de señales: convolución y correlación.

Datos y Señales

- **Datos:**

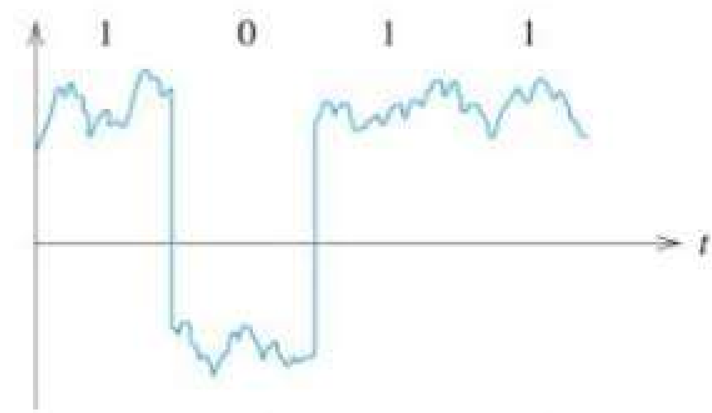
✓ Un dato es una representación simbólica (numérica, alfabética, algorítmica, etc) de una variable cuantitativa o cualitativa.

✓ Un dato por si mismo no constituye información, es el procesamiento de los datos lo que nos proporciona información.

- **Señales:**

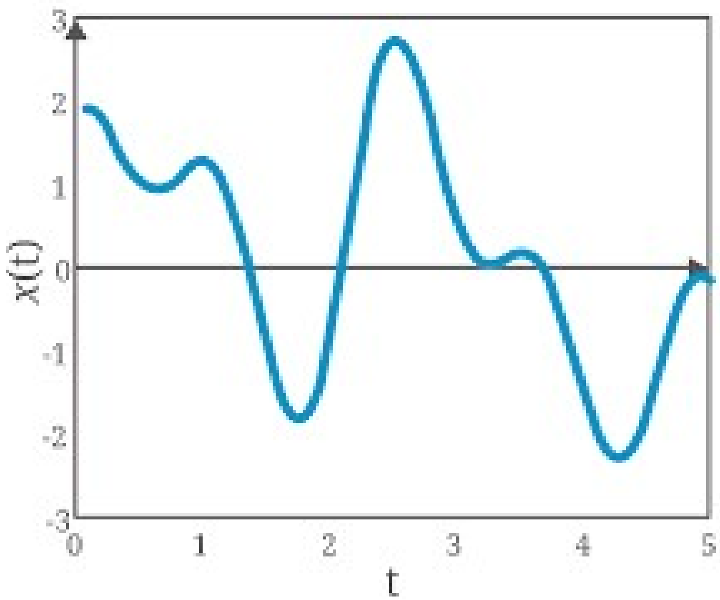
✓ Representación eléctrica o electromagnética de los datos.

✓ Es un medio que informa o avisa de algo, este aviso da a conocer información.



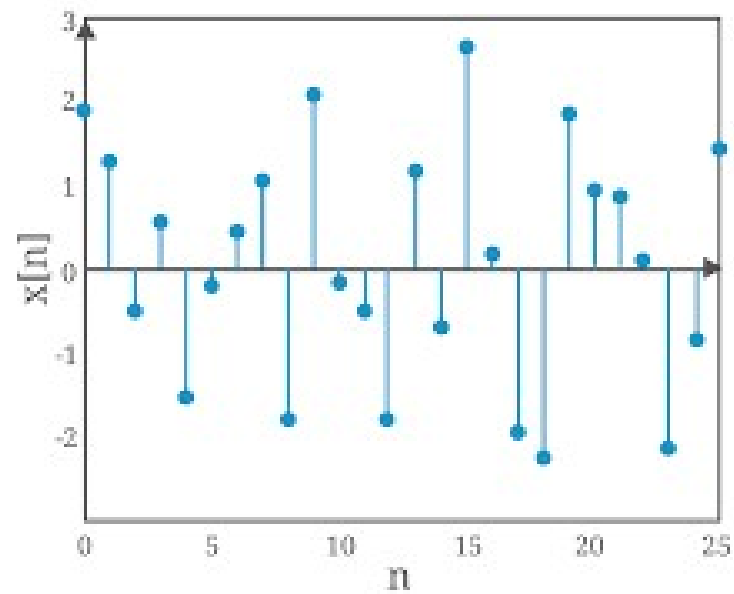
Clasificación de Señales

Señales en tiempo continuo:



Las **señales en tiempo continuo** son aquellas en las que la variable independiente puede tomar infinitos valores en un dado intervalo.

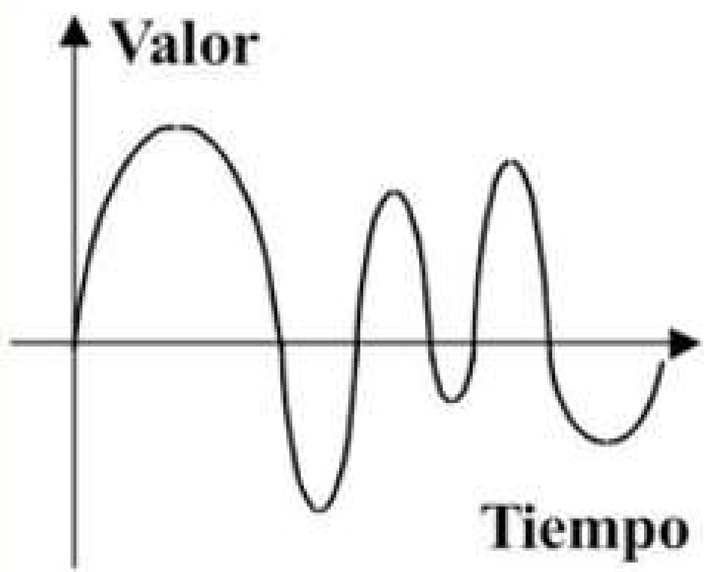
Señales en tiempo discreto:



Las **señales en tiempo discreto** están definidas sólo en determinados instantes de tiempo. En este caso, la variable independiente toma únicamente un número finito de valores en un dado intervalo, los cuales suelen estar espaciados de manera uniforme.

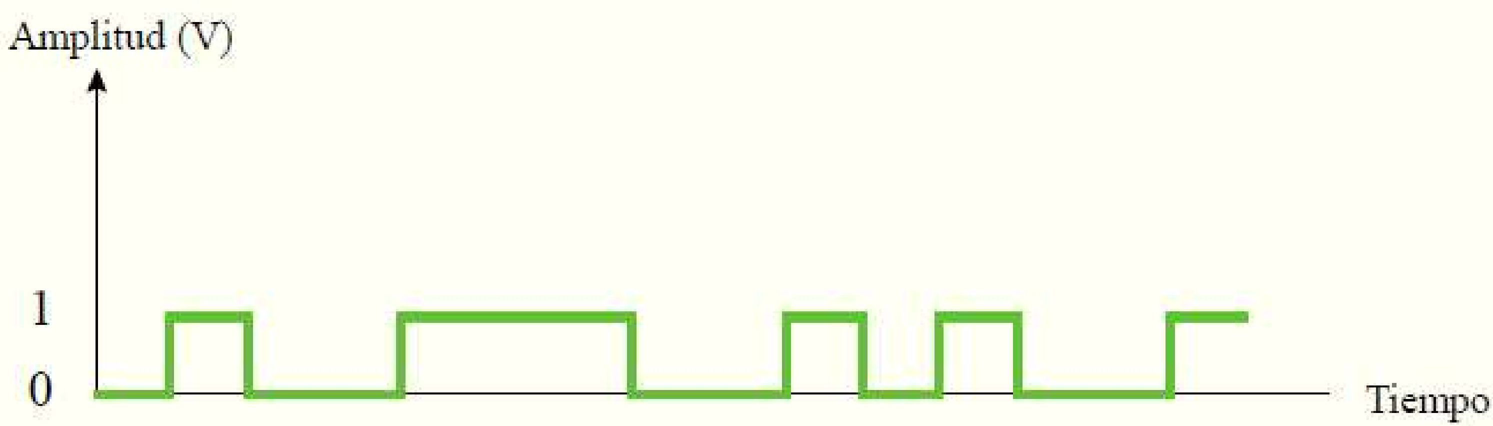
Señales en tiempo continuo: analógicas o digitales

- Señal analógica: es aquella que toma valores continuos, es decir, que las cantidades varían sobre un intervalo continuo de valores
- No presenta saltos o discontinuidades
- Por ej.: la temperatura



Señales en tiempo continuo: analógicas o digitales

Señal digital: es aquella que toma un conjunto (finito) de valores discretos. Por ej.: valores binarios.



Señales periódicas

En la naturaleza y en otros entornos cotidianos existen fenómenos que se repiten a intervalos regulares, como el caso de las mareas, los péndulos y resortes, el sonido, la corriente alterna, etc.

Las funciones que describen este tipo de fenómenos se denominan **funciones periódicas**.

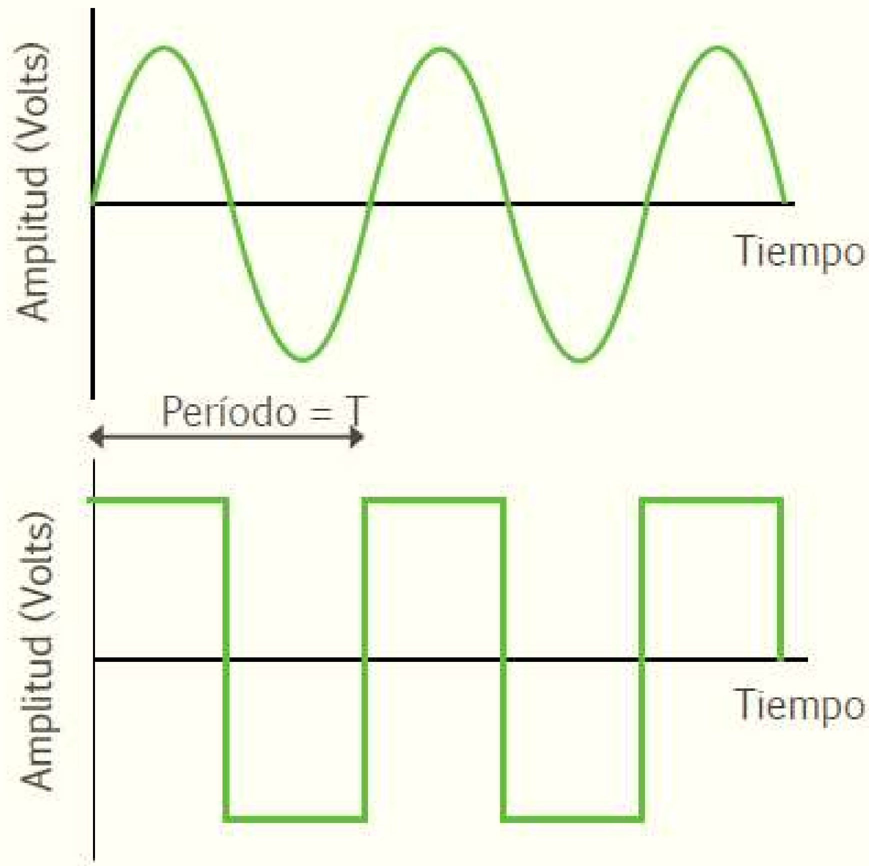
Una **función** es **periódica** cuando su valor se repite cada vez que la variable independiente recorre un cierto intervalo. El valor de este intervalo se llama **periodo**.

Señales periódicas

Señales periódicas

- El mismo patrón de señal se repite en el tiempo
- Por ej.: señal continua periódica (onda sinusoidal) y señal discreta periódica (onda cuadrada)
- $s(t) = s(t + T)$

  para $-\infty < t < +\infty$



Señales periódicas

De manera matemática,

Una función se dice que es **periódica** si existe un número real $T > 0$ tal que:

$$f(x+T) = f(x) \quad \text{para todo } x.$$

El número T es el **período** de *f(x)*.

Si T es el período de *f(X)*, entonces $2T$ también es período de *f(x)*.

$$f(x+2T) = f(x+T+T) = f(x+T) = f(x)$$

Y en general: $f(x+nT) = f(x),\ \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

El **mínimo valor del período** se denomina **período fundamental** de *f(x)*.

Señales periódicas

Otros parámetros característicos de una función periódica de período *T* son:

- Frecuencia $\longrightarrow$ $f = \dfrac{1}{T}$

- Número de ciclos en la unidad de tiempo.
- Es siempre positiva.

- Frecuencia angular $\longrightarrow$ $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$

- Es 2π veces la frecuencia.
- Es siempre positiva.

Señales periódicas

$$f = 1 / T$$

Period		*Frequency*	
Unit	*Equivalent*	*Unit*	*Equivalent*
Seconds (s)	1 s	Hertz (Hz)	1 Hz
Milliseconds (ms)	10^{-3} s	Kilohertz (kHz)	10^{3} Hz
Microseconds (μs)	10^{-6} s	Megahertz (MHz)	10^{6} Hz
Nanoseconds (ns)	10^{-9} s	Gigahertz (GHz)	10^{9} Hz
Picoseconds (ps)	10^{-12} s	Terahertz (THz)	10^{12} Hz

Suma de funciones periódicas

La suma de dos funciones periódicas de períodos T_1 y T_2 da como resultado una función periódica únicamente si el cociente de los períodos es un número racional, es decir, si:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q}$$, siendo p y q dos números enteros.

En dicho caso… ¿Cómo se calcula el período?

En el caso particular que $T_1=T_2$, la suma da como resultado una función periódica de período $T=T_1=T_2$.

Cambio de escala de funciones periódicas

- Si *f(x)* es una función periódica de período *T*, entonces *f(a.x)* tambiés es una función periódica pero de período *T/ a* (siendo *a* diferente de 0).

- Si *f(x)* es una función periódica de período *T*, entonces *f(x/b)* tambiés es una función periódica pero de período *b.T* (siendo *b* diferente de 0).

Ejemplo: $f(x) = sen(x)$ es periódica de período 2π

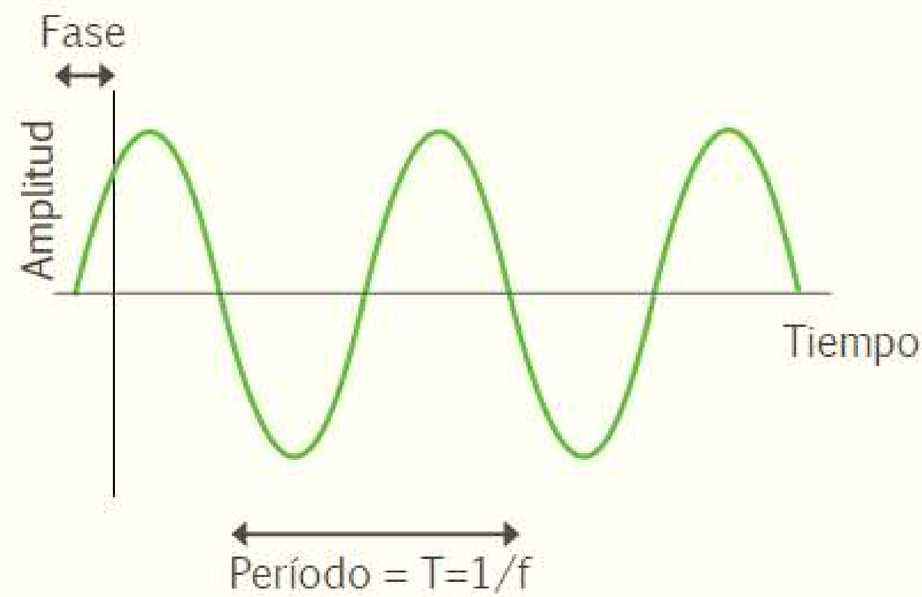
$f(2x) = sen(2x)$ es periódica de período $2\pi / 2 = \pi$

$f(x/4) = sen(x/4)$ es periódica de período $4.2\pi = 8\pi$

Señales periódicas sinusoidales

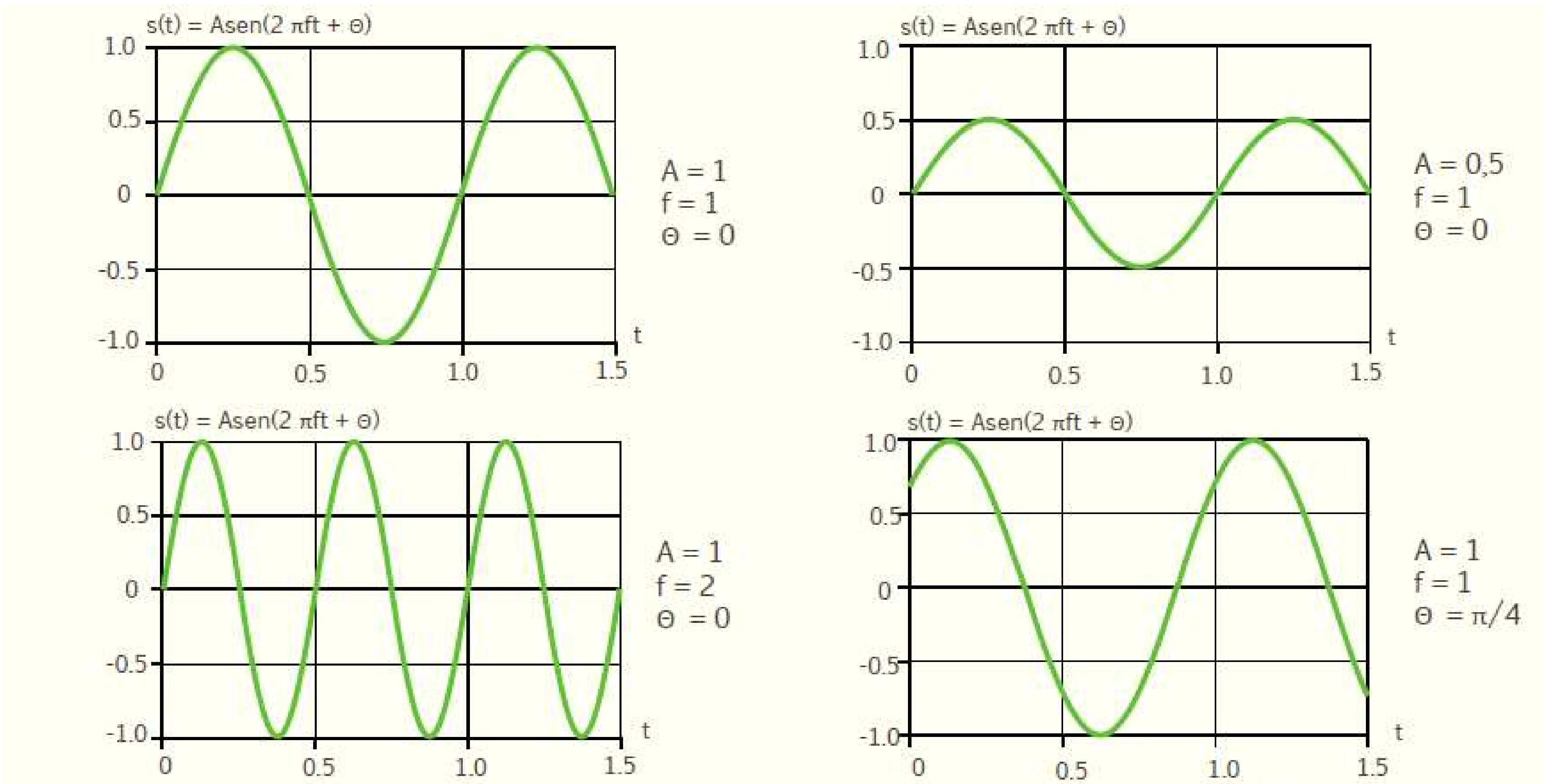
Onda senoidal

- Amplitud: valor máximo de la señal en el tiempo
- Período: cantidad de tiempo entre dos repeticiones del patrón
- Frecuencia: es la razón a la que la señal se repite
- Fase: posición relativa de la señal dentro de un período

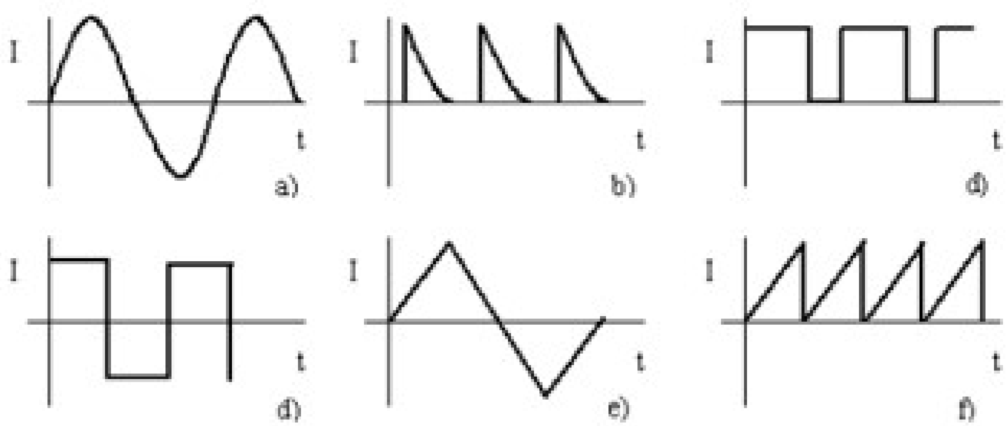


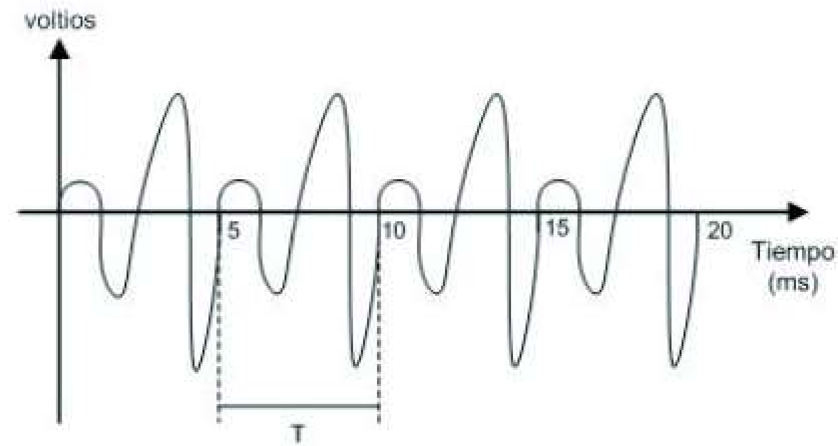
- $s(t) = A \operatorname{sen}(2\pi f t + \theta)$

Señales periódicas sinusoidales

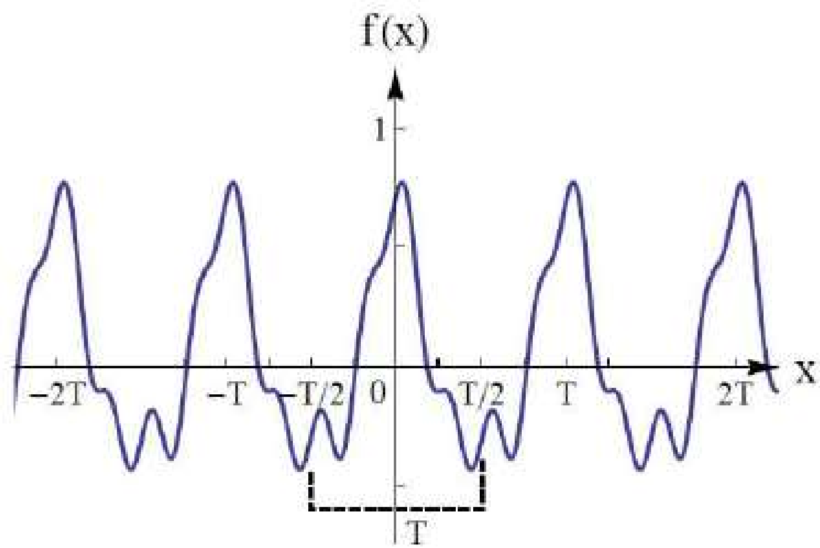


Otras señales periódicas no sinusoidales





a) Señal periódica analógica



Conjunto ortogonal de funciones

Dos funciones *f* y *g* son ortogonales si: $(f,g)=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)g(x)dx=0$

El sistema trigonométrico de funciones, dado por:

$$\{1, \cos(n\pi x/L), \operatorname{sen}(n\pi x/L),\ n=1,2,\ldots\}.$$

$$1, \quad \cos x, \quad \operatorname{sen} x, \quad \cos 2x, \quad \operatorname{sen} 2x, \quad \cdots, \quad \cos nx, \quad \operatorname{sen} nx, \quad \cdots$$

es ortogonal en el intervalo [–L, L], y por lo tanto en cualquier intervalo de 2L.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx &= \begin{cases} 0 & m\neq n \\ 1 & m=n\geq 1 \\ 2 & m=n=0 \end{cases}\\
\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx &= \begin{cases} 0 & m\neq n \\ 1 & m=n\geq 1 \end{cases}\\
\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx &= 0\ \forall m,n
\end{aligned}$$

Análisis de Fourier

Las **ondas sinusoidales simples** (de frecuencia única) tienen muchas aplicaciones en la vida diaria. Por ejemplo, podemos enviar una sola onda sinusoidal para transportar energía eléctrica de un lugar a otro.

Pero existen muchas aplicaciones en donde una onda sinusoidal simple no es útil, por ejemplo, en las comunicaciones de datos, donde se envían señales compuestas para comunicar los datos.

En 1807, el matemático francés **Jean-Baptiste Joseph Fourier** demostró que:

Cualquier señal compuesta es una combinación de ondas sinusoidales simples con diferentes frecuencias y amplitudes.

El **Análisis de Fourier** es una herramienta que **cambia una señal en el dominio del tiempo a una señal en el dominio de la frecuencia, y viceversa.**

El **Análisis de Fourier** incluye la **Series de Fourier** y la **Transformada de Fourier.**

Series de Fourier

Las series de Fourier cumplen un rol fundamental en el **análisis de funciones periódicas**.

Permiten escribir a las funciones periódicas como una serie de funciones sinusoidales (senos y cosenos), de diferentes amplitudes y frecuencias, y así obtener una descripción precisa de las mismas por medio de los coeficientes de la serie.

Constituyen, por lo tanto, una herramienta fundamental no solo en Matemática, sino también en diversas áreas de la Ingeniería, Física, Astronomía y otras Ciencias, tales como análisis y generación de señales, telecomunicaciones, ingeniería eléctrica, acústica, óptica, procesamiento de imágenes, compresión de datos, mecánica cuántica, etc.

Las series de Fourier juegan también un rol esencial en la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, y surgieron de hecho en relación con estas ecuaciones, cuando el matemático y físico francés Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), desarrolló la teoría con el objeto de resolver la ecuación del calor, una ecuación diferencial en derivadas parciales.

Series de Fourier: Definición

Fourier demostró que **una señal periódica compuesta con período T (frecuencia f) se puede representar mediante una serie infinita de funciones seno y coseno, conocida como Serie de Fourier**.

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)
Matemático, Físico e Historiador
École Polytecnique
Director de Tésis: Joseph Lagrange
Compañero de Simeon Poisson

Serie de Fourier: las funciones periódicas pueden ser representadas por una suma infinita ponderada de senos y cosenos

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(\frac{2n\pi}{T} t) + b_n sen(\frac{2n\pi}{T} t)]$$

Series de Fourier: Coeficientes

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(\frac{2n\pi}{T}t) + b_n sen(\frac{2n\pi}{T}t)]$$

donde a_0, a_n y b_n son denominados Coeficientes de Fourier de $s(t)$, los cuales se obtienen a partir de las siguientes Fórmulas de Euler:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(n\omega x)dx \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\operatorname{sen}(n\omega x)dx \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$\text{con } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

La suma resultante es periódica, dado que dos términos cualesquiera cumplen:

$$\left.\begin{aligned} T_n &= \frac{2\pi}{2\pi n / T} = \frac{T}{n} \\ T_m &= \frac{2\pi}{2\pi m / T} = \frac{T}{m} \end{aligned}\right\} \frac{T_n}{T_m} = \frac{m}{n}$$

El período de la suma infinita es T, dado que todos los períodos están contenidos en T un número entero de veces.

Series de Fourier: Coeficientes

Si f(x) es una **función periódica** de período **T = 2L**, entonces su **serie de Fourier** es:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \sin(n\pi x/L)]$$

donde a_0, a_n y b_n son los **Coeficientes de Fourier de *f(x)***:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\cos(n\pi x/L)dx \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}(n\pi x/L)dx \qquad n = 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

Las integrales para el cálculo de los coeficientes pueden tomarse en cualquier intervalo de longitud 2L.

Series de Fourier: Coeficientes

Los **coeficientes de Fourier de *f(x)*** cumplen las siguientes propiedades:

- Sean a_{01}, a_{n1} y b_{n1} los coeficientes de Fourier de $f_1(x)$, y sean a_{02}, a_{n2} y b_{n2} los coeficientes de Fourier de $f_2(x)$, entonces $(a_{01} + a_{02})$, $(a_{n1} + a_{n2})$ y $(b_{n1} + b_{n2})$ son los coeficientes de Fourier de $f_1(x) + f_2(x)$.

- Sean a_{01}, a_{n1} y b_{n1} los coeficientes de Fourier de $f_1(x)$, y sea c un número real y distinto de cero, entonces $c.a_{01}$, $c.a_{n1}$ y $c.b_{n1}$ son los coeficientes de Fourier de $c.f_1(x)$.

Series de Fourier: Componentes

A partir de la ***Serie infinita de Fourier*** podemos descomponer cualquier señal periódica en los siguientes términos:

$\frac{a_0}{2}$: ***término constante***.

$n = 1$: ***componentes de frecuencia fundamental*** → $a_1 \cos(\omega t)$ y $b_1 \operatorname{sen}(\omega t)$.

$n = 2, 3, 4, \ldots$: ***componentes armónicos*** → $a_n \cos(n\omega t)$ y $b_n \operatorname{sen}(n\omega t)$, es decir:

$n = 2$: ***componentes de segunda armónica*** → $a_2 \cos(2\omega t)$ y $b_2 \operatorname{sen}(2\omega t)$.
(con frecuencia $2f$).

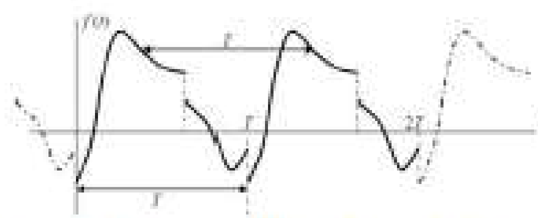
$n = 3$: ***componentes de tercera armónica*** → $a_3 \cos(3\omega t)$ y $b_3 \operatorname{sen}(3\omega t)$.
(con frecuencia $3f$).

Las frecuencias de las componentes armónicas son siempre múltiplos enteros de la frecuencia fundamental.

Series de Fourier: Convergencia y suma

Para que una determinada función *f(x)* periódica de período *T*, pueda ser representada como una Serie de Fourier, debe cumplir con las ***Condiciones de Dirichlet***:

- ***Condiciones de Dirichlet:***



✓ *f(x)* debe tener un número finito de discontinuidades en el período *T*, si es discontinua en ese período;
✓ el valor medio de *f(x)* en el período *T* es finito (no tiene asíntotas verticales);
✓ *f(x)* tiene un número finito de máximos y mínimos en *T* (no oscila infinitamente).

Series de Fourier: Convergencia y suma

Las condiciones de Dirichlet son ***condiciones suficientes*** para la convergencia de la Serie de Fourier, y quedan formalizadas en el denominado ***Teorema de Fourier***:

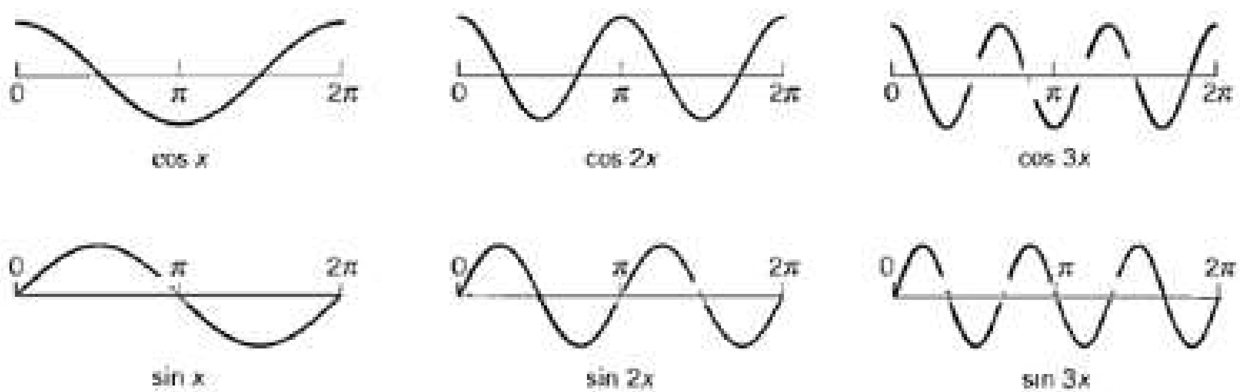
Sea *f(x)* una función periódica de período *T*, que en un período es continua a trozos y acotada, tiene un número finito de máximos y mínimos locales, y un número finito de discontinuidades. Entonces, la Serie de Fourier de *f(x)* dada por la expresión $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\omega x)+b_n\operatorname{sen}(n\omega x)\right)$, con $\omega=\frac{2\pi}{T}$, converge y su suma es igual a *f(x)* en todos los valores de *x*, excepto en aquellos puntos $x=x_0$ donde *f(x)* es discontinua. En tales puntos, la suma de la serie es el promedio de los límites laterales (por izquierda y derecha) de *f(x)* para x_0, es decir: $f(x_0)=\frac{1}{2}\left(f(x_0^+)+f(x_0^-)\right)$ donde: $f(x_0^+)=\lim_{x\to x_0^+}\left(f(x)\right)$ y $f(x_0^-)=\lim_{x\to x_0^-}\left(f(x)\right)$.

Series de Fourier: Convergencia y suma

La cantidad de clases de funciones que satisfacen las Condiciones de Dirichlet es sorprendentemente grande.

A partir de su expresión puede observarse que una función periódica *f(x)* de período *T* que satisfaga las condiciones suficientes de Dirichlet se puede representar con la serie infinita de senos y cosenos:

Ejemplos de funciones seno y coseno de período (2π/n), con n=1,2,3.



Series de Fourier: Convergencia y suma

Sea f(x) una función periódica de período T = 2L, entonces su serie de Fourier es:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \sin(n\pi x/L)]$$

Si f(x) tiene un número finito de discontinuidades finitas en un período, y existen los límites laterales de f en los puntos de discontinuidad (f es seccionalmente continua), entonces:

- en los puntos x donde f es continua, la Serie de Fourier converge a f(x).

- en los puntos x donde f es discontinua, la Serie de Fourier converge al punto medio:

$$\frac{f(x_i^+) + f(x_i^-)}{2}$$

donde $f(x_i^\pm) = \lim_{x \to x_i^\pm} f(x)$ son los límites laterales.

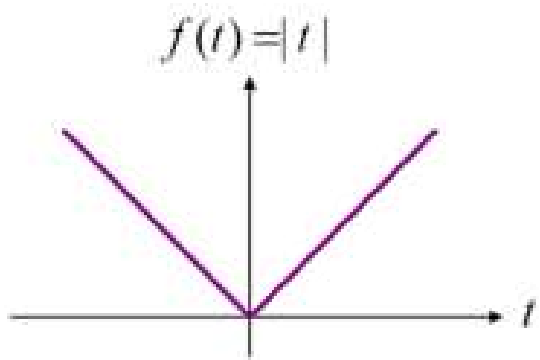
Serie Finita de Fourier

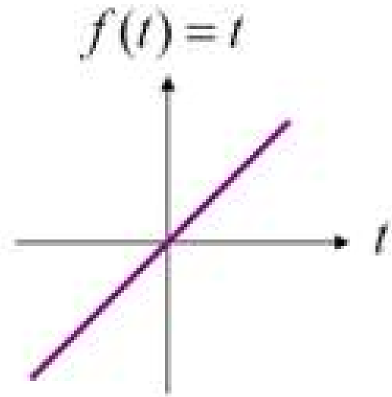
Sin embargo, en realidad no se trabaja con infinitas funciones senos y cosenos. Dado que los coeficientes a_n y b_n se hacen pequeños cuando *n* se hace grande, en las aplicaciones prácticas se suele cortar la Serie de Fourier para cierto valor de *n*, para el cual se obtienen aproximaciones bastante buenas de la solución.

De esta manera, la función *f(x)* puede aproximarse por la ***Serie Finita de Fourier***, también llamada ***n-ésima Suma Parcial de la Serie de Fourier***:

$$f(x) \approx S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(k\omega x) + b_k \operatorname{sen}(k\omega x) \right), \quad \text{con } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Series de Fourier: Funciones no periódicas en [-L,L]





Si la función *f*(t) no es periódica pero está definida en el intervalo [-L, L], la Serie de Fourier converge fuera de (-L, L) a la extensión periódica de la función.

Si *f*(-L) = *f*(L), la extensión periódica de *f* será continua en *t* = ± L (y en ± 3L, ± 5L, ...). En estos puntos la Serie de Fourier converge a *f*(t).

Si *f*(-L) ≠ *f*(L), la extensión periódica de *f* será discontinua en *t* = ± L (y en ± 3L, ± 5L, ...). En estos puntos la Serie de Fourier converge al punto medio:

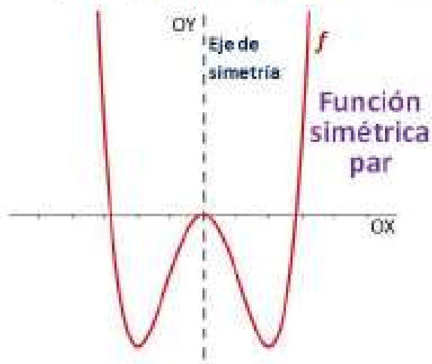
$$S(\pm L) = \frac{f(L) + f(-L)}{2}$$

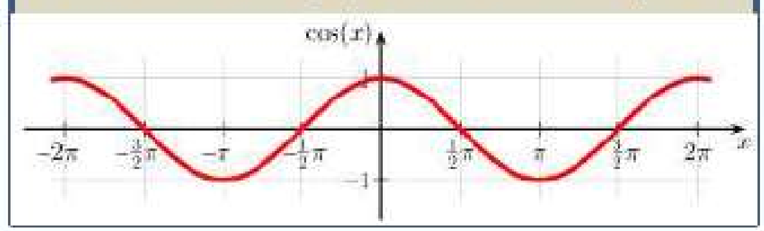
Series de Fourier: Simetría

a) Función con simetría Par:

Una función *f(x)* tiene simetría par si verifica que: $f(-x) = f(x)$

(La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje vertical)





Si *f(x)* es una función periódica de período *T*, y *f(x)* tiene ***simetría par***, entonces:

$$\begin{cases} \dfrac{a_0}{2} = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(x)\,dx \\ a_n = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(x)\cos(n\omega x)\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases} \quad ; \qquad b_n = 0$$

y la Serie de Fourier de *f(x)* presenta únicamente cosenos para todos los valores de *n*. Es decir:

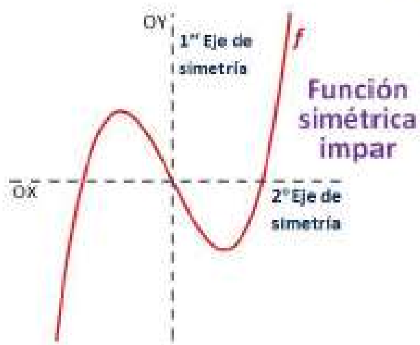
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega x)\right), \qquad \text{con } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Series de Fourier: Simetría

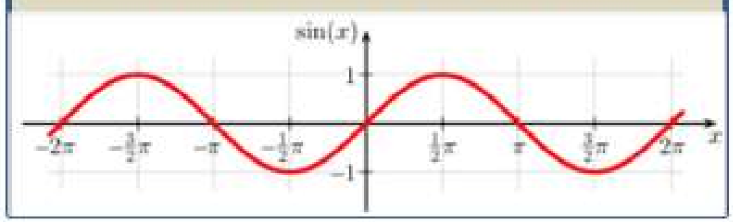
b) <u>Función con simetría Impar:</u>

Una función *f(x)* tiene simetría impar si verifica que: $f(-x) = -f(x)$

(La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen de coordenadas)



La función sen(x) es una función impar



Si *f(x)* es una función periódica de período *T*, y *f(x)* tiene ***simetría impar***, entonces:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = 0 \end{cases} \quad ; \qquad b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\ \mathrm{sen}(n\omega x)dx, \ \ n = 1, 2, \ldots$$

y la Serie de Fourier de *f(x)* presenta únicamente senos para todos los valores de *n*. Es decir:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n \ \mathrm{sen}(n\omega x)\right), \quad \mathrm{con}\ \ \omega = \frac{2\pi}{T}}$$

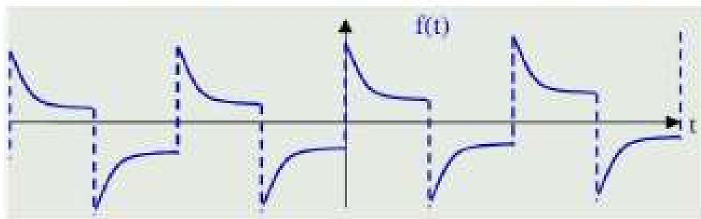
Series de Fourier: Simetría

c) ***Función con simetría de Media Onda:***

Una función periódica *f(x)* de período *T* tiene simetría de media onda si verifica que:

$$f\left(x+\frac{T}{2}\right)=-f(x)$$

(Los valores de *f(x)* negativos son un reflejo de los valores positivos pero desplazados medio período (hacia adelante o hacia atrás))



Si *f(x)* es una función periódica de período *T*, y *f(x)* tiene ***simetría de media onda***, entonces:

$$a_n=\begin{cases}0, & n \text{ par}\\ \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(x)\cos(n\omega x)\,dx, & n \text{ impar}\end{cases} \quad ; \quad b_n=\begin{cases}0, & n \text{ par}\\ \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(x)\,\text{sen}(n\omega x)\,dx, & n \text{ impar}\end{cases}$$

y la Serie de Fourier de *f(x)* presenta únicamente senos y cosenos para valores de *n* impares. Es decir:

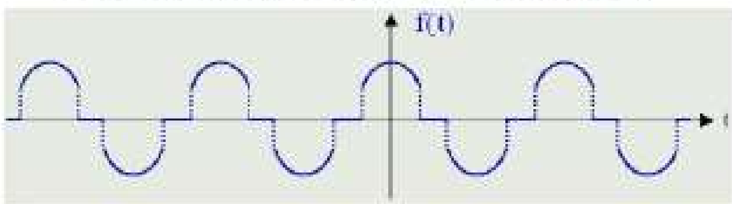
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\omega x)+b_n\,\text{sen}(n\omega x)\right). \quad \text{con } n \text{ impar y } \omega=\frac{2\pi}{T}$$

Series de Fourier: Simetría

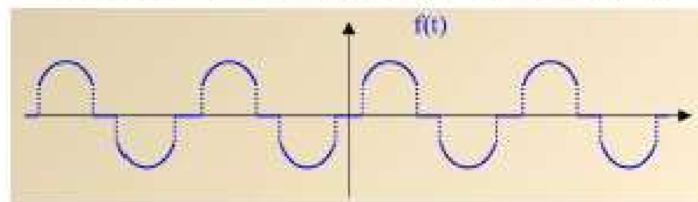
d) Función con simetría de Cuarto de Onda:

Si una función periódica *f(x)* de período *T* tiene simetría de media onda y además es una función par o impar, se dice que tiene simetría de cuarto de onda par o impar, respectivamente.

Simetría con cuarto de onda par



Simetría con cuarto de onda impar



Si *f(x)* es una función periódica de período *T*, y *f(x)* tiene ***simetría de cuarto de onda par***, entonces:

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \dfrac{8}{T}\displaystyle\int_0^{T/4} f(x)\cos(n\omega x)\,dx, & n \text{ impar} \end{cases} \quad ; \quad b_n = 0$$

y la Serie de Fourier de *f(x)* presenta únicamente cosenos para valores de *n* impares. Es decir:

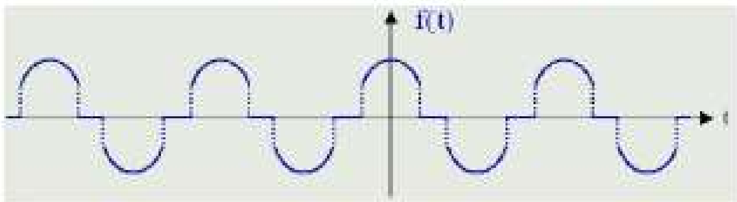
$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\omega x)\right), \quad \text{con } n \text{ impar y } \omega = \frac{2\pi}{T}}$$

Series de Fourier: Simetría

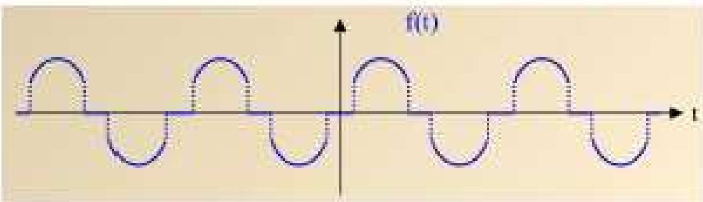
d) Función con simetría de Cuarto de Onda:

Si una función periódica *f(x)* de período *T* tiene simetría de media onda y además es una función par o impar, se dice que tiene simetría de cuarto de onda par o impar, respectivamente.

Simetría con cuarto de onda par



Simetría con cuarto de onda impar



Si *f(x)* es una función periódica de período *T*, y *f(x)* tiene ***simetría de cuarto de onda impar***, entonces:

$$a_n = 0 \;;\quad b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \dfrac{8}{T}\displaystyle\int_0^{T/4} f(x)\,\mathrm{sen}(n\omega x)\,dx, & n \text{ impar} \end{cases}$$

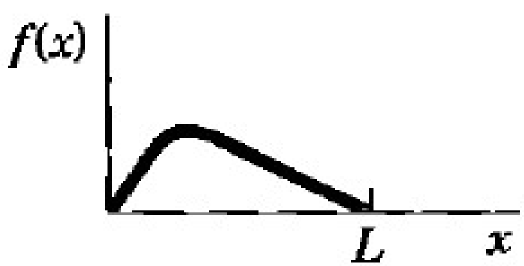
y la Serie de Fourier de *f(x)* presenta únicamente senos para valores de *n* impares. Es decir:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n\, \mathrm{sen}(n\omega x) \right), \qquad \text{con } n \text{ impar y } \omega = \frac{2\pi}{T}}$$

Series de Fourier: Desarrollos de medio rango

Hasta ahora, han sido consideradas funciones periódicas, por lo cual aplicar la teoría de Fourier para hacer un desarrollo en series de senos y cosenos ha sido directo.

Sin embargo, en muchas situaciones físicas no se tienen funciones periódicas, como por ejemplo, el caso de la siguiente figura:



f(x) podría ser la distorsión de una cuerda de un violín de longitud L, o la temperatura de una barra de metal de longitud L, etc.

Resulta muy útil en estos casos, **extender la función no periódica** en una función periódica para calcular su **representación en Serie de Fourier**.

Series de Fourier: Desarrollos de medio rango

La **serie de Fourier** de esta nueva función periódica representaría entonces correctamente a la función no periódica en el intervalo deseado.

Pero… ¿Existe una única manera de expandir la función no periódica?

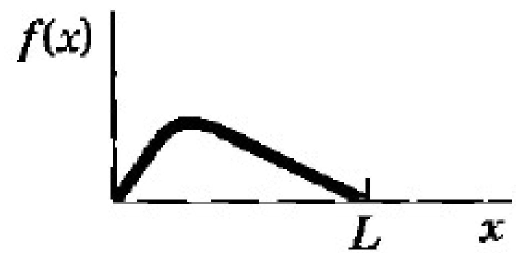
Claramente no. Existen varias maneras de ampliar la función para que resulte periódica. Una posibilidad es extender la función original con el mismo período, pero su Serie de Fourier contendrá senos y cosenos.

Normalmente es preferible usar alguna de las **simetrías** vistas anteriormente para la extensión periódica, en lugar de una extensión periódica cualquiera, para obtener algunos de los **coeficientes de Fourier igual a cero**, lo que puede proporcionar una expansión más sencilla de la serie de Fourier correspondiente.

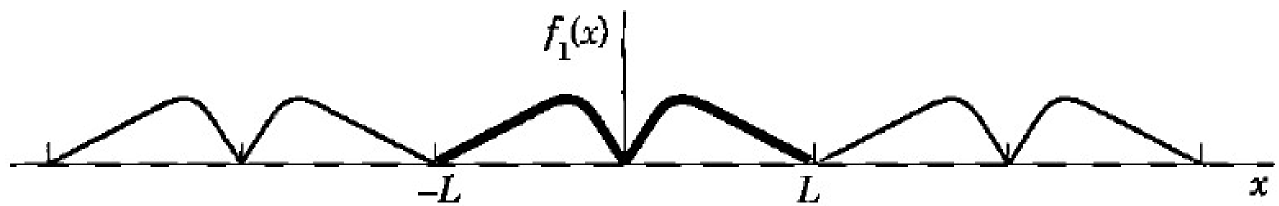
Series de Fourier: Desarrollos de medio rango

Por ejemplo, la función *f(x)* de la figura, puede ser ampliada de las siguientes maneras:

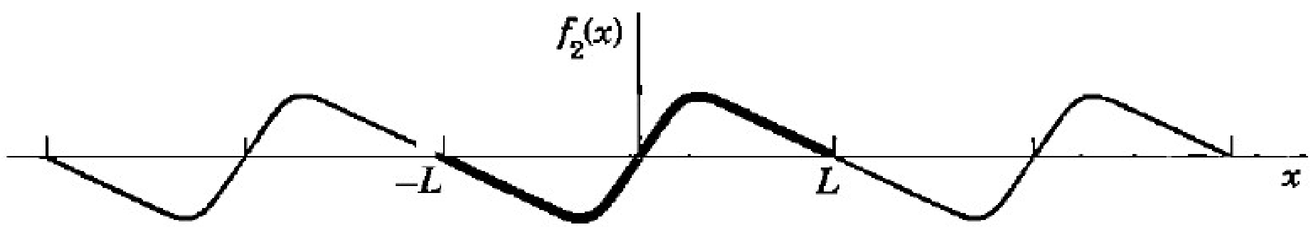
Función no periódica original definida en el intervalo [0,L].



Función extendida como ***función periódica par*** *de período 2L.*



Función extendida como ***función periódica impar*** *de período 2L.*



Series de Fourier: Desarrollos de medio rango

Podemos ver que las dos extensiones anteriores tienen período 2*L*. Este hecho motiva el nombre de ***expansión de medio rango***, recordando que la función no periódica *f(x)* es dada (y presenta interés físico) solo en la mitad del rango completo 2*L*.

Si la función no periódica se extiende mediante una **función par**, entonces:

$$b_n = 0 \quad \text{y} \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega x) \right), \qquad \text{con } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Si la función no periódica se extiende mediante una **función impar**, entonces:

$$a_0 = 0, a_n = 0 \quad \text{y} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \operatorname{sen}(n\omega x) \right), \qquad \text{con } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Series de Fourier: Forma Exponencial

Dado que el desarrollo en Series de Fourier de una función periódica *f(x)* contiene en general tanto senos como cosenos, y tiene la forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \operatorname{sen}(n\omega x) \right), \quad \text{con } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

es posible entonces, escribir la expresión anterior en una forma más compacta, utilizando una exponencial compleja, lo cual muchas veces simplifica los cálculos.

Para obtener la forma compleja de la Serie de Fourier se utilizan las siguientes Fórmulas de Euler:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \operatorname{sen}(x) \qquad \text{y} \qquad e^{-ix} = \cos(x) - i \operatorname{sen}(x)$$

Series de Fourier: Forma Exponencial

La forma compleja de la Serie de Fourier es:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(c_n e^{in\omega x} \right), \qquad \text{con } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

donde c_n son denominados **coeficientes complejos de Fourier de *f(x)***.

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega x} dx, \qquad n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots$$

(Observar que el índice n varía entre menos infinito y más infinito)

Series de Fourier: Relación entre los Coeficientes

Los coeficientes complejos de Fourier c_n están relacionados con los coeficientes de Fourier a_n y b_n de la siguiente manera:

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

veamos que: $c_0 = \dfrac{a_0}{2}$

y por lo tanto:

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$b_n = i\left(c_n - c_{-n}\right), \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Análisis Espectral

En la serie compleja de Fourier dada por: $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(c_n e^{in\omega x}\right)$, con $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$

los pares ordenados (ω_n, c_n), con $n\in Z$ y $\omega_n=\dfrac{2\pi}{T}n=n\omega_1$

representan la función *f(x)* en el ***dominio de la frecuencia***.

Espectro → es la representación gráfica de una señal en el dominio de la frecuencia.

Análisis Espectral

A partir de los coeficientes complejos de Fourier c_n de una función periódica, es posible calcular el espectro de la función.

**** Espectro en Amplitud (o de Módulo):***
(representación gráfica de módulos de los coeficientes c_n)

$$|c_n| = |c_{-n}| = \sqrt{c_n c_{-n}} = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^{\,2} + b_n^{\,2}}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

- *El valor $|c_n|$ es la amplitud del n-ésimo armónico afectado por el factor 0.5.*

- *El espectro de módulo es simétrico respecto al eje de ordenadas.*

Análisis Espectral

*** Teorema de Parseval:**

Sea f(x) una función periódica con período T, continua a trozos, y tal que en cada punto existen las derivadas por derecha y por izquierda, y sean c_n los coeficientes complejos del desarrollo en serie de Fourier. Entonces se cumple que:

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left(f(x)\right)^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2}$$

Análisis Espectral

*** Teorema de Parseval (Interpretación):** $\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}(f(x))^2\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$

La integral es proporcional a la potencia media de la señal sobre un período.

Por lo tanto, la potencia contenida en una señal puede evaluarse a partir de los coeficientes de su correspondiente serie compleja de Fourier.

La contribución relativa de las diferentes frecuencias se obtiene observando la representación de los $|c_n|$ *en función de* n.

Dado que $|c_n| = |c_{-n}|$ *es posible considerar sólo los coeficientes con n positivo:*

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}(f(x))^2\,dx = c_0^{\,2} + \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2$$

Análisis Espectral

Espectro

Conjunto de frecuencias que componen la señal

Ancho de banda absoluto

Ancho del espectro

Ancho de banda efectivo

Banda limitada de frecuencias que contiene la mayor parte de la energía

Componente de continua

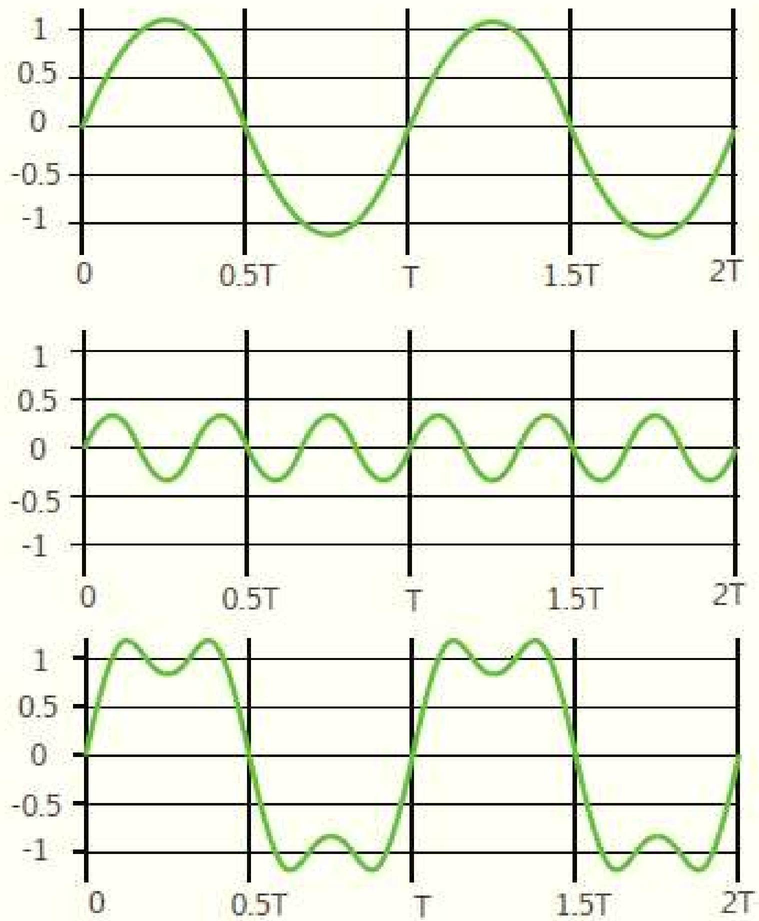
Componente de frecuencia cero

Dominios del tiempo y de la frecuencia

Suma de componentes de frecuencia

Si las componentes de una señal tienen frecuencias múltiplos de una frecuencia dada, ésta se denomina **frecuencia fundamental**

El período de la señal resultante es el período de la frecuencia fundamental

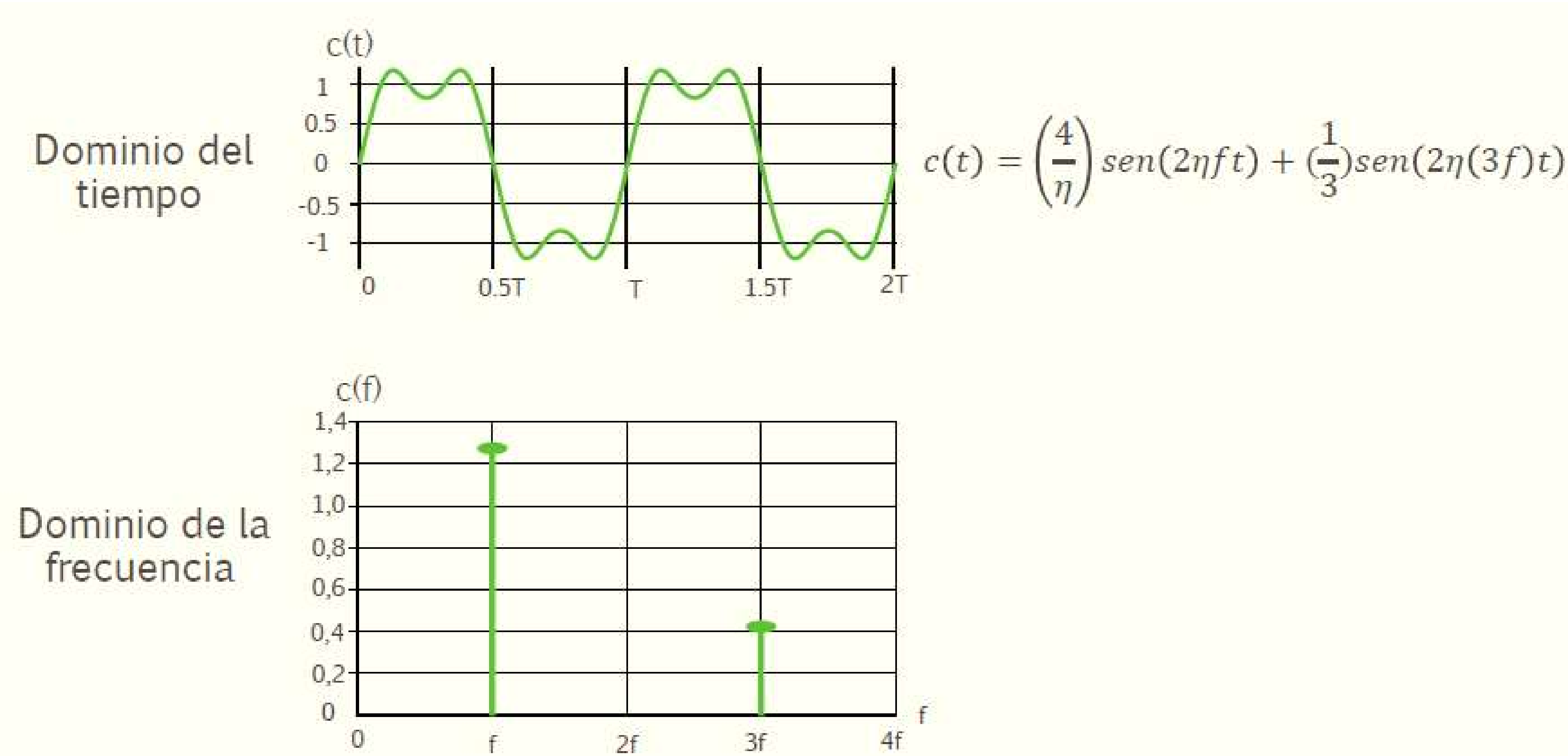


$$a(t) = (\frac{4}{\eta}) sen(2\eta f t)$$

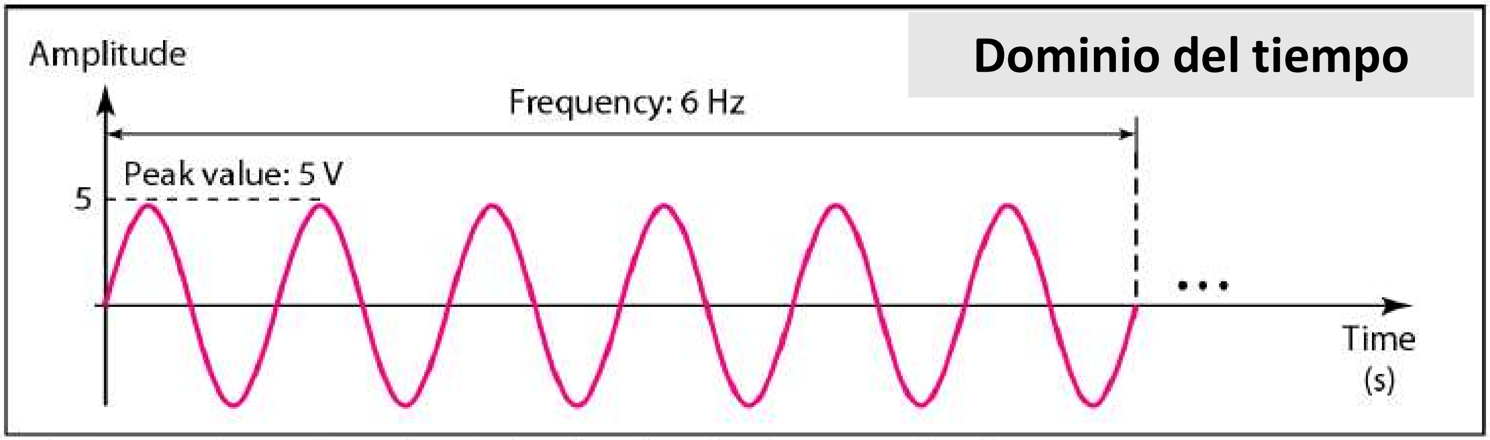
$$b(t) = (\frac{1}{3}) sen(2\eta(3f)t)$$

$$c(t) = a(t) + b(t)$$

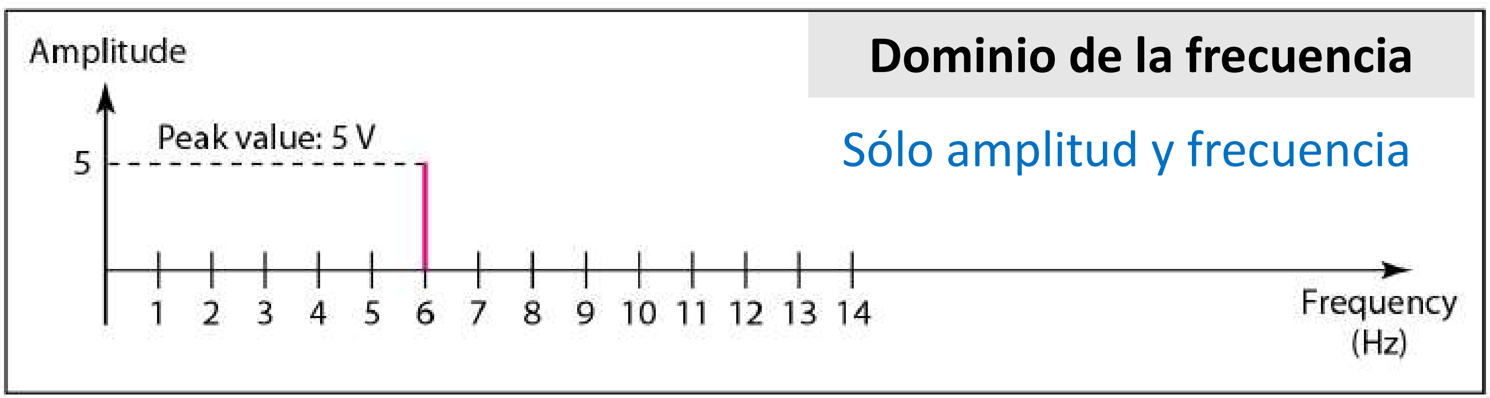
Dominios del tiempo y de la frecuencia



Dominios del tiempo y de la frecuencia



a. A sine wave in the time domain (peak value: 5 V, frequency: 6 Hz)

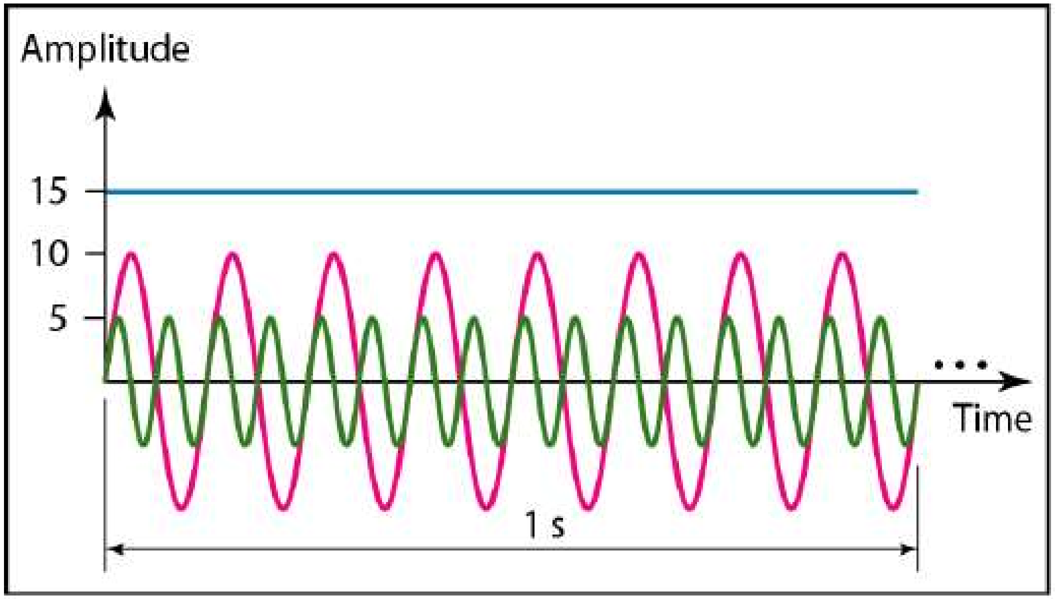


b. The same sine wave in the frequency domain (peak value: 5 V, frequency: 6 Hz)

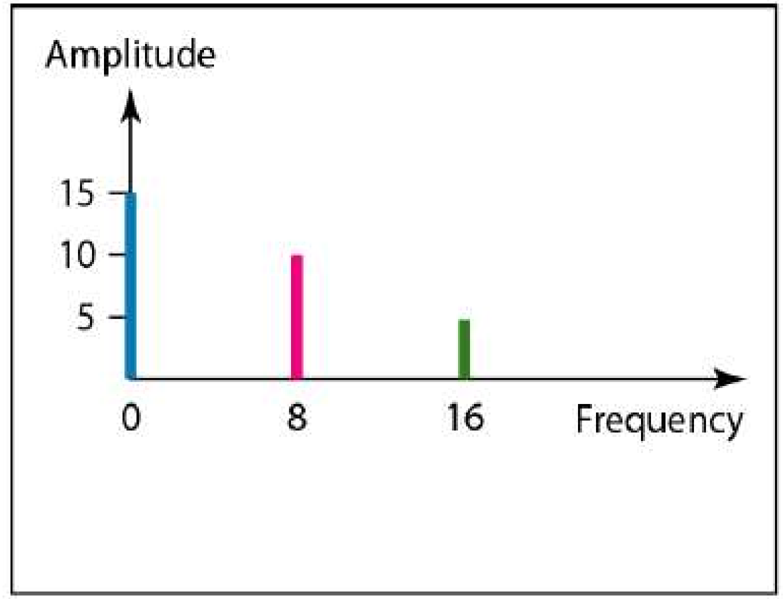
Dominio de la frecuencia para una onda sinusoidal

Dominios del tiempo y de la frecuencia

Dominio de la frecuencia para tres ondas sinusoidales



a. Time-domain representation of three sine waves with frequencies 0, 8, and 16



b. Frequency-domain representation of the same three signals

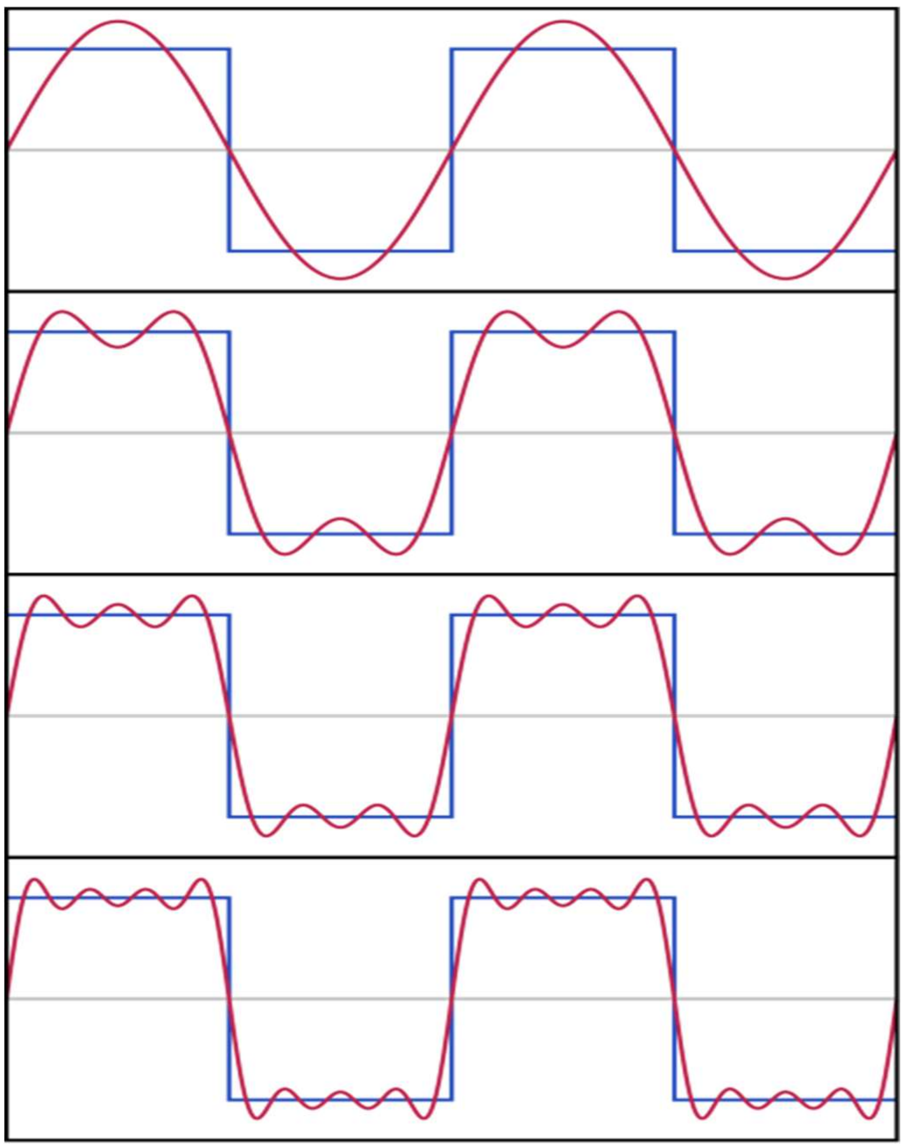
El dominio de la frecuencia es más fácil de graficar y transmite exactamente la misma información que se puede encontrar en el dominio del tiempo y de una manera inmediata.

Dominios del tiempo y de la frecuencia

- ❖Los cambios cortos en tiempo se trasladan en altas frecuencias.
- ❖Los cambios en largos espacios de tiempo se trasladan a bajas frecuencias.

- ❖Si una señal es continua (no cambia) su frecuencia es cero.
- ❖Si la señal cambia instantáneamente su frecuencia es infinita.

Dominios del tiempo y de la frecuencia



Aproximación con 1 término

Aproximación con 4 términos

Aproximación con 5 términos

Aproximación con 7 términos