# ANÁLISIS NUMÉRICO

Ingeniería en Sistemas de Información

3er año - Anual

Docentes: Prof. Diego Amiconi
Prof. Marcelo Cappelletti
Ay. Demian Bogado

INGENIERÍA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN
U.T.N. F.R.L.P.

# ANÁLISIS NUMÉRICO

## Unidades Temáticas:

- **UNIDAD Nº 1:** "Señales continuas y su representación por medio de Series y Transformadas de Fourier"
- **UNIDAD Nº 2:** "Fundamentos de Análisis de Variable Compleja"
- **UNIDAD Nº 3:** "Transformada de Laplace. Aplicación a la Resolución de Ecuaciones Diferenciales"
- **UNIDAD Nº 4: "Transformada Z. Aplicación a la Resolución de Ecuaciones en Diferencias"**

INGENIERÍA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN
U.T.N. F.R.L.P.

# ANÁLISIS NUMÉRICO

- UNIDAD Nº 4: "Transformada Z. Aplicación a la Resolución de Ecuaciones en Diferencias"

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{a^n x[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(a^{-1}z)^{-n} \\ &= X(a^{-1}z) \end{aligned}$$

- UNIDAD Nº 4: “Transformada Z. Aplicación a la Resolución de Ecuaciones en Diferencias”

**CONTENIDOS:**

a) **Señales de tiempo continuo y de tiempo discreto.**
b) **Definición de Transformada Z.**
c) **Transformada Z de funciones sencillas.**
d) **Propiedades.**
e) **Transformada Z inversa. Uso de fracciones simples.**
f) **Resolución de ecuaciones en diferencias.**

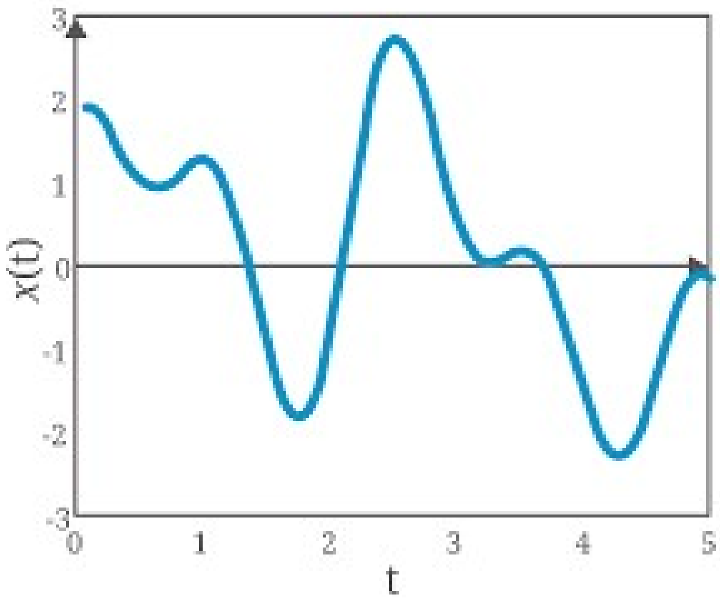
- UNIDAD Nº 4: “Transformada Z. Aplicación a la Resolución de Ecuaciones en Diferencias”

**OBJETIVOS:**

Suministrar al estudiante las herramientas indispensables para el tratamiento de problemas definidos en el dominio del tiempo discreto, y su relación con la Tranformada de Laplace.

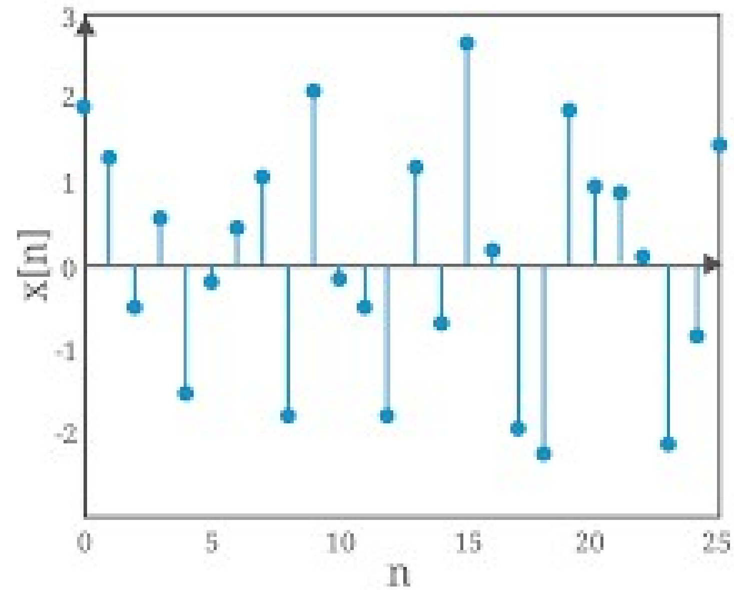
# Señales de tiempo continuo y de tiempo discreto

## Señales en tiempo continuo:




Las **señales en tiempo continuo** son aquellas en las que la variable independiente puede tomar infinitos valores en un dado intervalo.

## Señales en tiempo discreto:

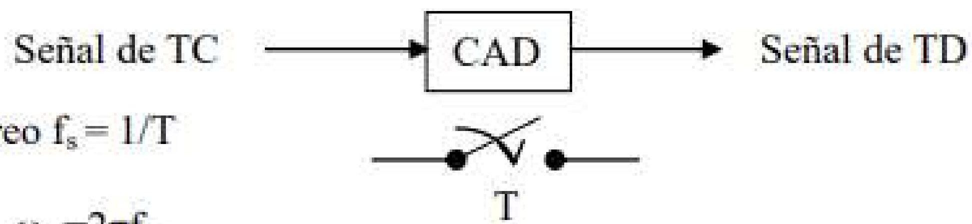



Las **señales en tiempo discreto** están definidas sólo en determinados instantes de tiempo. En este caso, la variable independiente toma únicamente un número finito de valores en un dado intervalo, los cuales suelen estar espaciados de manera uniforme.

$$x(k) = \{x(k)\} = \{\ldots, x(-1), x(0), x(1), \ldots\}$$

# Señales de tiempo continuo y de tiempo discreto

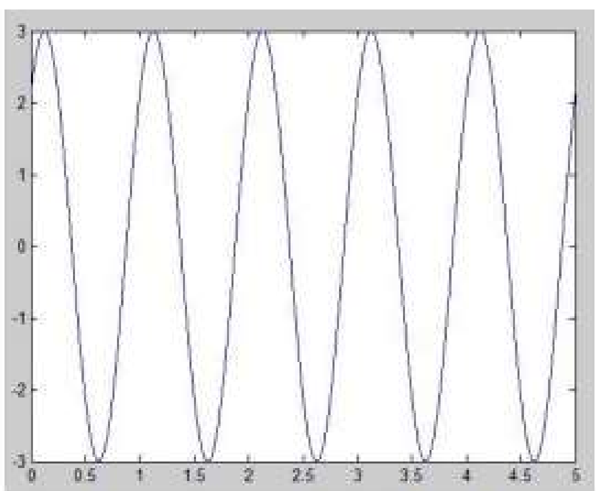
Supongamos una señal de tiempo continuo *f*(*t*) y necesitamos discretizarla. Para ello debemos tomar muestras de la señal por ejemplo con una llave o un conversor Analógico/Digital (CAD), con un período de muestreo *T* constante. La inversa del periodo *T* es la frecuencia de muestreo *fs* :



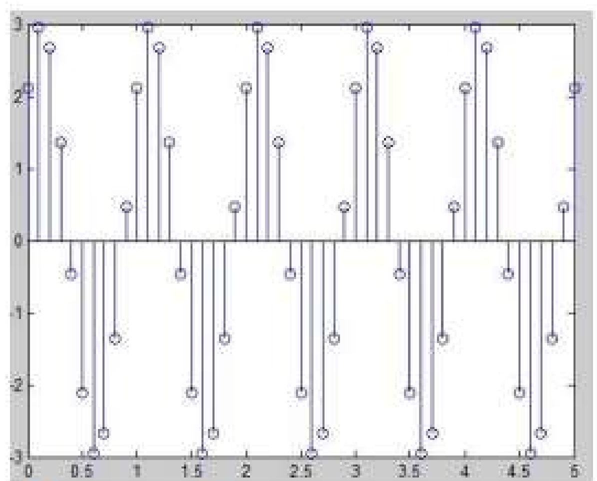

Frecuencia de muestreo $f_s = 1/T$

$\omega_s = 2\pi f_s$

Ejemplo:



a) Función analógica (f(t) ∃ ∀ t>0)

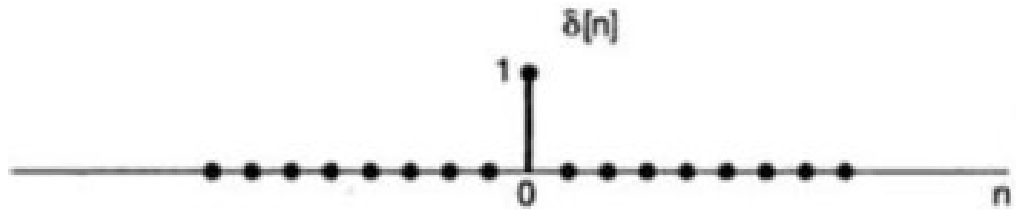


b) Función discreta (muestreo de f(t))

# Funciones especiales en tiempo discreto

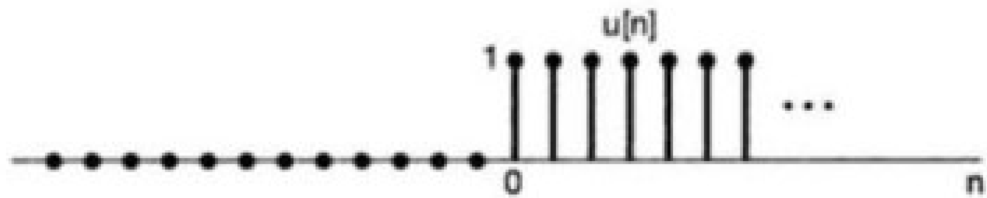
- Impulso unitario discreto (o muestra unitaria)

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$




- Escalón unitario discreto

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$




Relación entre ambas funciones:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

# Definición de Transformada Z

La transformada **z**, en sistemas discretos en el tiempo, desempeña un papel muy similar al de la transformada de Laplace en los sistemas continuos en el tiempo.

La transformada de Laplace de una función $x(t)$, está definida como:

$$X(S) = F(S) = \int_0^\infty x(t)e^{-St}\,dt$$

Cualquier función continua $x(t)$, muestreada periódicamente, se puede expresar matemáticamente, para $t \geq 0$, mediante la ecuación:

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)$$

Si se desarrolla la sumatoria planteada en la ecuación anterior se obtiene:

$$x^*(t) = x(0)\delta(t) + x(T)\delta(t-T) + x(2T)\delta(t-2T) + \cdots$$

Al tomar la transformada de Laplace a la última expresión resulta:

$$X^*(S) = x(0) + x(T)e^{-TS} + x(2T)e^{-2TS} + \cdots$$

# Definición de Transformada Z

Es decir:

$$X^*(S) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTS}$$

Si se introduce ahora una nueva variable $z$ definida como:

$$z = e^{TS} \qquad o \qquad S = \frac{1}{T}\ln(z)$$

La ecuación se puede escribir en la siguiente forma:

$$X^*(S)\big|_{S=\frac{1}{T}\ln(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}$$

# Definición de Transformada Z

Haciendo ahora:

$$X^*(S)\Big|_{S=\frac{1}{T}\ln(z)} = X(z)$$

Se obtiene:

$$\boxed{X(z) = \Im[x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}}$$

**Transformada Z de la función continua x(t)**

Así mismo, para una secuencia de números $x(k)$, la transformada $z$ es:

$$\boxed{X(z) = \Im[x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}}$$

# Transformada Z de funciones sencillas

* Transformada Z de la **función escalón unitario**: $x(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

Por definición:

$$X(z) = \Im[x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \qquad \text{Pero:} \qquad x(kT) = 1$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots$$

Por ser una serie geométrica con a = 1 y razón r = $z^{-1}$:

$$\boxed{X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}}$$

# Transformada Z de funciones sencillas

* Transformada Z de la **función rampa**: $x(t) = \begin{cases} At & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

En este caso: $x(kT) = AkT$ para $k = 0,1,2$ ..., entonces:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} AkTz^{-k} = AT\sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k}$$

$$X(z) = AT(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \cdots) = ATz^{-1}(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \cdots)$$

$$\boxed{X(z) = \frac{ATz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{ATz}{(z - 1)^2}}$$

# Transformada Z de funciones sencillas

* Transformada Z de la **función exponencial**: $x(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k}$$

$$X(z) = 1 + e^{-aT}z^{-1} + e^{-2aT}z^{-2} + e^{-3aT}z^{-3} + \cdots$$

$$\boxed{X(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}}$$

# Transformada Z de funciones sencillas

* Transformada Z de la **función polinomial**: $x(k) = \begin{cases} a^k & k = 0, 1, 2 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k}$$

$$X(z) = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + a^2 z^{-2} + \cdots$$

$$\boxed{X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}}$$

# Tabla de Transformada Z

| Nº | $f(t)$ F. Continua | $f(kT)$ F. Discreta | $F(S)$ T. de Laplace | $F(z)$ Transformada z |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\delta(t)$ | $\delta(kT)$ | $1$ | $1$ |
| 2 | $u(t)$ | $u(kT)$ | $\frac{1}{S}$ | $\frac{z}{z-1}$ |
| 3 | $t$ | $kT$ | $\frac{1}{S^2}$ | $\frac{Tz}{(z-1)^2}$ |
| 4 | $t^2$ | $(kT)^2$ | $\frac{2}{S^3}$ | $\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$ |
| 5 | $t^3$ | $(kT)^3$ | $\frac{6}{S^4}$ | $\frac{T^3z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$ |
| 6 | $e^{-at}$ | $e^{-akT}$ | $\frac{1}{S+a}$ | $\frac{z}{z-e^{-aT}}$ |
| 7 | $te^{-at}$ | $kTe^{-akT}$ | $\frac{1}{(S+a)^2}$ | $\frac{Te^{-aT}z}{(z-e^{-aT})^2}$ |
| 8 | $t^2e^{-at}$ | $(kT)^2e^{-akT}$ | $\frac{2}{(S+a)^3}$ | $\frac{T^2e^{-aT}z(z+e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^3}$ |
| 9 | $sin(bt)$ | $sin(bkT)$ | $\frac{b}{S^2+b^2}$ | $\frac{zsin(bT)}{z^2-2zcos(bT)+1}$ |
| 10 | $cos(bt)$ | $cos(bkT)$ | $\frac{S}{S^2+b^2}$ | $\frac{z^2-zcos(bT)}{z^2-2zcos(bT)+1}$ |

# Propiedades de la Transformada Z

* ***Multiplicación por una constante:***

Si $X(z)$ es la transformada $z$ de $x(t)$, entonces:

$$\boxed{\Im\{ax(t)\} = a\Im\{x(t)\} = aX(z)}$$

* ***Propiedad de Linealidad:***

Si $X(z)$ es la transformada $z$ de $x(t)$, e $Y(z)$ es la transformada $z$ de $y(t)$, entonces:

$$\boxed{\Im\{ax(t) + by(t)\} = aX(z) + bY(z)}$$

* ***Multiplicación por $a^k$:***

Si $X(z)$ es la transformada $z$ de $x(t)$, entonces:

$$\boxed{\Im\{a^k x(t)\} = X\left(\frac{z}{a}\right)}$$

# Propiedades de la Transformada Z

* ***Propiedad de Traslación:***

Si $X(z)$ es la transformada $z$ de $x(t)$ y $x(t) = 0$ para $t < 0$, entonces:

$$\Im\{x(t-nT)\} = z^{-n}X(z)$$

$$\Im\{x(t+nT)\} = z^{n}\left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}\right]$$

Siendo $n = 1, 2, 3 \ldots$

* ***Propiedad de Traslación Compleja:***

Si $X(z)$ es la transformada $z$ de $x(t)$, entonces:

$$\Im\{e^{-at}x(t)\} = X(ze^{aT})$$

# Propiedades de la Transformada Z

* ***Teorema del Valor Inicial:***

Si $X(z)$ es la transformada $z$ de $x(t)$, el valor inicial,

$x(0)$ de $x(t)$ ó de $x(k)$ está dado por:

$$\boxed{x(0) = \lim_{t\to 0} x(t) = \lim_{z\to\infty} X(z)}$$

* ***Teorema del Valor Final:***

Si $X(z)$ es la transformada $z$ de $x(t)$, el valor $x(\infty)$ de $x(t)$ está dado por:

$$\boxed{x(\infty) = \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)}$$

# Tabla de Propiedades de la Transformada Z

| Nº | $x(t)$ ó $x(kT)$ | Transformada $z$ |
|---|---|---|
| 1 | $ax(t)$ | $aX(z)$ |
| 2 | $ax(t)+by(t)$ | $aX(z)+bY(z)$ |
| 3 | $x(t+T)$ ó $x(k+1)$ | $zX(z)-zx(0)$ |
| 4 | $x(t+2T)$ | $z^2X(z)-z^2x(0)-zx(T)$ |
| 5 | $x(k+2)$ | $z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)$ |
| 6 | $x(t+kT)$ | $z^kX(z)-z^kx(0)-z^{k-1}x(T)-\cdots zx(kT-T)$ |
| 7 | $x(t-k)$ | $z^{-k}X(z)$ |
| 8 | $x(n+k)$ | $z^kX(z)-z^kx(0)-z^{k-1}x(1)-\cdots zx(k-1)$ |
| 9 | $x(n-k)$ | $z^{-k}X(z)$ |
| 10 | $e^{-at}x(t)$ | $X(ze^{-aT})$ |
| 11 | $e^{-ak}x(k)$ | $X(ze^{a})$ |
| 12 | $a^kx(k)$ | $X(z/a)$ |
| 13 | $tx(t)$ | $-T\dfrac{d[X(z)]}{dz}$ |
| 14 | $x(0)$ | $\lim_{z\to\infty} X(z)$ |
| 15 | $x(\infty)$ | $\lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)]$ |

# Transformada Z inversa

La transformada $z$ inversa de una función $X(z)$ da como resultado la función muestreada $x^*(t)$ y no la función continua $x(t)$.

Al evaluar la transformada $z$ inversa se obtienen los valores de la función $x(k)$ en los instantes de muestreo para $k = 0, 1, 2 \cdots$ .En consecuencia, la función muestreada $x(k)$ obtenida a partir de la transformada $z$ inversa es única pero, es posible que exista más de una función continua $x(t)$ a partir de la cual se pueda derivar la misma función $x(k)$

**La notación para la transformada $z$ inversa de una función $X(z)$ es:**

$$x(k) = \Im^{-1}\{X(z)\}$$

# Transformada Z inversa

## Método de fracciones simples

El método consiste en expandir la función $X(z)$ en fracciones parciales si $X(z)$ no tiene ceros en el origen ó $X(z)/z$ si $X(z)$ tiene ceros en el origen, de modo que a cada una de ellas se le pueda evaluar su transformada $z$ inversa, a partir de una tabla de transformada $z$.

Sea:

$$X(z) = \frac{b_o z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots b_{m-1} z + b_m}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n)}$$

Si $b_m = 0$ la función se puede expandir en fracciones parciales así:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{a_1}{z - p_1} + \frac{a_2}{z - p_2} + \cdots \frac{a_n}{z - p_n}$$

En donde:

$$a_i = (z - p_i) \frac{X(z)}{z} \bigg|_{z = p_i}$$

# Transformada Z inversa

## Método de fracciones simples

Si $X(z)$ tiene un polo de multiplicidad $r$ es decir, si $X(z)$ es de la forma:

$$X(z) = \frac{N(z)}{(z-p_1)(z-p_2)^r}$$

Su expansión en fracciones parciales se puede escribir como:

$$X(z) = \frac{a_1}{z-p_1} + \frac{a_{21}}{z-p_2} + \frac{a_{22}}{(z-p_2)^2} + \cdots \frac{a_{2r}}{(z-p_2)^r}$$

En donde:

$$a_1 = (z-p_1)X(z)|_{z=p_1}$$

$$a_{2j} = \frac{1}{(r-j)!}\frac{d^{r-j}}{dz^{r-j}}[(z-p_2)^r X(z)]_{z=p_2}$$

# Transformada Z inversa: Ejemplos

## EJEMPLO 1: Método de fracciones simples

Hallar la transformada $z$ inversa de:

$$X(z) = \frac{(z+2)(z-1)}{(z+1)(z+3)(z-2)}$$

**SOLUCIÓN:** Como $X(z)$ no tiene ceros en el origen, se expande $X(z)$ en fracciones parciales.

$$X(z) = \frac{(z+2)(z-1)}{(z+1)(z+3)(z-2)} = \frac{a_1}{z+1} + \frac{a_2}{z+3} + \frac{a_3}{z-2}$$

$$a_1 = (z+1)X(z)|_{z=-1} = \frac{1}{3}$$

$$a_2 = (z+3)X(z)|_{z=-3} = \frac{2}{5}$$

$$a_3 = (z-2)X(z)|_{z=2} = \frac{4}{15}$$

$$X(z) = \frac{1/3}{z+1} + \frac{2/5}{z+3} + \frac{4/15}{z-2}$$

# Transformada Z inversa: Ejemplos

## EJEMPLO 1: Método de fracciones simples

Utilizando tablas de transformada z se encuentra que:

$$x(k) = \frac{1}{3}(-1)^{k-1} + \frac{2}{5}(-3)^{k-1} + \frac{4}{15}(2)^{k-1}$$

Para diferentes valores de $k$ se obtiene:

$x(0) = 0$ $\quad$ $x(3) = 5$

$x(1) = 1$ $\quad$ $x(4) = -9$

$x(2) = -1$ $\quad$ $x(5) = 37$

# Transformada Z inversa: Ejemplos

## EJEMPLO 2: Método de fracciones simples

Hallar la transformada $z$ inversa de:

$$X(z) = \frac{z(z+0.5)(z+0.8)}{(z-0.2)(z-0.8)(z-1)}$$

**SOLUCIÓN:** En este caso $X(z)$ tiene un cero en el origen. Entonces se expande $X(z)/z$ en fracciones parciales.

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z(z+0.5)(z+0.8)}{(z-0.2)(z-0.8)(z-1)} = \frac{a_1}{(z-0.2)} + \frac{a_2}{(z-0.8)} + \frac{a_3}{(z-1)}$$

$$a_1 = (z-0.2)\frac{x(z)}{z}\bigg|_{z=0.2} = \frac{35}{24} \qquad a_2 = (z-0.8)\frac{x(z)}{z}\bigg|_{z=0.8} = -\frac{52}{3}$$

$$a_3 = (z-1)\frac{x(z)}{z}\bigg|_{z=1} = \frac{135}{8}$$

# Transformada Z inversa: Ejemplos

## EJEMPLO 2: Método de fracciones simples

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{35}{24}\left[\frac{1}{(z-0.2)}\right] - \frac{52}{3}\left[\frac{1}{(z-0.8)}\right] + \frac{135}{8}\left[\frac{1}{(z-1)}\right]$$

$$X(z) = \frac{35}{24}\left[\frac{z}{(z-0.2)}\right] - \frac{52}{3}\left[\frac{z}{(z-0.8)}\right] + \frac{135}{8}\left[\frac{z}{(z-1)}\right]$$

Utilizando la tabla de transformada $z$ se obtiene:

$$x(k) = \frac{35}{24}(0.2)^k - \frac{52}{3}(0.8)^k + \frac{135}{8}(1)^k \qquad k \geq 0$$

Entonces:

$x(0) = 0.00$ $\quad$ $x(2) = 3.30$ $\quad$ $x(4) = 8.012$ $\quad$ $x(6) = 11.195$

$x(1) = 1.00$ $\quad$ $x(3) = 5.84$ $\quad$ $x(5) = 9.777$ $\quad$ $x(\infty) = 16.875$

# Transformada Z inversa: Ejemplos

## EJEMPLO 3: Método de fracciones simples

Hallar la transformada **z** inversa de:

$$X(z) = \frac{1}{z^3(z-1)^2}$$

**SOLUCIÓN:** La expansión en fracciones parciales de $X(z)$ es de la forma:

$$X(z) = \frac{a_{11}}{z} + \frac{a_{12}}{z^2} + \frac{a_{13}}{z^3} + \frac{a_{21}}{z-1} + \frac{a_{22}}{(z-1)^2}$$

$$a_{11} = \frac{1}{(3-1)!}\frac{d^2}{dz^2}[z^3X(z)]_{z=0} = 3 \qquad a_{21} = \frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}[(z-1)^2X(z)]_{z=1} = -3$$

$$a_{12} = \frac{1}{(3-2)!}\frac{d}{dz}[z^3X(z)]_{z=0} = 2 \qquad a_{22} = \frac{1}{(2-2)!}[(z-1)^2X(z)]_{z=1} = 1$$

$$a_{13} = \frac{1}{(3-3)!}[z^3X(z)]_{z=0} = 1$$

Por lo tanto:

$$X(z) = \frac{3}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \frac{3}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2}$$

# Transformada Z inversa: Ejemplos

## EJEMPLO 3: Método de fracciones simples

Tomando la transformada $z$ a cada término se obtiene:

$$\Im^{-1}\left[\frac{3}{z}\right] = 3\Im^{-1}[z^{-1}] = \begin{cases} 3 & k = 1 \\ 0 & k \neq 1 \end{cases}$$

$$\Im^{-1}\left[\frac{2}{z^2}\right] = 2\Im^{-1}[z^{-2}] = \begin{cases} 2 & k = 2 \\ 0 & k \neq 2 \end{cases}$$

$$\Im^{-1}\left[\frac{1}{z^3}\right] = \Im^{-1}[z^{-3}] = \begin{cases} 1 & k = 3 \\ 0 & k \neq 3 \end{cases}$$

$$\Im^{-1}\left[\frac{3}{z-1}\right] = 3\Im^{-1}\left[\frac{1}{z-1}\right] = \begin{cases} 3 & k \geq 1 \\ 0 & k \leq 0 \end{cases}$$

$$\Im^{-1}\left[\frac{1}{(z-1)^2}\right] = \Im^{-1}\left[\frac{z}{(z-1)^2} * z^{-1}\right] = \begin{cases} k-1 & k \geq 1 \\ 0 & k \leq 0 \end{cases}$$

De las expresiones anteriores se deduce que:

$$x(0) = 0 + 0 + 0 - 0 + 0 = 0$$

$$x(1) = 3 + 0 + 0 - 3 + 0 = 0$$

$$x(2) = 0 + 2 + 0 - 3 + 1 = 0$$

$$x(3) = 0 + 0 + 1 - 3 + 2 = 0$$

$$x(4) = 0 + 0 + 0 - 3 + 3 = 0$$

$$x(5) = 0 + 0 + 0 - 3 + 4 = 1$$

$$x(6) = 0 + 0 + 0 - 3 + k - 1 = k - 4 = 2$$

Es decir:

$$x(k) = \begin{cases} k-4 & k \geq 5 \\ 0 & k = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

# Aplicación de la Transformada Z en la solución de Ecuaciones en Diferencias: Ejemplos

## EJEMPLO 4:

Resolver la ecuación:

$$4x(k) - 4x(k-1) + 2x(k-2) = u(k)$$

$$x(k) = 0 \qquad \text{Para} \quad k < 0 \qquad u(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

**SOLUCIÓN:** Tomando la transformada $z$ a cada uno de los términos de la ecuación dada, se obtiene:

$$4X(z) - 4z^{-1}X(z) + 2z^{-2}X(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$2[2 - 2z^{-1} + z^{-2}]X(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$X(z) = \frac{0.5z}{(z-1)(2-2z^{-1}+z^{-2})} = \frac{0.5z^3}{(z-1)(2z^2-2z+1)}$$

Luego, debe calcularse la Transformada Z inversa, la cual podría demostrarse que vale:

$$x(k) = 0.5 - 0.25(0.707)^k \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right) + 0.25(0.707)^k sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)$$

# Aplicación de la Transformada Z en la solución de Ecuaciones en Diferencias: Ejemplos

## EJEMPLO 5:

Resolver la ecuación:

$$x(k+2) - 3x(k+1) + 2x(k) = u(k)$$

En donde: $x(k) = 0$ para $k \leq 0$ y $u(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$

**SOLUCIÓN:** Tomando la transformada $z$ a la ecuación dada, se obtiene:

$$z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1) - 3[zX(z) - zx(0)] + 2X(z) = 1$$

$$(z^2 - 3z + 2)X(z) = z^2x(0) + zx(1) + 3zx(0) + 1$$

Según las condiciones dadas: $x(0) = 0$. Con este dato se puede calcular $x(1)$, haciendo $k = -1$ en la ecuación original así:

$$x(1) - 3x(0) + 2x(-1) = 0 \qquad x(1) = 0$$

Reemplazando $x(0)$ y $x(1)$ se obtiene:

$$(z^2 - 3z + 2)X(z) = 1 \qquad X(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

Tomando la transformada inversa $z$ resulta:

$$x(kT) = \begin{cases} (2)^{k-1} - (1)^{k-1} & k \geq 1 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$