ANÁLISIS NUMÉRICO

Práctica N° 2: Fundamentos de Análisis de Variable Compleja (Parte I)

1. REPASO DE NÚMEROS COMPLEJOS

1) Expresar cada uno de los siguientes números complejos en la forma binómica *a* + *ib* y hallar su conjugado:

1.1) $(10-4i)+(-3+5i)$

1.2) $(5+4i)(6-3i)$

1.3) $(1-2i)/(3+4i)$

1.4) $(2-3i)^2$

2) Escribir los siguientes números complejos en forma polar y representar gráficamente:

2.1) $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

2.2) $z=-\sqrt{3}+i$

2.3) $z=(1-2i)/(3+4i)$ (Usar respuesta ejercicio 1.3)

2.4) $z=(1+i)^4$

3) Hallar la solución de la siguiente ecuación. Graficar las raíces halladas:

3.1) $z^3+8=0$

4) Representar gráficamente los complejos z que verifican las siguientes relaciones:

4.1) $|z-i|=2$

4.2) $\operatorname{Re}(z)=-2,\ 0\le \operatorname{Im}(z)<5$

4.3) $\operatorname{Re}(z)<3,\ \operatorname{Im}(z)\ge -2$

4.4) $\frac{\pi}{2}<Arg(z)<\frac{3\pi}{4}$

4.5) $1\le |z|\le 4$

5) Dados $z_1 = -1 + 2i,\ z_2 = -4,\ z_3 = 3i$ **Calcular:**

5.1) $\overline{z_1} - 2z_2 + {z_3}^2$

5.2) $\operatorname{Im}\left(\frac{\operatorname{Im}(z_1)}{z_3}\right)$

2. FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

6) Hallar y graficar el dominio más amplio de la función dada y escribir la parte real y la parte imaginaria de la misma:

6.1) $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$

6.2) $f(z) = \frac{\overline{z}}{\operatorname{Im}(z)}$

6.3) $f(z) = \frac{i}{|z - i| - 3}$

6.4) $f(z) = \frac{z}{z^2 + \overline{z}^2}$

7) Determinar los siguientes límites:

7.1) $\lim\limits_{z \to 0} (\operatorname{Arg}(z))$

7.2) $\lim\limits_{z \to 2+i} (z^2)$

7.3) $\lim\limits_{z \to 0} \left(\frac{\overline{z}}{z}\right)$

7.4) $\lim\limits_{z \to 0} \left(\frac{\operatorname{Re}(z^2)}{\overline{z}}\right)$

7.5) $\lim\limits_{z \to 0} (z.\operatorname{Arg}(z))$

7.6) $\lim\limits_{z \to i} \frac{z - i}{z^2 + iz + 2}$

7.7) $\lim\limits_{z \to 0} \frac{i \operatorname{Im}(z)}{|z|}$

7.8) $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\operatorname{Re}(z^3)}{z^2}$

7.9) $\lim\limits_{z \to 2+i} f(z)$, donde $f(z) = 2xy^2 - i(3x - y)$

8) Determinar si la función dada es continua en z_0:

8.1) $f(z) = \begin{cases} \frac{z - i}{z^2 + iz + 2}, & \text{si } z_0 \neq i \\ -\frac{1}{3}i, & \text{si } z_0 = i \end{cases}$

8.2) $f(z) = \begin{cases} \frac{i \operatorname{Im}(z)}{|z|}, & \text{si } z_0 \neq 0 \\ 0, & \text{si } z_0 = 0 \end{cases}$

8.3) $f(z)=\begin{cases} \dfrac{\mathrm{Re}\left(z^3\right)}{z^2}, & \text{si} \quad z_0 \neq 0 \\ 0, & \text{si} \quad z_0 = 0 \end{cases}$

9) Hallar los dominios de definición, derivabilidad y analiticidad y calcular la derivada en los puntos donde exista:

9.1) $f(z)=\dfrac{1}{z}$

9.2) $f(z)=\overline{z}$

9.3) $f(z)=\left(\dfrac{z+1}{z^2-3iz}\right)^3$

9.4) $f(z)=z\,\mathrm{Re}(z)$

9.5) $f(z)=\left(x^2-y\right)+ixy^2$

9.6) $f(z)=\mathrm{sen}(y)-ix\cos(y)$

9.7) $f(z)=\left(\dfrac{z}{z^2+4}\right)^3$

9.8) $f(z)=i\,\mathrm{Re}(z)$

9.9) $f(z)=y^3-ix^3$

9.10) $f(z)=x^3-3xy^2+i\left(3x^2y-y^3\right)$

10) Hallar los dominios de definición, derivabilidad y analiticidad y calcular la derivada en los puntos donde exista, de las siguientes funciones:

10.1) $f(z)=\dfrac{e^z}{e^{3z}+1}$

10.2) $f(z)=\dfrac{z}{e^z+i}$

10.3) $f(z)=\dfrac{1}{\mathrm{Ln}(z)}$

10.4) $f(z)=z.\mathrm{Ln}(iz)$

10.5) $f(z)=\dfrac{\mathrm{sen}(z)}{2-\cos(z)}$

10.6) $f(z)=\dfrac{z}{\mathrm{senh}(iz)+\cos(z)}$

11) Demostrar que las siguientes funciones $u(x,y)$ son armónicas y hallar una conjugada armónica $v(x,y)$ tal que $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ sea analítica.

11.1) $u(x,y)=2xy+3x$

11.2) $u(x,y)=3x^2y-y^3$

11.3) $u(x,y)=e^{-x}.\cos(y)$