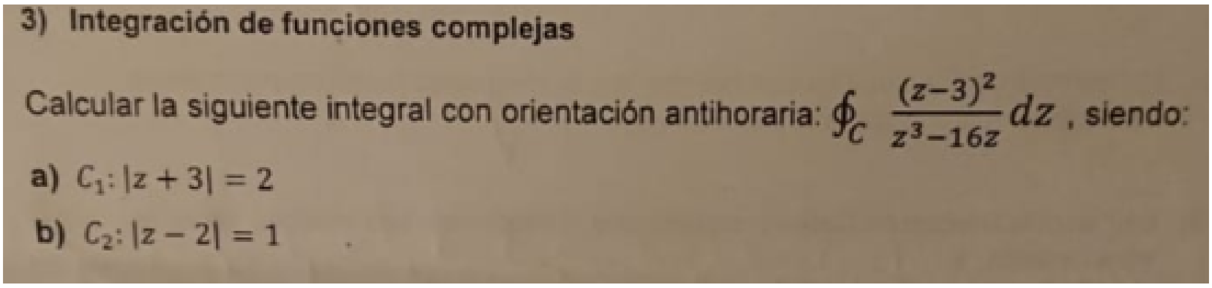
Integrales complejas



3) Integración de funciones complejas

Calcular la siguiente integral con orientación antihoraria: $\oint_C \frac{(z-3)^2}{z^3-16z}dz$, siendo:

a) $C_1: |z+3| = 2$

b) $C_2: |z-2| = 1$

$$\oint_C \frac{(z-3)^2}{z^3-16z}$$

Puntos críticos (el denominador no puede ser cero):

$z(z^2-16)$ (*sacando factor común*)

1° punto crítico $z=0$

$z^2-16=(z-4)(z+4)$ (*aplicando diferencia de cuadrados para factorizar la expresión*)

2° punto crítico $z=4$

3° punto crítico $z=-4$

$C_1 : |\ z+3\ | = 2$

Circunferencia de radio 2 centrada en $P:(-3,0)$. Envuelve al punto crítico 3 $z=-4$

Expreso la función de manera que en el denominador quede solo $z-z_0$.

$$\oint \frac{\frac{(z-3)^2}{z(z-4)}}{(z+4)}$$

Ahora se que mi $f(z)$ es

$$f(z)=\frac{(z-3)^2}{z(z-4)}$$

Aplico la fórmula integral de Cauchy:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = 2\pi i \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

$n = 0$ en este caso en particular: $z - z_0 = (z - z_0)^{0+1}$. Por lo tanto

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z0)} = 2\pi i \frac{f(z_0)}{n!}$$

$$f(z_0) = \frac{(-4-3)^2}{-4(-4-4)} = \frac{49}{32}$$

Finalmente:

$$\oint_C \frac{(z-3)^2}{z^3 - 16z} = 2\pi i \frac{49}{32} = \frac{49}{16}\pi i$$