Licence 1

Mentions : Sciences pour l'Ingénieur – Mathématiques Informatique

ECO 113

MECANIQUE DU POINT

SESSION N° 5 : *BILAN DE FORCES ET STATIQUE*

I. QUELQUES DEFINITIONS

I.1 Force

On appelle **force** ou encore **action mécanique,** toute cause capable de déformer un corps, de modifier l'état de repos d'un corps ou de modifier le mouvement d'un corps.

I.2 Bilan des forces extérieures

Faire un bilan des forces extérieures, c'est faire le décompte, le comptage, le recensement des forces extérieures (ou actions mécaniques) qui agissent sur un point matériel ou sur un système matériel.

I.3 La Statique

La Statique est caractérisée par **l'état d'équilibre** (ou de repos) des corps.

I.4 Classification des forces

Tableau 1 : classification des forces

FORCES DE CONTACT		FORCES A DISTANCE	
• Forces de pression	**Toujours répulsives** (dirigées vers l'intérieur de la matière).	• Forces de pesanteur	**Toujours attractives** (dirigées vers l'extérieur de la matière).
• Forces de frottement		• Aimantation	**Attractives ou répulsives** suivant le cas.

II. SCHEMATISATION ET REPRESENTATION D'ACTIONS MECANIQUES

II.1 Schématisation d'actions à distance

Exemple, vecteur-poids, qui représente la force d'attraction exercée par la Terre sur le corps.

Caractéristiques du vecteur-poids.

- **Point d'application** : centre de gravité *G*
- **Direction** (droite d'action) : verticale
- **Sens** (orientation) : du haut vers le bas
- **Norme, module** : $\|\vec{P}\| = m\|\vec{g}\| = m\,g$

(**poids** en *N*) (**masse** en *kg*) (**accélération** de la pesanteur en $m.s^{-2}$).

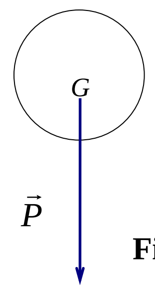


Figure 1

II.2 Schématisation d'actions de contact

II.2.1 Actions concentrées (contact « *ponctuel* »)

Exemple : bille posée sur une surface plane.

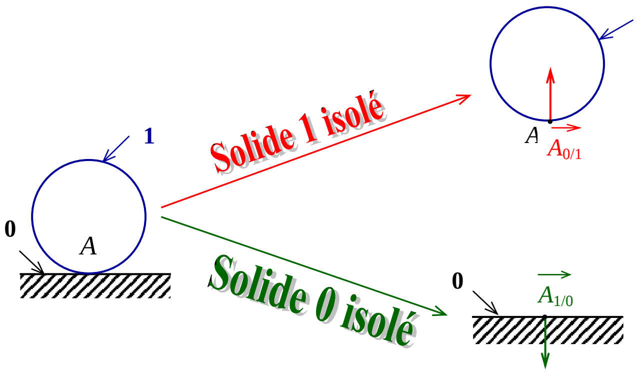


Figure 2

$\vec{A}_{0/1}$: action exercée en A **par** le sol **0** <u>sur</u> la bille **1**.

$\vec{A}_{1/0}$: action exercée en A **par** la bille **1** <u>sur</u> le sol **0**.

II.2.2 Actions réparties sur une ligne (contact « *linéique* »)

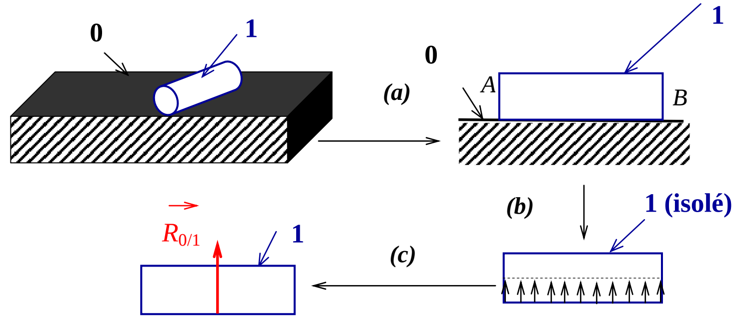


Figure 3

La charge est répartie sur la longueur $l = AB$.

$\vec{R}_{0/1}$. résultante des actions de contact réparties sur la longueur l (en N).

On définit la **charge linéique q** (exprimée en ***N.m^{-1}***) : $\boxed{q = \dfrac{\|\vec{R}_{0/1}\|}{l}}$.

II.2.3 Actions réparties sur une surface (contact « *surfacique* »)

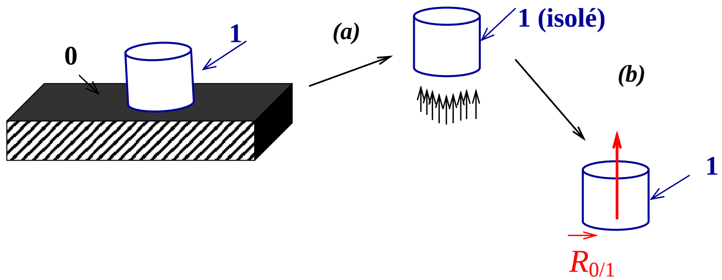


Figure 4

La charge est répartie sur toute la surface de base du cylindre : $s = \dfrac{\pi\ d^2}{4}$ (d, diamètre du cylindre).

$\vec{R}_{0/1}$: résultante des actions de contact réparties sur la surface s.

Charge surfacique p (ou **pression**) : $p = \dfrac{\|\vec{R}_{0/1}\|}{s}$ (en **pascal**, ***Pa*** ou $N.m^{-2}$).

III. PRINCIPE DES ACTIONS MUTUELLES

En s'inspirant de la Figure 2, on imagine la relation entre $\vec{A}_{i/j}$ et $\vec{A}_{j/i}$.

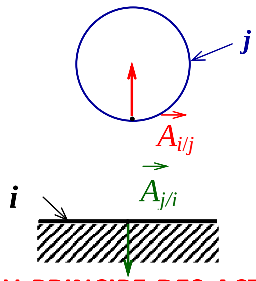


Figure 5

ENONCE DU PRINCIPE DES ACTIONS MUTUELLES : pour deux solides ***i*** et ***j*** en contact, l'action exercée par le solide ***i*** sur le solide ***j*** est directement opposée à l'action exercée par le solide ***j*** sur le solide ***i***.

$$\boxed{\vec{A}_{i/j} = -\vec{A}_{j/i}} \qquad \textbf{(1)}$$

IV. METHODOLOGIE DU BILAN D'ACTIONS MECANIQUES EXTERIEURES

Les différentes étapes

1°) **Isoler le système** (ou le solide ou une pièce, numérotée *i*).

2°) **Compter** toutes les **actions mécaniques extérieures de contact**.

$\vec{P}_{j/i}$: action exercée au point *P* **par le solide** n°*j* sur le solide n°*i* (isolé).

Exemple : on a isolé le solide **1**, l'action exercée au point *M* par le solide **0** sur le solide **1** est une action extérieure, notée $\vec{M}_{0/1}$ (mais, attention, l'action $\vec{M}_{1/0}$ exercée par **1** sur **0** n'est pas une action mécanique extérieure).

3°) **Ajouter** les actions à distance (exemple, poids du solide isolé).

4°) Présenter l'ensemble des actions sous forme de tableau.

V. APPLICATION A LA STATIQUE

Statique (**état d'équilibre),** se traduit par un système d'équations :

$$\boxed{\begin{cases} \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_{M(\vec{F}_{\text{ext}})} = \vec{0},\ \forall M \end{cases}} \qquad \textbf{(2)}$$

En termes plus clairs :

***Somme vectorielle** des **forces extérieures** = **vecteur nul**.

ET

***Somme vectorielle** des **moments**, par rapport à un point quelconque *M*, des forces extérieures = **vecteur nul**.

V.1 Equilibre sous l'action de deux forces extérieures

Deux forces extérieures $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$.

Ces deux forces sont **directement opposées** :

- **même direction** (même droite d'action).
- **même norme** (même longueur) :

  $\|\vec{F}_2\| = \|-\vec{F}_1\| = \|\vec{F}_1\|$ ou $F_2 = F_1$.
- **sens contraires**.

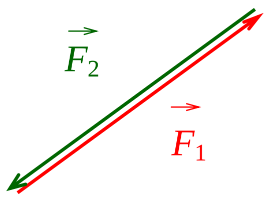


Figure 6

V.2 Equilibre sous l'action de trois forces extérieures parallèles

Ces **trois forces** extérieures $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$.

$$\Rightarrow \vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2).$$

- $\vec{F}_3$ a **même direction** (même droite d'action) que $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$.
- $\vec{F}_3$ a le **sens contraire** à celui de $\vec{F}_1$ et de $\vec{F}_2$
- La **norme** de $\vec{F}_3$ est telle que :

$$\|\vec{F}_3\| = \|-(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)\| = \|(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)\| = \|\vec{F}_1\| + \|\vec{F}_2\|.$$

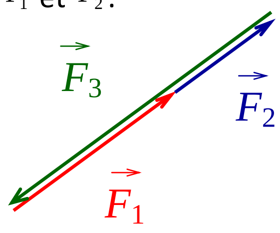


Figure 7

En termes clairs, **longueur** de $\vec{F}_3$ = **somme des longueurs** des deux premiers vecteurs forces.

V.3 Equilibre sous l'action de trois forces extérieures concourantes

Forces non parallèles, deux relations à vérifier :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \\ \vec{M}_{M(\vec{F}_1)} + \vec{M}_{M(\vec{F}_2)} + \vec{M}_{M(\vec{F}_3)} = \vec{0} \end{cases}}$$

$$\sum \vec{M}_{M(\vec{F}_{\text{ext}})} = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_{I(\vec{F}_1)} + \vec{M}_{I(\vec{F}_2)} + \vec{M}_{I(\vec{F}_3)} = \vec{0}.$$

- Rappel : <u>pour tout point situé sur la direction (droite d'action) d'une force, le moment de cette force par rapport à ce point est un vecteur nul</u>.
- Soit *I*, **un point de la direction** de $\vec{F}_1$: $\vec{M}_{I(\vec{F}_1)} = \vec{0}$.
- Si *I* est également **un point de la direction de** $\vec{F}_2$: $\vec{M}_{I(\vec{F}_2)} = \vec{0}$.

- Donc les directions de $\vec{F}_1$ et de $\vec{F}_2$ doivent se couper en ce point ***I*** (appelé **point de concours** des directions).
- Direction de $\vec{F}_3$: doit alors également passer par ce même point *I*, car $\vec{M}_{I(\vec{F}_3)} = \vec{0}$.
- Principe de la construction graphique :
  - Tracé de la droite Δ'_1 parallèle à Δ_1 (toutes deux en rouge)
  - Tracé de la droite Δ'_2 parallèle à Δ_2 (toutes deux en bleu)
  - Tracé de la droite Δ'_3 parallèle à Δ_3 (toutes deux en vert).
- Résultat : **triangle des forces** (Figure 8-b) en prenant une échelle pour les représenter.

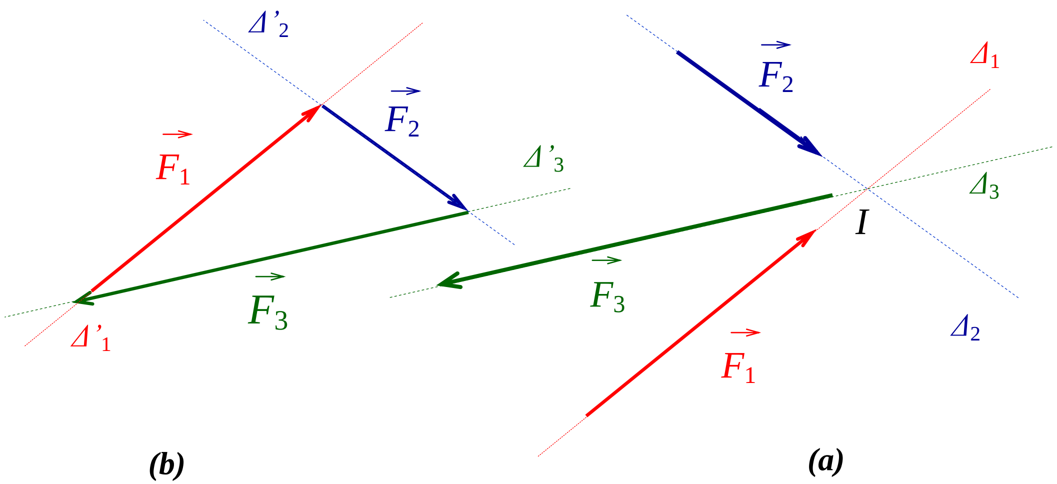


Figure 8

- Ce triangle traduit la **relation vectorielle** :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}.$$

- A chaque sommet du triangle, arrive une flèche et une seule.
- Ce triangle donne également **les normes** (en fonction de l'échelle choisie pour une des forces) et **les sens** des forces encore inconnues.
- La **somme des vecteurs-forces est nulle**, mais **la somme des normes des vecteurs-forces** (somme des longueurs) est **toujours supérieure à 0** (sauf si ces forces sont toutes nulles).

$$\|\vec{F}_1\| + \|\vec{F}_2\| + \|\vec{F}_3\| \geq 0.$$

Exemple d'application : Statique graphique

Le système schématisé sur la figure 9.1 est composé essentiellement d'un **câble 1**, d'un **bras 2** et d'un **tendeur 3.** Les liaisons en *A*, *B*, *C* et *D* sont des liaisons pivots (articulées en chaque point)**.** La force $\vec{A}_{1/2}$, de direction horizontale, symbolise l'action exercée par le câble **1** sur le bras **2**. Sa norme est donnée : $\left\|\vec{A}_{1/2}\right\| = 400\,daN$. Les poids du bras **2** et du tendeur **3** sont négligeables vis-à-vis des autres forces.

1°) Le tendeur **3** est « ***isolé*** » (**dessiné seul**, sur la figure 9-2). Il occupe la même position géométrique que sur la figure de départ. Les contacts entre cette pièce et les solides environnants sont limitées aux articulations aux points *B* et *C* (les actions mécaniques exercées sont schématisées par des vecteurs-forces appliqués en ces points).

Faire le bilan des forces extérieures qui s'exercent sur **3**. Préciser la direction de ces forces extérieures.

2°) Isoler le bras **2** et faire le bilan des forces extérieures qui s'y exercent (figure 9.3).

3°) On veut déterminer entièrement ces forces extérieures (directions, sens, normes) :

a) Ecrire l'équation vectorielle qui traduit l'équilibre du bras **2**.

b) Expliquer le principe de détermination des forces qui sont inconnues.

c) Question subsidiaire : construire le triangle des forces (Figure 9-3), donner les normes et le sens de ces forces.

Résolutions :

Solution question 1° :

Le tendeur **3** (de poids négligé) est en contact avec les pièces **0** et **2** (aux points *B* et C) et est soumis à deux forces extérieures :

$\vec{C}_{0/3}$ (force exercée au point *C* par le solide **0** sur le tendeur **3**) ;

$\vec{B}_{2/3}$ (force exercée au point *B* par le bras **2** sur le tendeur **3**).

Il faut que : $\sum \vec{F}_{ext/3} = \vec{0}$, donc $\vec{C}_{0/3} + \vec{B}_{2/3} = \vec{0}$.

La direction commune à ces deux forces (directement opposées) est la droite inclinée *(BC),* qui relie les points *B* et *C*.

Solution question 2° :

Le bras **2** (de poids négligé) est en contact avec les pièces **1**, **3** et **0** et est soumis à trois forces extérieures :

$\vec{A}_{1/2}$ (exercée, au point *A*, par le solide **1** sur le solide **2**, de direction horizontale) ;

$\vec{B}_{3/2}$ (exercée, au point *B*, par le solide **3** sur le solide **2**, opposée de $\vec{B}_{2/3}$ précédemment évoquée), dont la direction est la droite inclinée *(BC) ;*

$\vec{D}_{0/2}$ (exercée, au point *D*, par le solide **0** sur le solide **2**, de direction inconnue pour l'instant).

Suite de la solution à la question 2° :

Les directions des deux premières forces (la droite horizontale pour la force $\vec{A}_{1/2}$ et la droite inclinée (*BC*) pour la force $\vec{B}_{3/2}$) vont se couper en un point *I*, trouvé très facilement.

Alors, la direction de la troisième force, $\vec{D}_{0/2}$ devra également passer par ce point *I* et on en déduit la direction *DI*.

Résolutions question 3° :

Solution 3.a : $\sum \vec{F}_{ext/2} = \vec{0}$ donc $\boxed{\vec{A}_{1/2} + \vec{B}_{3/2} + \vec{D}_{0/2} = \vec{0}}$.

Solution 3.b :

$\vec{A}_{1/2}$ est entièrement connue. On vient de déterminer les directions de toutes les forces. Le triangle des forces permettra de déterminer le sens et la norme des autres forces encore inconnues ($\vec{B}_{3/2}$ et $\vec{D}_{0/2}$).

Echelle choisie : 6 cm pour 400 *daN* (norme de $\vec{A}_{1/2}$, connue).

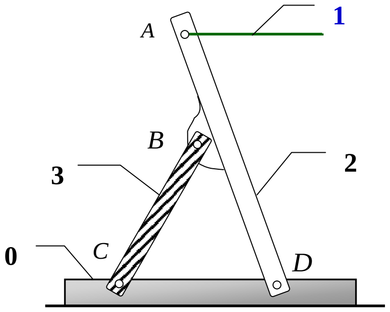


Figure 9.1

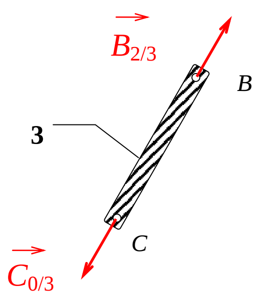
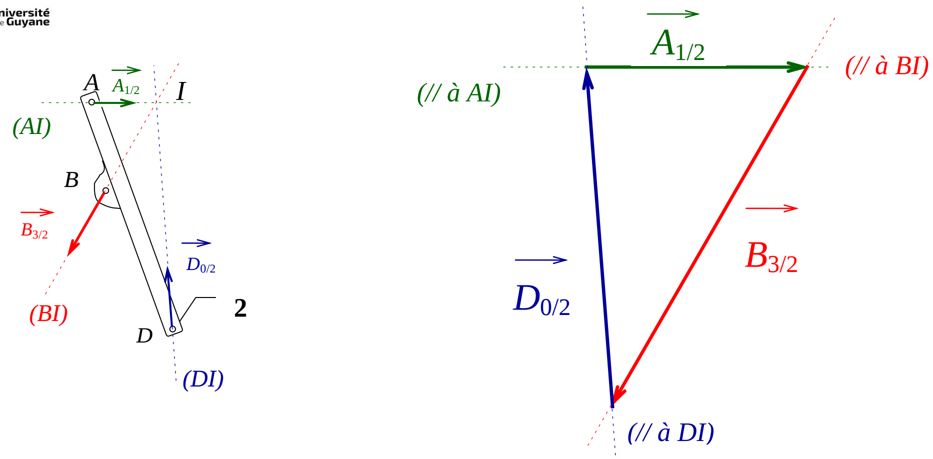


Figure 9.2



c) $\boxed{\|\vec{A}_{1/2}\| = 400\ daN}$ $\boxed{\|\vec{B}_{3/2}\| \approx 700\ daN}$ $\boxed{\|\vec{D}_{0/2}\| \approx 620\ daN}$.

Conséquence (équilibre du tendeur 3) : $\boxed{\|\vec{B}_{2/3}\| = \|\vec{C}_{0/3}\| \approx 700\ daN}$.

Figure 9.3 : Document-réponse

Commentaires :

*La **somme vectorielle** des trois forces extérieures qui agissent sur le solide **2** est **égale au vecteur nul** (triangle des forces).

*Mais la somme des normes de ces trois forces est égale à : 400 *daN* + 700 *daN* + 620 *daN* = 1720 *daN*.

*La pièce *BC* (solide 3) est soumise à de **la traction** à cause des sens des forces $\overrightarrow{C_{0/3}}$ et $\overrightarrow{B_{2/3}}$ sur la Figure 9.2.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION !

- *Thank you for your attention !*
- *Obrigado !*
- *Danke schoen*
- *Gremési !*
- *Grazie mille !*
- *Xie Xie !*
- *Arigato*