Université de Guyane

Licence 1

Mentions : Sciences pour l'Ingénieur – Mathématiques Informatique

ECO 113

MECANIQUE DU POINT

CORRIGE DU CONTROLE CONTINU N°2

(20 novembre 2020)

Exercice n°1 : Mouvement rectiligne d'un point matériel [6 points]

Le déplacement d'un point mobile *P* sur l'axe vertical *y'Oy* ($\vec{j}$ vecteur unitaire) est décrit par l'équation suivante (*y* en mètres et *t* en secondes) :

$$y = t^2 - 5\,t.$$

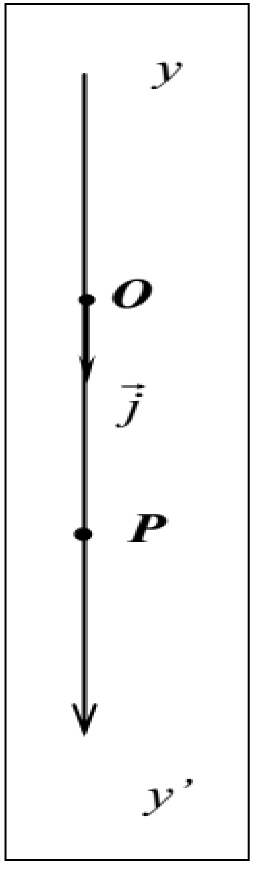


Figure 1

1°) Indiquer l'expression du vecteur-position.

Réponse

Pour un point matériel mobile P, l'expression générale est :

$$\overrightarrow{OP} = x\ \overrightarrow{i} + y\ \overrightarrow{j} + z\ \overrightarrow{k}$$

Ici, $x = z = 0$ (le mouvement est seulement sur l'axe $y'Oy$)

donc :

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = y\ \overrightarrow{j} = (t^2\ -\ 5\ t)\ \overrightarrow{j}}$$

2°) Expression du vecteur-vitesse $\overrightarrow{V(_P)}$:

Réponse : la dérivée, par rapport au temps, du vecteur-position.

$$\overrightarrow{V(_P)} = y'\vec{j} = v\,\vec{j}.$$

$$\boxed{\overrightarrow{V(_P)} = (2t - 5)\,\vec{j}}$$ (norme en $m.s^{-1}$)

3°) Expression de la vitesse instantanée v

Formule à **utiliser** : dérivée de y par rapport au temps.

$$\boxed{v = (2t - 5)}$$ (v en $\boldsymbol{m.s^{-1}}$)

La formule : ($v = y/t$) ne **doit pas être utilisée** (la vitesse n'est pas constante).

4°) Calculer le temps que mettra ce point mobile pour atteindre une vitesse de 54 $km.h^{-1}$.

On convertit d'abord : 54 $km.h^{-1}$ en $m.s^{-1}$ (on divise par 3,6)

54 km/h = 15 m/s.

On résout l'équation : $2t - 5 = 15$

$\Longrightarrow 2t = 15 + 5$

$\Longrightarrow 2t = 20.$

$$t = 10$$

Il faut un temps de *10 s* pour atteindre la vitesse indiquée.

5°) Calculer la distance parcourue entre l'instant initial et l'instant où la vitesse instantanée est atteinte.

Rappel : la formule $d = v.t$ n'est pas la bonne (la vitesse n'est pas constante).

On calcule : $d = y_{(t\,=\,10)} - y_{(t\,=\,0)}$

C'est la différence entre la position à l'instant $t = 10\ s$ et la position à l'instant $t = 0$.

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{y}_{(t\,=\,10)} - \boldsymbol{y}_{(t\,=\,0)}$$

$y_{(t\,=\,10)} = 10^2 - 5 \text{ x } 10 = 50$ (abscisse 50).

$y_{(t\,=\,0)} = 0^2 - 5 \text{ x } 0 = 0$ (abscisse 0)

$$\boxed{d = 50\ m}$$

Exercice n°2 : Mouvement circulaire d'un point matériel [6 points]

Un point matériel *M* (**Figure 2**) tourne autour d'un axe *Oz* (perpendiculaire au plan de la feuille et de vecteur unitaire $\vec{k}_0$). Ce mouvement circulaire se fait à vitesse constante (*N* = 150 tours/minute).

La distance *OM* est égale au rayon du cercle (*R* = 2 *m*).

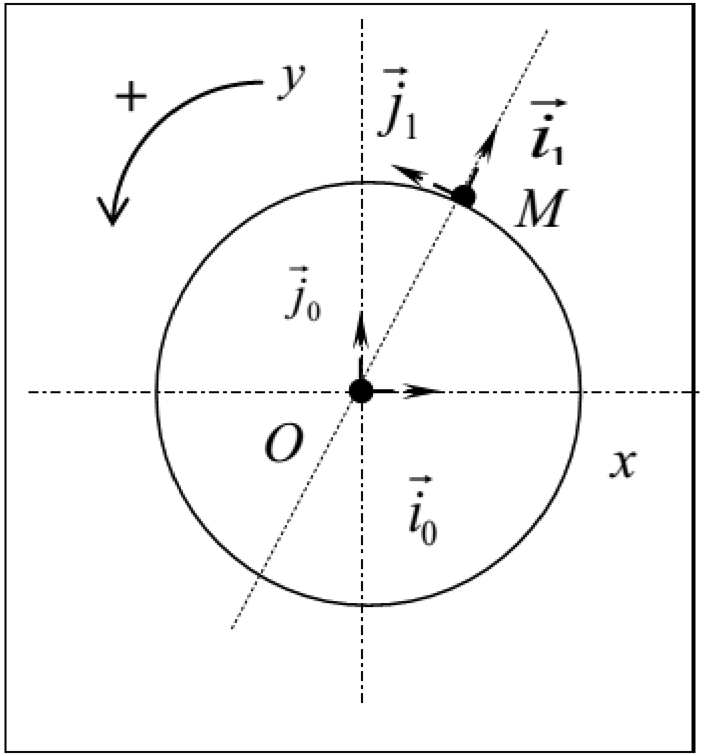


Figure 2

1°) Déterminer la valeur de la vitesse angulaire ω, en *rad/s*.

Résolution

1 tour <=> $2\,\pi$ radians

N tours <=> $2\,\pi$ N radians

N tours/minute <=> ($2\ \pi N$ radians/60 s)

ω (rad/s) = ($2\ \pi N$ /60) (radians/s)

Formule : $\boxed{\omega = \dfrac{\pi\ N}{30}}$

(rad/s)

$$\boxed{\omega = 5\ \pi\, rad/s \approx 15{,}7\ rad/s}$$

2°) Donner des expressions simples des vecteurs suivants : $\vec{\Omega}$, $\overrightarrow{OM}$

et $\vec{V}_{(M)}$ (préciser les vecteurs unitaires auxquels ils sont colinéaires).

Résolutions

*Vecteur $\vec{\Omega}$:

$\vec{\Omega} = \omega \vec{u}$ (voir indication)

$\vec{u}$: vecteur unitaire de l'axe de rotation.

Or ici, l'axe de rotation est l'axe Oz (perpendiculaire au plan de la feuille) et le vecteur unitaire de cet axe est $\vec{k}_0$ ou $\vec{k}_1$.

$$\boxed{\vec{\Omega} = \omega \vec{k}_0 = \omega \vec{k}_1}$$ (en $rad.s^{-1}$)

*Vecteur $\overrightarrow{OM}$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = R\,\overrightarrow{i_1}}$$

*Vecteur $\vec{V}_{(M)}$

Voir indication : $\vec{V}_{(M)} = v\,\vec{t}$.

$\vec{t}$: vecteur unitaire de la tangente à la trajectoire.

v : vitesse ($v = R\,\omega$).

Ici, le vecteur unitaire de la tangente à la trajectoire est $\overrightarrow{j_1}$.

$$\boxed{\overrightarrow{V_{(M)}} = \omega\,R\,\overrightarrow{j_1}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{V_{(M)}} = 10\,\pi\,\overrightarrow{j_1}}$$ (en $m.s^{-1}$)

3°) Indiquer les expressions du vecteur-accélération normale et du vecteur-accélération tangentielle.

Résolution

$$\overrightarrow{a_{(M)}} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$\vec{a}_t = \dfrac{dv}{dt}\,\vec{t}$: accélération tangentielle (indication).

$\vec{t}$: vecteur unitaire de la tangente à la trajectoire, v vitesse ($v = \omega\, R$).

Ici la vitesse v est **constante** donc sa **dérivée est nulle**, alors le vecteur-accélération tangentielle est égal au vecteur nul.

$$\boxed{\overrightarrow{a_t} = \vec{0}}$$

$\vec{a}_n = \dfrac{v^2}{R}\ \vec{n}$: **accélération normale** (indication).

Pour rappel, $v^2 = \omega^2\ R^2$.

$\vec{n}$: vecteur unitaire de la normale à la trajectoire (orienté vers le centre de courbure).

R : rayon.

Le vecteur-accélération normale est **orienté du point M vers le centre de rotation O**, donc : $\overrightarrow{n} = -\overrightarrow{i_1}$.

$$\boxed{\overrightarrow{a_n} = -\omega^2 R\ \overrightarrow{i_1} = -50\ \pi^2\ \overrightarrow{i_1}}\qquad \text{(en } rad.s^{-2}\text{)}$$

Exercice n°3 – Statique graphique [8 points]

La figure **3.1** schématise un abri de bus, composé d'une partie sol-mur (numérotée **0**), d'un toit **1** (de masse m_1 = 150 kg) **et** d'une barre **2** (appelée également tirant). Cet ensemble des solides est en équilibre, tout comme chacun des solides étudiés (toit **1** d'abord, tirant **2** ensuite).

1°) Préciser toutes les caractéristiques de $\overrightarrow{P_1}$, le vecteur poids du toit **1** (point d'application, direction, sens et norme).

Réponse

Vecteur-poids : $\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1}$.

Direction : verticale.

Point d'application : G_1.

Sens : de haut en bas.

Norme : $\boldsymbol{P}_1 = m_1 \text{ x g} \approx 1\,500\ N$.

(on prend $\text{g} = 10\ m/\text{s}^2$, pour simplifier).

2°) Le tirant **2** est « *isolé* » (dessiné seul) sur la figure 3-2. Il occupe la même position géométrique que sur la figure de départ. Ses contacts avec les solides environnants (l'ensemble **0** et le toit **1**) sont donc limités aux points *B* et *C*. Les forces exercées sont schématisées par des vecteurs appliqués en ces points. Le poids de ce tirant **2** est considéré comme négligeable.

2.1 Faire le bilan des forces extérieures qui s'exercent sur le solide **2** (indiquer correctement les noms de ces forces).

Tirant **2** isolé : Bilan des forces extérieures qui s'y exercent

Deux points de contact

*au point B, contact entre le mur 0 et le tirant 2 ;

*au point C, contact entre le toit 1 et le tirant 2.

Donc deux forces de contact :

$\overrightarrow{B_{0/2}}$: force exercée au point B **par** le mur **0** **sur** le tirant 2.

$\overrightarrow{C_{1/2}}$: force exercée au point C **par** le toit **1** **sur** le tirant 2.

Equilibre du tirant 2 :

$$\overrightarrow{B_{1/2}} + \overrightarrow{C_{0/2}} = \overrightarrow{0}.$$

2.2 **Sur la feuille d'examen*, répondre au QCM** 2.2 : la direction de ces forces extérieures est

a) la droite horizontale

b) la droite, notée (AC), passant par A et C

c) la droite, notée (BC), passant par B et C

d) la droite verticale.

***Commentaire** : la **feuille d'examen est la feuille de couleur jaune, qui porte des rayures et qui est remise à la fin de l'épreuve**. La feuille du sujet est gardée par l'étudiant(e) afin de lui permettre de refaire les exercices. **IL FAUT APPRENDRE A RESPECTER LES CONSIGNES ECRITES.**

3°) Isoler le toit **1 (Figure 3.3)** et faire le bilan des trois forces extérieures (directions, sens) qui s'y exercent, en indiquant correctement les noms de ces forces.

Toit **1** isolé, bilan des forces extérieures qui s'y exercent : trois forces (deux de contact en *C* et *A*, points de contact) et une à distance (en G_1).

$\overrightarrow{C_{2/1}}$: force exercée, au point C, **par** le tirant **2** **sur** le toit 1 [de direction (*BC*), comme son homologue $\overrightarrow{C_{1/2}}$].

$\overrightarrow{A_{0/1}}$: force exercée, au point A, **par** le mur **0** **sur** le toit 1.

$\overrightarrow{P_1}$: force exercée **par** la pesanteur, sur le toit 1, considérée comme appliquée au centre d'inertie G_1, [de direction verticale].

Equilibre du toit **1** :

$$\overrightarrow{C_{2/1}} + \overrightarrow{A_{0/1}} + \overrightarrow{P_1} = \overrightarrow{0}.$$

3.1 Indiquer quelle est la direction de la force qui agit en A.

Résolution

Nous avons :

*Une force, $\overrightarrow{P_1}$, de direction verticale, passant par G_1 ;

*Une force, $\overrightarrow{C_{2/1}}$, de direction (BC) passant par C.

Ces deux premières directions se croisent en un point *I*. La direction de la troisième force, $\overrightarrow{A_{0/1}}$, doit alors également passer par ce point *I*, ce qui donne la direction AI.

3.2 Préciser comment déterminer *I,* point de concours des directions des trois forces extérieures.

C'est la droite qui relie *A* au point *I*, intersection de la verticale passant par G_1 et de la direction (*BC*) passant par *C*.

4°) On veut déterminer entièrement ces trois forces extérieures (directions, sens, normes).

Sur la feuille d'examen*, répondre au QCM **4** : la direction de la force qui agit au point *A* est :

a) la droite verticale

b) une droite parallèle à (AC)

c) la droite qui relie le point A au point de concours I

d) la droite horizontale.

***Commentaire** : la **feuille d'examen est la feuille de couleur jaune, qui porte des rayures et qui est remise à la fin de l'épreuve**. La feuille du sujet est gardée par l'étudiant(e) afin de lui permettre de refaire les exercices. **IL FAUT APPRENDRE A RESPECTER LES CONSIGNES ECRITES.**

5°) **Déterminer** les normes de toutes les forces extérieures après avoir tracé du triangle des forces (détermination graphique, choisir une échelle adaptée) : compléter et remettre le document-réponse de la figure 3.3 sans y mentionner son nom (l'agrafer ou la coller avec la feuille d'examen).

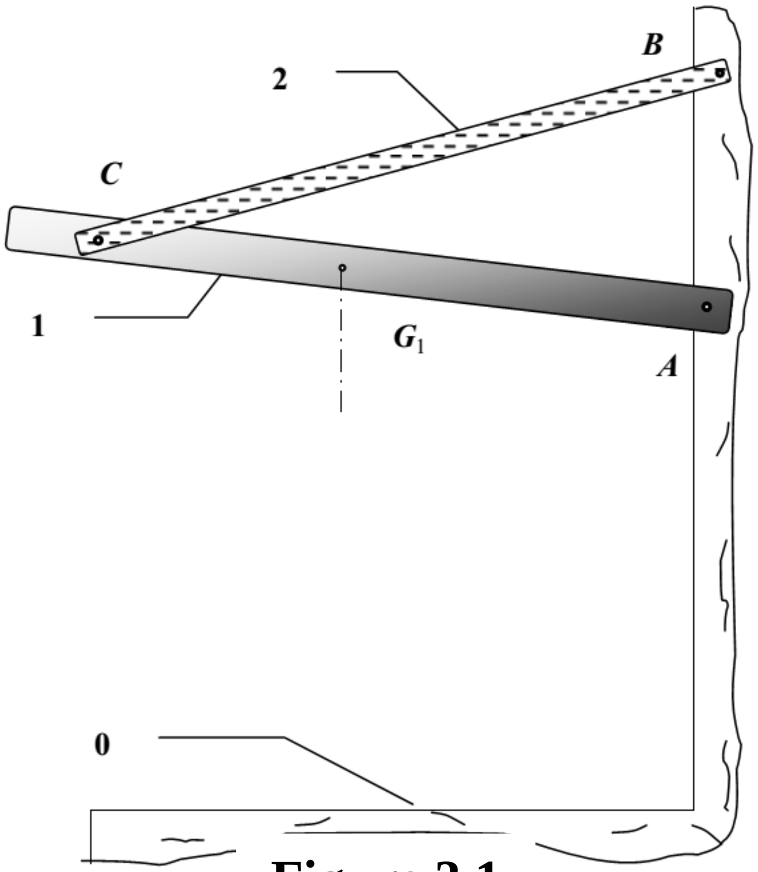


Figure 3.1

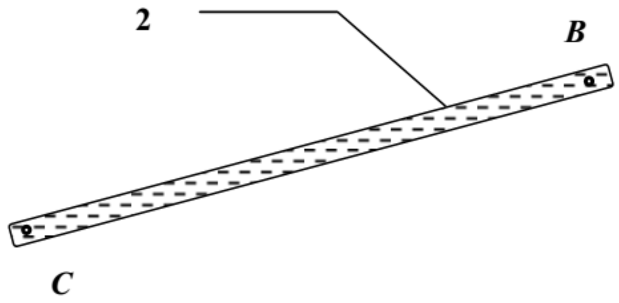


Figure 3.2

*Droite (**AI**), direction de $\overrightarrow{A_{0/1}}$*

*Droite (**CB**), direction de $\overrightarrow{C_{2/1}}$*

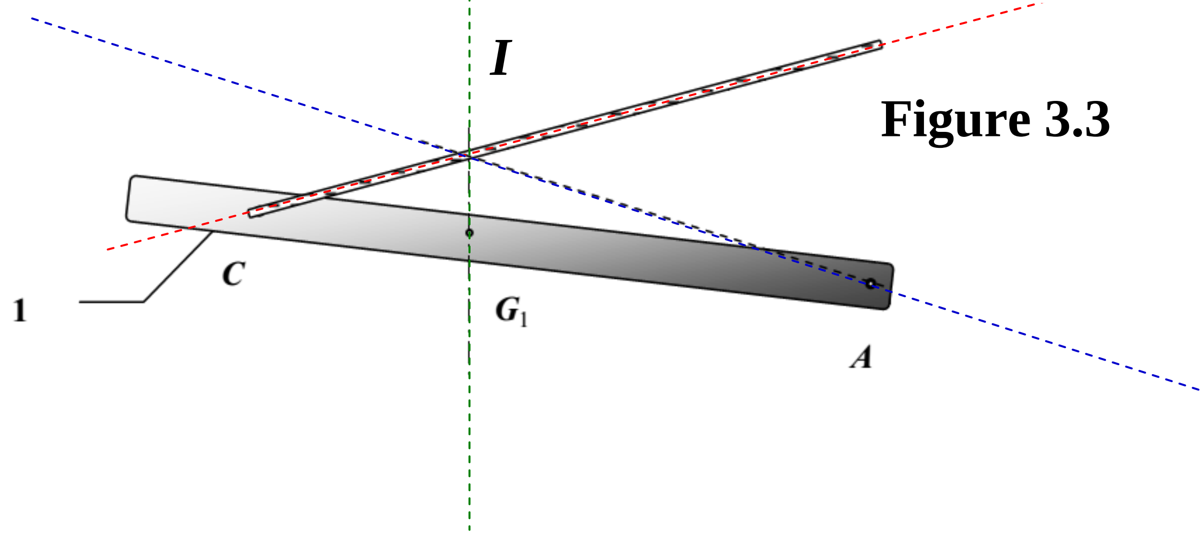
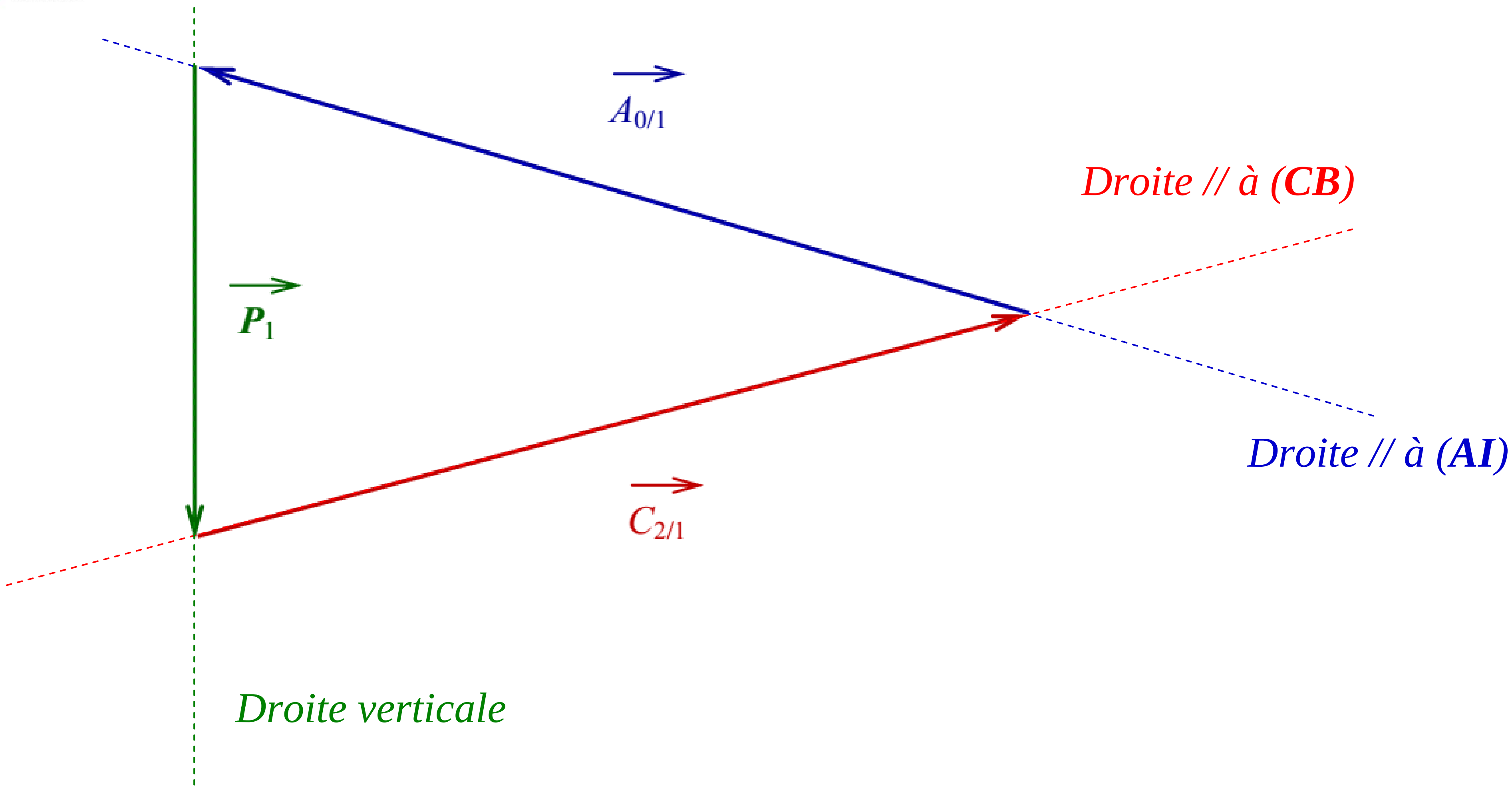


Figure 3.3

Droite verticale direction de la force $\overrightarrow{P_1}$


$\overrightarrow{A_{0/1}}$
Droite // à (**CB**)
$\overrightarrow{P_1}$
Droite // à (**AI**)
$\overrightarrow{C_{2/1}}$
Droite verticale

Echelle choisie : 1 cm pour 250 *N (6 cm pour longueur de* P_1 = 1500 *N)*

Longueurs des vecteurs

Longueur du vecteur $\overrightarrow{A_{0/1}}$: 11 cm

Longueur du vecteur $\overrightarrow{C_{2/1}}$: 10,8 cm

Normes des vecteurs-forces (scalaires)

$$\boxed{A_{0/1} = 1500 \text{ x } (11/6) = 2750\ N}$$

$$\boxed{C_{2/1} = 1500 \text{ x } (10{,}8/6) = 2700\ N}$$

- - - - - - - - - -

Quelques indices utiles (données à la fin du sujet pour **obliger les étudiants à lire le sujet en entier**) :

$\vec{V}_{(M)} = v\,\vec{t}$, $\vec{t}$: vecteur unitaire de la tangente à la trajectoire.

$\vec{\Omega} = \omega\,\vec{u}$; $\vec{u}$: vecteur unitaire de l'axe de rotation.

$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\vec{t}$; $\vec{t}$: vecteur unitaire de la tangente à la trajectoire, *v* vitesse.

$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\,\vec{n}$; $\vec{n}$: vecteur unitaire de la normale à la trajectoire, *R* rayon de courbure.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION !

- *Thank you for your attention !*
- *Xie Xie !*
- *Obrigado !*
- *Grémési !*
- *Grazie mille !*
- *Arigato*

Danke schoen !