Licence 1

## Mentions : Sciences pour l'Ingénieur – Mathématiques Informatique

# ECO 113

# MECANIQUE DU POINT

# SESSION N° 5 : *BILAN DE FORCES ET STATIQUE*

# I. QUELQUES DEFINITIONS

## I.1 Force

On appelle **force** ou encore **action mécanique,** toute cause capable de déformer un corps, de modifier l'état de repos d'un corps ou de modifier le mouvement d'un corps.

## I.2 Bilan des forces extérieures

**Faire un bilan des forces extérieures**, c'est faire le décompte, le comptage, le recensement des forces extérieures (ou actions mécaniques) qui agissent sur un point matériel ou sur un système matériel.

## I.3 La Statique

La Statique est caractérisée par **l'état d'équilibre** (ou de repos) des corps.

# I.4 Classification des forces

***Tableau 1 : classification des forces***

| FORCES DE CONTACT | | FORCES A DISTANCE | |
|---|---|---|---|
| • Forces de pression | **Toujours répulsives** (dirigées vers l'intérieur de la matière). | • Forces de pesanteur | **Toujours attractives** (dirigées vers l'extérieur de la matière). |
| • Forces de frottement | | • Aimantation | **Attractives ou répulsives** suivant le cas. |

# II. SCHEMATISATION ET REPRESENTATION D'ACTIONS MECANIQUES

## II.1 Schématisation d'actions à distance

Exemple, vecteur-poids, qui représente la force d'attraction exercée par la Terre sur le corps.

**Caractéristiques du vecteur-poids**.

- **Point d'application** : centre de gravité *G*
- **Direction** (droite d'action) : verticale
- **Sens** (orientation) : du haut vers le bas
- **Norme, module** : $\|\vec{P}\| = m\,\|\vec{g}\| = m\,g$

(**poids** en *N*) (**masse** en *kg*) (**accélération** de la pesanteur en *m.s*$^{-2}$).

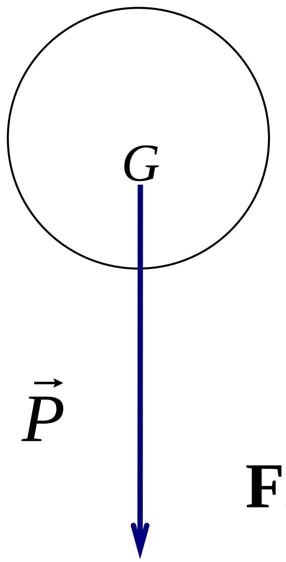



**Figure 1**

# II.2 Schématisation d'actions de contact

## II.2.1 Actions concentrées (contact « *ponctuel* »)

Exemple : bille posée sur une surface plane.

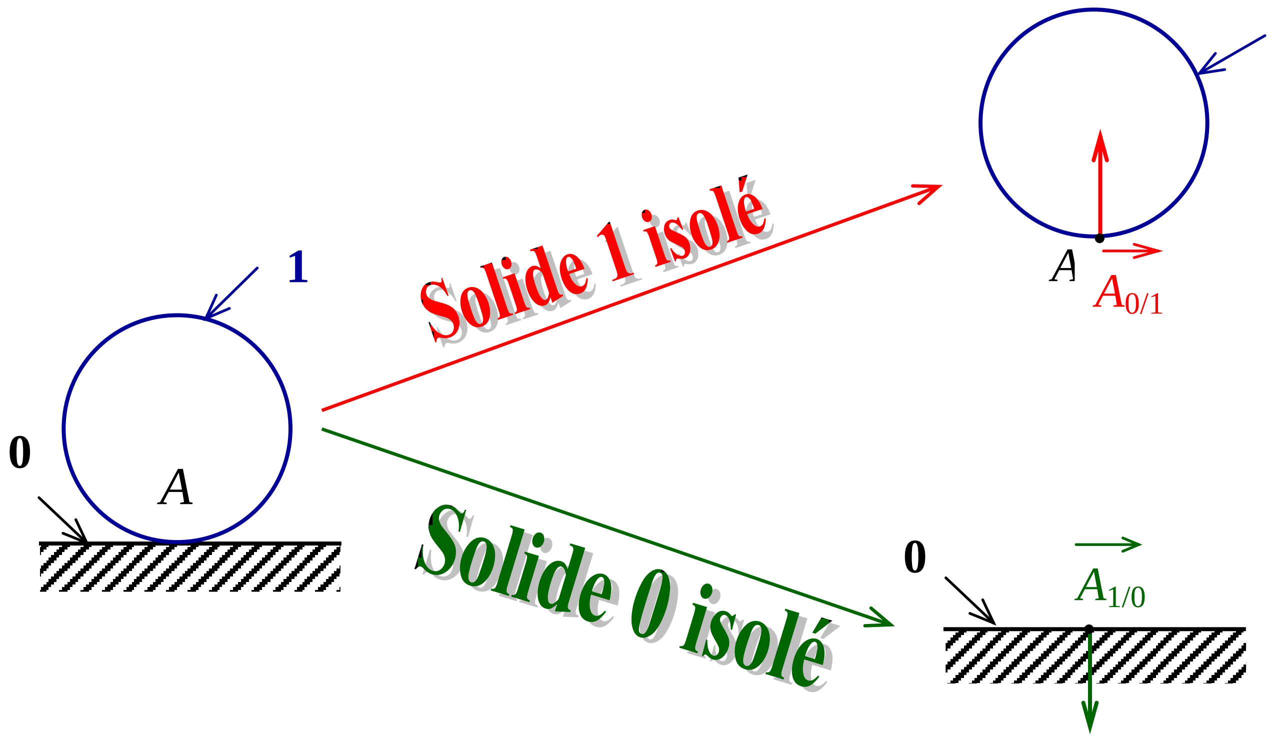



**Figure 2**

$\overrightarrow{A_{0/1}}$ : action exercée en $A$ **par** le sol **0** <u>sur</u> la bille **1**.

$\overrightarrow{A_{1/0}}$ : action exercée en $A$ **par** la bille **1** <u>sur</u> le sol **0**.

## II.2.2 Actions réparties sur une ligne (contact « *linéique* »)

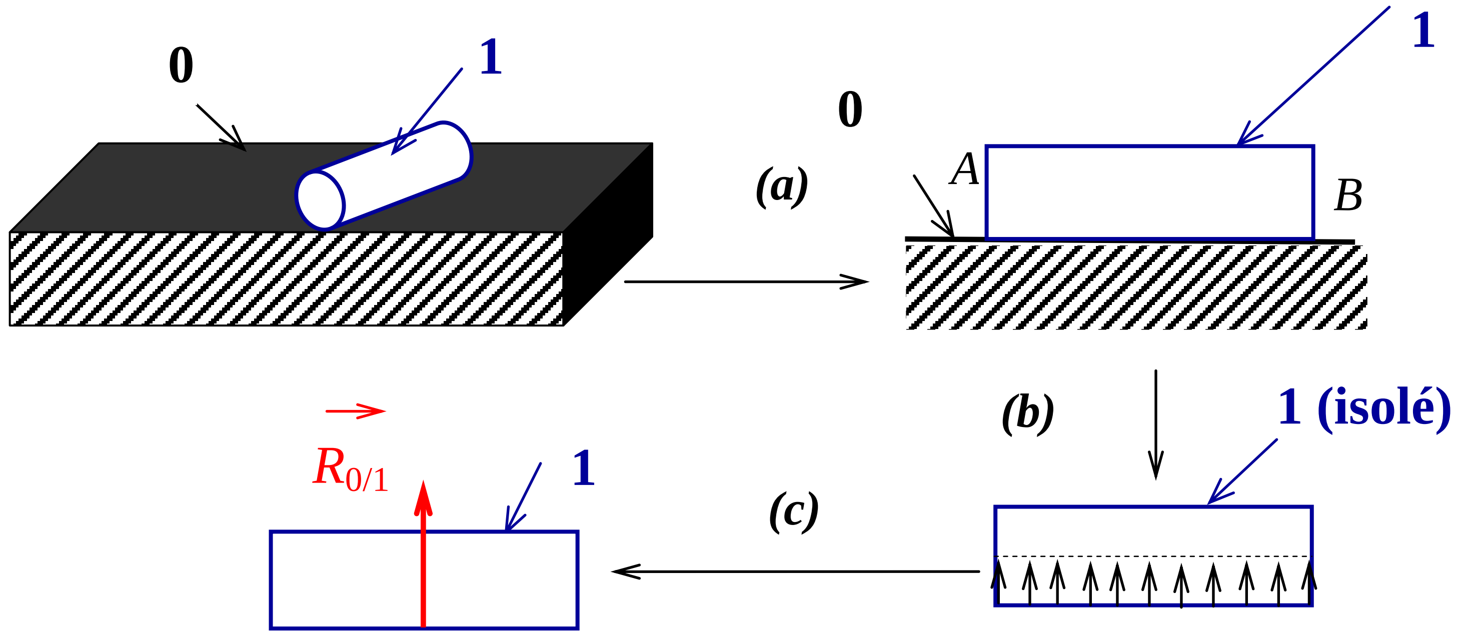



Figure 3

La charge est répartie sur la longueur *l* = *AB*.

$\vec{R}_{0/1}$ . résultante des actions de contact réparties sur la longueur *l* (en *N*).

On définit la **charge linéique *q*** (exprimée en ***N.m***$^{-1}$) : $\boxed{q = \dfrac{\left\|\vec{R}_{0/1}\right\|}{l}}$.

# II.2.3 Actions réparties sur une surface (contact « *surfacique* »)

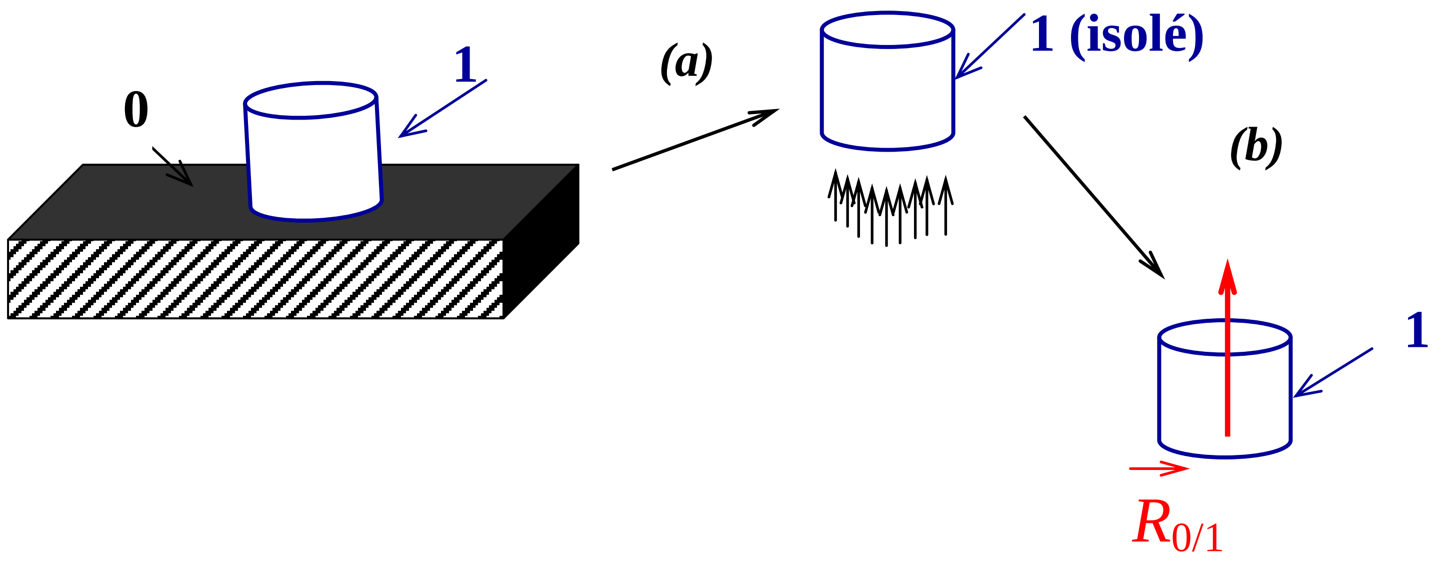



**Figure 4**

La charge est répartie sur toute la surface de base du cylindre : $s = \dfrac{\pi\ d^2}{4}$ (*d*, diamètre du cylindre).

$\vec{R}_{0/1}$ : résultante des actions de contact réparties sur la surface *s*.

**Charge surfacique** *p* (ou **pression** ) : $p = \dfrac{\left\|\vec{R}_{0/1}\right\|}{s}$ (en **pascal,** ***Pa*** ou *N.m*$^{-2}$).

# III. PRINCIPE DES ACTIONS MUTUELLES

En s'inspirant de la Figure 2, on imagine la relation entre $\vec{A}_{i/j}$ et $\vec{A}_{j/i}$.

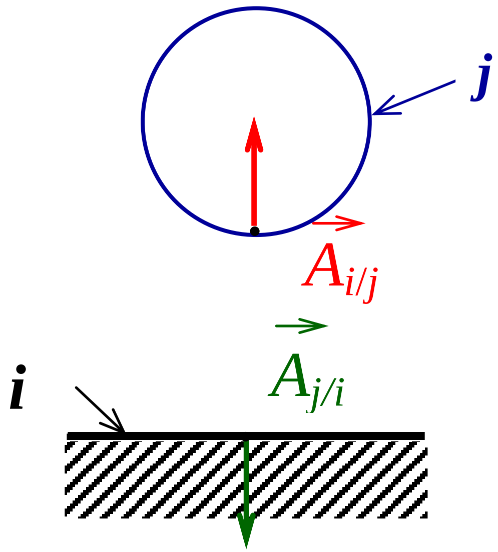



**Figure 5**

**ENONCE DU PRINCIPE DES ACTIONS MUTUELLES** : pour deux solides ***i*** et ***j*** en contact, l'action exercée par le solide ***i*** sur le solide ***j*** est directement opposée à l'action exercée par le solide ***j*** sur le solide ***i***.

$$\boxed{\vec{A}_{i/j} = -\vec{A}_{j/i}} \qquad \textbf{(1)}$$

# IV. METHODOLOGIE DU BILAN D'ACTIONS MECANIQUES EXTERIEURES

## Les différentes étapes

1°) **Isoler le système** (ou le solide ou une pièce, numérotée *i*).

2°) **Compter** toutes les **actions mécaniques extérieures de contact**.

$\vec{P}_{j/i}$ : action exercée au point *P* **par le solide** n°*j* <u>sur</u> le solide n°*i* (isolé).

Exemple : on a isolé le solide **1**, l'action exercée au point *M* par le solide **0** sur le solide **1** est une action extérieure, notée $\vec{M}_{0/1}$ (mais, attention, l'action $\vec{M}_{1/0}$ exercée par **1** sur **0** n'est pas une action mécanique extérieure).

3°) **Ajouter** les actions à distance (exemple, poids du solide isolé).

4°) Présenter l'ensemble des actions sous forme de tableau.

# V. APPLICATION A LA STATIQUE

Statique (**état d'équilibre),** se traduit par un système d'équations :

$$\boxed{\begin{cases} \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_{M(\vec{F}_{\text{ext}})} = \vec{0}, \ \forall\, M \end{cases}} \qquad \textbf{(2)}$$

En termes plus clairs :

***Somme vectorielle** des **forces extérieures** = **vecteur nul**.

**ET**

***Somme vectorielle** des **moments**, par rapport à un point quelconque

*M*, des forces extérieures = **vecteur nul**.

## V.1 Equilibre sous l'action de deux forces extérieures

**Deux forces** extérieures $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ : $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$.

Ces deux forces sont **directement opposées** :

- **même direction** (même droite d'action).
- **même norme** (même longueur) :

  $\left\|\vec{F}_2\right\| = \left\|-\vec{F}_1\right\| = \left\|\vec{F}_1\right\|$ ou $F_2 = F_1$.
- **sens contraires**.

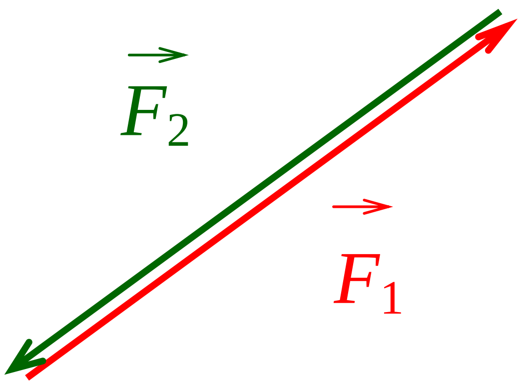



**Figure 6**

# V.2 Equilibre sous l'action de trois forces extérieures parallèles

Ces **trois forces** extérieures $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$ : $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=\vec{0}$.

$$\Rightarrow \vec{F}_3=-(\vec{F}_1+\vec{F}_2).$$

- $\vec{F}_3$ a **même direction** (même droite d'action) que $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$.
- $\vec{F}_3$ a le **sens contraire** à celui de $\vec{F}_1$ et de $\vec{F}_2$
- La **norme** de $\vec{F}_3$ est telle que :

$$\left\|\vec{F}_3\right\|=\left\|-(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\right\|=\left\|(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\right\|=\left\|\vec{F}_1\right\|+\left\|\vec{F}_2\right\|.$$

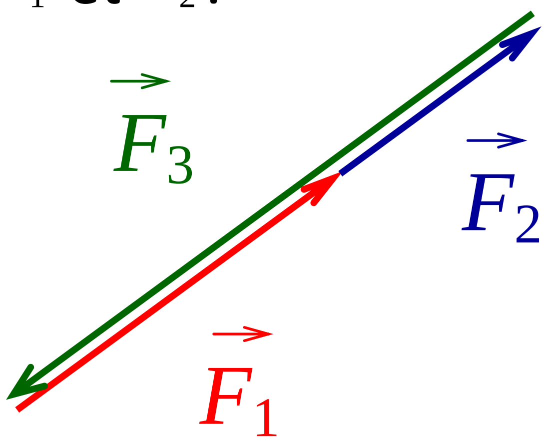


**Figure 7**

En termes clairs, **longueur** de $\vec{F}_3$ = **somme des longueurs** des deux premiers vecteurs forces.

## V.3 Equilibre sous l'action de trois forces extérieures concourantes

**Forces non parallèles**, deux relations à vérifier :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \\ \vec{M}_{M(\vec{F}_1)} + \vec{M}_{M(\vec{F}_2)} + \vec{M}_{M(\vec{F}_3)} = \vec{0} \end{cases}}$$

$$\sum \vec{M}_{M(\vec{F}_{\mathrm{ext}})} = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_{I(\vec{F}_1)} + \vec{M}_{I(\vec{F}_2)} + \vec{M}_{I(\vec{F}_3)} = \vec{0}.$$

- Rappel : **pour tout point situé sur la direction (droite d'action) d'une force, le moment de cette force par rapport à ce point est un vecteur nul**.

- Soit *I*, **un point de la direction** de $\vec{F}_1$ : $\vec{M}_{I(\vec{F}_1)} = \vec{0}$.
- Si *I* est également **un point de la direction de** $\vec{F}_2$ : $\vec{M}_{I(\vec{F}_2)} = \vec{0}$.

- Donc les directions de $\vec{F}_1$ et de $\vec{F}_2$ doivent se couper en ce point ***I*** (appelé **point de concours** des directions).

- Direction de $\vec{F}_3$ : doit alors également passer par ce même point *I*, car $\vec{M}_{I(\vec{F}_3)} = \vec{0}$.

- Principe de la construction graphique :
  - Tracé de la droite $\Delta'_1$ parallèle à $\Delta_1$ (toutes deux en rouge)
  - Tracé de la droite $\Delta'_2$ parallèle à $\Delta_2$ (toutes deux en bleu)
  - Tracé de la droite $\Delta'_3$ parallèle à $\Delta_3$ (toutes deux en vert).

- Résultat : **triangle des forces** (Figure 8-b) en prenant une échelle pour les représenter.

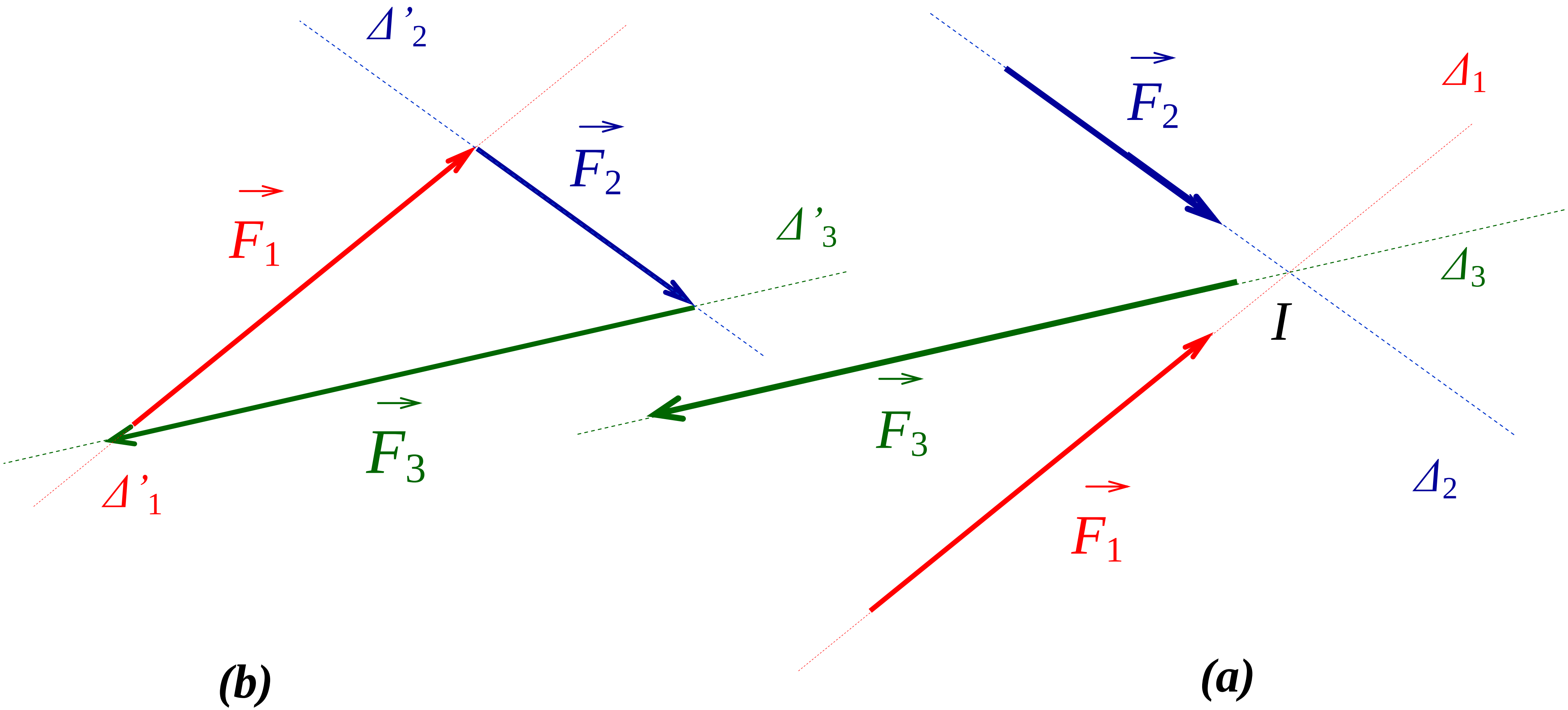



**Figure 8**

- Ce triangle traduit la **relation vectorielle** :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}\ .$$

- A chaque sommet du triangle, arrive une flèche et une seule.
- Ce triangle donne également **les normes** (en fonction de l'échelle choisie pour une des forces) et **les sens** des forces encore inconnues.

- La **somme des vecteurs-forces est nulle**, mais **la somme des normes des vecteurs-forces** (somme des longueurs) est **toujours supérieure à 0** (sauf si ces forces sont toutes nulles).

$$\left\|\vec{F}_1\right\| + \left\|\vec{F}_2\right\| + \left\|\vec{F}_3\right\| \geq 0\ .$$

# Exemple d'application : Statique graphique

Le système schématisé sur la figure 9.1 est composé essentiellement d'un **câble 1**, d'un **bras 2** et d'un **tendeur 3.** Les liaisons en *A*, *B*, *C* et *D* sont des liaisons pivots (articulées en chaque point)**.** La force $\vec{A}_{1/2}$, de direction horizontale, symbolise l'action exercée par le câble **1** sur le bras **2**. Sa norme est donnée : $\left\|\vec{A}_{1/2}\right\| = 400\,daN$ . Les poids du bras **2** et du tendeur **3** sont négligeables vis-à-vis des autres forces.

1°) Le tendeur **3** est « ***isolé*** **»** (**dessiné seul**, sur la figure 9-2). Il occupe la même position géométrique que sur la figure de départ. Les contacts entre cette pièce et les solides environnants sont limitées aux articulations aux points *B* et *C* (les actions mécaniques exercées sont schématisées par des vecteurs-forces appliqués en ces points).

Faire le bilan des forces extérieures qui s'exercent sur **3**. Préciser la direction de ces forces extérieures.

2°) Isoler le bras **2** et faire le bilan des forces extérieures qui s'y exercent (figure 9.3).

3°) On veut déterminer entièrement ces forces extérieures (directions, sens, normes) :

a) Ecrire l'équation vectorielle qui traduit l'équilibre du bras **2**.

*b)* Expliquer le principe de détermination des forces qui sont inconnues.

*c)* Question subsidiaire : construire le triangle des forces (Figure 9-3), donner les normes et le sens de ces forces.

## Résolutions :

Solution question 1° :

Le tendeur **3** (de poids négligé) est en contact avec les pièces **0** et **2** (aux points *B* et C) et est soumis à deux forces extérieures :

$\vec{C}_{0/3}$ (force exercée au point *C* par le solide **0** sur le tendeur **3**) ;

$\vec{B}_{2/3}$ (force exercée au point *B* par le bras **2** sur le tendeur **3**).

Il faut que : $\sum \vec{F}_{ext/3} = \vec{0}$, donc $\vec{C}_{0/3} + \vec{B}_{2/3} = \vec{0}$.

La direction commune à ces deux forces (<u>directement opposées</u>) est la droite inclinée *(BC),* qui relie les points *B* et *C*.

## Solution question 2° :

Le bras **2** (de poids négligé) est en contact avec les pièces **1**, **3** et **0** et est soumis à trois forces extérieures :

$\vec{A}_{1/2}$ (exercée, au point *A*, par le solide **1** sur le solide **2**, de direction horizontale) ;

$\vec{B}_{3/2}$ (exercée, au point *B*, par le solide **3** sur le solide **2**, opposée de $\vec{B}_{2/3}$ précédemment évoquée), dont la direction est la droite inclinée (*BC) ;*

$\vec{D}_{0/2}$ (exercée, au point *D*, par le solide **0** sur le solide **2**, de direction inconnue pour l'instant).

Suite de la solution à la question 2° :

Les directions des deux premières forces (la droite horizontale pour la force $\vec{A}_{1/2}$ et la droite inclinée (*BC*) pour la force $\vec{B}_{3/2}$) vont se couper en un point *I*, trouvé très facilement.

Alors, la direction de la troisième force, $\vec{D}_{0/2}$ devra également passer par ce point *I* et on en déduit la direction *DI*.

Résolutions question 3° :

Solution 3.a : $\sum \vec{F}_{ext/2} = \vec{0}$ donc $\boxed{\vec{A}_{1/2} + \vec{B}_{3/2} + \vec{D}_{0/2} = \vec{0}}$.

Solution 3.b :

$\vec{A}_{1/2}$ est entièrement connue. On vient de déterminer les directions de toutes les forces. Le triangle des forces permettra de déterminer le sens et la norme des autres forces encore inconnues ( $\vec{B}_{3/2}$ et $\vec{D}_{0/2}$ ).

Echelle choisie : 6 cm pour 400 *daN* (norme de $\vec{A}_{1/2}$, connue).

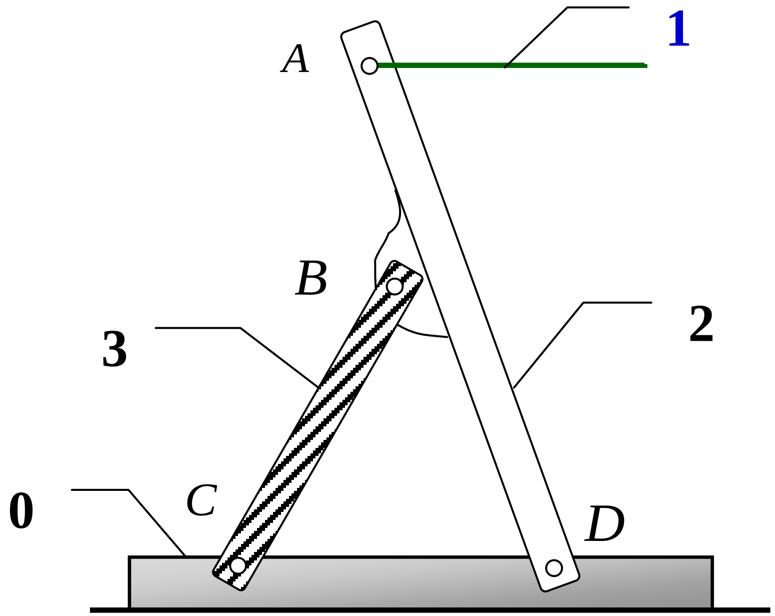



**Figure 9.1**

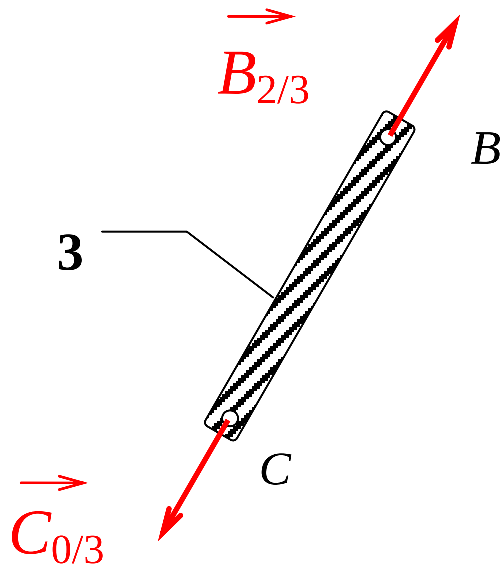
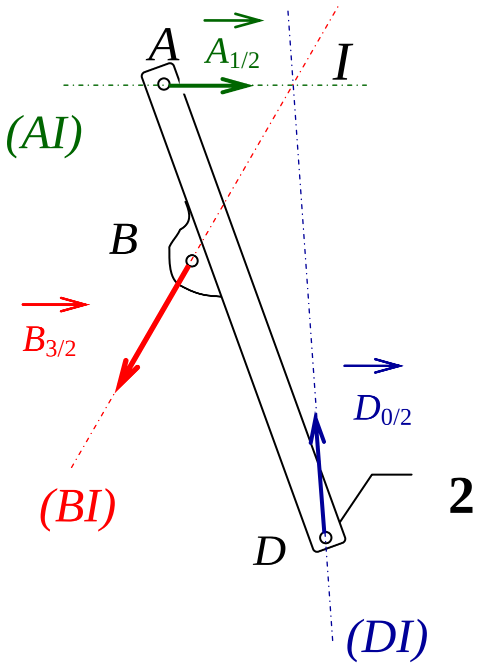
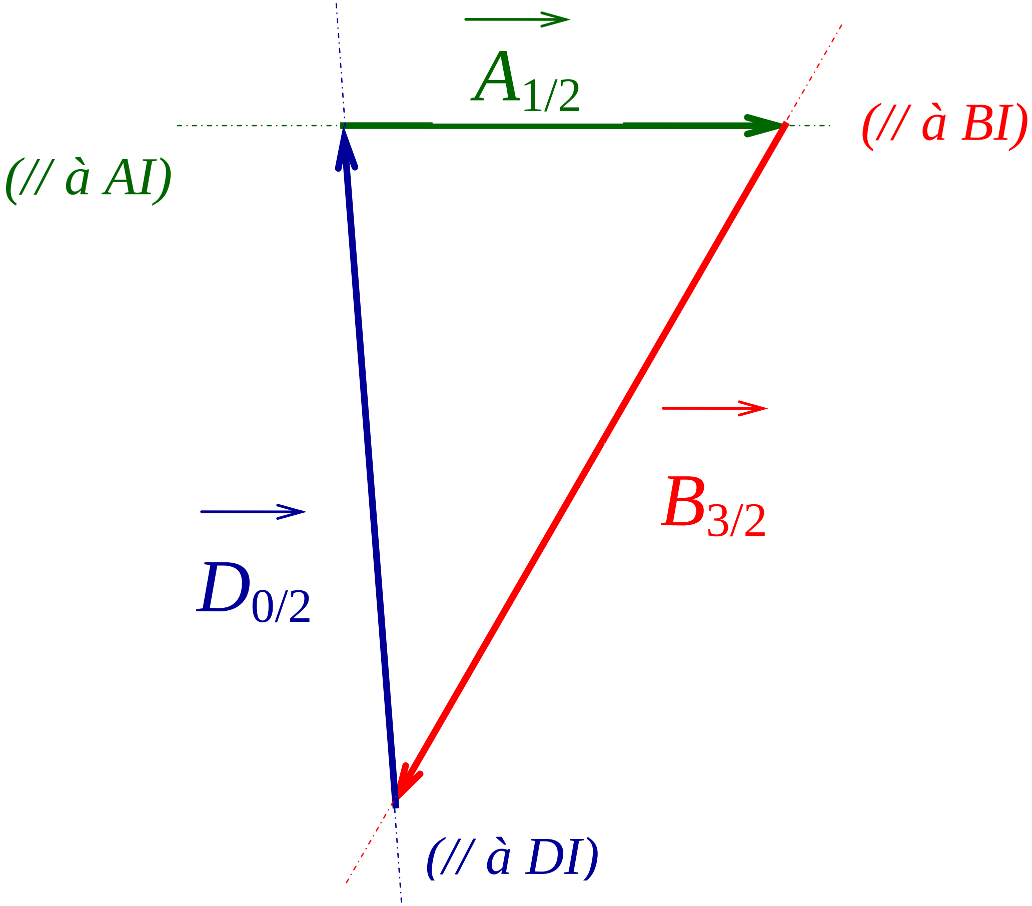



**Figure 9.2**




c) $\boxed{\left\|\vec{A}_{1/2}\right\| = 400 \ \ daN}$ $\boxed{\left\|\vec{B}_{3/2}\right\| \approx 700 \ \ daN}$ $\boxed{\left\|\vec{D}_{0/2}\right\| \approx 620 \ \ daN}$.

Conséquence (équilibre du tendeur 3) : $\boxed{\left\|\vec{B}_{2/3}\right\| = \left\|\vec{C}_{0/3}\right\| \approx 700 \ \ daN}$.

**Figure 9.3 : Document-réponse**

# Commentaires :

*La **somme vectorielle** des trois forces extérieures qui agissent sur le solide **2** est **égale au vecteur nul** (triangle des forces).

*Mais la somme des normes de ces trois forces est égale à : 400 *daN* + 700 *daN* + 620 *daN* = 1720 *daN*.

*La pièce *BC* (solide 3) est soumise à de **la traction** à cause des sens des forces $\overrightarrow{C_{0/3}}$ et $\overrightarrow{B_{2/3}}$ sur la Figure 9.2.

# MERCI POUR VOTRE ATTENTION !

- *Thank you for your attention !*
- *Obrigado !*
- *Danke schoen*
- *Gremési !*
- *Grazie mille !*
- *Xie Xie !*
- *Arigato*