Département de Formation et de Recherche *SCIENCES ET TECHNOLOGIE*

Mentions : Sciences pour l'Ingénieur – Mathématiques Informatique

MECANIQUE DU POINT MATERIEL.

SESSION 3 : CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL ET VITESSES

La **Cinématique** est l'étude des mouvements sans se soucier des causes de ces mouvements, c'est-à-dire des forces. On y étudie des trajectoires, on calcule des vitesses et accélérations.

La présente session sera consacrée à la précision de certaines définitions et à différentes notions de vitesses.

I. DEFINITIONS

I.1 Mouvement

Soient, dans un repère orthonormé $[R]=[O,\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}]$, *x*, *y* et *z* les coordonnées cartésiennes du point *M*, défini par :

$$\vec{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}.$$

Si au cours du temps, l'une au moins des coordonnées de *M* varie, on dit que :

- *M* est en **mouvement** par rapport au repère $[R]$.
- *M* est un **point mobile** dans le repère $[R]$.

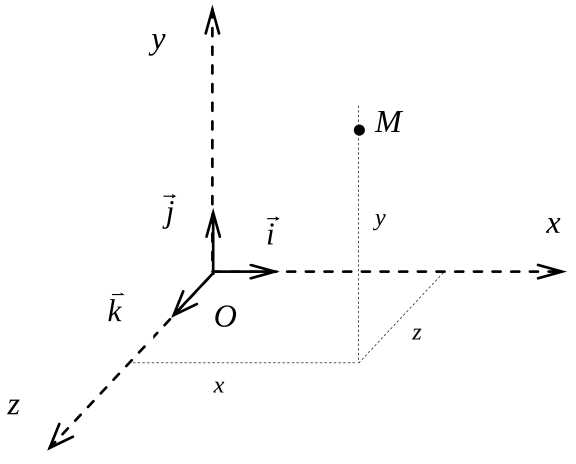


Figure 1

I.2 Coordonnées paramétriques d'un point mobile

Si les coordonnées cartésiennes de *M* dépendent du temps *t* (varient au cours du temps), on note :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Ces équations **paramétriques** (qui dépendent du paramètre *t*) définissent une **courbe** ($\mathscr{C}$) appelée **trajectoire du point** *M* par rapport au repère $[R]$.

Et si on peut trouver une relation entre *x*, *y* et *z* indépendante de *t*, on peut établir l'**équation de la trajectoire**.

Exemple n°1 :

Dans un repère orthonormé $[R]=[O,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,]$, le mouvement d'un point matériel *M* est décrit par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x = 2\,t \\ y = t^2 \end{cases} \qquad \text{(x et y en mètres, t en secondes).}$$

1°) Trouver l'équation de la trajectoire.

2°) Préciser la nature de la trajectoire.

<u>Résolution</u>

1°) $x = 2\,t \qquad \Rightarrow \qquad t = \dfrac{x}{2}$

$$y = t^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \qquad \boxed{y = \frac{x^2}{4}}$$

2°) Cette trajectoire est une **parabole**.

Exemple n°2 :

Dans un repère orthonormé $[R]=[O,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,]$, le mouvement d'un point matériel *M* est décrit par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 3\,t \end{cases} \qquad \text{(x et y en mètres, t en secondes).}$$

1°) Trouver l'équation de la trajectoire.

2°) Préciser la nature de la trajectoire.

<u>Résolution</u>

1°) $x = t - 1 \qquad \Rightarrow \qquad t = x + 1$

$$y = 3\,t = 3\,(x+1) \qquad \boxed{y = 3\ (x+1)}$$

2°) Cette trajectoire est une **droite**.

I.3 Loi horaire

Sur la trajectoire ($\mathscr{C}$), on définit :

- Un point, M_0, origine des arcs.
- Un sens de parcours positif.
- La grandeur $\overset{\frown}{M_0M} = s$ est appelée **abscisse curviligne.**

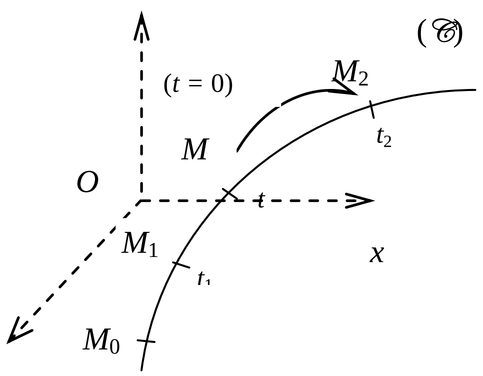


Figure 2

La relation $\boxed{s = s(t)}$ est appelée **équation du mouvement** ou **loi horaire**. **(1).**

I.4 Principaux mouvements d'un point matériel

I.4.1 Translation rectiligne (déplacement selon une droite)

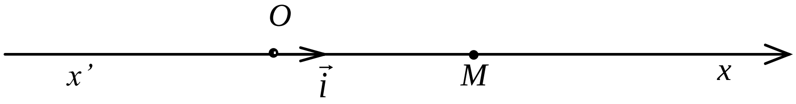


Figure 3

L'abscisse curviligne s se confond avec l'abscisse x. Alors,

La loi horaire s'écrit : $\boxed{x = x(t)}$ **(1-bis).**

Translation **rectiligne uniforme** : c'est le cas lorsque le mouvement s'effectue suivant **une droite**, et que la **vitesse** est **constante** (indépendante du temps t).

I.4.2 Rotation autour d'un axe fixe

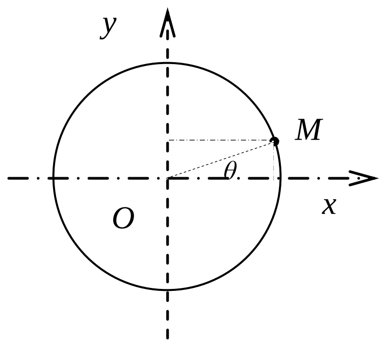


Figure 4

Soit θ l'angle entre l'axe Ox et la direction de $\vec{OM}$.

x et y dépendent de θ qui dépend du temps t.

$$\begin{cases} x = R \cos\theta \\ y = R \sin\theta \end{cases}$$

Relation trigonométrique : $cos^2\,\theta + sin^2\,\theta = (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1,\ \forall\theta$.

$$\text{Soit, } \left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 = 1$$

Alors, la loi horaire s'écrit : $\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$ **(1-ter)**

Cette loi traduit l'équation d'un **cercle** de centre O (0, 0) et de **rayon** R. En effet, l'équation générale d'un cercle de centre C (x_c, y_c) dans le plan (O, x, y) est de la forme : $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$. Ici, $x_c = y_c = 0$.

Mouvement **circulaire uniforme** : mouvement autour **d'un axe de rotation**, avec une **vitesse de rotation** (ou vitesse angulaire) **constante**.

I.5 Vecteur position

C'est la grandeur vectorielle : $\boxed{\vec{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}}$ **(2)**

(où x, y et z sont les coordonnées cartésiennes de M).

II. DIFFERENTES NOTIONS DE VITESSES D'UN POINT

II.1 Vitesse moyenne

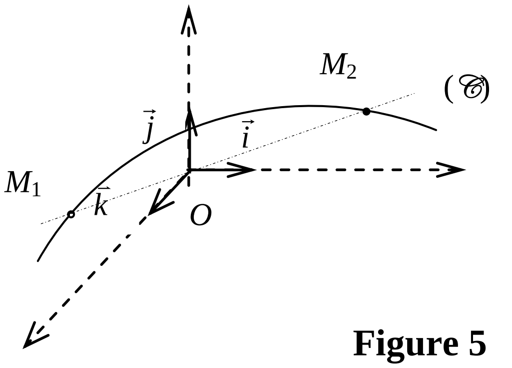


Figure 5

Variation d'abscisse curviligne.

$$\boxed{v_{moy} = \frac{s(M_2) - s(M_1)}{t_2 - t_1}}$$

Variation de temps **(3)**

II.2 Vitesse instantanée

Par définition, c'est la vitesse à un instant donné (par exemple celle qui est indiquée sur le tableau de bord d'un véhicule).

On la détermine grâce à la formule de la dérivée, par rapport au temps, de l'abscisse curviligne.

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt} = s'(t)} \qquad \textbf{(4)}$$

Dérivée, par rapport au temps, de l'abscisse curviligne.

Exemple.

Le déplacement d'un point mobile M sur l'axe horizontal $x'Ox$ (de vecteur unitaire $\vec{i}$) est décrit par une équation :

$$x = t^3 - 12t + 3.$$

x désigne la position sur l'axe horizontal (en mètres) et t désigne le temps (en secondes).

1°) Donner l'expression de la vitesse instantanée v.

2°) Calculer le temps nécessaire pour atteindre une vitesse de 36 m/s.

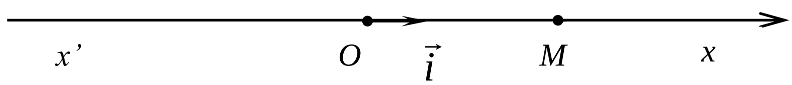


Figure 6

<u>Solution</u>

1°) Expression de la vitesse instantanée v.

Remarque préliminaire : La formule $v = \frac{x}{t}$ n'est pas la bonne, car la <u>vitesse n'est pas constante</u>, donc inutile de l'utiliser ici.

C'est l'expression : $v = \frac{dx}{dt}$ (dérivée de x par rapport au temps) qu'il faut appliquer.

$\boxed{v = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d(t^3 - 12t + 3)}{dt} = 3t^2 - 12}$. Si x est en m et t en s, la vitesse v est en ***m/s***.

2°) Temps nécessaire pour atteindre une vitesse de 36 m/s.

$3t^2 - 12 = 36$

$3t^2 = 36 + 12$

$3t^2 = 48$

$t^2 = 16$, donc $\boxed{t = 4\ s}$.

II.3 Vecteur vitesse d'un point *M* par rapport à un repère

II.3.1. Définition

Le vecteur-vitesse est la dérivée, par rapport au temps, du vecteur-position. Son expression est donc obtenue en dérivant par rapport au temps le vecteur-position défini dans l'équation (2) :

$$\vec{V}_{(M/\mathrm{R})} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\,(x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k})}{dt} = \frac{d\,(x)}{dt}\vec{i} + \frac{d\,(y)}{dt}\vec{j} + \frac{d\,(z)}{dt}\vec{k}\,.$$

$$\boxed{\vec{V}_{(M/\mathrm{R})} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}} \qquad \textbf{(5)}$$

II.3.2. Composantes du vecteur-vitesse

$$\boxed{\vec{V}_{(M/\mathrm{R})} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = x'\ ;$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} = y'\ ; \qquad \textbf{(5-bis)}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} = z'.$$

Toutes ces composantes sont des scalaires **positifs** ou **négatifs,** exprimés en mètre par seconde (*m/s* ou $m.s^{-1}$).

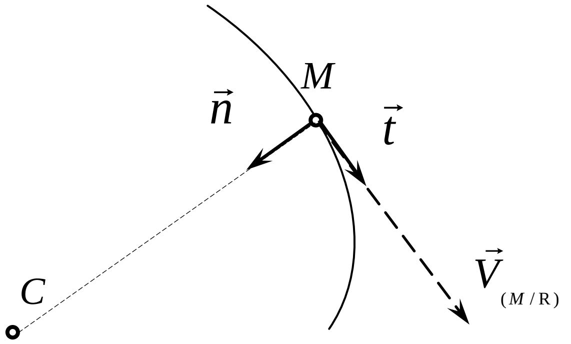
II.3.3. Norme du vecteur-vitesse

La norme (ou module) du vecteur-vitesse est définie par : $\left\| \vec{V}_{(M/\mathrm{R})} \right\| = v = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2} + v_z^{\,2}}$.

Cette norme du vecteur-vitesse est un scalaire **positif qui** s'exprime en mètre par seconde (***m/s*** ou en $\boldsymbol{m.s^{-1}}$) et est appelée la vitesse.

Remarques

*Le vecteur-vitesse est tangent au point M à la trajectoire



$$\boxed{\vec{V}_{(M/R)} = v\,\vec{t}} \qquad \textbf{(6)}$$

Figure 7

*Le **vecteur tangent** $\vec{t}$ et **la norme *v*** sont des **grandeurs variables au cours du temps** :

- le vecteur $\vec{t}$, tangent à tout instant à la trajectoire, change d'orientation ;
- la norme v de ce vecteur-vitesse change de valeur (de grandeur).

II.4 Expression du vecteur-vitesse de rotation

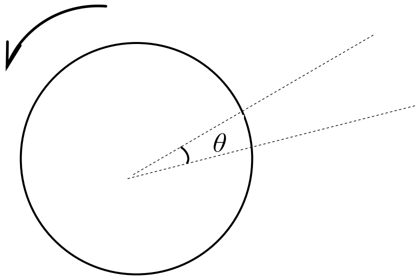


Figure 8

Par analogie avec l'expression : $\vec{V}_{(M/R)} = v\,\vec{t}$, on écrit : $\boxed{\vec{\Omega} = \omega\,\vec{u}}$ **(7)**

ω : vitesse angulaire, exprimée en $rad.s^{-1}$ (pour rappel, la vitesse angulaire est la dérivée de l'angle par rapport au temps).

$\vec{u}$: vecteur unitaire de l'axe de rotation (ici l'axe de rotation est perpendiculaire au plan de la feuille).

$\vec{\Omega}$: vecteur vitesse de rotation.

III. COMPOSITIONS DE VECTEURS-VITESSES

III. 1 Définitions

$[R_0]$: repère **absolu** (fixe) ; $[R_1]$: repère **mobile** dans $[R_0]$.

M est **un point en mouvement** par rapport à $[R_1]$ donc aussi (en général) par rapport à $[R_0]$.

$\vec{V}_{(M/R_0)}$: vecteur vitesse de M par rapport au repère absolu (ou **vitesse absolue**, notée $\vec{V}_a$).

$\vec{V}_{(M/R_1)}$: vecteur vitesse de M par rapport au repère mobile (ou **vitesse relative**, notée $\vec{V}_r$).

$\vec{V}_{(M,R_1/R_0)}$: vecteur vitesse de M, **supposé lié à $[R_1]$,** dans le mouvement de $[R_1]$ par rapport à $[R_0]$ (ou **vitesse d'entraînement**, notée $\vec{V}_e$).

III. 2 Théorème de composition des vecteurs-vitesses

Ce théorème, qui rappelle une relation de Chasles, stipule que le vecteur-vitesse absolue est la somme vectorielle du vecteur-vitesse relative et du vecteur-vitesse d'entrainement.

$$\boxed{\vec{V}_{(M/R_0)} = \vec{V}_{(M/R_1)} + \vec{V}_{(M,R_1/R_0)}} \qquad \textbf{(8)}$$

$$\boxed{\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e} \qquad \textbf{(8-bis)}$$

$$\boxed{\vec{V}_{M/0} = \vec{V}_{M/1} + \vec{V}_{M,1/0}} \qquad \textbf{(8-ter)}$$

Exemple d'illustration : Ballon dirigeable entrainé par le vent

On considère un ballon dirigeable **2,** en mouvement ascensionnel (de direction verticale) par rapport à une masse d'air **1**. Sous l'effet du vent, la masse d'air est en mouvement de direction horizontale par rapport au sol **0.** La vitesse d'ascension est de 4 m/s et la vitesse du vent a été mesurée à 10,8 km/h. Tous les points du ballon sont supposés avoir la même vitesse.

Question : Déterminer entièrement $\vec{V}_{(A,2/0)}$, vecteur vitesse au point *A*, du ballon **2** par rapport au sol **0**.

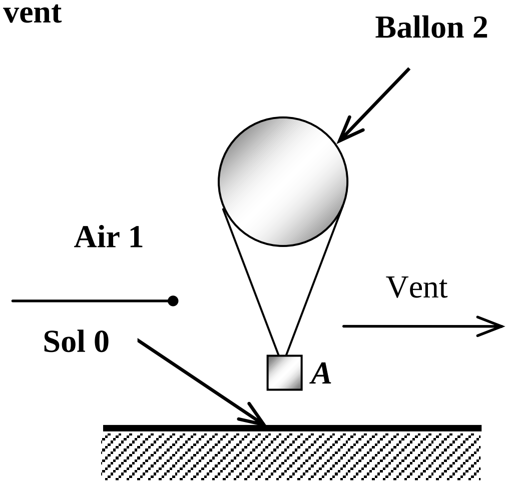


Figure 9

<u>Solution</u> :

Analyse et interprétation des données :

$\left\|\vec{V}_{(A,2/1)}\right\| = 4 \ m.s^{-1}$ (de direction verticale, sens du bas vers le haut).

$\left\|\vec{V}_{(A,\,1/0)}\right\| = 10{,}8 \ km.h^{-1} = 3 \ m.s^{-1}$ (de direction horizontale, son sens est de gauche à droite).

Equation utilisée : $\vec{V}_{(A,2/0)} = \vec{V}_{(A,\,2/1)} + \vec{V}_{(A,\,1/0)}$.

$\left\|\vec{V}_{(A,2/0)}\right\| = 5 \ m.s^{-1}$ (hypoténuse du triangle rectangle).

La direction de $\vec{V}_{(A,2/0)}$ est inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale.

On calcule cet angle grâce à son sinus par exemple.

$$\sin\alpha = \frac{\left\|\vec{V}_{(A,2/1)}\right\|}{\left\|\vec{V}_{(A,2/0)}\right\|} = \frac{4}{5} = 0{,}8. \qquad \boxed{\alpha \approx 53{,}20\,°}.$$

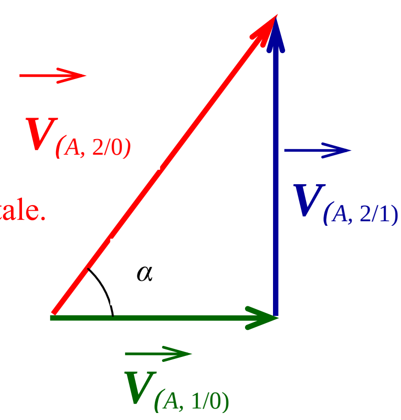


Figure 10