Licence 1

Sciences et Technologie

Mentions : ***Sciences pour l'Ingénieur – Mathématiques Informatique***

ECO 113

MECANIQUE DU POINT MATERIEL

Session 3 : *CINEMATIQUE ET VITESSES*

Cinématique : étude des mouvements sans se soucier des causes (forces).

Objet de la Cinématique : étude de trajectoires, calcul de vitesses, d'accélérations...

I. DEFINITIONS

I.1 Mouvement

Soient, dans un repère orthonormé $[R]=[O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}]$, *x*, *y* et *z* les coordonnées cartésiennes du point *M*, défini par (Figure 1) :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Si au cours du temps, **l'une au moins des coordonnées** de *M* varie, on dit que :

- *M* est en **mouvement** par rapport au repère $[R]$.
- *M* est un **point mobile dans le repère** $[R]$.

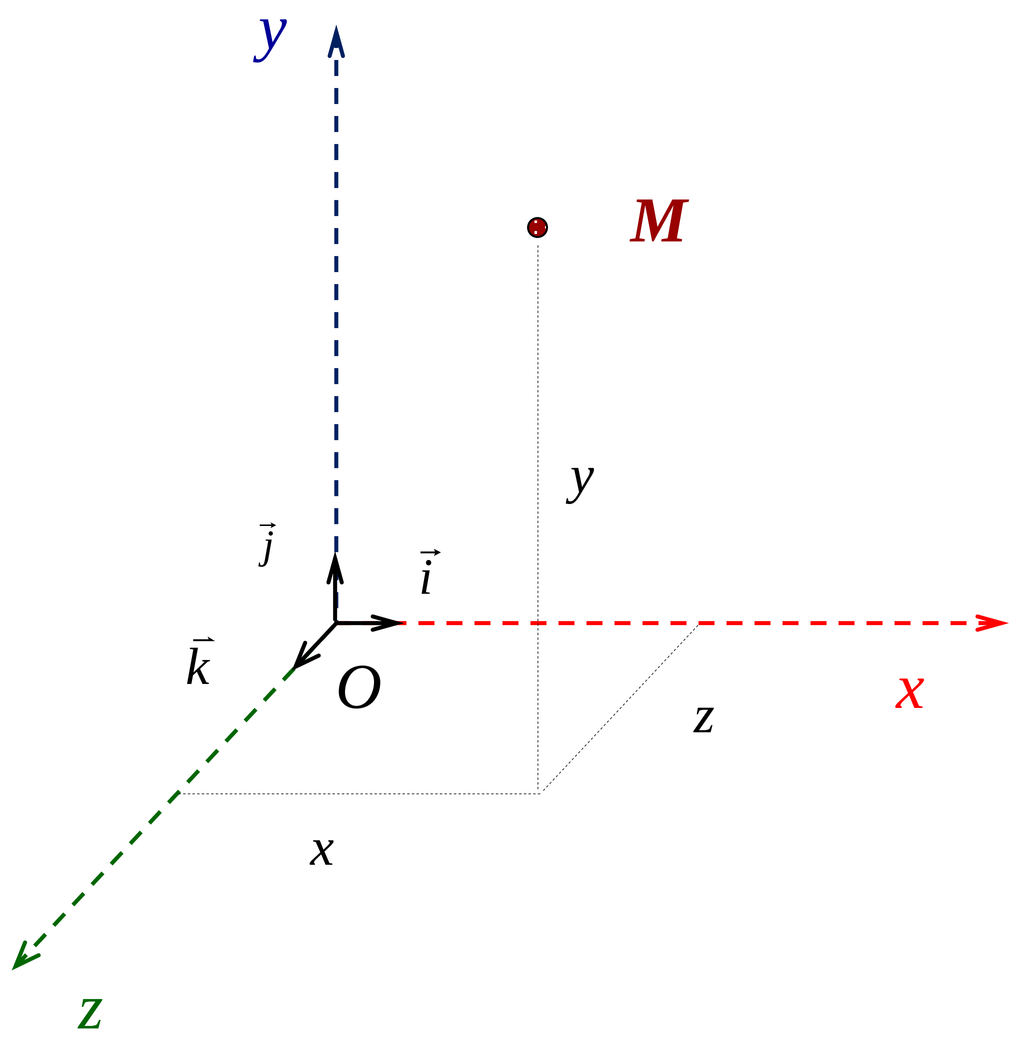


Figure 1

I.2 Coordonnées paramétriques d'un point mobile

Si les coordonnées cartésiennes de M dépendent du temps t (varient au cours du temps), on peut noter :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}.$$

Ces **équations paramétriques** (qui dépendent du paramètre t) définissent une **courbe ($\mathscr{C}$)** appelée **trajectoire du point** M par rapport au repère $[R]$.

Et trouver **une relation entre *x*, *y*** et ***z*** **indépendante de t**, c'est établir l'**équation de la trajectoire**.

Exemple n°1 :

Dans un repère orthonormé $[R]=[O,\vec{i},\vec{j}]$, le mouvement d'un point matériel *M* est décrit par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x = 2\,t \\ y = t^2 \end{cases}$$ (*x* et *y* en mètres, *t* en secondes).

1°) Trouver l'équation de la trajectoire.

2°) Préciser la nature de la trajectoire.

Résolution

1°) $x = 2\,t \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{x}{2}$

$$y = t^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{x^2}{4}}.$$

2°) Cette trajectoire est une **parabole**.

Exemple n°2 :

Dans un repère orthonormé $[R]=[O,\vec{i},\vec{j}]$, le mouvement d'un point matériel *M* est décrit par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 3t \end{cases}$$ (*x* et *y* en mètres, *t* en secondes).

1°) Trouver l'équation de la trajectoire.

2°) Préciser la nature de la trajectoire.

Résolution

1°) $x = t - 1 \quad \Rightarrow \quad t = x + 1$.

$y = 3t = 3(x+1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 3\ (x+1)}$.

2°) Cette trajectoire est une **droite**.

I.3 Loi horaire

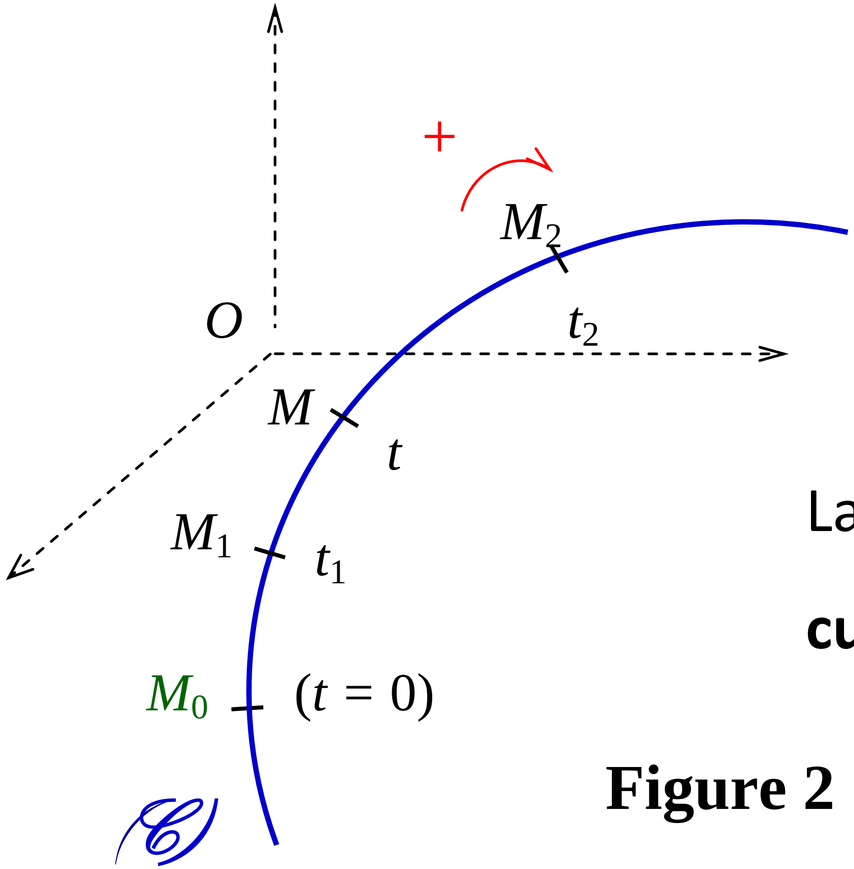


Figure 2

Sur la trajectoire $\mathscr{C}$, on définit :

- Un point, $\boldsymbol{M_0}$, origine des arcs.
- Un sens de parcours positif (+).

La grandeur $\overset{\frown}{M_0M} = s$ est appelée **abscisse curviligne.**

Est appelée **équation du mouvement** ou **loi horaire**, la relation :

$$\boxed{s = s(t)} \qquad \textbf{(1).}$$

I.4 Principaux mouvements d'un point matériel

<u>I.4.1 Translation rectiligne (déplacement selon une droite)</u>

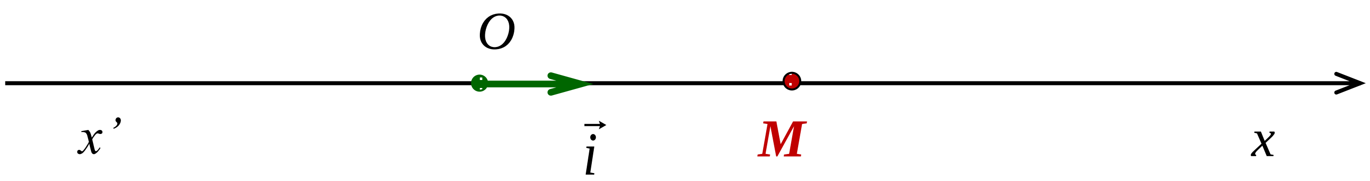


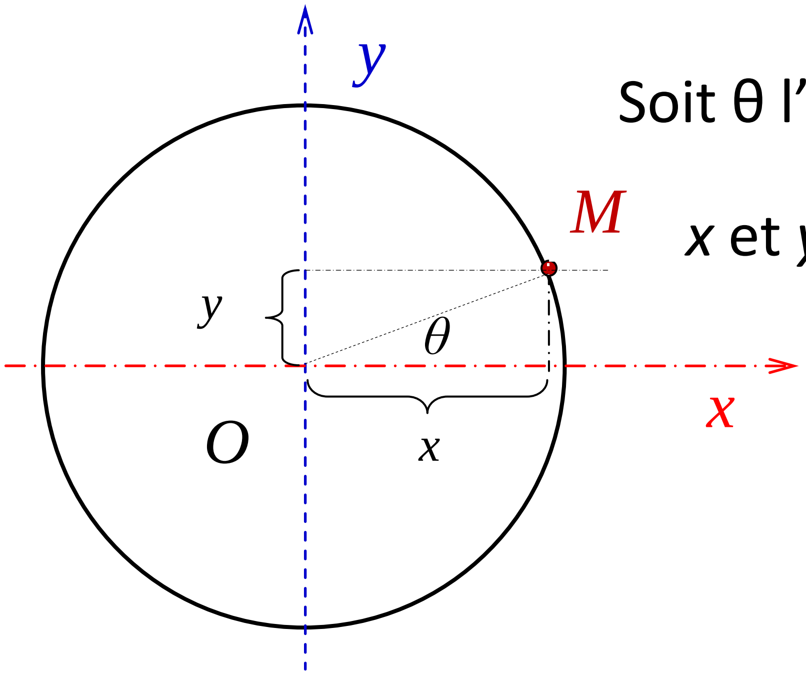
Figure 3

L'abscisse curviligne *s* se confond alors avec l'abscisse rectiligne *x*.

La loi horaire s'écrit : $\boxed{x = x(t)}$ **(1-bis).**

Translation **rectiligne** **uniforme** : cas d'un mouvement effectué suivant **une droite**, avec une **vitesse constante** (indépendante du temps *t*).

I.4.2 Rotation autour d'un axe fixe



Soit θ l'angle entre l'axe *Ox* et la direction de $\vec{OM}$.

x et *y* dépendent de θ qui dépend du temps *t*.

$$\begin{cases} x = R\ \cos\theta \\ y = R\ \sin\theta \end{cases}.$$

Figure 4

Relation trigonométrique : $\cos^2\theta + \sin^2\theta = (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1,\ \forall\theta$.

Soit, $\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 = 1$

Alors, la loi horaire s'écrit : $\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$ **(1-ter).**

Equation d'un **cercle** de centre *O* (0, 0) et de **rayon** *R*.

En effet, forme générale de l'équation d'un cercle de centre *C* (x_c, y_c) dans le plan (O, *x*, *y*) : $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=R^2$ (Ici, $x_c = y_c = 0$, coordonnées du centre *C*).

Mouvement **circulaire** **uniforme** : mouvement autour **d'un axe de rotation**, avec une **vitesse de rotation** (ou vitesse angulaire) **constante**.

I.5 Vecteur position

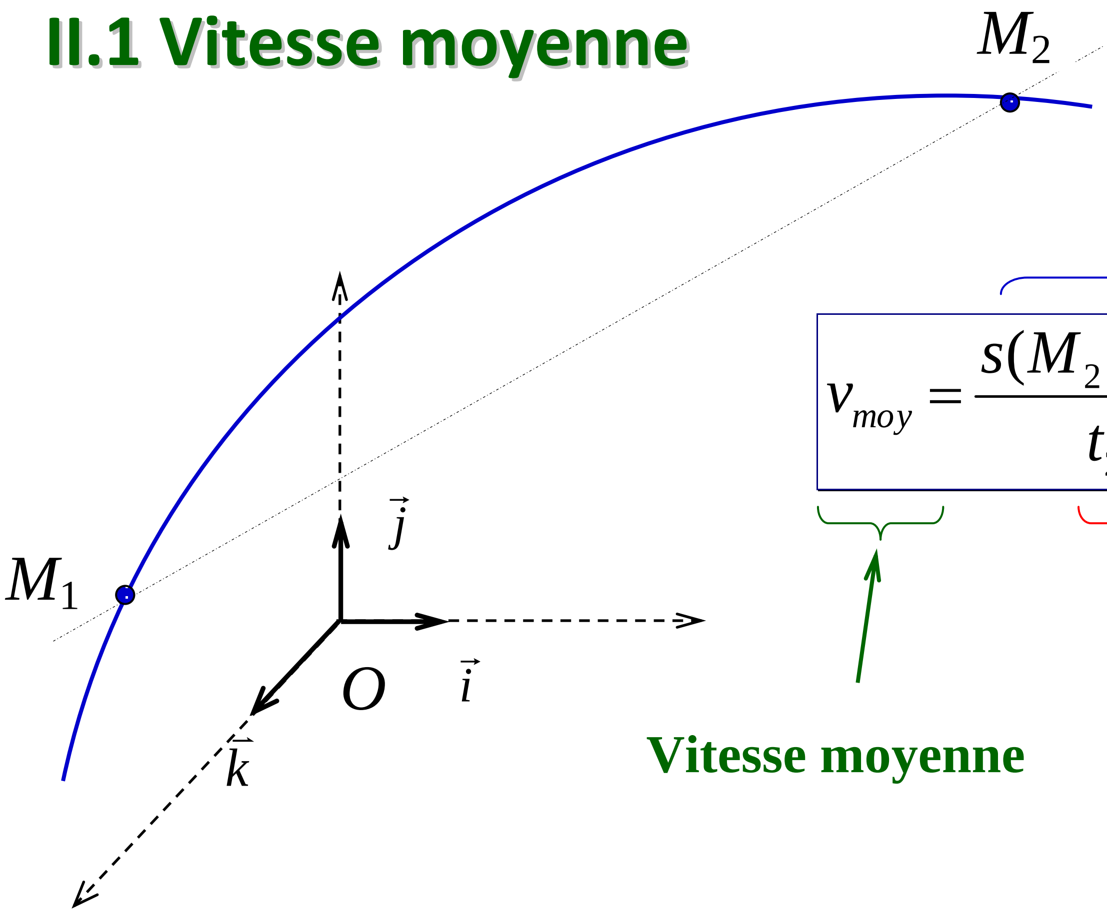
C'est la grandeur vectorielle définie par la position du point mobile *M* :

$$\boxed{\vec{OM}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}} \qquad \textbf{(2)}$$

(où *x*, *y* et *z* sont les coordonnées cartésiennes de *M*).

II. DIFFERENTES NOTIONS DE VITESSES D'UN POINT

II.1 Vitesse moyenne



$$\boxed{\underbrace{v_{moy}}_{\text{Vitesse moyenne}} = \frac{\overbrace{s(M_2)-s(M_1)}^{\text{Variation d'abscisse curviligne.}}}{\underbrace{t_2-t_1}_{\text{Variation de temps}}}} \qquad \textbf{(3)}$$

Figure 5

II.2 Vitesse instantanée

Par définition, c'est la **vitesse à un instant donné** (par exemple, celle indiquée sur le tableau de bord d'un véhicule).

On la détermine grâce à la **formule de la dérivée**, par rapport au temps, **de l'abscisse curviligne**.

$$\boxed{v = \underbrace{\frac{ds}{dt} = s'(t)}} \qquad \textbf{(4)}$$

Dérivée, par rapport au temps, **de l'abscisse curviligne**.

AVERTISSEMENT : cette notation mathématique signifie qu'on calcule la dérivée de l'expression de *s*, mais pas qu'on divise un quelconque *ds* par un quelconque *dt*.

Exemple d'application.

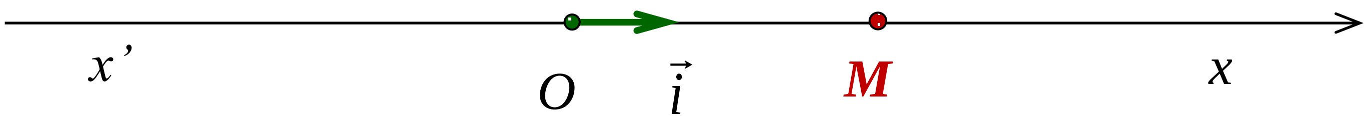
Le déplacement d'un point mobile *M* sur l'axe horizontal *x'Ox* (de vecteur unitaire $\vec{i}$) est décrit par une équation :

$$x = t^3 - 12t + 3.$$

x : position sur l'axe horizontal (en mètres).

t : temps (en secondes).

Figure 6



1°) Donner l'expression de la vitesse instantanée *v*.

2°) Calculer le temps nécessaire pour atteindre une vitesse de 36 *m/s*.

Résolution

1°) Expression de la vitesse instantanée *v*.

Remarque préliminaire : La formule $v = \frac{x}{t}$ **n'est pas la bonne, car la vitesse n'est pas constante**, donc inutile de l'utiliser ici.

Expression appropriée : $v = \frac{dx}{dt}$ (dérivée de *x* par rapport au temps).

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(t^3 - 12t + 3)}{dt} = 3t^2 - 12}.$$

Remarque : si *x* est en *m* et *t* en *s*, la vitesse *v* est en ***m/s***.

2°) Temps nécessaire pour atteindre une vitesse de 36 m/s.

Equation à résoudre : $3t^2 - 12 = 36$. Donc : $3t^2 = 36 + 12 = 48$.

Soit $t^2 = 16$. Donc : $t = 4$. Il faudra un temps de **4 secondes**.

II.3 Vecteur vitesse d'un point *M* par rapport à un repère

II.3.1. Définition

Le **vecteur-vitesse** est la **dérivée**, par rapport au temps, **du vecteur-position**. Son expression est donc obtenue en dérivant par rapport au temps le vecteur-position défini dans l'équation (2) :

$$\vec{V}_{(M/R)} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\,(x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k})}{dt} = \frac{d\,(x)}{dt}\vec{i} + \frac{d\,(y)}{dt}\vec{j} + \frac{d\,(z)}{dt}\vec{k}\,.$$

$$\boxed{\vec{V}_{(M/R)} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}} \qquad \textbf{(5)}$$

II.3.2. Composantes du vecteur-vitesse

$$\boxed{\vec{V}_{(M/R)} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = x' \;;\quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} = y' \;;\quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} = z' \qquad \textbf{(5-bis).}$$

Toutes ces composantes sont des **scalaires positifs** ou **négatifs**, exprimés en **mètre par seconde** (*m/s* ou *m.s*$^{-1}$).

II.3.3. Norme du vecteur-vitesse

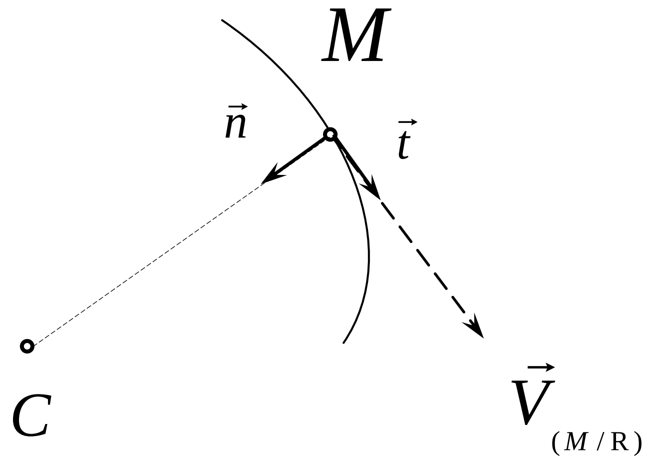
La norme (ou module) du vecteur-vitesse est définie par :

$$\boxed{\left\| \vec{V}_{(M/R)} \right\| = v = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2} + v_z^{\,2}}}. \qquad \textbf{(6)}$$

Cette norme du vecteur-vitesse est un scalaire **positif qui** s'exprime en mètre par seconde (***m/s*** ou en ***m.s***$^{-1}$) et est appelée **la vitesse**.

Remarques

*Le vecteur-vitesse est tangent au point *M* à la trajectoire.



$$\boxed{\vec{V}_{(M/\mathrm{R})} = v\,\vec{t}} \qquad \textbf{(7)}$$

Figure 7

*Le **vecteur unitaire tangent** $\vec{t}$ et **la norme** ***v*** sont des **grandeurs variables au cours du temps** :

- le vecteur unitaire $\vec{t}$, tangent à tout instant à la trajectoire, change d'orientation ;
- la norme *v* de ce vecteur-vitesse change de valeur (de grandeur).

Université de Guyane

II.4 Expression du vecteur-vitesse de rotation

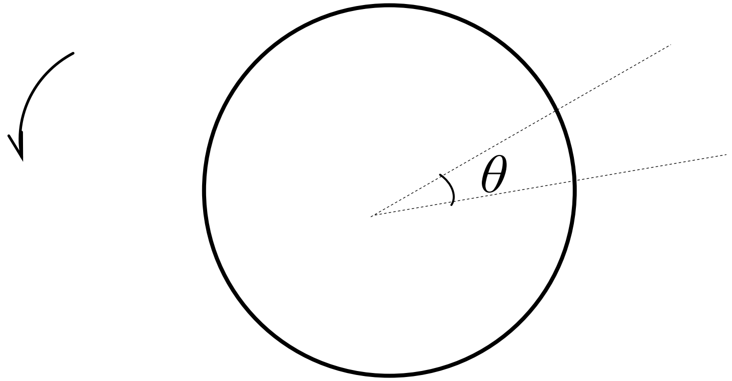


Figure 8

Par analogie avec l'expression : $\vec{V}_{(M/R)} = v\,\vec{t}$, on écrit : $\boxed{\vec{\Omega} = \omega\,\vec{u}}$ **(8)**

ω : **vitesse angulaire**, exprimée **en *rad.s^{-1}*** (pour rappel, la vitesse angulaire est la dérivée, par rapport au temps, de l'angle θ).

$\vec{u}$: **vecteur unitaire de l'axe de rotation** (ici l'axe de rotation est perpendiculaire au plan de la feuille).

$\vec{\Omega}$: vecteur vitesse de rotation.

III. COMPOSITIONS DE VECTEURS-VITESSES

III. 1 Définitions

$[R_0]$: repère **absolu** (fixe) ; $[R_1]$: repère **mobile** dans $[R_0]$.

M est **un point en mouvement** par rapport à $[R_1]$ donc aussi (en général) par rapport à $[R_0]$.

$\vec{V}_{(M/R_0)}$: vecteur vitesse de ***M* par rapport au repère absolu** (ou **vitesse absolue**, notée $\vec{V}_a$).

$\vec{V}_{(M/R_1)}$: vecteur vitesse de ***M* par rapport au repère mobile** (ou **vitesse relative**, notée $\vec{V}_r$).

$\vec{V}_{(M,R_1/R_0)}$: vecteur vitesse de ***M*, supposé lié à $[R_1]$,** dans le mouvement **de $[R_1]$ par rapport à $[R_0]$** (ou **vitesse d'entraînement**, notée $\vec{V}_e$).

III. 2 Théorème de composition des vecteurs-vitesses

Ce théorème, qui rappelle une relation de Chasles, stipule que le vecteur **vitesse absolue** est la **somme vectorielle** du vecteur **vitesse relative** et du vecteur **vitesse d'entrainement**.

$$\boxed{\vec{V}_{(M/R_0)} = \vec{V}_{(M/R_1)} + \vec{V}_{(M,R_1/R_0)}} \qquad \textbf{(9)}$$

$$\boxed{\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e} \qquad \textbf{(9-bis)}$$

$$\boxed{\vec{V}_{M/0} = \vec{V}_{M/1} + \vec{V}_{M,1/0}} \qquad \textbf{(9-ter)}$$

Exemple d'illustration : Ballon dirigeable entrainé par le vent

On considère un ballon dirigeable **2,** en mouvement ascensionnel (de direction verticale) par rapport à une masse d'air **1** (Figure 9). Sous l'effet du vent, la masse d'air est en mouvement de direction horizontale par rapport au sol **0.** La vitesse d'ascension est de 4 m/s et la vitesse du vent a été mesurée à 10,8 km/h. Tous les points du ballon sont supposés avoir la même vitesse.

Question : Déterminer entièrement $\vec{V}_{(A,2/0)}$, vecteur vitesse au point *A*, du ballon **2** par rapport au sol **0**.

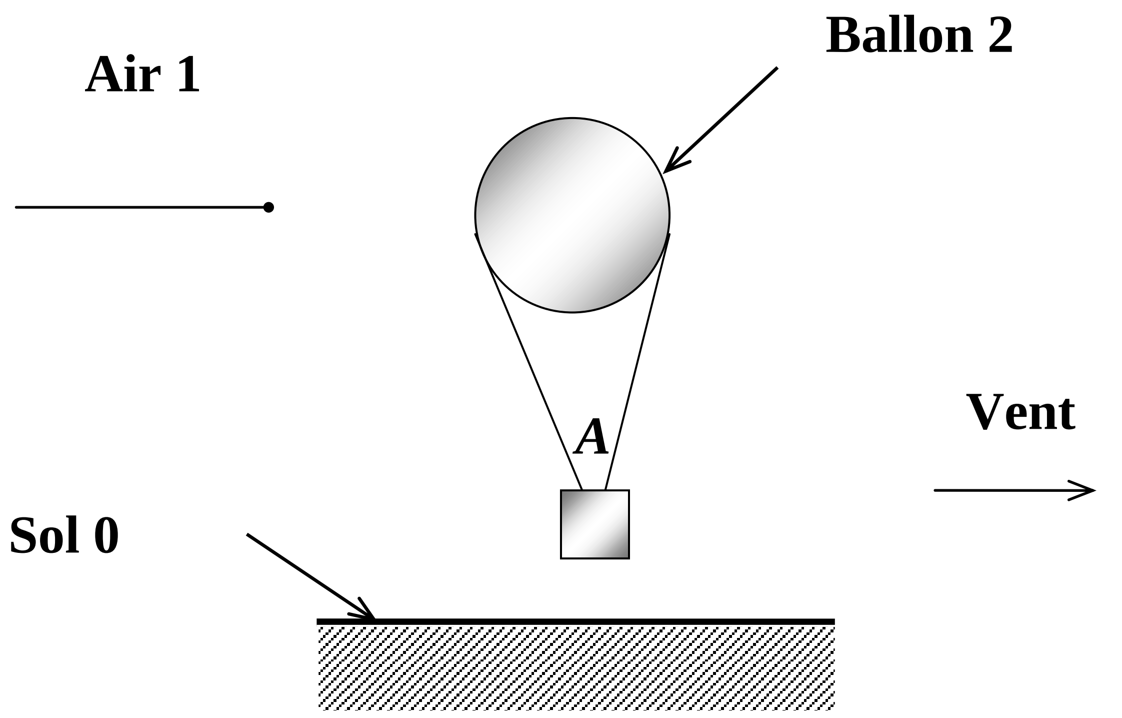


Figure 9

Résolution :

Analyse et interprétation des données :

$\left\|\vec{V}_{(A,2/1)}\right\| = 4\ m.s^{-1}$. Direction verticale (sens, de bas en haut).

$\left\|\vec{V}_{(A,\ 1/0)}\right\| = 10{,}8\ km.h^{-1} = 3\ m.s^{-1}$. Direction horizontale (sens, de gauche à droite).

Equation utilisée : $\vec{V}_{(A,2/0)} = \vec{V}_{(A,\ 2/1)} + \vec{V}_{(A,\ 1/0)}$. (somme de deux vecteurs orthogonaux).

$\left\|\vec{V}_{(A,2/0)}\right\| = 5\ m.s^{-1}$ (hypoténuse du triangle rectangle, Figure 10).

Direction de $\vec{V}_{(A,2/0)}$: inclinée d'un angle *α* par rapport à l'horizontale.

Calcul de cet angle (grâce à son sinus par exemple).

$$\sin\alpha = \frac{\left\|\vec{V}_{(A,2/1)}\right\|}{\left\|\vec{V}_{(A,2/0)}\right\|} = \frac{4}{5} = 0{,}8 \qquad \boxed{\alpha \approx 53{,}20\,°}$$

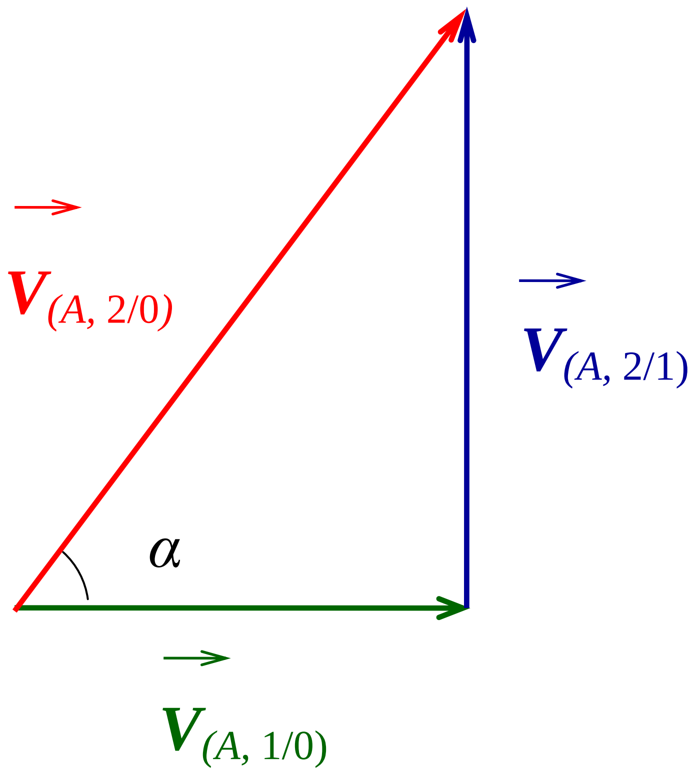


Figure 10 : $\vec{V}_{(A,\ 2/0)} = \vec{V}_{(A,\ 2/1)} + \vec{V}_{(A,\ 1/0)}$

MERCI POUR VOTRE ATTENTION !

- ***Thank you for your attention !***

- ***Obrigado !***

- ***Danke schoen !***

- ***Grazie mille !***

Aligato