

## Tableaux des dérivées

On rappelle les dérivées des fonctions usuelles ainsi que les formules générales de dérivation.

Fonction	Domaine de dérivabilité	Dérivée	Opération	Dérivée
$\ln(x)$	$\mathbb{R}^{+,*}$	$\frac{1}{x}$	$f + g$	$f' + g'$
$e^x$	$\mathbb{R}$	$e^x$	$f \cdot g$	$f' \cdot g + f \cdot g'$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^{+,*}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{+,*}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$g \circ f$	$f' \times g' \circ f$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$(f \cdot g)^{(n)}$	$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$(f^{-1})'$	$\frac{1}{f' \circ f^{-1}}$
$\tan(x)$	$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[ , k \in \mathbb{Z}$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\arccos(x)$	$] -1; 1[$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$u^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^*$	$\alpha u' u^{\alpha-1}$
$\arcsin(x)$	$] -1; 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$\cosh(x)$	$\mathbb{R}$	$\sinh(x)$	$\exp(u)$	$u' \exp(u)$
$\sinh(x)$	$\mathbb{R}$	$\cosh(x)$	$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$
$\tanh(x)$	$\mathbb{R}$	$1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\sin(u)$	$u' \cos(u)$

**Quelques formules de trigonométrie vraiment utiles.**  $a, b$  et  $x$  sont des réels (quelconques) :

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1, \quad \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \quad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b),$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x), \quad \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2},$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x), \quad \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

Pour étudier certaines courbes paramétrées faisant intervenir  $\sin$  et  $\cos$ , il est parfois utile d'effectuer le changement de variable  $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ , d'où les formules suivantes :

$$\cos(x) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}, \quad \sin(x) = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Et tant qu'on y est, une factorisation utile (formules de l'arc-moitié) :

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2 \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \exp\left(i \frac{\alpha + \beta}{2}\right), \quad e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \exp\left(i \frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

## Développements limités usuels en 0

**Les développements limités usuels suivants sont à connaître par cœur !**

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$	Taylor-Young
$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$	Taylor-Young
$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$	par dérivation de $\sin$
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$	Taylor-Young
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$	composition par $-x$
$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$	intégration de $\frac{1}{1-x}$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$	composition par $-x$
$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$	intégration de $\frac{1}{1+x^2}$
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$	Taylor-Young
$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} x^n + o(x^n)$	Taylor-Young ou $\alpha = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8} x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} x^n + o(x^n)$	Taylor-Young ou $\alpha = -\frac{1}{2}$
$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$	intégration de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 - \frac{17}{315} x^7 + o(x^8)$	par division
$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+3})$	somme de $e^x$ et $e^{-x}$
$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$	somme de $e^x$ et $e^{-x}$

**Tableau des primitives**

Fonction	Intervalle d'intégration	Primitive
$(x - a)^n, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}(x - a)^{n+1}$
$\frac{1}{x - a}, a \in \mathbb{R}$	$] - \infty; a[ \text{ OU } ]a; +\infty[$	$\ln( x - a )$
$\frac{1}{(x - a)^n}, a \in \mathbb{R}, n \geq 2$	$] - \infty; a[ \text{ OU } ]a; +\infty[$	$-\frac{1}{(n-1)(x - a)^{n-1}}$
$\cos(ax), a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a} \sin(ax)$
$\sin(ax), a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{a} \cos(ax)$
$\tan(x)$	$]k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{\pi}{2}[ , k \in \mathbb{Z}$	$-\ln( \cos(x) )$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}^{+,*}$	$x \ln(x) - x$
$e^{ax}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a} e^{ax}$
$(x - a)^\alpha, a \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$]a; +\infty[$	$\frac{1}{\alpha+1}(x - a)^{\alpha+1}$
$a^x, a > 0$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\ln(a)} a^x$
$\frac{1}{x^2 + 1}$	$\mathbb{R}$	$\arctan(x)$
$\sqrt{x - a}, a \in \mathbb{R}$	$]a; +\infty[$	$\frac{2}{3}(x - a)^{3/2}$
$\frac{1}{\sqrt{x - a}}, a \in \mathbb{R}$	$]a; +\infty[$	$2\sqrt{x - a}$
$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$] - 1; 1[$	$\arcsin(x)$