Université de Guyane

L1 : *Sciences et Technologie*

Mentions : Sciences pour l'Ingénieur – Mathématiques Informatique

MECANIQUE DU POINT MATERIEL

SESSION N°4 : CINEMATIQUE ET ACCELERATIONS

CORRIGES EXOS TESTS

Exo Test n°1 - Caractérisation d'un mouvement

Un point matériel *M* est animé d'un mouvement défini par les équations :

x = sin t; *y = cos t;* *z = 3* *(x, y, z en mètres, t en secondes)*

Le repère orthonormé direct : $[R]=[O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}]$ est associé à un système d'axes *Oxyz.*

1°) Déterminer les composantes du vecteur-accélération $\vec{a}_{(M/R)}$.

2°) Donner l'expression de l'accélération tangentielle $\vec{a}_t$ et de l'accélération normale $\vec{a}_n$.

Université de Guyane

Solution exo 1

1°) Déterminer les composantes du vecteur-accélération $\vec{a}_{(M/R)}$.

$$\vec{V}_{(M/R)} \left| \begin{array}{l} v_x = \cos t \\ v_y = -\sin t \\ v_z = 0 \end{array} \right. \qquad \vec{a}_{(M/R)} \left| \begin{array}{l} a_x = -\sin t \\ a_y = -\cos t \\ a_z = 0 \end{array} \right.$$

2°) Donner l'expression de l'accélération tangentielle $\vec{a}_t$ et de l'accélération normale $\vec{a}_n$.

Cet exercice a été traité dans la session n°3. La trajectoire est un cercle de rayon 1 ($x^2 + y^2 = 1$). Et la vitesse est constante (égale à 1, quel que soit le temps *t*).

$$\vec{a}_{(M/R)} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$

Accélération tangentielle : $\vec{a}_t = \dfrac{dv}{dt}\,\vec{t}$. Ici, la vitesse est **constante.**

$$v = c^{te} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0$$

Donc $\boxed{\vec{a}_t = \vec{0}}$.

Accélération normale :

Alors, $\boxed{\vec{a}_n = \vec{a}_{(M/R)}}$.

Exo Test n°2 - Expression d'une accélération dans un mouvement rectiligne

Figure 1

Le déplacement d'un point mobile *M* (Figure 1) sur un axe horizontal *x'Ox* (de vecteur unitaire $\vec{i}$) est décrit par l'équation : $x = t^2 - 2t$.(*x* est exprimé en mètres, *t* en secondes).

Université de Guyane

1°) Donner l'expression de la vitesse instantanée *v*.

Réponse : $v = \dfrac{dx}{dt} = x'(t)$

$$\boxed{v = (2\ \ t - 2)\ \ (\text{en } m.s^{-1})}$$

2°) Donner l'expression de l'accélération.

Réponse : $a = \dfrac{dv}{dt} = x''(t)$

$$\boxed{a = 2\,(\text{en } m.s^{-2})}$$

Exo Test n°3 – Composantes intrinsèques d'une accélération

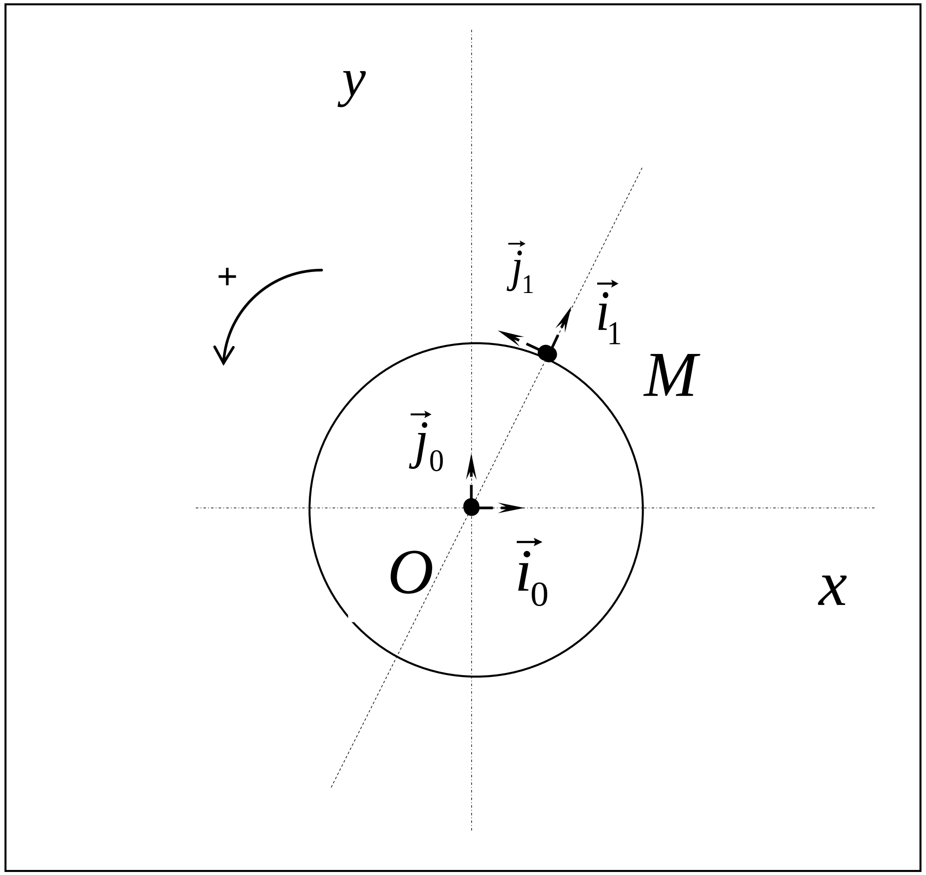

Figure 2

Un point matériel *M* (Figure 2) est en rotation autour d'un axe *Oz* (perpendiculaire au plan de la feuille et de vecteur unitaire $\vec{k}_0$). Ce mouvement est circulaire (dans le sens trigonométrique, avec un rayon *R* = 1 *m*) et est supposé uniforme (vitesse constante et on donne le nombre de tours par minute : *N* = 60 tours par minute).

Soient deux repères orthonormés directs : l'un fixe, $[R_0]=[O,\vec{i}_0,\vec{j}_0,\vec{k}_0]$ et l'autre mobile (<u>lié au point matériel *M*</u>) $[R]=[M,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1]$. Les vecteurs $\vec{k}_0$ et $\vec{k}_1$ sont confondus. On note $\vec{OM}=r\,\vec{i}_1$.

1°) Déterminer le vecteur-accélération $\vec{a}_{(M)}$ du point *M*.

$$\vec{OM} = r\,\vec{i}_1$$

$$\vec{V}_{(M)} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d(r\,\vec{i}_1)}{dt} = r\,\frac{d(\vec{i}_1)}{dt}$$

$$\vec{a}_{(M)} = \frac{d\vec{V}_{(M)}}{dt} = \frac{d\left(r\,\dfrac{d(\vec{i}_1)}{dt}\right)}{dt} = r\,\frac{d^2(\vec{i}_1)}{dt^2}$$

$$\boxed{\vec{a}_{(M)} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = r\,\frac{d^2(\vec{i}_1)}{dt^2}}$$

Que vaut le terme $\dfrac{d^2(\vec{i}_1)}{dt^2}$? Pour l'instant, nous ne le savons pas.

Mais la réponse à la question suivante nous donnera la réponse.

2°) Déterminer les composantes intrinsèques (accélération normale $\vec{a}_n$ et accélération tangentielle $\vec{a}_t$) de ce vecteur-accélération.

$\vec{a}_t = \dfrac{dv}{dt}\,\vec{t}$: accélération tangentielle ;

Vitesse **constante** : $v = c^{te} \Rightarrow \dfrac{dv}{dt} = 0$ $\boxed{\vec{a}_t = \vec{0}}$.

$\vec{a}_n = \dfrac{v^2}{r}\,\vec{n}$: accélération normale.

Université de Guyane

$$\vec{a}_n = \vec{a}_{(M)} = \frac{(\omega\ r)^2}{r}\,\vec{n} = \ \omega^2 r\,\vec{n}\ .$$

$$\boxed{\vec{a}_n = \vec{a}_{(M)} = \frac{(\omega\ r)^2}{r}\,\vec{n} = -\,\omega^2 r\,\vec{i}_1}$$

$\vec{a}_{(M)} = -\,\omega^2 r\,\vec{i}_1$ et $\vec{a}_{(M)} = r\,\dfrac{d^2(\vec{i}_1)}{dt^2}$

On identifie les deux termes :

$$r\,\frac{d^2(\vec{i}_1)}{dt^2} = -\,\omega^2 r\,\vec{i}_1 \qquad \boxed{\frac{d^2(\vec{i}_1)}{dt^2} = -\,\omega^2\,\vec{i}_1}$$

Université de Guyane

Exo Test n°4 – Accélération angulaire

Un point matériel *M* (Figure 3), en rotation autour d'un axe *Oz,* met 10 secondes pour atteindre une vitesse, supposée constante à partir de cet instant, et exprimée en nombre de tours par minutes : *N* = 300 tours par minute.

1°) Déterminer la vitesse angulaire.

Réponse : $\omega = \dfrac{\pi \ N}{30}$ $\omega = \dfrac{\pi \ \text{x} \ 300}{30}$ $\boxed{\omega = 10 \ \pi \, (rad.s^{-1})}$

2°) Déterminer l'accélération angulaire.

Réponse : $\omega' = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{(\omega - \omega_0)}{(t - t_0)}$ $\omega' = \dfrac{10\,\pi \text{ rad /s}}{10\ s}$ $\boxed{\omega' = \pi\ \ (rad.s^{-2})}$.

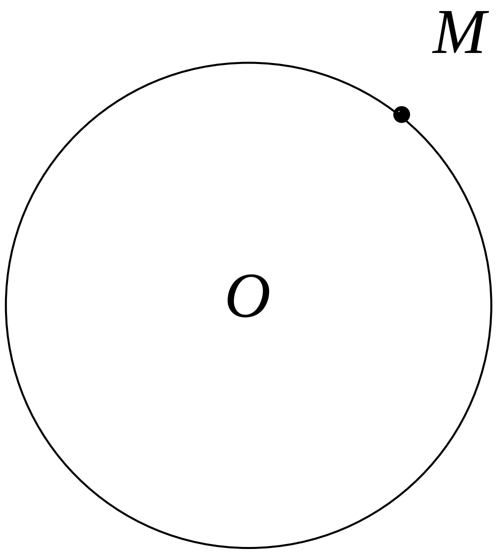

Figure 3