Licence 1

Sciences et Technologie

Mentions : ***Sciences pour l'Ingénieur – Mathématiques Informatique***

ECO 113

MECANIQUE DU POINT MATERIEL

Session 2 : *OPERATIONS VECTORIELLES*

I. RAPPEL, DIFFERENCE ENTRE SCALAIRES ET VECTEURS

Scalaires : nombres **positifs**, **négatifs** ou **nuls** utilisés pour définir différentes grandeurs.

Vecteurs : définis par une **direction** (**droite d'action**, ou droite support), un **sens** (orientation de l'origine *O* vers l'extrémité *E,* indiquée par la flèche), une **norme ou** un **module** (scalaire).

Dans un système d'axes, le vecteur est décomposé **en composantes scalaires** (coordonnées cartésiennes).

Règle n°1 :

Addition possible entre vecteurs de même nature (à condition de respecter les règles d'addition vectorielle, voir paragraphe III).

MAIS : interdiction d'additionner des scalaires avec des vecteurs.

« On ne mélange pas des torchons et des serviettes »

Règle n°2 :

Multiplication possible d'un scalaire par un vecteur (voir paragraphe III, addition de vecteurs).

Exemple :

$$4.\vec{F} = 4 \times \vec{F} = \vec{F} + \vec{F} + \vec{F} + \vec{F}$$

II. OUTILS MATHEMATIQUES DE LA MECANIQUE

II.1 Coordonnées cartésiennes d'un vecteur

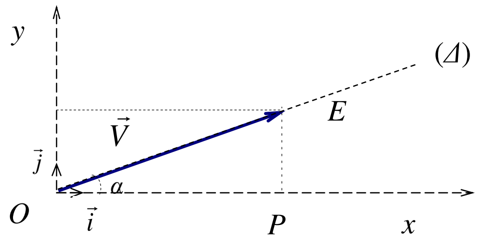


Figure 1

Ox : axe horizontal (« *couché* »), sens **positif** allant de **gauche à droite**.

Oy : axe vertical (« *debout* »), sens **positif** allant de **bas en haut**.

$$\vec{V} = \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PE}.$$

$$\boxed{\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j}} \qquad \textbf{(1)}$$

V_x et V_y : coordonnées cartésiennes, **positives** ou **négatives** en fonction de l'inclinaison de Δ (droite d'action du vecteur $\vec{V}$).

Norme du vecteur

$\|\vec{V}\|$ (également noté V, attention) : longueur du vecteur $\vec{V}$.

$$OE^2 = OP^2 + PE^2 \qquad \|\vec{V}\| = \|\overrightarrow{OE}\| = \sqrt{OE^2} = \sqrt{OP^2 + PE^2}.$$

$$\boxed{\|\vec{V}\| = V = \sqrt{V_x{}^2 + V_y{}^2}} \qquad \textbf{(2)}$$

II.2 Relations trigonométriques

Rappel des définitions du sinus, du cosinus et de la tangente de θ.

sin θ = $\frac{AB}{OA}$

cos θ = $\frac{OB}{OA}$

tan θ= $\frac{AB}{OB}$

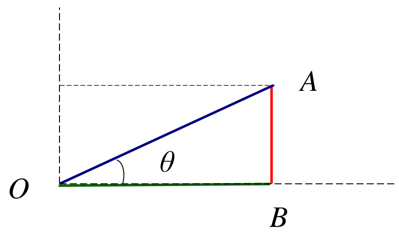


Figure 2

***AB* : Coté opposé.**

***OB* : Coté adjacent.**

***OA* : Hypoténuse du triangle rectangle.**

Technique pour retenir sinus et cosinus remarquables

Etape 1

Angle (radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Angle (degrés)	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
Sinus (sin.)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Cosinus (cos.)	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**

On met 0, 1, 2, 3 et 4 sur la ligne des sinus et 4, 3, 2, 1 et 0 sur la ligne des cosinus.

Etape 2.

Angle (radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Angle (degrés)	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
Sinus (sin.)	**0/2**	**1/2**	**2/2**	**3/2**	**4/2**
Cosinus (cos.)	**4/2**	**3/2**	**2/2**	**1/2**	**0/2**

On multiplie chacune des deux lignes par le même facteur, 1/2 (on a des fractions avec le même dénominateur 2).

Etape 3

Angle (radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Angle (degrés)	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
Sinus (sin.)	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
Cosinus (cos.)	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

On remplace chaque numérateur par sa racine carrée.

Pièges à éviter en trigonométrie

- Le **sinus de la somme** des angles **n'est pas égal à la somme des sinus** des angles.

$$\boxed{\sin(a+b) \neq \sin a + \sin b}.$$

- Le **cosinus de la somme** des angles **n'est pas égal à la somme des cosinus** des angles.

$$\boxed{\cos(a+b) \neq \cos a + \cos b}.$$

III. ADDITIONS DE VECTEURS

Addition possible de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ **s'ils sont de même nature**, pour former un vecteur $\vec{R}$ (*R* comme **résultante**), noté :

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}.$$

Exemples : on peut additionner deux vecteurs-forces entre eux, deux vecteurs-vitesses entre eux, deux vecteurs-accélérations entre eux…

MAIS :

Interdiction d'additionner des vecteurs-forces et des vecteurs-vitesses, des vecteurs-forces et des vecteurs-accélérations…

« On ne mélange pas des torchons et des serviettes ! »

III.1 Addition de deux vecteurs de coordonnées cartésiennes connues

Repère orthonormé [*O, x, y*] de vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

$\vec{F}_1$, de coordonnées cartésiennes F_{1x} et F_{1y}, donc : $\vec{F}_1 = F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j}$.

$\vec{F}_2$, de coordonnées cartésiennes F_{2x} et F_{2y}, donc : $\vec{F}_2 = F_{2x}\vec{i} + F_{2y}\vec{j}$.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{R} = F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j} + F_{2x}\vec{i} + F_{2y}\vec{j} = (F_{1x} + F_{2x})\vec{i} + (F_{1y} + F_{2y})\vec{j} = (R_x)\,\vec{i} + (R_y)\,\vec{j}.$$

$$\begin{cases} R_x = (F_{1x} + F_{2x}) \\ R_y = (F_{1y} + F_{2y}) \end{cases} \qquad \textbf{(3.a)}$$

Remarque :

Avec un repère orthonormé [*O, x, y, z*] de vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$, on aurait obtenu la relation suivante :

$$\vec{R} = F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j} + F_{1z}\vec{k} + F_{2x}\vec{i} + F_{2y}\vec{j} + F_{2z}\vec{k}$$

$$\vec{R} = (F_{1x} + F_{2x})\vec{i} + (F_{1y} + F_{2y})\vec{j} + (F_{1z} + F_{2z})\vec{k}.$$

$$\begin{cases} R_x = (F_{1x} + F_{2x}) \\ R_y = (F_{1y} + F_{2y}) \\ R_z = (F_{1z} + F_{2z}) \end{cases} \qquad \textbf{(3.b).}$$

III.2 Addition de deux vecteurs de coordonnées cartésiennes inconnues

III.2.1 Principe : règle du triangle.

Exemple : vecteurs $\vec{F}_1$ (incliné) et $\vec{F}_2$ (horizontal), dans la position géométrique de la Figure 3.

1°) On trace (Figure 4) un vecteur parallèle, de même direction, même sens et de même norme que $\vec{F}_1$.

2°) On porte, à l'extrémité de $\vec{F}_1$ une reproduction du vecteur $\vec{F}_2$ (copie conforme, parallèle, de même sens et de même norme).

3°) Le vecteur $\vec{R}$ relie **l'origine de** $\vec{F}_1$ à l'**extrémité de** $\vec{F}_2$.

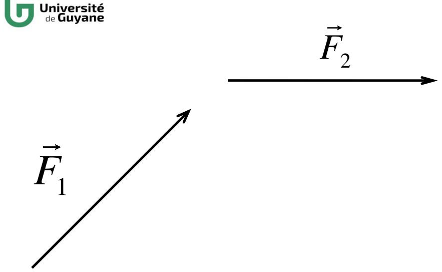


Figure 3

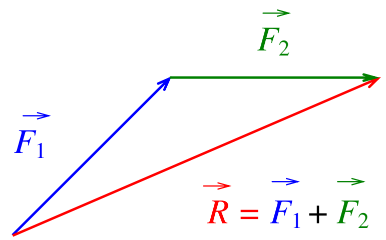


Figure 4

III.2.2 Propriétés de l'addition vectorielle

a) **Commutativité**

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_1.$$

Si on trace d'abord le vecteur $\vec{F}_2$ puis le vecteur $\vec{F}_1$ (à l'extrémité de $\vec{F}_2$), on obtient le triangle représenté en pointillé (Figure 5, parallélogramme, montrant les deux trajets.

Règle du triangle (construction), également appelée **règle du parallélogramme** (commutativité de la somme des vecteurs).

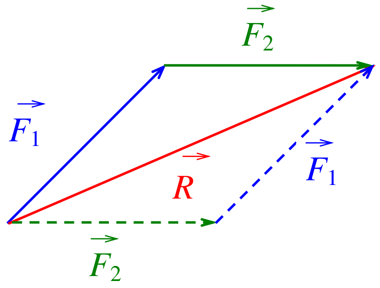


Figure 5

b) Soustraction de deux vecteurs

Tracé du vecteur $\vec{S}$ défini par : $\vec{S} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$. Par définition, $\vec{S} = \vec{F}_1 + (-\vec{F}_2)$.
Règle de construction : porter, à l'extrémité de $\vec{F}_1$, une reproduction du vecteur $-\vec{F}_2$ (même droite d'action, même norme, sens contraire à $\vec{F}_2$).

Le vecteur $\vec{S}$ relie l'origine de $\vec{F}_1$ à l'extrémité de $-\vec{F}_2$.

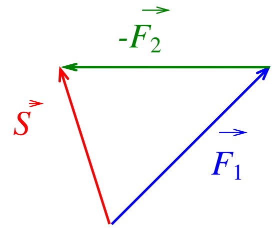


Figure 6

c) Produit de scalaires et de vecteurs

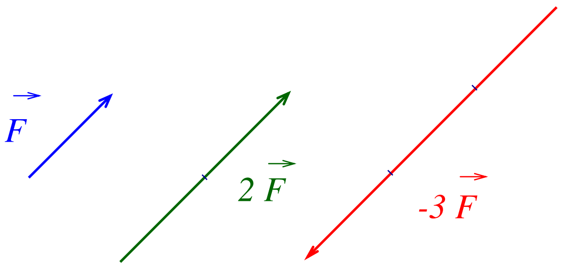


Figure 7

IV. PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS

On appelle **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, le **scalaire** W défini par :

$$\boxed{W = \vec{U}\ .\ \vec{V} = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|\cos\alpha} \qquad \textbf{(4.a)}$$

$\alpha = (\vec{U}, \vec{V})$, angle orienté allant de $\vec{U}$ à $\vec{V}$.

ou par :

$$\boxed{W = \vec{U}\ .\ \vec{V} = u_x.v_x + u_y.v_y + u_z.v_z} \qquad \textbf{(4.b)}$$

u_x, u_y, u_z : coordonnées cartésiennes de $\vec{U}$.

v_x, v_y, v_z : coordonnées cartésiennes de $\vec{V}$).

Remarque : angle $(\vec{V}, \vec{U}) = -(\vec{U}, \vec{V}) = -\alpha$ (angle allant de $\vec{V}$ à $\vec{U}$).

Propriété importante du produit scalaire

$\vec{V}\,.\,\vec{U} = \|\vec{V}\|\,.\,\|\vec{U}\|\cos(-\alpha)$.

Or, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ (la fonction cosinus est paire).

$$\boxed{\vec{V}\,.\,\vec{U} = \|\vec{V}\|\,.\,\|\vec{U}\|\cos\alpha = \vec{U}\,.\,\vec{V}}.$$

Le **produit scalaire** est **commutatif**.

Propriété encore plus visible en regardant les produits des coordonnées cartésiennes : $\vec{V}.\vec{U} = v_x.u_x + v_y.u_y + v_z.u_z$

Or, $v_x.u_x = u_x.v_x$; $v_y.u_y = u_y.v_y$; $v_z.u_z = u_z.v_z$.

Par ailleurs : $\vec{i}.\vec{j} = 0$ et $\vec{j}.\vec{k} = 0$ et $\vec{k}.\vec{i}. = 0$ (cos α nul).

V. PRODUIT VECTORIEL DE DEUX VECTEURS

On appelle **produit vectoriel** du vecteur $\vec{U}$ par le vecteur $\vec{V}$, le **vecteur** noté $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ (on lit « $\vec{U}$ **vectoriel** $\vec{V}$ ») défini par :

$$\boxed{\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|\sin\alpha\,.\,\vec{u}_W} \quad \textbf{(5.a)}$$

$\alpha = (\vec{U}\,,\ \vec{V})$: angle formé par les vecteurs.

$\vec{u}_W$: vecteur unitaire de la **perpendiculaire au plan formé** par $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

ou par :

$$\boxed{\vec{W} = (u_y v_z - u_z v_y)\,\vec{i} + (u_z v_x - u_x v_z)\,\vec{j} + (u_x v_y - u_y v_x)\,\vec{k}} \quad \textbf{(5.b)}$$

Les vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ forment, dans cet ordre, un **trièdre direct** (règle **des trois doigts de la main droite**).

Pouce ⟶ $\vec{i}$ ⟶ 1
Index ⟶ $\vec{j}$ ⟶ 2
Majeur ⟶ $\vec{k}$ ⟶ 3.

Règle de base $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ et permutations circulaires ($\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$).

Propriété importante du produit vectoriel

$\vec{V} \wedge \vec{U} = \|\vec{V}\|.\|\vec{U}\|.\sin(-\alpha).\vec{u}_W$.

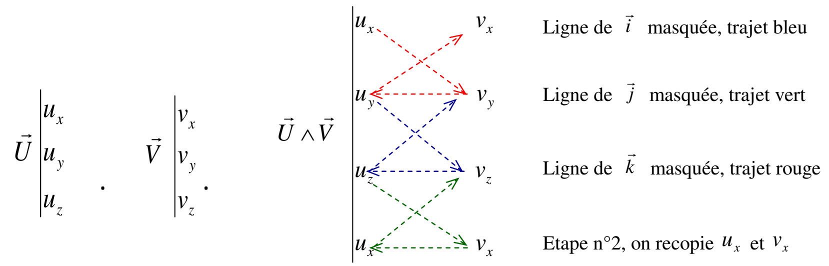
Or, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ (fonction **sinus** : **impaire**).

$\vec{V} \wedge \vec{U} = -\|\vec{V}\|.\|\vec{U}\|.\sin\alpha.\vec{u}_W = -\vec{U} \wedge \vec{V}$ (produit vectoriel **anticommutatif**).

Conséquences : $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$ et $\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$ et $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$.

Par ailleurs : $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0}$ et $\vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{0}$ et $\vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$ (angle α nul).

Technique de calcul de produits vectoriels (produits en croix).



1°) Etape n°1, on positionne les trois composantes de $\vec{U}$ (colonne de gauche) et les trois composantes de $\vec{V}$ (colonne de droite).

2°) Etape n°2, on reproduit, sur une quatrième ligne, les premières coordonnées cartésiennes u_x et v_x des deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

3°) Etape n°3, composante suivant $\vec{i}$: en masquant la 1ère ligne (celle de $\vec{i}$), on trouve le déterminant : $\boxed{u_y v_z - u_z v_y}$ (trajet bleu).

4°) Etape n°4, composante suivant $\vec{j}$: en masquant la 2ème ligne (celle de $\vec{j}$) on trouve le déterminant : $\boxed{u_z v_x - u_x v_z}$ (trajet vert).

5°) Etape n°5, composante suivant $\vec{k}$: en masquant la 3ème ligne (celle de $\vec{k}$) on trouve le déterminant $\boxed{u_x v_y - u_y v_x}$ (trajet rouge).

Voir exercices d'application (feuille d'ExoTests, n° 5 et n°6).

VI. APPLICATION A LA NOTION DE MOMENT D'UNE FORCE

VI. 1 Moment d'une force par rapport à un point

On appelle **moment** d'une force $\vec{F}$ **par rapport à un point *M*** (ou moment, au point *M*, de la force $\vec{F}$) **le vecteur** $\vec{M}_M(\vec{F})$ défini par le produit vectoriel :

$$\boxed{\overrightarrow{M_M}(\vec{F}) = \overrightarrow{MB} \wedge \vec{F}} \qquad \textbf{(6)}$$

où *B* est **un point quelconque** de la direction de $\vec{F}$.

Norme : $\|\overrightarrow{M_M}(\vec{F})\| = \|\overrightarrow{MB} \wedge \vec{F}\|$

$$\|\overrightarrow{M_M}(\vec{F})\| = \underbrace{\|\overrightarrow{MB}\|}_{(m)} . \underbrace{\|\vec{F}\|}_{(N)} . \underbrace{|\sin\alpha|}_{\text{(sans unité)}}, \text{ avec } \alpha = (\overrightarrow{MB}, \vec{F}).$$

Conclusion : l'unité de $\|\overrightarrow{M_M}(\vec{F})\|$ est le **newton.mètre** (***N*.m**).

VI. 2 Moment d'une force par rapport à un axe

On appelle **moment** d'une force $\vec{F}$ **par rapport à un axe *Δ*** (passant par le point *M*), le **scalaire** $\overline{M}_\Delta(\vec{F})$ défini par le produit scalaire :

$$\boxed{\overline{M}_\Delta(\vec{F}) = \overrightarrow{M_M}(\vec{F}) . \vec{u}_\Delta} \qquad \textbf{(7)}$$

$\vec{u}_\Delta$: vecteur unitaire de l'axe *Δ*.

Moment $\overline{M}_\Delta(\vec{F})$, mesure algébrique : valeur **positive** (si la force provoque une **rotation dans le sens trigonométrique autour de cet axe)** ou **négative** (si la force provoque une **rotation dans le sens non trigonométrique autour de cet axe**).

Exemple d'application.

Enoncé : La poutre représentée sur la Figure 8 (de longueur *OP* = 2 *m*) est soumise à la force exercée au point *P*. On désire déterminer le moment de cette force par rapport au point *O* et par rapport aux axes *Ox, Oy* et *Oz,* de vecteurs unitaires respectifs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. L'angle orienté θ a pour valeur : $\theta = (P\vec{i}, \vec{F}) = 135°$ et la norme : $\|\vec{F}\| = 200\sqrt{2}\ N$.

1°) Déterminer les coordonnées cartésiennes de cette force $\vec{F}$ (sous la forme : $\vec{F} = ...\vec{i} + ...\vec{j} + ...\vec{k}$).

2°) Déterminer le vecteur-moment, par rapport au point *O,* de cette force $\vec{F}$.

3°) Déterminer les moments, par rapport aux axes *Ox, Oy, Oz,* de cette force $\vec{F}$.

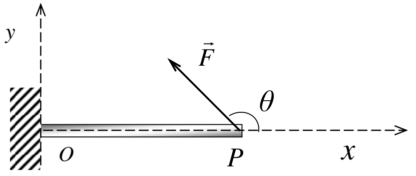


Figure 8

Résolution

1°) Coordonnées cartésiennes de la force

$$\vec{F} = -\|\vec{F}\|.\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \|\vec{F}\|.\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{F} = -200.\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + 200.\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + 0\vec{k}\ .$$

$$\boxed{\vec{F} = -200\vec{i} + 200\vec{j} + 0\vec{k}}$$ (en *N*).

2°) Vecteur-moment de la force par rapport au point *O*

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}\ .$$

$$\overrightarrow{OP} = 2\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = 2\vec{i}$$ (en m)

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = 2\vec{i} \wedge (200\vec{i} + 200\vec{j})\ .$$

$$\boxed{\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = 400\,\vec{k}}$$ (en *N.m*)

3°) Moment de la force par rapport aux axes *Ox*, *Oy* et *Oz*

$$\boxed{\overline{M}_{Ox}(\vec{F}) = \overrightarrow{M_O}(\vec{F}).\vec{i} = 400\,\vec{k}.\vec{i} = 0}$$

$$\boxed{\overline{M}_{Oy}(\vec{F}) = \overrightarrow{M_O}(\vec{F}).\vec{i} = 400\,\vec{k}.\vec{j} = 0}$$

$$\boxed{\overline{M}_{Oz}(\vec{F}) = \overrightarrow{M_O}(\vec{F}).\vec{i} = 400\,\vec{k}.\vec{k} = 400}.$$

Commentaire des résultats trouvés :

La force provoque **une rotation, dans le sens trigonométrique, autour de l'axe *Oz*** (moment positif), mais ne provoque aucune rotation autour des deux autres axes (moments nuls).

MERCI POUR VOTRE ATTENTION !

- ***Thank you for your attention !***
- ***Obrigado !***
- ***Danke schoen !***
- ***Grazie mille !***

Arigato