Université de Guyane

Licence L_1

Mentions : Sciences pour l'Ingénieur – Mathématiques Informatique

ECO 113

MECANIQUE DU POINT.

SESSION 4 : *CINEMATIQUE ET ACCELERATIONS*

I. RAPPEL sur NOTIONS DE VITESSES

I.1 Vitesse instantanée

Vitesse instantanée : **dérivée**, par rapport au temps, **de l'abscisse curviligne**.

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt} = s'(t)}$$

I.2 Vecteur vitesse d'un point *M* par rapport à un repère

Vecteur-vitesse : **dérivée**, par rapport au temps, **du vecteur-position** :

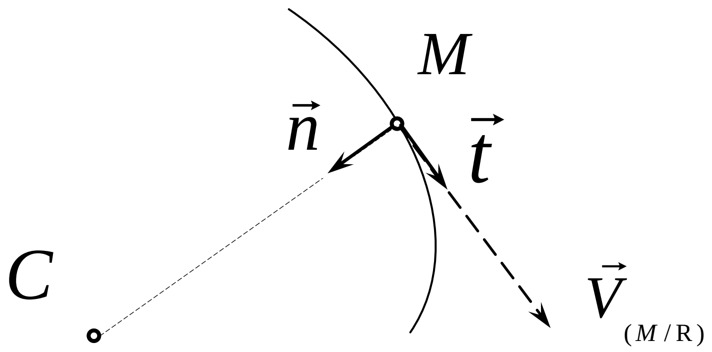
$$\boxed{\vec{V}_{(M/R)} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}}$$

Composantes scalaires du vecteur-vitesse :

$$\vec{V}_{(M/R)} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \,.$$

Remarques

*Le vecteur-vitesse est tangent au point *M* à la trajectoire



$$\boxed{\vec{V}_{(M/R)} = v\,\vec{t}}$$

Figure 1

*V**ecteur** $\vec{t}$ (**tangent** à la trajectoire) et **norme** *v,* grandeurs variables au cours du temps :

- le **vecteur** $\vec{t}$ **change d'orientation** ;
- la **norme** de la vitesse **v change de valeur**.

II. ACCELERATIONS

II.1 Définition

Soit un point matériel *M*, mobile par rapport au repère orthonormé $[R]=[O,\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}]$.

Vecteur-accélération de *M* : dérivée, par rapport au temps, du vecteur-vitesse :

$$\boxed{\vec{a}_{(M/\mathrm{R})} = \frac{d\,\vec{V}_{(M/\mathrm{R})}}{dt} = \frac{d^2\,\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\vec{a}_{(M/\mathrm{R})} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\ .$$

II.2 Composantes du vecteur-accélération en coordonnées cartésiennes

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = x'' \; ; \; a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} = y'' \; ; \; a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} = z'' . \quad \textbf{(1-bis)}$$

a_x, a_y, a_z : scalaires **positifs** ou n**égatifs,** exprimés en mètre par seconde au carré (***m/s***^{2} ou ***m.s***$^{-2}$).

II.3 Norme du vecteur-accélération

Norme (ou module) du vecteur-accélération **:**

$$\left\| \vec{a}_{(M/R)} \right\| = a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2} \; .$$

Donc *a* : scalaire **positif,** en ***m/s***^{2} ou en ***m.s***$^{-2}$.

Exemple d'application n°1.

Le déplacement d'un point mobile *M* sur l'axe horizontal *x'Ox* (de vecteur unitaire $\vec{i}$) est décrit par une équation :

$$x = t^3 - 12t + 3.$$

x : position sur l'axe horizontal (mètres)

t : temps (en secondes).

1°) Donner l'expression de l'accélération.

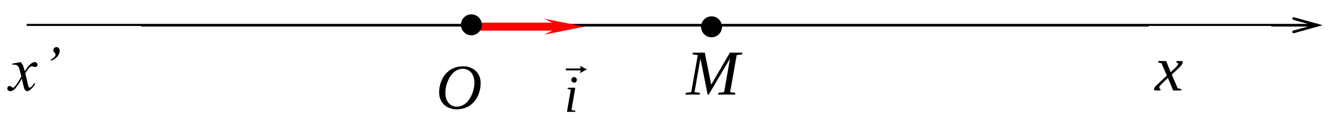


Figure 2

Résolution

1°) Expression de l'accélération.

Remarque : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$.

Vecteur $\vec{a}_{(M/R)} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \dfrac{d^2(x\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k})}{dt^2} = \dfrac{d^2(x)}{dt^2}\vec{i} + \dfrac{d^2(0)}{dt^2}\,\vec{j} + \dfrac{d^2(0)}{dt^2}\,\vec{k}$

Donc, l'expression : $\vec{a}_{(M/R)} = a_x\ \vec{i} = a\,\vec{i}$.

$a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ (dérivée seconde de *x* par rapport au temps).

$$\boxed{a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2(t^3 - 12t + 3)}{dt^2} = 6t}$$ (en ***m.s***$^{-2}$).

Exemple d'application n°2.

Le déplacement d'un point mobile *M* sur l'axe horizontal *x'Ox* (de vecteur unitaire $\vec{i}$) est décrit par une équation :

$$x = t^2 - 4t + 2 .$$

x désigne la position sur l'axe horizontal (en mètres) et t désigne le temps (en secondes).

1°) Donner l'expression de l'accélération.

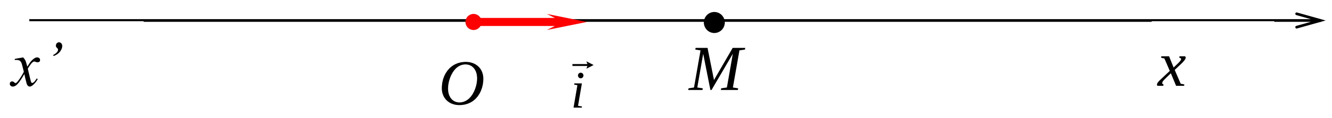


Figure 3

Résolution

1°) Expression de l'accélération.

C'est l'expression : $\vec{a}_{(M/R)} = a_x \ \vec{i} = a\,\vec{i}$.

$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ (dérivée seconde de *x* par rapport au temps).

$$\boxed{a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2(t^2 - 4t + 2)}{dt^2} = 2} \qquad \boxed{a = 2 \ m.s^{-2}}.$$

Remarque : *a* est une constante, indépendante de *t*.

Dans ce cas, le mouvement est dit **rectiligne** (mouvement suivant **une droite)** et dit **uniformément varié** (avec une **accélération constante,** car le paramètre *a* est indépendant du temps *t*).

Exemple d'application n°3.

Soit un repère de référence fixe : $[R]=[O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}]$. Une particule assimilée à un point matériel *M* se déplace avec une accélération donnée par la relation : $\vec{a}(t)=\vec{i}+2t\,\vec{j}+0\,\vec{k}$.

A l'instant *t* = 0 s, la particule est située au point M_0 (0 ; 0 ; -1) et sa vitesse est alors définie par les coordonnées cartésiennes (0 ; 0 ; 2).

1°) Rappeler la relation qui lie l'accélération et la vitesse.

2°) Rappeler la relation qui lie la vitesse et la position.

3°) Etablir l'expression du vecteur-vitesse $\vec{v}(t)$, en tenant compte des conditions initiales. Déterminer la valeur de la **vitesse** à l'instant *t = 1s*.

4°) Etablir l'expression du vecteur-position $\vec{OM}(t)$, en tenant compte des conditions initiales.

Résolution.

1°) Par définition, le vecteur-accélération est la dérivée, par rapport au temps, du vecteur-vitesse :

$$\boxed{\vec{a}_{(t)} = \frac{d\,\vec{v}(t)}{dt}}.$$

2°) Par définition, le vecteur-vitesse est la dérivée, par rapport au temps, du vecteur-position :

$$\boxed{\vec{v}_{(t)} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}.$$

3°) Expression du vecteur vitesse en tenant compte des conditions initiales. Déterminer la valeur de la vitesse à l'instant *t = 1s*.

$$\vec{v}(t) = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} + v_z\vec{k}$$

On intègre chaque composante du vecteur-accélération :

$a_x = 1 \quad \Rightarrow \quad v_x = t + C_1; \qquad$ à $t = 0$, $v_x = 0$ donc $C_1 = 0$

$v_x = t$

$a_y = 2t \quad \Rightarrow \quad v_y = t^2 + C_2; \qquad$ à $t = 0$, $v_y = 0$ donc $C_2 = 0$

$v_y = t^2$

$a_z = 0 \quad \Rightarrow \quad v_z = C_3; \qquad$ à $t = 0$, $v_z = 2$ donc $C_3 = 2$

$v_z = 2$.

$$\boxed{\vec{v}(t) = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} + 2\,\vec{k}}.$$

A l’instant t = 1 s (on remplace t par 1 dans la formule) :

$$\vec{v}_{(t=1)} = 1\,\vec{i} + 1\,\vec{j} + 2\,\vec{k}\ .$$

La **vitesse** est égale à la **norme du vecteur-vitesse** ci-dessus :

$$\left\|\vec{v}_{(t=1)}\right\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{1+1+4}\ .$$

Soit : $\boxed{\left\|\vec{v}_{(t=1)}\right\| = \sqrt{6}\ m.s^{-1} = 2{,}45\, m.s^{-1}}$

4°) Expression du vecteur position $\vec{OM}(t)$, en tenant compte des conditions initiales : $\vec{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$.

On va donc intégrer chaque composante du vecteur-vitesse.

$v_x = t \quad \Rightarrow \quad x = (1/2)*t^2 + C_4;$ à $t = 0$, $x = 0$ donc $C_4 = 0$.

$$x = \frac{t^2}{2}.$$

$v_y = t^2 \quad \Rightarrow \quad y = (1/3)*t^3 + C_5;$ à $t = 0$, $y = 0$ donc $C_5 = 0$.

$$y = \frac{t^3}{3}.$$

$v_z = 2 \quad \Rightarrow \quad z = 2.t + C_6;$ à $t = 0$, $z = -1$ donc $C_6 = -1$.

$$z = 2t - 1.$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \frac{t^2}{2}\vec{i} + \frac{t^3}{3}\vec{j} + (2t-1)\vec{k}}.$$

III. COMPOSANTES INTRINSEQUES DE L'ACCELERATION

$$\vec{a}_{(M/R)} = \frac{d\vec{V}_{(M/R)}}{dt} \qquad \text{et } \vec{V}_{(M/R)} = v\,\vec{t}\,.$$

Donc, dérivation : $\boxed{\vec{a}_{(M/R)} = \frac{d\vec{V}_{(M/R)}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{t}\,) = \frac{dv}{dt}\,.\vec{t} + v\,.\frac{d}{dt}(\vec{t}\,)}$

La dérivée du vecteur tournant est donnée par la relation :

$$\frac{d}{dt}(\vec{t}\,) = \vec{\Omega} \wedge \vec{t} = \omega\,\vec{u} \wedge \vec{t}\,.$$

Avec : $\omega = \frac{v}{R}$ et $\vec{u} \wedge \vec{t} = \vec{n}$, On aboutit à la relation : $\boxed{\vec{a}_{(M/R)} = \frac{dv}{dt}\,\vec{t} + \frac{v^2}{R}\,\vec{n} = \vec{a}_t + \vec{a}_n}$ **(2)**

R : rayon de courbure ($R = \|\vec{CM}\|$) ;

$\vec{n}$: vecteur unitaire de la **normale** (la perpendiculaire) à la trajectoire, **toujours orienté vers** *C,* le centre de courbure (Figure 5).

$\boxed{\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\,\vec{t}}$: accélération **tangentielle**. **(3)**

$\boxed{\vec{a}_n = \frac{v^2}{r}\,\vec{n}}$: accélération **normale**. **(4).**

$$\boxed{\vec{a}_{(M/R)} = \vec{a}_t + \vec{a}_n}$$

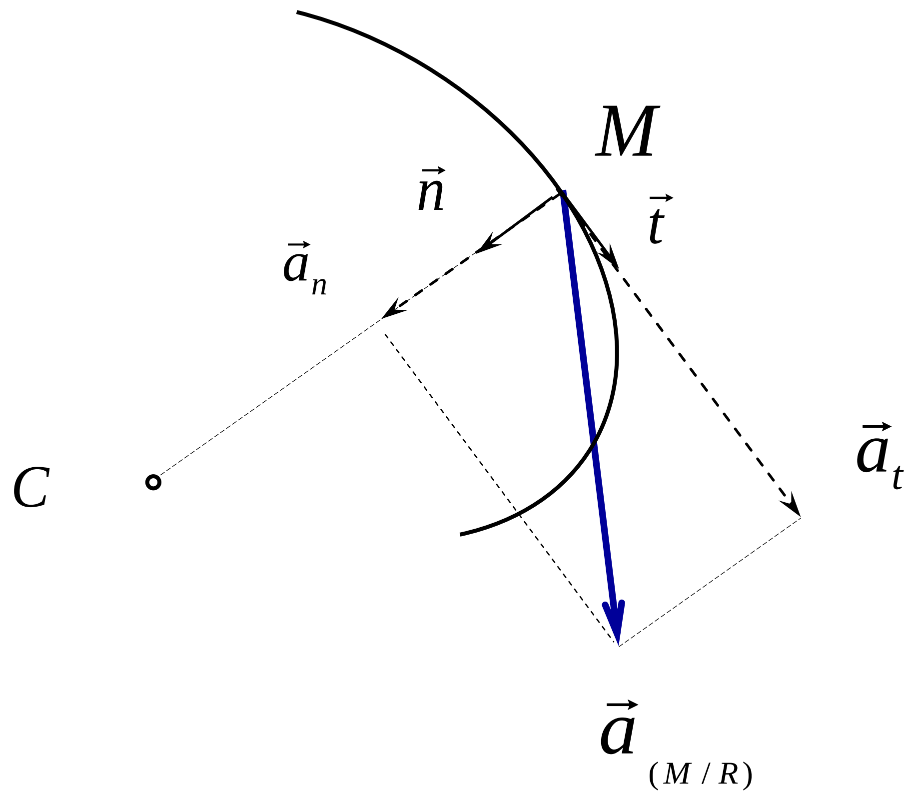


Figure 5

Remarque :

Si mouvement **uniforme** alors **vitesse** *v* **constante** (donc **dérivée nulle**), alors **accélération tangentielle nulle** ($\vec{a}_t = \vec{0}$), alors vecteur accélération réduit au vecteur accélération normale : $\vec{a}_{(M/R)} = \vec{a}_n$.

IV ACCELERATION DANS LE CAS DE MOUVEMENTS CIRCULAIRES

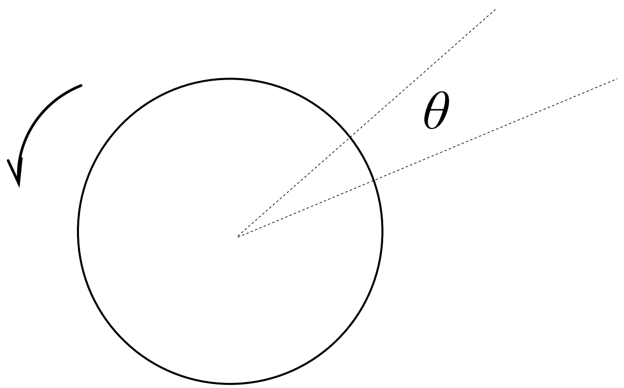


Figure 5

Rappel :

ω, **vitesse angulaire**, exprimée **en *rad.s*$^{-1}$**, **dérivée par rapport au temps**, **de l'angle** θ

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \theta'(t).$$

- **Définition de l'accélération angulaire** : c'est la dérivée, par rapport au temps, de la vitesse angulaire ω. Donc, la **dérivée seconde,** par rapport au temps, **de l'angle** (unité : ***rad.s^-2***).

$$\boxed{\omega' = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \theta''(t)}. \qquad \textbf{(5)}$$

- Mouvement **circulaire uniforme** : mouvement **autour d'un axe de rotation**, avec une **vitesse** angulaire ω **constante** (donc une accélération angulaire ω' nulle).

- Mouvement **circulaire uniformément varié** : mouvement **autour d'un axe de rotation**, avec une **accélération angulaire** ω' **constante**.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION !

- *Thank you for your attention !*
-
- *Obrigado !*
- *Danke schoen !*
-
- *Grazie mille !*
- *Aligato*