Université de Guyane

Licence 1

Mentions : Sciences pour l'Ingénieur – Mathématiques Informatique

ECO 113

MECANIQUE DU POINT

SESSION N° 6 : *DYNAMIQUE*

Dynamique : étude des mouvements, plus exactement des relations entre les causes (**forces**) et leurs effets (**les mouvements**).

I. NOTION DE QUANTITE DE MOUVEMENT

Soit *M* un point matériel de masse *m*, animé d'une vitesse $\vec{v}$.

On appelle **quantité de mouvement,** le vecteur $\vec{p}$ défini par :

$$\boxed{\vec{p} = m\,.\,\vec{v}} \qquad \textbf{(1)}$$

Norme du vecteur $\vec{p}$: $\|\vec{p}\| = \|m\,.\,\vec{v}\| = \underbrace{m}_{(kg)}.\underbrace{\|\vec{v}\|}_{(m/s)}$

Unité de la norme $\|\vec{p}\|$: le ***kg.m/s*** (« *kilogramme.mètre par seconde* »).

II. PRINCIPE FONDAMENTAL DE DYNAMIQUE (P. F. D.)

ENONCE : Il existe un repère absolu [*R*], muni d'une chronologie *t*, tel que la **résultante** (ou somme vectorielle) **des forces extérieures** agissant sur le point matériel **est égale à la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement**.

$$\boxed{\sum \vec{F}_{\mathrm{ext}} = \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{[R]}} \qquad \textbf{(2)}$$

Or, en Mécanique classique : masse **constante**.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\,(m\,.\,\vec{v})}{dt} = m\,.\,\frac{d\,(\vec{v})}{dt} = m\,.\,\vec{a}_{(M/R)}$$

$\vec{a}_{(M/R)}$: **vecteur-accélération** du point matériel *M* par rapport au repère [R].

On en déduit :

$$\boxed{\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,.\,\vec{a}_{(M/R)}}$$ **(2-bis).**

Relation souvent simplifiée sous la forme :

$$\boxed{\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,.\,\vec{a}}$$ **(2-ter).**

III. NOTION DE MOMENT CINETIQUE

III.1 Moment cinétique d'un point matériel *M* par rapport à un point *O*

On appelle moment cinétique du point matériel *M* par rapport au point *O*, le vecteur $\vec{\sigma}_O$ (lire « ***vecteur sigma*** *en O* ») défini par le produit vectoriel :

$$\boxed{\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{mv}} \qquad \textbf{(3)}$$

Remarque :

Pour rappel (session *Opérations vectorielles*) $\vec{M}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$: **moment**, par rapport au point *O*, **du vecteur-force** $\vec{F}$.

Par analogie, $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}$ est appelé **moment,** par rapport au point *O*, **du vecteur-quantité** de mouvement $\vec{p}$.

III.2 Unité de moment cinétique

$$\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{mv} = m.\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$$

$$\left\|\vec{\sigma}_O\right\| = \left\|m.\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}\right\| = m.\left\|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}\right\|$$

$$= m\,.\left\|\overrightarrow{OM}\right\|.\left\|\vec{v}\right\|.\left|\sin\theta\right|$$

(*kg*) **(*m*)(*m/s*)** **(sans unité)**

Conclusion : l'unité de $\left\|\vec{\sigma}_O\right\|$ est le ***kg.m*$^{2.}$*s*$^{-1}$**. (« *kilogramme.mètre carré par seconde* »).

III.3 Théorème de la dérivée du moment cinétique

On dérive l'équation **(3) :**

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{mv}\right].$$

$$= \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM}) \wedge \overrightarrow{mv} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d}{dt}(\overrightarrow{mv})$$ (« dérivée d'un produit : *u'.v + v'.u* »)

$$= \vec{v} \wedge \overrightarrow{mv} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d}{dt}(\overrightarrow{mv})$$

$$= m\,.\underbrace{\vec{v} \wedge \vec{v}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{OM} \wedge \underbrace{m\frac{d}{dt}(\vec{v})}_{m\,\vec{a}}$$

Or, $m\ \vec{a} = \sum \vec{F}_{ext}$, alors, on obtient :

$$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{F}_{ext} = \overrightarrow{M_O}(\vec{F}_{ext})} \qquad \textbf{(4)}$$

(moment, par rapport au point *O*, de la somme des forces extérieures).

ENONCE DU THEOREME DE LA DERIVEE DU MOMENT CINETIQUE :

La **dérivée,** par rapport au temps, **du moment cinétique** d'un point matériel *M* par rapport à un point fixe *O* est **égale au moment,** par rapport à ce point fixe**, de la résultante des forces extérieures** agissant sur le point matériel.

IV. METHODOLOGIE DE RESOLUTION D'UN PROBLEME DE DYNAMIQUE.

1°) **Isoler** (par la pensée) le système qui matérialise le point.

2°) **Faire le bilan** des **forces extérieures** (**forces de contact**, **forces à distance**) qui s'exercent sur le système. Par exemple, « *Il y a **n** **forces extérieures*** $\vec{F}_1,\ \vec{F}_2,\ \vec{F}_3 \ldots\ \vec{F}_n$ ».

3°) **Ecrire la relation fondamentale** de la Dynamique : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \, . \, \vec{a}$, soit . $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \ldots + \vec{F}_n = m \, . \, \vec{a}$.

4°) **Projeter** cette relation vectorielle dans un système d'axes O_x, O_y, O_z.

5°) **Résoudre** les équations scalaires qui en découlent.

Exemple d'application : *Glissement avec frottement d'un point matériel sur un plan incliné*.

Une bille de masse m, assimilable à un point matériel **1**, glisse sur la ligne de plus grande pente d'un plan incliné **0** d'angle α (Figure 1). Ce point matériel est abandonné à l'instant initial sans vitesse initiale au point O, origine des axes. On note f le coefficient de frottement du glissement de ce point matériel sur ce plan incliné.

1°) Isoler le point matériel **1** et faire le bilan des forces extérieures qui s'y s'exercent.

2°) Ecrire la **relation vectorielle** traduisant le principe fondamental de la Dynamique. Projeter cette relation vectorielle sur les axes x (axe du plan incliné) et y (perpendiculaire au plan incliné), puis déterminer la loi horaire $x = f(t)$. Que remarque-t-on dans l'expression de x ?

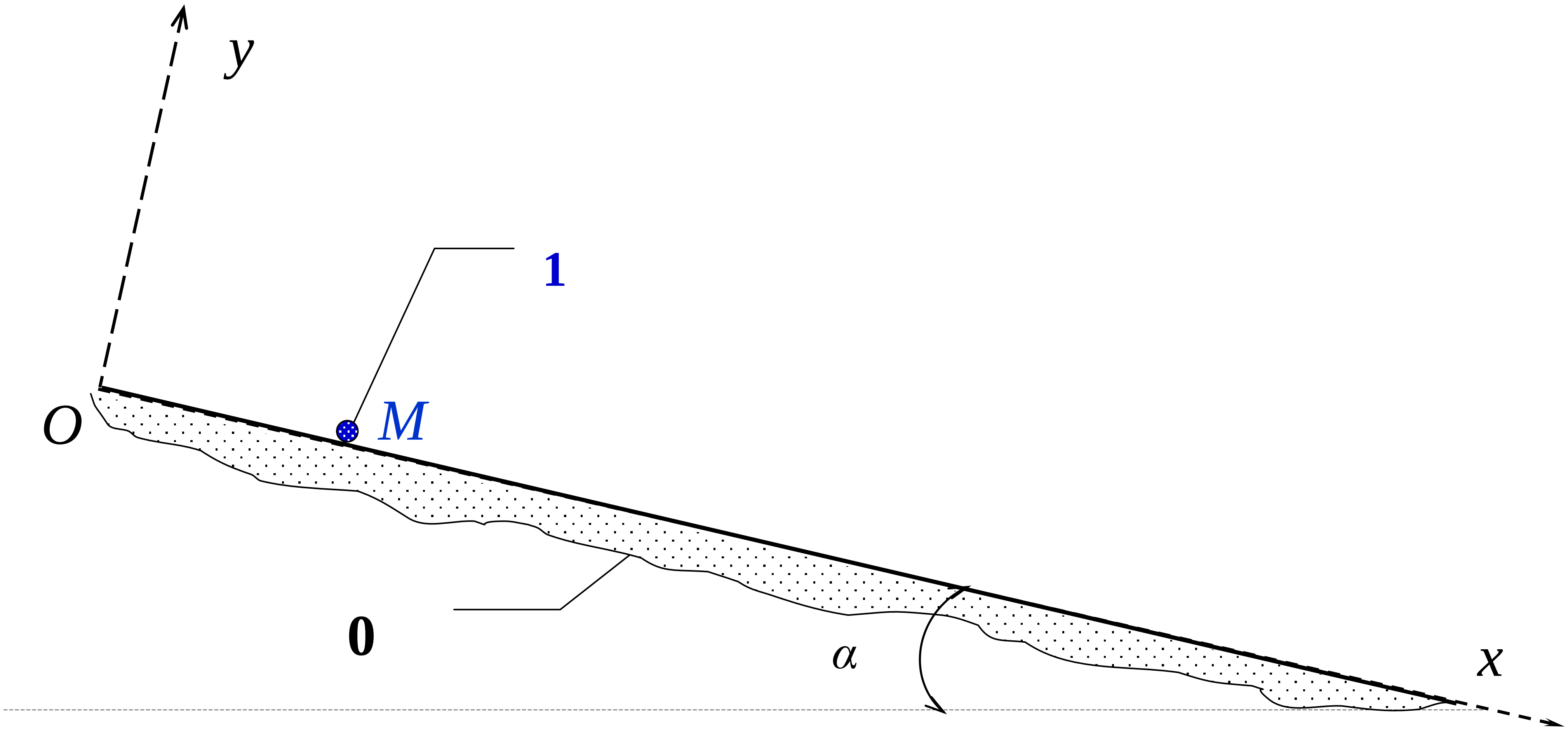

Figure 1

Résolution

1°) Bilan des forces extérieures : le poids $\vec{P}_1$ et l'action de contact $\vec{R}_{0/1}$ (décomposable en une composante normale $\vec{N}_{0/1}$ et une composante tangentielle $\vec{T}_{0/1}$ qui a tendance à s'opposer au mouvement). Par définition, $\left\|\vec{T}_{0/1}\right\| = f\left\|\vec{N}_{0/1}\right\|$ (où *f* est le coefficient de frottement).

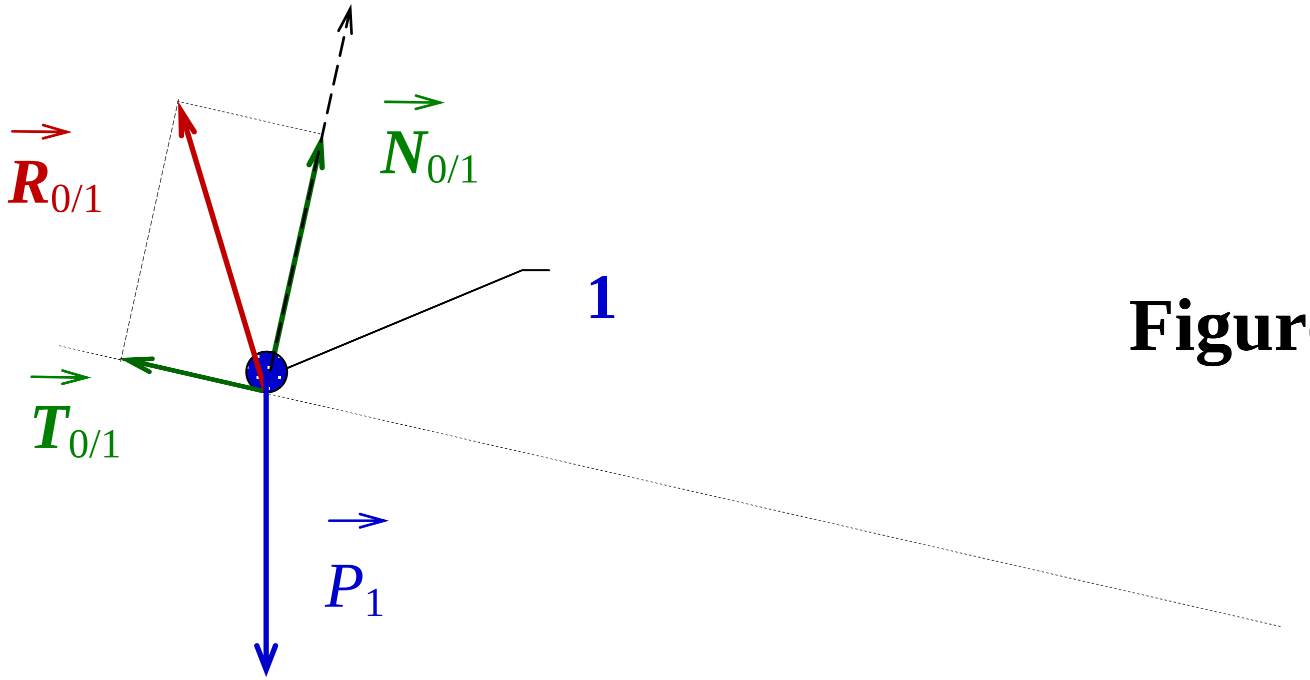

Figure 2

2°) Relation vectorielle : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P}_1 + \vec{R}_{0/1} = m\vec{a}$

$$\vec{P}_1 + \overbrace{\vec{N}_{0/1} + \vec{T}_{0/1}} = m\vec{a}$$

$$\vec{P}_1 \left| \begin{array}{l} mg\sin\alpha \\ -mg\cos\alpha \end{array} \right. \qquad \vec{N}_{0/1} \left| \begin{array}{l} 0 \\ N_{0/1} \end{array} \right. \qquad \vec{T}_{0/1} \left| \begin{array}{l} -T_{0/1} \\ 0 \end{array} \right. \qquad \vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x = \ddot{x} \\ 0 \end{array} \right.$$

Projection sur O_x :

$$mg\sin\alpha - T_{0/1} = \ddot{x}$$

$$mg\sin\alpha - f\ N_{0/1} = \ddot{x}$$

Projection sur O_y :

$$-mg\cos\alpha + N_{0/1} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad N_{0/1} = mg\cos\alpha$$

$$mg\sin\alpha - f\ N_{0/1} = \ddot{x} \qquad \Longrightarrow \qquad mg\sin\alpha - f\ mg\cos\alpha = m\ \ddot{x}.$$

$$mg\ (\sin\alpha - f\ \cos\alpha) = m\ddot{x} \qquad \Longrightarrow \qquad mg\ (\sin\alpha - f\ \cos\alpha) = m\ \ddot{x}$$

$$\ddot{x} = \underbrace{g\,(\sin\alpha - f\ \cos\alpha)}.$$

(sous la forme $\ddot{x} = A$, où A est constant car g, f et α sont constants).

Pour trouver l'expression de x, on intègre deux fois cette expression

et on tient compte des conditions initiales (à l'instant t = 0, x = 0 et v = 0).

$$\boxed{x = \frac{1}{2} g t^2\,(\sin\alpha - f\ \cos\alpha)}.$$

On remarque que cette expression ne dépend pas de la masse m (en d'autres termes, la distance x serait la même, que ce soit pour une bille de 10 g ou pour une boule de 5 kg).

MERCI POUR VOTRE ATTENTION !

- *Thank you for your attention !*
-
- *Obrigado !*
- *Danke schoen !*
-
- *Grazie mille !*
- *Aligato*
-