DFR Recherche *SCIENCES ET TECHNOLOGIE*

Licence 1 (Semestre 1), année 2021-2022

Mentions : Sciences pour l'Ingénieur – Mathématiques - Informatique

ECO 113 – MECANIQUE I.

Contrôle continu n°1 -

CORRIGE

Exercice n°1 - Les quatre affirmations sont toutes INCORRECTES.

Proposer alors une correction, en modifiant un seul terme (une valeur, une expression ou une unité) **[4 points]**

1°) « *Le poids de cette banane est de 100 grammes* ».

Remarque :

L'unité de poids est le newton (*N*) et est l'unité de masse est le kilogramme (*kg*).

1 kg = 1000 g = 10^3g ; 1 g = 10^{-3} kg ; 100 g = 10^{-1} kg = 0,1 kg.

Relation entre poids *P* et masse *m* : $P = m \times g$ avec g = 9,81 m/s^2

(on peut simplifier en prenant g = 10 m/s^2)

Pour *m* = 0,1 kg, alors *P* = 0,1 x 10 = 1 N

CORRECTIONS POSSIBLES

- « ***La masse*** *de cette banane est de 100 grammes* ».

ou

- « ***Le poids*** *de cette banane est de 1 newton* ».

Remarque : même si elle est fausse, la réponse suivante a été acceptée car l'unité est juste (newton).

« ***Le poids*** *de cette banane est de 100 newtons* »

[Ce qui correspond à $m = 10\ kg$! Mais, avez-vous jamais vu une banane de 10 kg ???].

2°) « *Une masse volumique de 750 kg/m^3 équivaut à 750 000 g/cm^3* ».

Remarque :

$1\ kg/m^3 = 1\ kg/1\ m^3$ $\qquad\qquad$ $1\ kg = 1000\ g = 10^3 g$

$1\ m^3 = (100\ cm)^3 = (10^2\ cm)^3 = 10^6\ cm^3$

$1\ kg/m^3 = 10^3 g/10^6\ cm^3 = 1\ kg/m^3 = 10^{(3-6)} g/cm^3$

Conséquence

$1\ kg/m^3 = 10^{-3}\ g/cm^3$ (on **divise** le chiffre des kg/m^3 par **1000)**

et **$1\ g/cm^3 = 10^3\ kg/m^3$** (on **multiplie** le chiffre des g/cm^3 **par 1000)**

CORRECTIONS POSSIBLES

- « *Une masse volumique de 750 kg/m^3 correspond à* ***0,750 g/cm^3*** ». [On divise 750 par 1 000]

Ou

- « *Une masse volumique de 750 kg/m^3 correspond à* ***750 000 g****/m^3* ». [On convertit les kg en grammes et on laisse les m^3]

Ou

- « *Une masse volumique de* ***7 500 000 kg/m^3*** *correspond à 750 000 g/cm^3* ». [On multiplie 750 000 par 1 000]

3°) « *Ce ballon frappé par Kylian MBAPPE a atteint la vitesse de 110 km.h* ».

Remarque : la vitesse s'exprime en **kilomètre par heure** (*km/h*, ou *km.h*$^{-1}$). Le km.h (**kilomètre.heure)** n'est pas une vitesse !

CORRECTIONS POSSIBLES

- « *Ce ballon frappé par Kylian MBAPPE a atteint la vitesse de* ***110 km/h*** ».

ou

- « *Ce ballon frappé par Kylian MBAPPE a atteint la vitesse de* ***110 km.h***$^{-1}$ ».

Remarque : deux réponses « fausses » (110 **m/s**, plus élevé que 75m/s, record de vitesse d'un ballon frappé par un joueur de foot ou 110 **km/s**, mille fois plus élevée) mais acceptées car les unités de vitesse sont justes.

4°) « *Un gigawatt est égal à un million de mégawatts* ».

Remarque :

Un gigawatt est égal à un milliard de watts, donc mille millions de watts. Et un mégawatt est égal à un million de watts. Un gigawatt est donc égal à mille mégawatts.

CORRECTIONS POSSIBLES

- « *Un gigawatt est égal à **mille** mégawatts* ».

Ou

- « *Un **térawatt** est égal à un million de mégawatts* ».

Exercice n°2 – Opérations vectorielles sur deux vecteurs [5 points]

Sur la **Figure 1**, on note $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ les vecteurs unitaires respectifs des axes O_x, O_y, et O_z (O_z est perpendiculaire au plan de la feuille, selon la règle des trois doigts de la main droite).

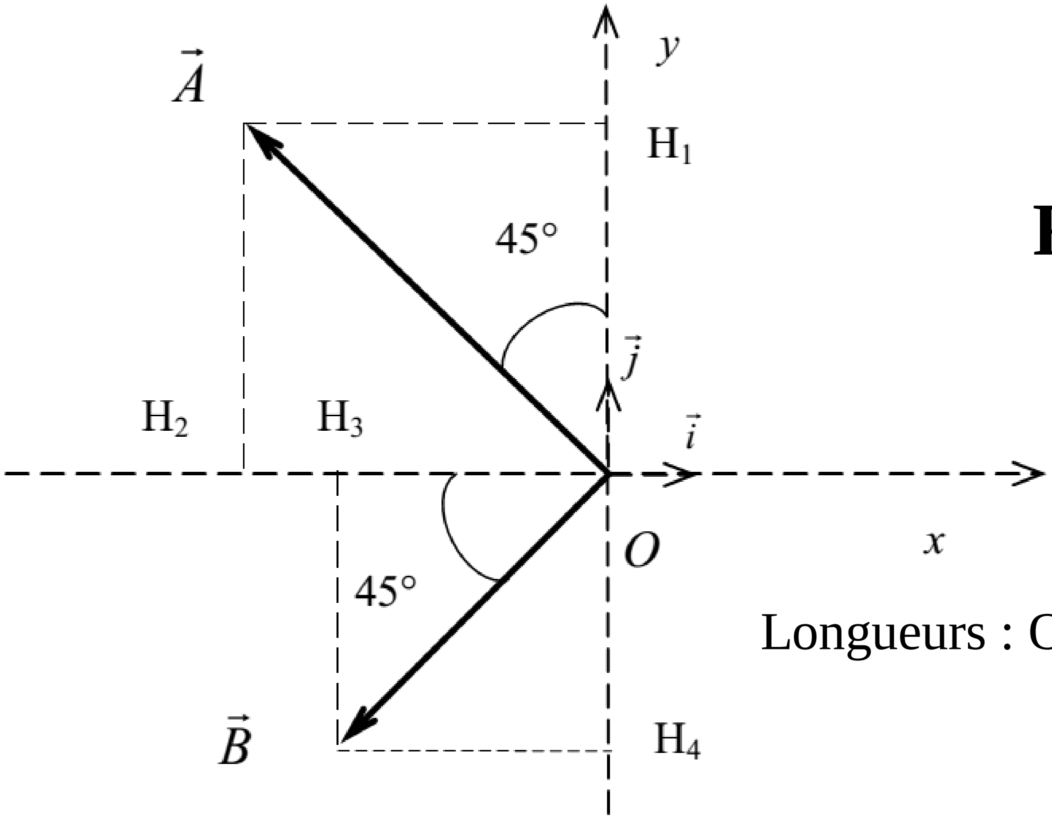


Figure 1

Longueurs : $OH_1 = OH_2 = 4$; $OH_3 = OH_4 = 3$.

1°) Déterminer les coordonnées cartésiennes de chacun des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

Réponse

Les coordonnées cartésiennes ou composantes scalaires sont des nombres scalaires (positifs ou négatifs), ici a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, et b_z.

Coordonnées cartésiennes de $\vec{A}$.

$a_x = -4$; $a_y = +4$; $a_z = 0$ (indiqué dans la question n°2)

Cordonnées cartésiennes de $\vec{B}$

$b_x = -3$; $b_y = -3$; $b_z = 0$ (indiqué dans la question n°2).

2°) Présenter chaque vecteur sous la forme : $\vec{A} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$

et $\vec{B} = b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z\,\vec{k}$.

Nota bene : logiquement, $a_z = 0$ et $b_z = 0$.

Car ces deux vecteurs, situés dans le plan (O, x, y), n'ont pas de composantes suivant l'axe O_z.

Réponse :

$$\vec{A} = -4\,\vec{i} + 4\,\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{A} = -4\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 0\,\vec{k}}$$

Université de Guyane

$$\overrightarrow{B} = -3\,\vec{i} - 3\,\vec{j}$$

$$\boxed{\overrightarrow{B} = -3\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + 0\,\vec{k}}$$

3°) Déterminer le vecteur obtenu par addition vectorielle de ces vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

Réponse

La somme vectorielle est le résultat de l'addition des deux vecteurs.

$$\overrightarrow{A} = -4\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{B} = -3\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = (-4\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 0\,\vec{k}) + (-3\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + 0\,\vec{k})$$

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = (-4 - 3)\,\vec{i} + (4 - 3)\,\vec{j} + (0 + 0)\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{R} = -7\,\vec{i} + (1)\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$$

Expression finale du vecteur

$$\boxed{\overrightarrow{R} = -7\,\vec{i} + \vec{j}}$$

4°) Déterminer le produit scalaire des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$. Expliquer le résultat trouvé.

Réponse

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (-4\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot (-3\vec{i} - 3\vec{j})$$

Rappels : $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \mathbf{1}$; et $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \mathbf{0}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (-4) \text{ x } (-3) (\vec{i} \cdot \vec{i}) + (4) \text{ x } (-3) (\vec{j} \cdot \vec{j})$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (-4) \text{ x } (-3) + (4) \text{ x } (-3) = +12 - 12 = 0$$

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = 0}$$

Résultat logique : vecteurs orthogonaux

Exercice n°3 - Moments d'une force [5 points]

La poutre représentée sur la Figure 2 est soumise à une force exercée au point P, et de norme F = 200 N. Les axes Ox, Oy et Oz ont pour vecteurs unitaires respectifs $\vec{i}\,,\ \vec{j}\,,\ \vec{k}$. La mesure de l'**angle orienté** θ (entre la droite Px et la droite Δ qui supporte la force) est donnée par : (Px, Δ) = -60° et la longueur de la poutre est égale à 2 m.

On veut calculer les moments de cette force $\vec{F}$ par rapport au point O et par rapport à des axes.

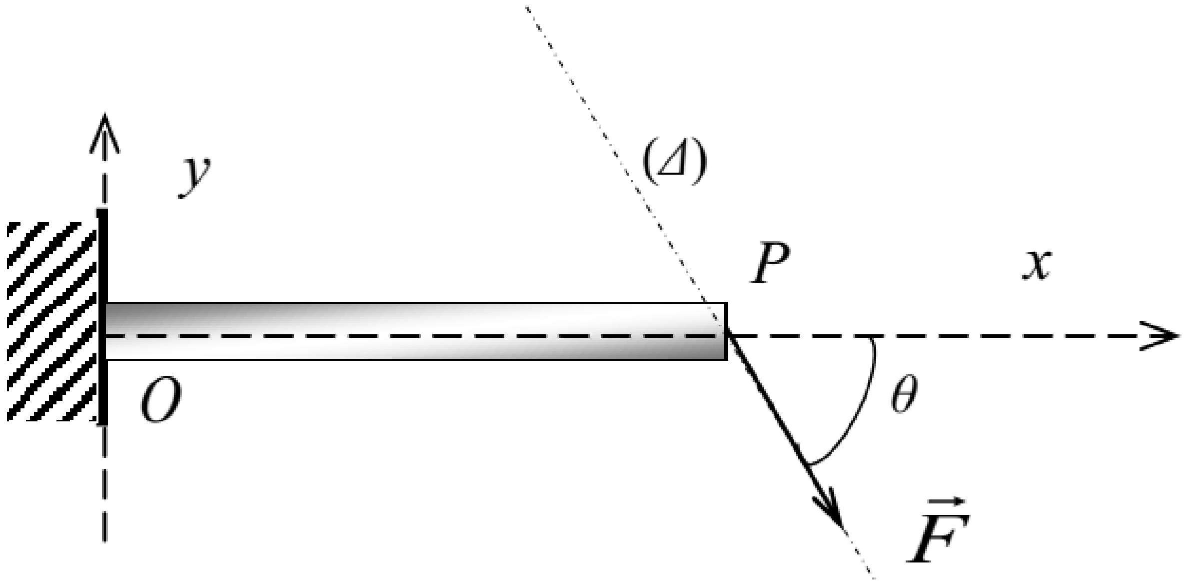


Figure 2

1°) Déterminer la valeur des coordonnées cartésiennes de la force $\vec{F}$ (résultat sous la forme : $\vec{F} = ...\vec{i} + ...\vec{j} + ...\vec{k}$).

Réponse

$F_x = F$ x cos (-60°) = 200 N x (1/2) = 100 N

$F_y = F$ x sin (-60°) = 200 N x (-√3/2) = -173,2 N

F_z = 0 (aucune composante sur l'axe O_z, perpendiculaire au plan de la feuille).

$$\boxed{\vec{F} = 100\,\vec{i} - 173\,\vec{j} + 0\,\vec{k}}$$ (en N)

2°) Indiquer la valeur du moment, par rapport au point *O*, de cette force $\vec{F}$.

Réponse

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} \ .$$

$$\overrightarrow{OP} = 2\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k} = 2\,\vec{i} \qquad \text{(en } m\text{)}$$

$$\overrightarrow{M_O}(F) = 2\,\vec{i} \wedge (100\,\vec{i} - 173\,\vec{j} + 0\,\vec{k})$$

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = 0\,\vec{i} + 0\,\vec{j} - 346\,\vec{k} \qquad \text{(en } N.m\text{)}$$

$$\boxed{\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = -346\,\vec{k}} \qquad \text{(en } N.m\text{)}$$

3°) Indiquer les valeurs des moments respectifs, par rapport aux axes *Ox, Oy, Oz*, de cette force $\vec{F}$.

Réponse

Rappels utiles tout d'abord :

$$\vec{k} \bullet \vec{i} = 0 \; ; \qquad \vec{k} \bullet \vec{j} = 0; \qquad \vec{k} \bullet \vec{k} = 1$$

*Le moment de la force $\vec{F}$ par rapport à l'axe O_x est une grandeur **scalaire** et le vecteur unitaire de cet axe est : $\vec{i}$.

$$\overline{M_{Ox}}(\vec{F}) = \overrightarrow{M_O}(\vec{F}) \bullet \vec{i} = -346 \; \vec{k} \bullet \vec{i}$$

$$\boxed{\overline{M_{Ox}}(\vec{F}) = 0}$$

*Le moment de la force $\vec{F}$ par rapport à l'axe O_y est une **grandeur scalaire** et le vecteur unitaire de cet axe est : $\vec{j}$.

$$\overline{M_{Oy}}(\vec{F}) = \overrightarrow{M_O}(\vec{F}) \bullet \vec{j} = -346\ \vec{k} \bullet \vec{j}$$

$$\boxed{\overline{M_{Oy}}(\vec{F}) = 0}$$

Remarque

Le moment de cette force par rapport à l'axe O_x et par rapport à l'axe O_y est nul. Cela signifie que cette force ne provoque pas de rotation par rapport à ces axes.

*Le moment de la force $\vec{F}$ par rapport à l'axe O_z est une grandeur scalaire et le vecteur unitaire de cet axe est : $\vec{k}$.

$$\overline{M_{Oz}}(\vec{F}) = M_O(\vec{F}) \bullet \vec{k} = -346\ \vec{k} \bullet \vec{k} = -346$$

$$\boxed{\overline{M_{Oz}}(\vec{F}) = -346}$$ (en $N.m$)

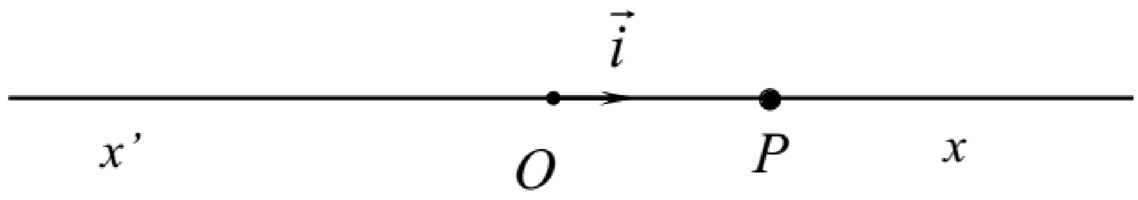
4°) Quel est l'effet du moment de la force $\vec{F}$ par rapport à l'axe Oz ?

Réponse

Le moment de cette force par rapport à l'axe Oz est non nul. L'effet de cette force est donc de provoquer **une rotation par rapport à** cet axe Oz. Cette rotation s'effectue dans le **sens non-trigonométrique** (car la valeur du moment est négative).

Exercice n°4 : Mouvement rectiligne d'un point matériel [6 points]

Figure 3



Le déplacement d'un point mobile P sur un axe horizontal *x'Ox* (de vecteur unitaire $\vec{i}$) est décrit par l'équation : $x = t^2 - t + 2$

(x est exprimé en mètres, *t* en secondes).

1°) Donner l'expression du vecteur-position.

Réponse

Par définition :

Le vecteur-position indique la position du point matériel, ici P.

$$\overrightarrow{OP} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

$\overrightarrow{OP} = x\,\vec{i}$ (car $y = 0$ et $z = 0$, le mouvement est seulement suivant l'axe $x'Ox$).

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = (t^2 - t + 2)\,\vec{i}}$$

2°) Donner l'expression du vecteur-vitesse.

Réponse

Par définition : Le vecteur-vitesse est la dérivée, par rapport au temps t, du vecteur-position. Pour rappel :

$$\overrightarrow{OP} = (t^2 - t + 2)\,\vec{i}$$

On dérive le terme entre parenthèses et on le multiplie par le vecteur unitaire $\vec{i}$.

$$\boxed{\overrightarrow{V_P} = (2\,t - 1)\,\vec{i}}$$

3°) Donner l'expression de la vitesse instantanée v.

Réponse

Par définition, la vitesse instantanée est la dérivée, par rapport au temps t, de l'expression de x.

$$x = t^2 - t + 2$$

$$x'(t) = 2t - 1 = v(t)$$

$$\boxed{v(t) = 2t - 1} \qquad (\text{en } m/s)$$

Remarque : cette expression de v dépend du temps (la vitesse n'est pas constante).

4°) Calculer le temps nécessaire pour atteindre une vitesse de 18 *km/h*.

Réponse

On convertit d'abord 18 *km/h* en *m/s* (on divise 18 par 3,6).

18 *km/h* = 5 *m/s*

On résout : $2t - 1 = 5$

$$\boxed{t = 3} \qquad \text{(en } s\text{)}$$

Le temps nécessaire pour atteindre une vitesse de 18 *km/h* sera de 3 secondes.

Université de Guyane

5°) Calculer la distance **parcourue** entre l'instant t = 0 et l'instant où cette vitesse est atteinte.

Réponse

La formule : $d = v \times t$ n'est pas bonne (vitesse non constante).

On calcule d par la formule : $d = x_{(t\,=\,3)} - x_{(t\,=\,0)}$

$d = x_{(t\,=\,3)} = 3^2 - 3 + 2 = 8$

$d = x_{(t\,=\,0)} = 0^2 - 0 + 2 = 2$

$$\boxed{d = 6} \qquad \text{(en } m\text{)}$$

La distance parcourue entre l'instant $t = 0$ et l'instant où cette vitesse est atteinte ($t = 3\ s$) sera de **6 mètres**.

COMMENTAIRES SUR LES « CHOSES QUI FACHENT » et QUI FONT PERDRE BETEMENT DES POINTS

Des erreurs qui coutent des points

1°) « *On ne mélange pas des torchons et des serviettes !* »

$$\underbrace{\vec{A}\bullet\vec{B}}_{\textbf{Produit scalaire, donc un scalaire}} = \underbrace{-9\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k}}_{\textbf{Vecteur}}$$

2°) « *On ne mélange pas des torchons et des serviettes !* »

$$\vec{A} = -3 + 3$$

Vecteur **Scalaire**

COMMENTAIRES SUR LES « CHOSES QUI FACHENT » et QUI FONT PERDRE BETEMENT DES POINTS

Des erreurs qui coutent des points

3°) « *On ne mélange pas des torchons et des serviettes !* »

$$\underbrace{\vec{A}}_{\text{Vecteur}} = \underbrace{-3x - 3y + 0z}_{\text{Scalaire}}$$

4°) « *Torchons et serviettes n'ont pas été mélangés, MAIS!* »

Si j'écris : $a_x = -3x$ $\qquad\qquad b_x = -3x$

Donc, j'en déduis que : $a_x . b_x = (-3x) \times (-3x) = 9x^2$

ABSURDE, NON ?

MERCI POUR VOTRE ATTENTION !

- *Thank you for your attention !*
- *Obrigado !*
- *Danke schoen*
- *Grémési !*
- *Grazie mille !*
- *XieXie !*
- *Arigato*