Q2.

$\pi_1 = \frac{1}{3}$, $\pi_2 = \frac{2}{3}$, $\mu_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mu_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \Sigma = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$

$\delta_k = X_t^T \Sigma^{-1} \mu_k - \frac{1}{2} \mu_k^T \Sigma^{-1} \mu_k + \log \pi_k$

Decision Boundary : $\{ x : \pi_1 f_1(x) = \pi_2 f_2(x) \}$

$\rightarrow \delta_{k1} = \delta_{k2}$

$\rightarrow X_t^T \Sigma^{-1} \mu_{k1} - \frac{1}{2} \mu_{k1}^T \Sigma^{-1} \mu_{k1} + \log \pi_1$

$= X_t^T \Sigma^{-1} \mu_{k2} - \frac{1}{2} \mu_{k2}^T \Sigma^{-1} \mu_{k2} + \log \pi_2$

$\rightarrow X_t^T \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} + \log\left(\frac{1}{3}\right)$

$= X_t^T \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \log\left(\frac{2}{3}\right)$

$\rightarrow \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -19 \\ 10 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \cdot 77 + \log\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \times 14 + \log\left(\frac{2}{3}\right)$

$\rightarrow -19x_1 + 10x_2 - 38.5 + \log\frac{1}{3} = 8x_1 - 2x_2 - 7 + \log\frac{2}{3}$

$\rightarrow 12x_2 - 27x_1 = 31.5 + \log 2$ #