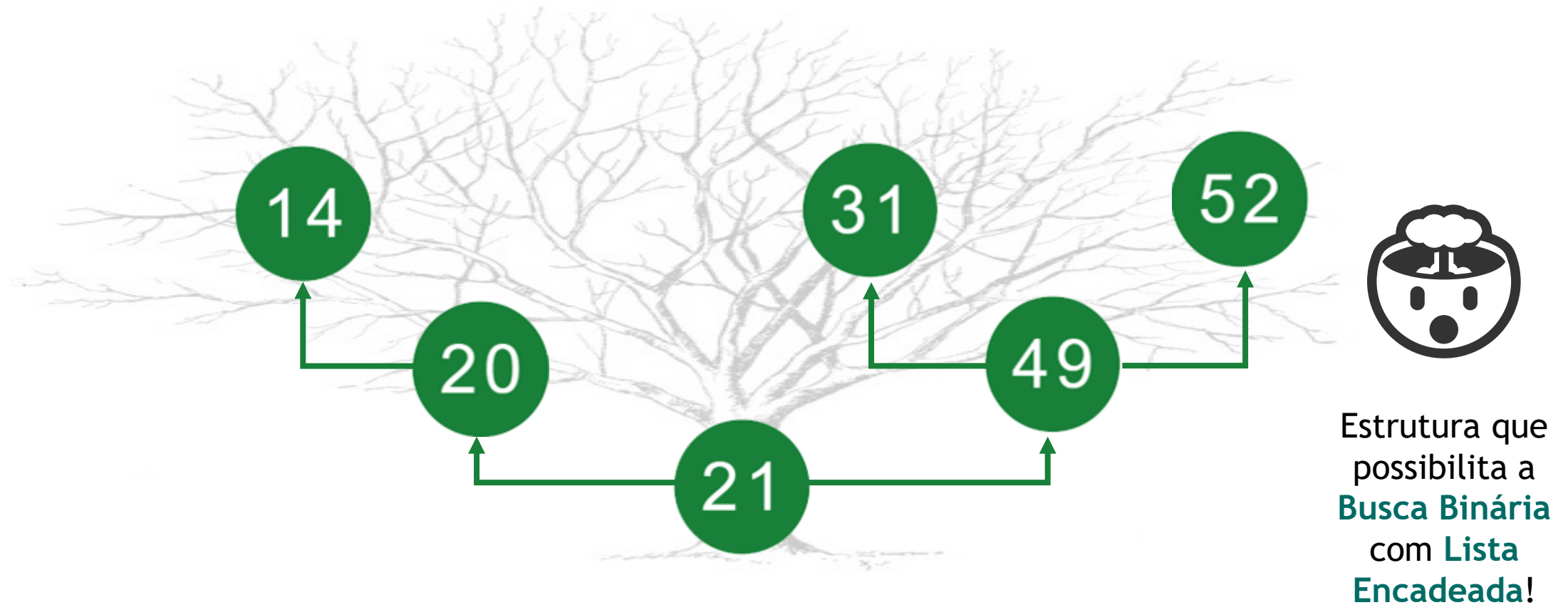


Continuação Percurso de Árvores Binárias e Introdução à Árvores A.V.L.

Recapitulando...



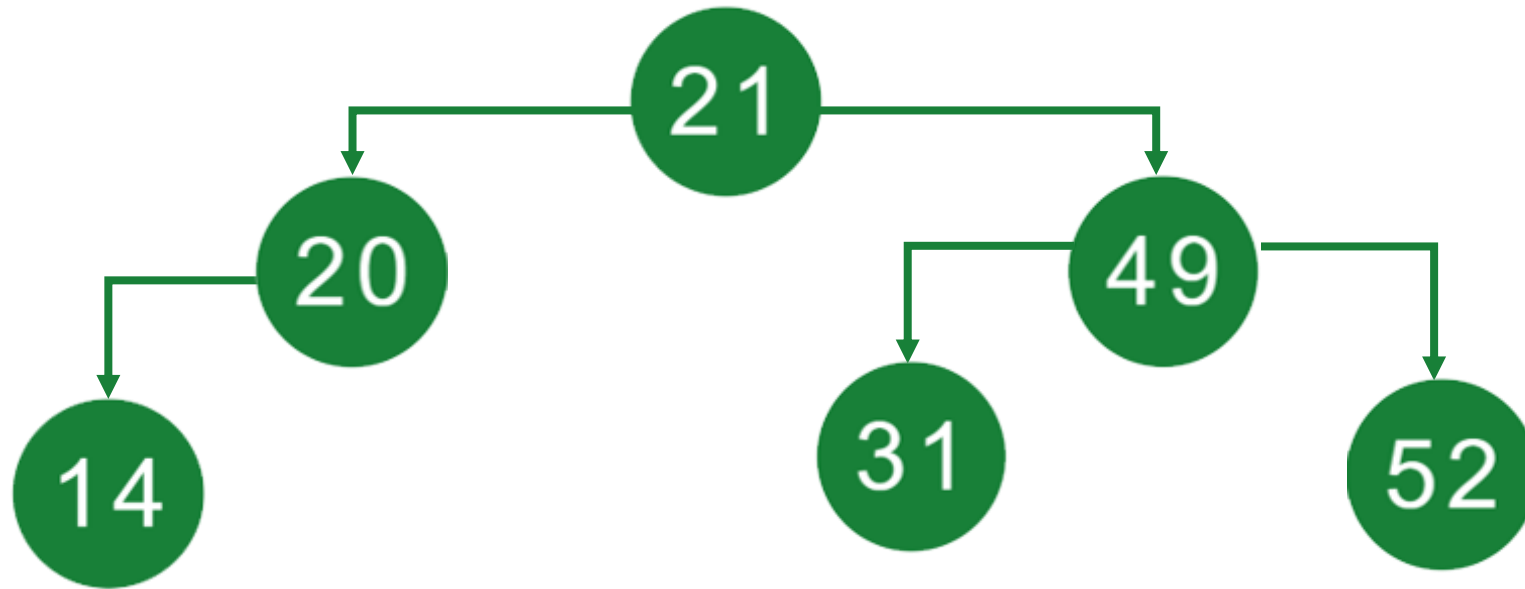
Recapitulando...

- Estrutura de Dados **Não-Linear**.
- Sou **topologia** é baseada em **árvore**.
- Os **elementos** ficam **dispostos** de forma **hierárquica**.

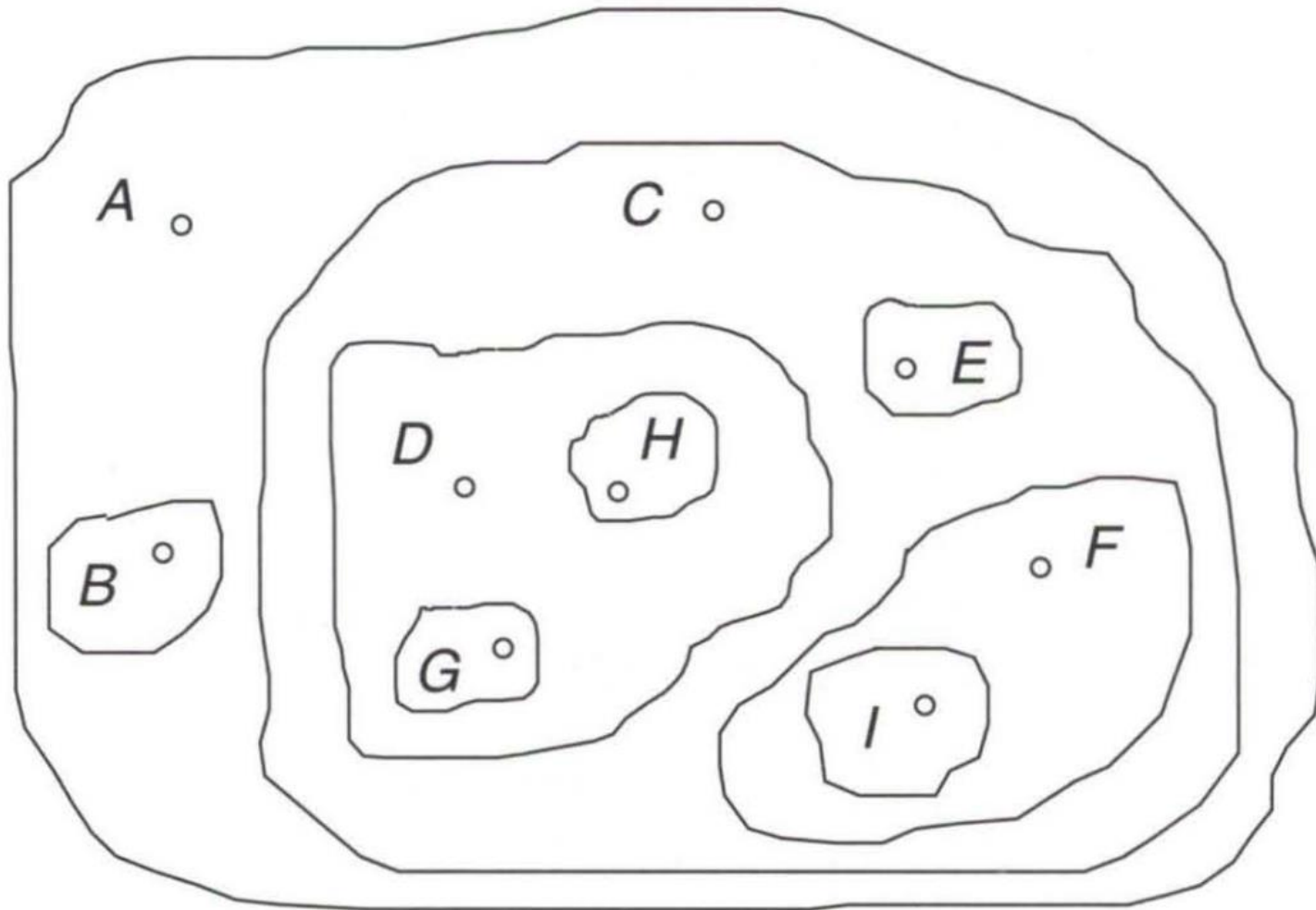



Recapitulando...

- Em **computação** representamos uma **Árvore** de forma **invertida**:



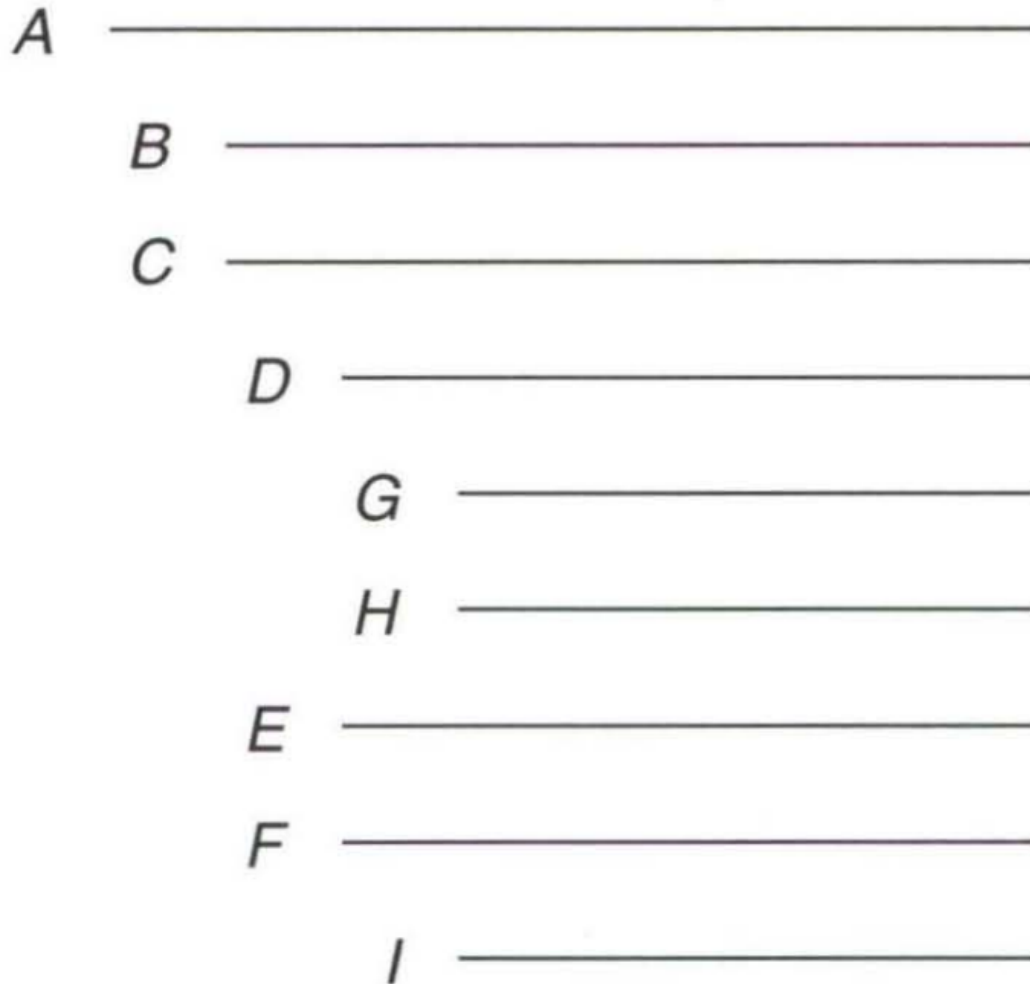
Recapitulando...




-  Diagrama de Inclusão.



Recapitulando...



-  Diagrama de Barras.



Recapitulando...

(A (B) (C (D (G) (H)) (E) (F (I)))) •  Notação de Parênteses.



Recapitulando...

- Transforme em uma Representação Hierárquica:
(A (B(E(K L) F)) (C(G)) (D(H(M) I J))).



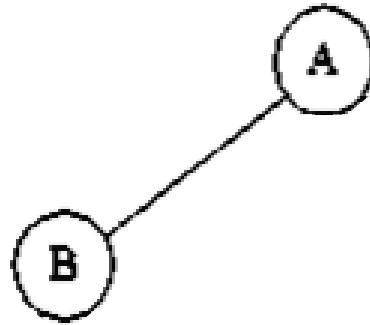
Recapitulando...

- Transforme em uma Representação Hierárquica:
(A (B(E(K L) F)) (C(G)) (D(H(M) I J))).



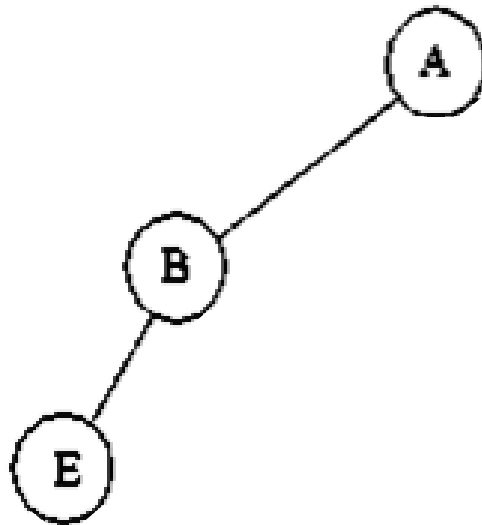
Recapitulando...

- Transforme em uma Representação Hierárquica:
(A (B(E(K L) F)) (C(G)) (D(H(M) I J)))).



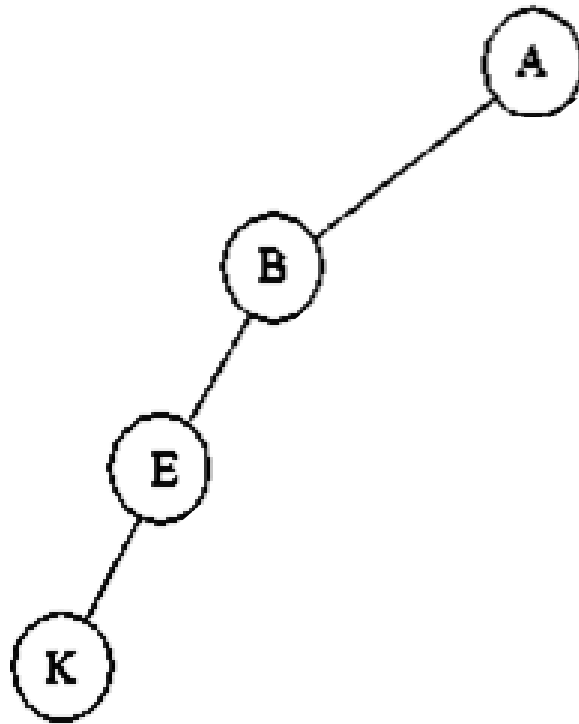
Recapitulando...

- Transforme em uma Representação Hierárquica:
(A (B(E(K L) F)) (C(G)) (D(H(M) I J)))).



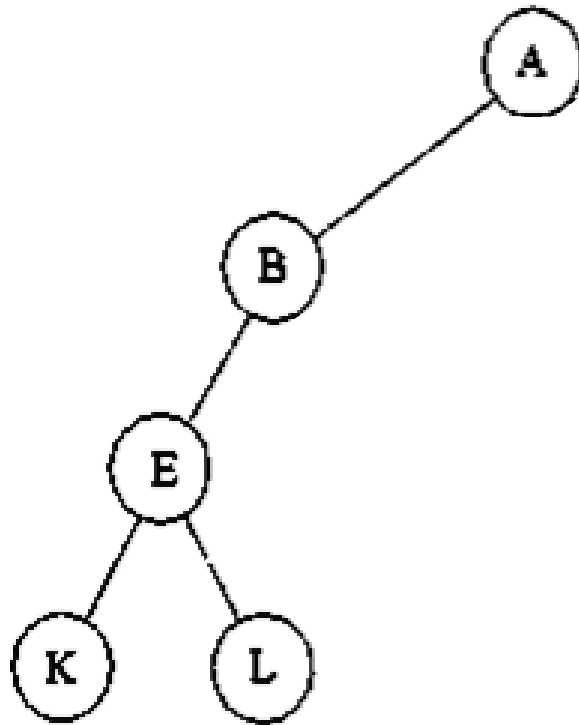
Recapitulando...

- Transforme em uma Representação Hierárquica:
(A (B(E(K L) F)) (C(G)) (D(H(M) I J)))).



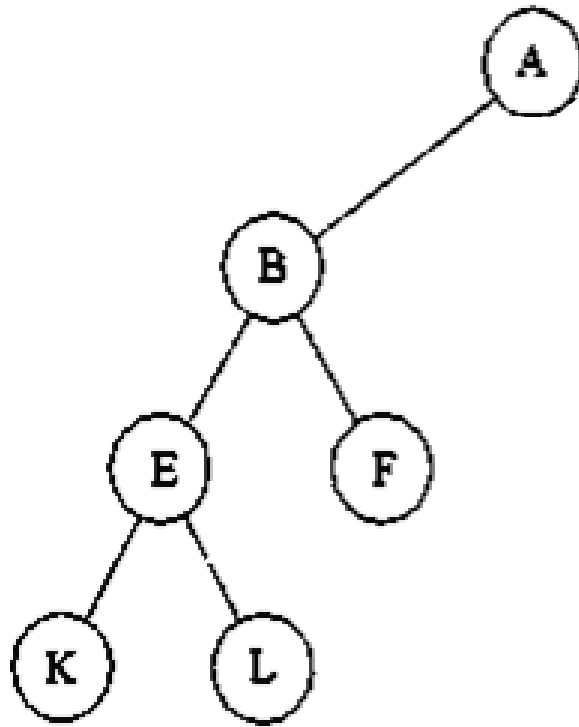
Recapitulando...

- Transforme em uma Representação Hierárquica:
(A (B(E(K L) F)) (C(G)) (D(H(M) I J)))).



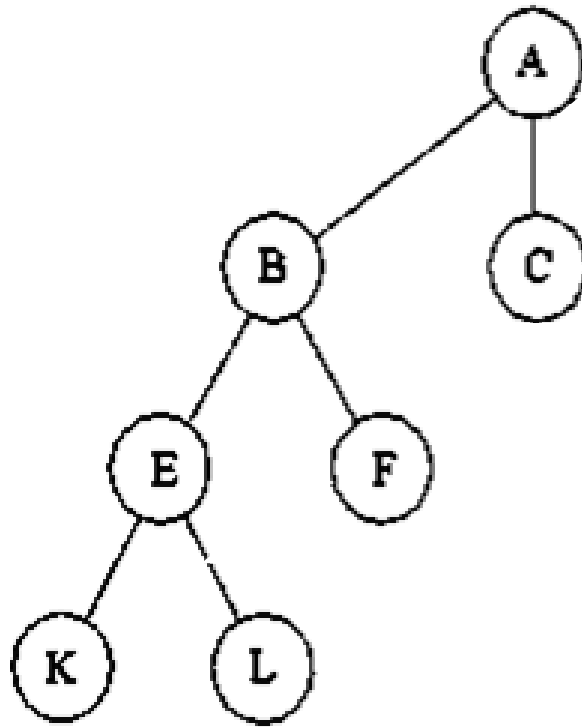
Recapitulando...

- Transforme em uma Representação Hierárquica:
(A (B(E(K L) F)) (C(G)) (D(H(M) I J)))).



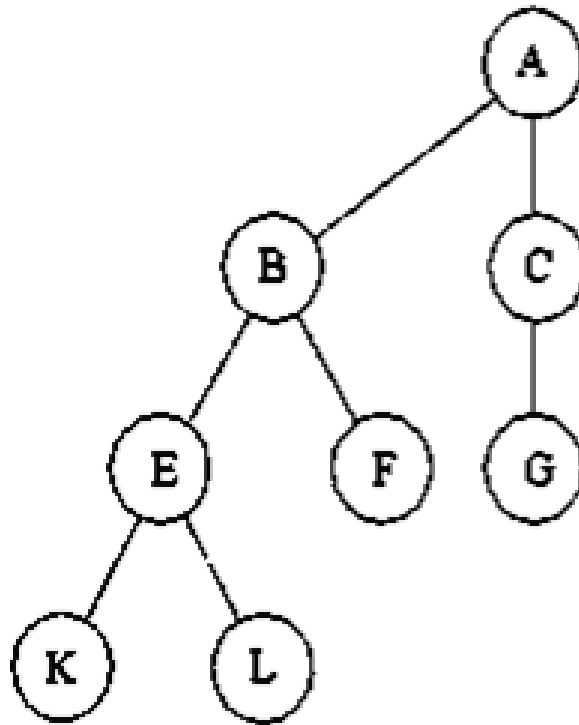
Recapitulando...

- Transforme em uma Representação Hierárquica:
(A (B(E(K L) F)) (C(G)) (D(H(M) I J)))).



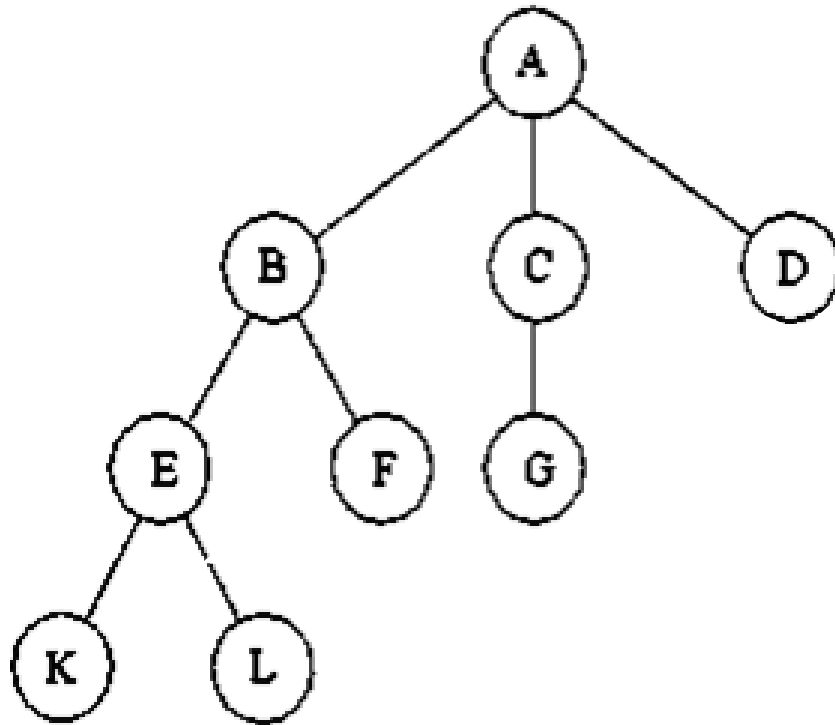
Recapitulando...

- Transforme em uma Representação Hierárquica:
(A (B(E(K L) F)) (C(G)) (D(H(M) I J))).



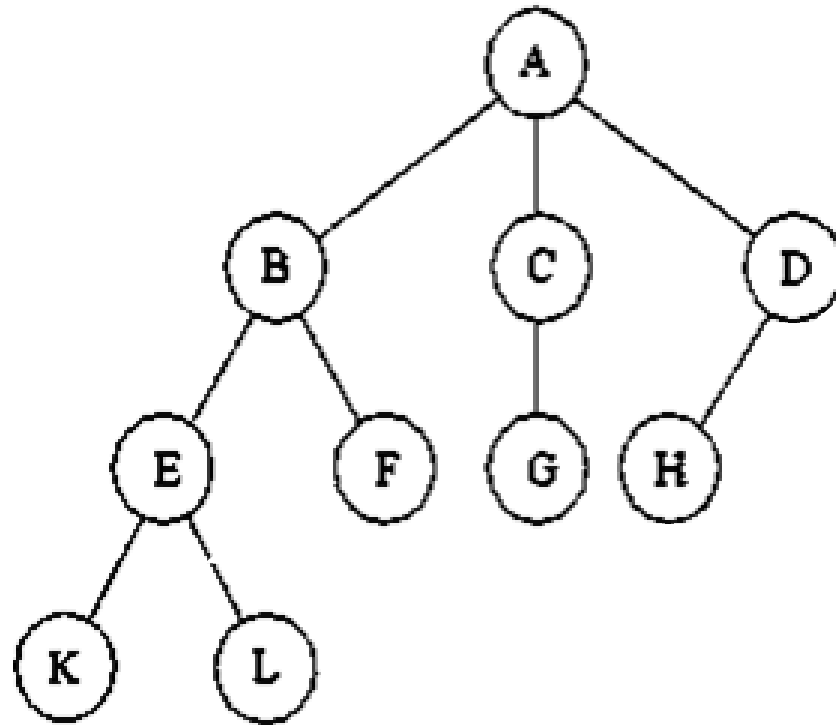
Recapitulando...

- Transforme em uma Representação Hierárquica:
(A (B(E(K L) F)) (C(G)) (D(H(M) I J))).



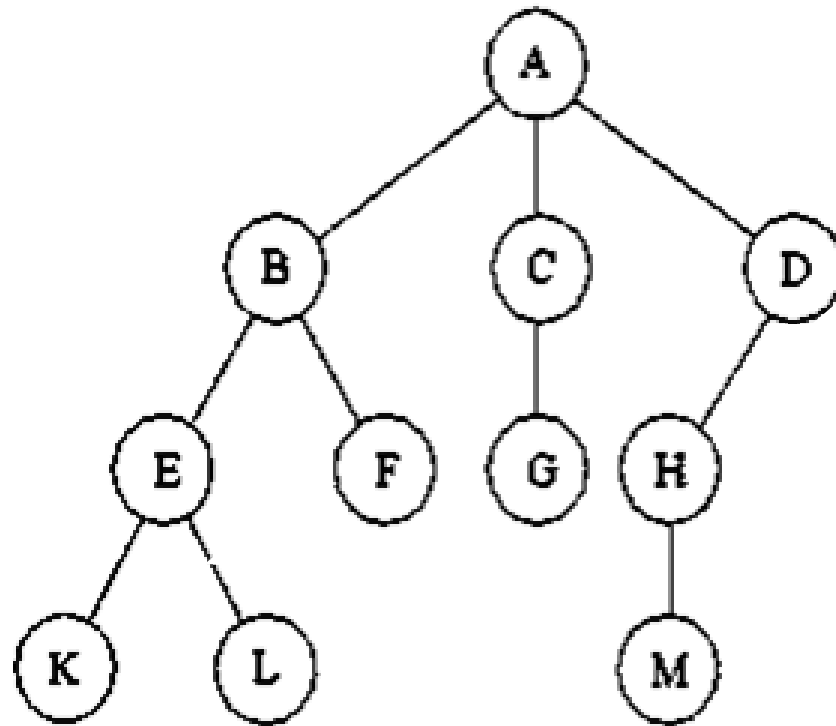
Recapitulando...

- Transforme em uma Representação Hierárquica:
(A (B(E(K L) F)) (C(G)) (D(H(M) I J))).



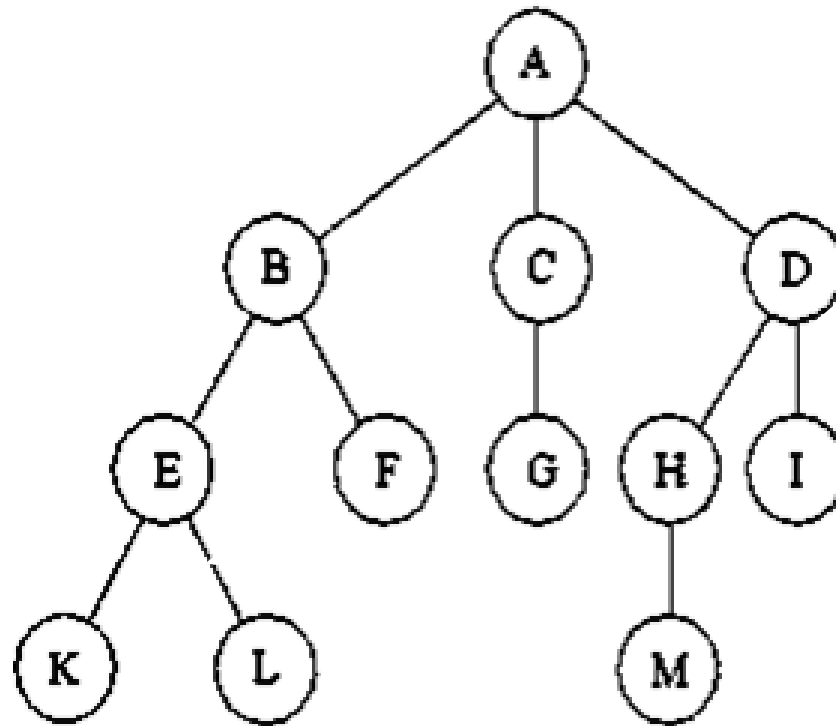
Recapitulando...

- Transforme em uma Representação Hierárquica:
(A (B(E(K L) F)) (C(G)) (D(H(M) I J))).



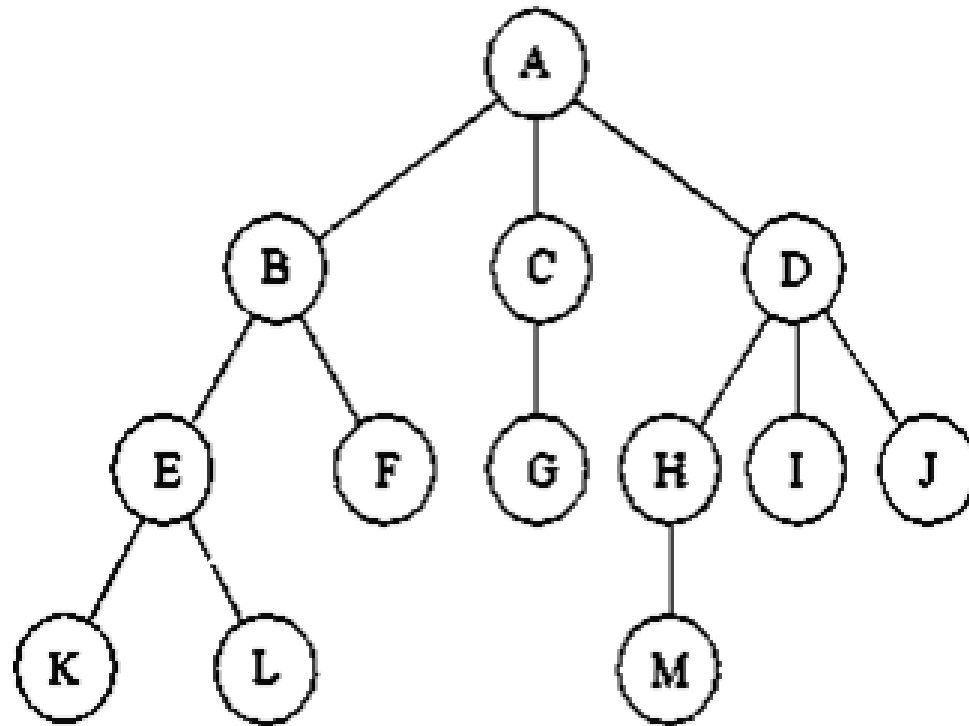
Recapitulando...

- Transforme em uma Representação Hierárquica:
(A (B(E(K L) F)) (C(G)) (D(H(M) I J))).

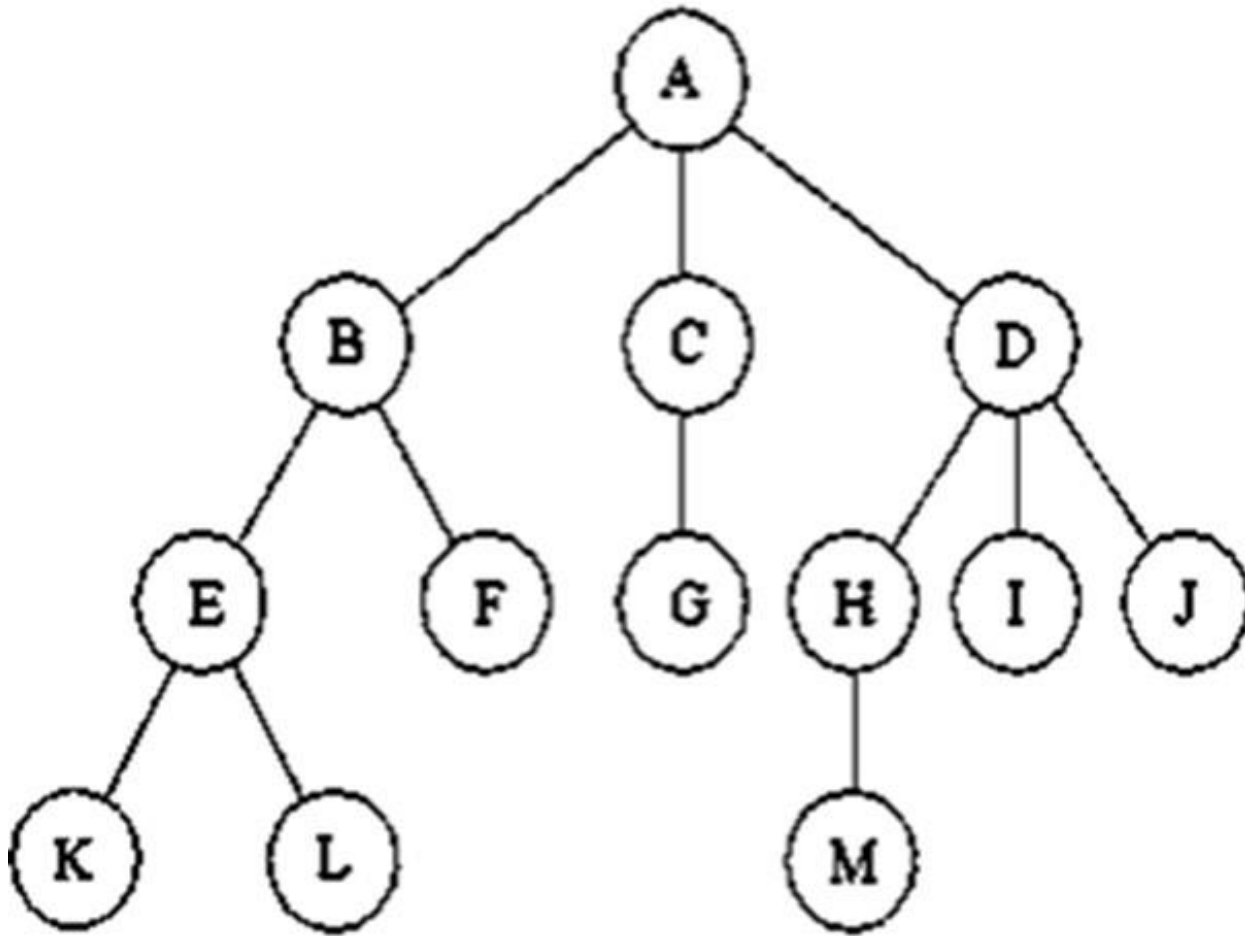


Recapitulando...

- Transforme em uma Representação Hierárquica:
(A (B(E(K L) F)) (C(G)) (D(H(M) I J))).



Recapitulando...



-  Representação Hierárquica - **mais empregada.**



Recapitulando...

- **Nó:**

- Elemento que **contém** a **informação**.

- **Arco:**

- **Liga** dois nós.

- **Pai:**

- Nó **superior** de um arco.



Recapitulando...

- **Filho:**

- Nó **inferior** de um arco.

- **Raiz:**

- Nó **topo**, não possui ancestrais.

- **Folhas:**

- Nós das **extremidades inferiores**.
- Não têm nós filhos.



Recapitulando...

- **Grau:**

- Representa o número de subávore de um nó.

- **Grau de uma árvore:**

- Definido como sendo igual ao máximo dos graus de todos os seus nós.



Recapitulando...

- **Caminho:**

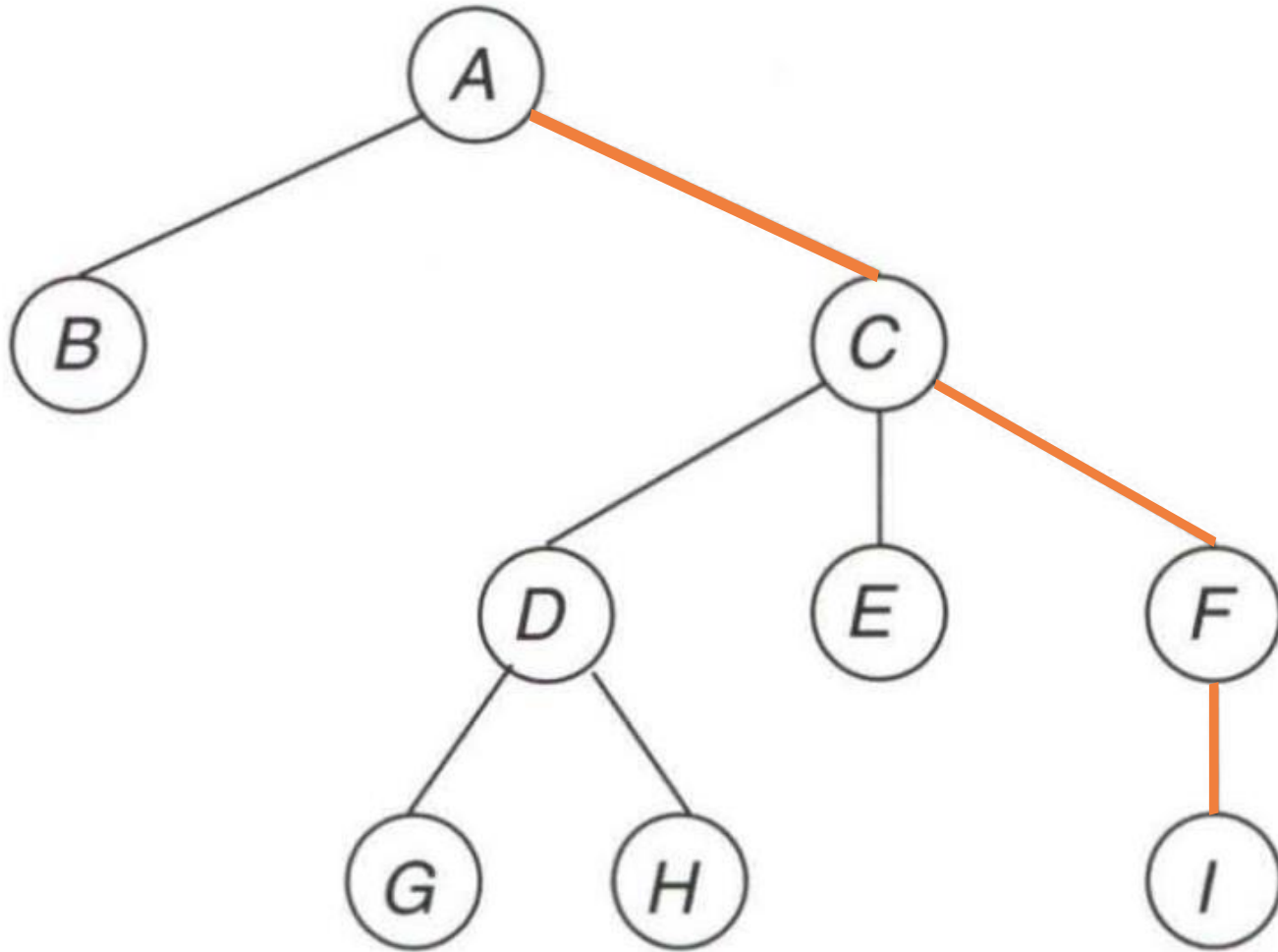
- Cada nó tem que ser **atingível** a **partir** da **raiz** através de uma **sequência única** de **arcos**.

- **Comprimento do caminho:**

- O **número** de **arcos** do **caminho**.



Recapitulando...



- O Caminho do nó **A** até o nó **I** tem comprimento = **3**.

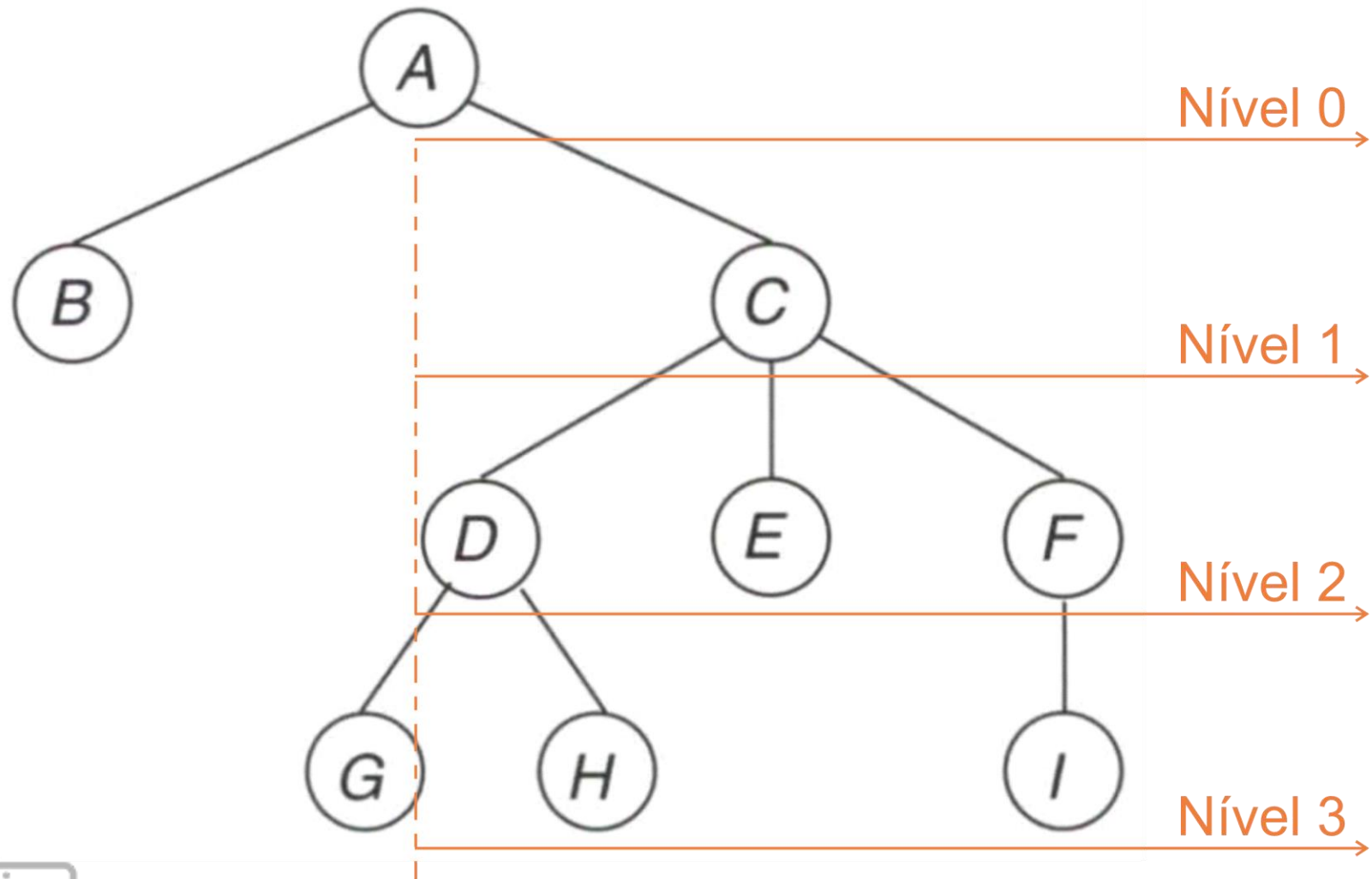


Recapitulando...

- **Nível de um nó:**
 - É a **distância** de um **nó** até a **raiz** da **Árvore**.



Recapitulando...



ESTRUTURA DE DADOS E PARADIGMAS

CONTINUAÇÃO PERCURSO DE ÁRVORES BINÁRIAS E INTRODUÇÃO À ÁRVORES A.V.L.

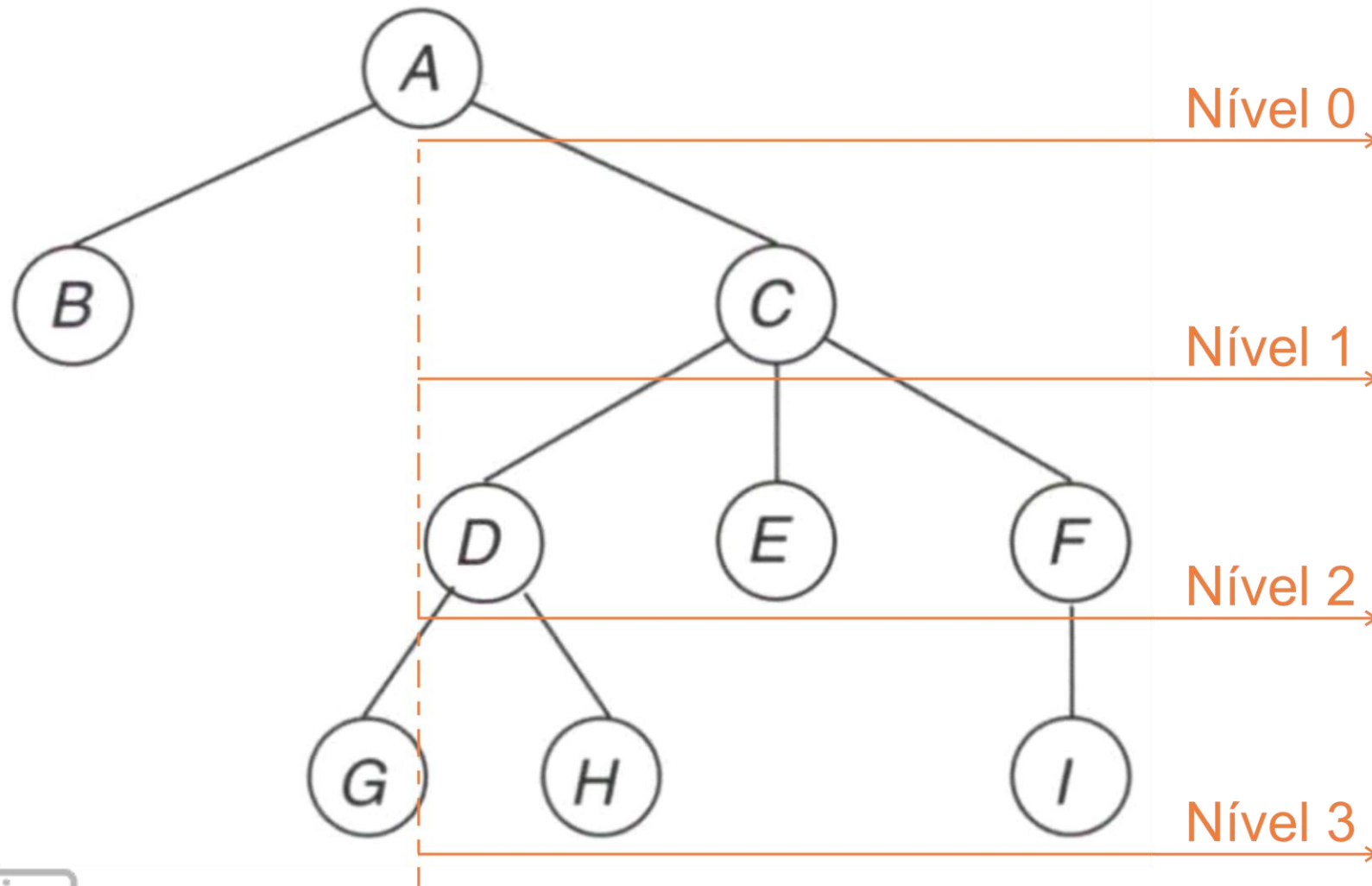
Recapitulando...

- **Altura:**

- É o **nível** do **nó folha** que tem o mais **longo caminho** até a **raiz**, somando **1**.



Recapitulando...



$$h(T) = 3 + 1 = 4$$

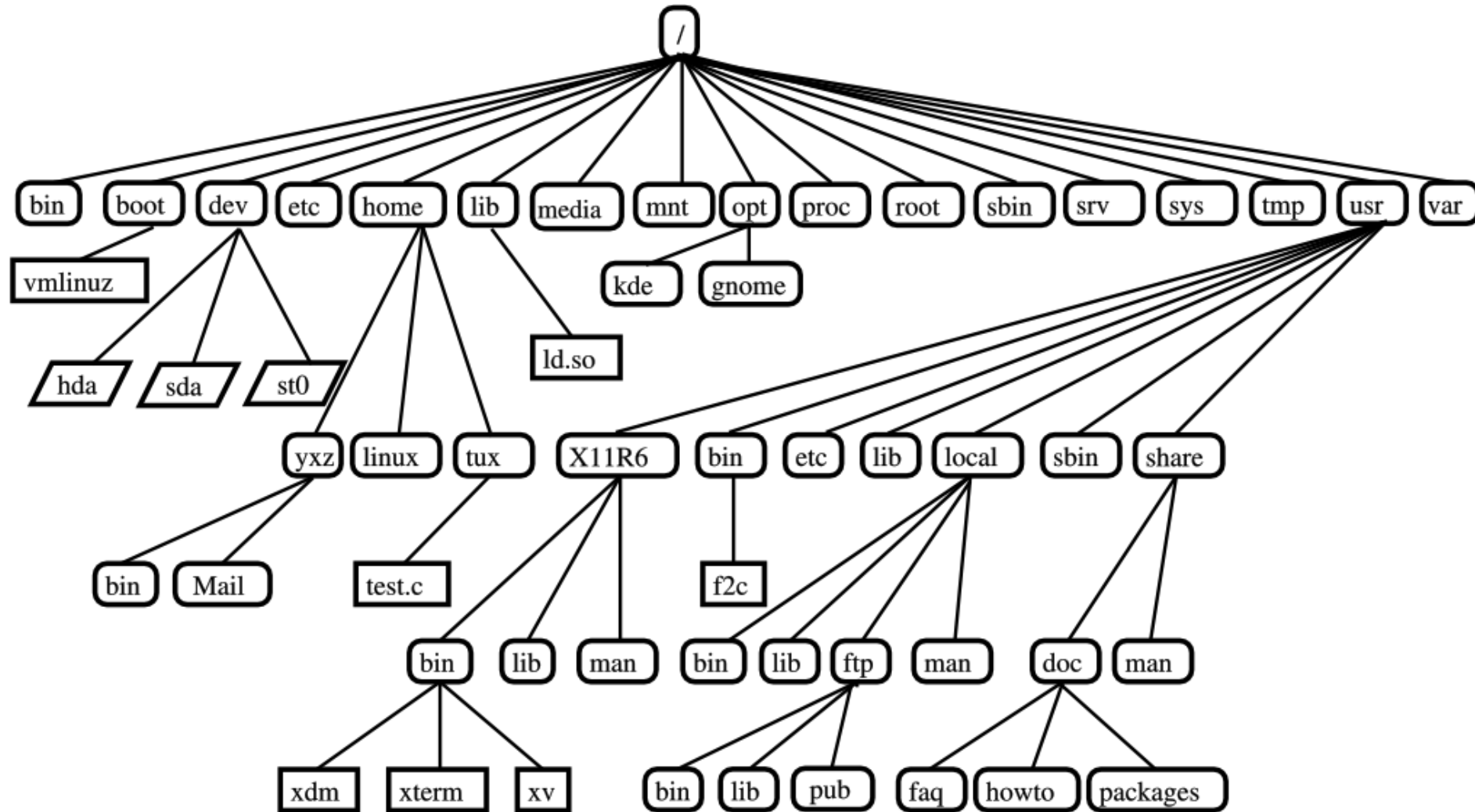


Recapitulando...

- A definição de árvore **não impõe** qualquer condição sobre o **número** de **filhos** de um **nó**:
 - Pode variar de **0** a **qualquer inteiro**.



Recapitulando...



Recapitulando...

- Uma **Árvore Binária** T é um conjunto finito de elementos denominados **nós**, tal que:
 - $T = 0$, árvore vazia, ou



Recapitulando...

- $T > 0$
 - Existe um **nó** especial **r** denominado **raiz** de **T**.
 - Os nós restantes (**nós filhos**) podem ser divididos em **dois** sub-conjuntos disjuntos, **TrE** e **TrD**, a subárvore esquerda e a direita de **r**, respectivamente, as quais são também árvores binárias.

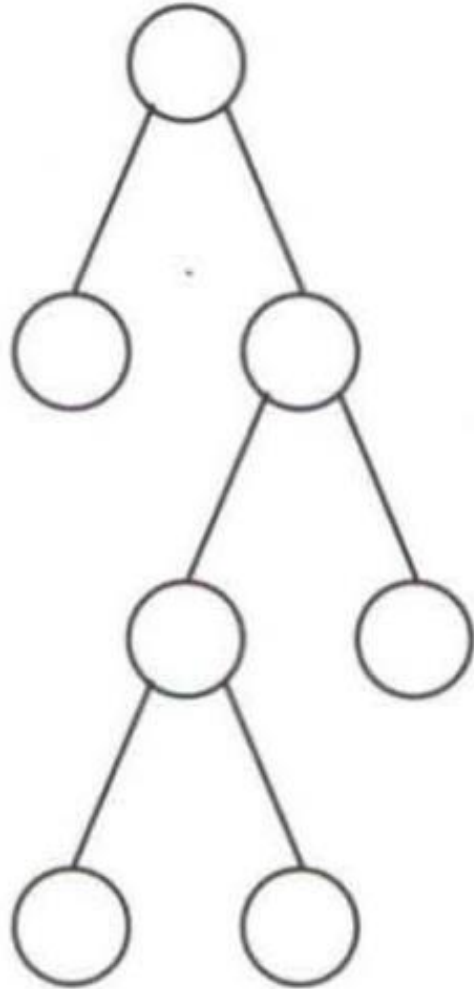


Recapitulando...

- Portanto, a **Árvore Binária** tem grau máximo **2**.
- Nó filho **ESQUERDO** e nó filho **DIREITO**.



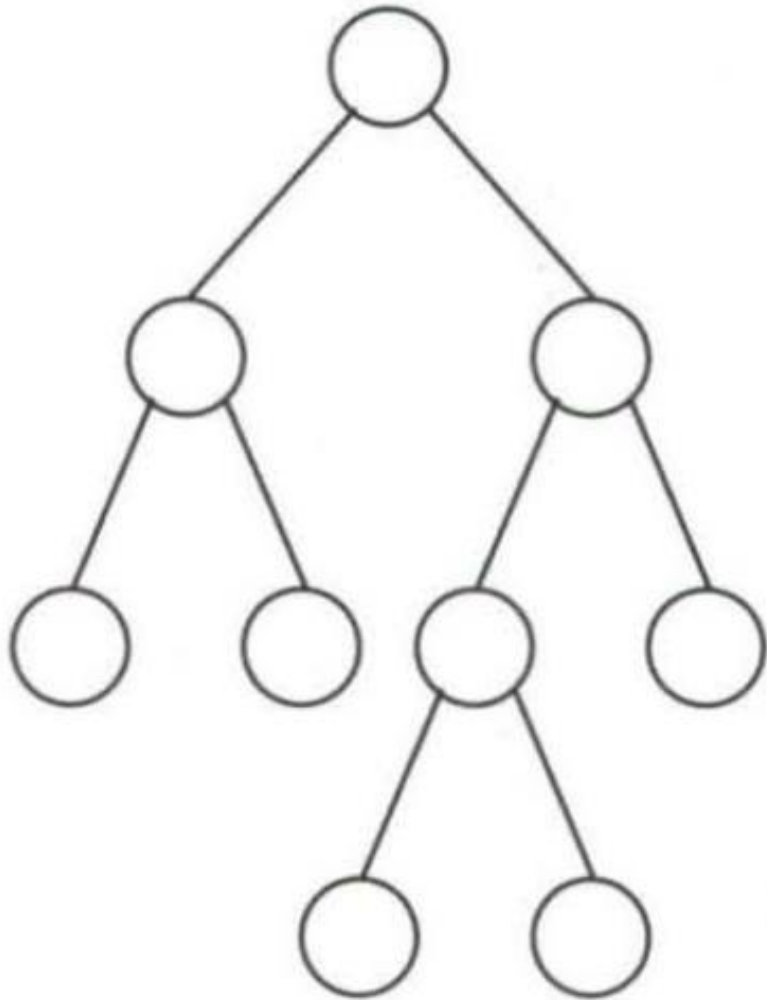
Recapitulando...



- **Árvore estritamente binária:** cada nó possui 0 ou 2 filhos.



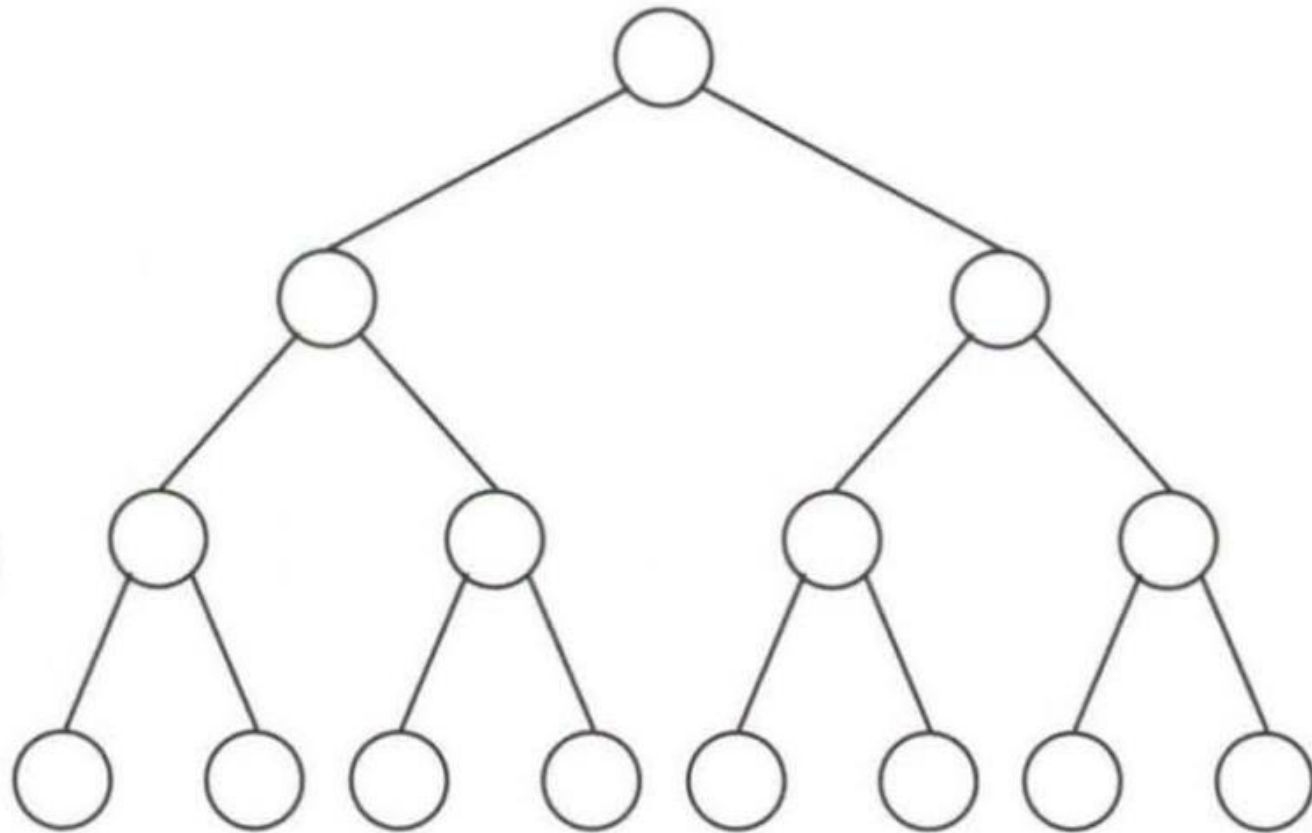
Recapitulando...



- **Árvore binária completa:** se **v** é um nó tal que alguma subárvore de **v** é vazia, então **v** se localiza ou no último (maior) ou no penúltimo nível da árvore.



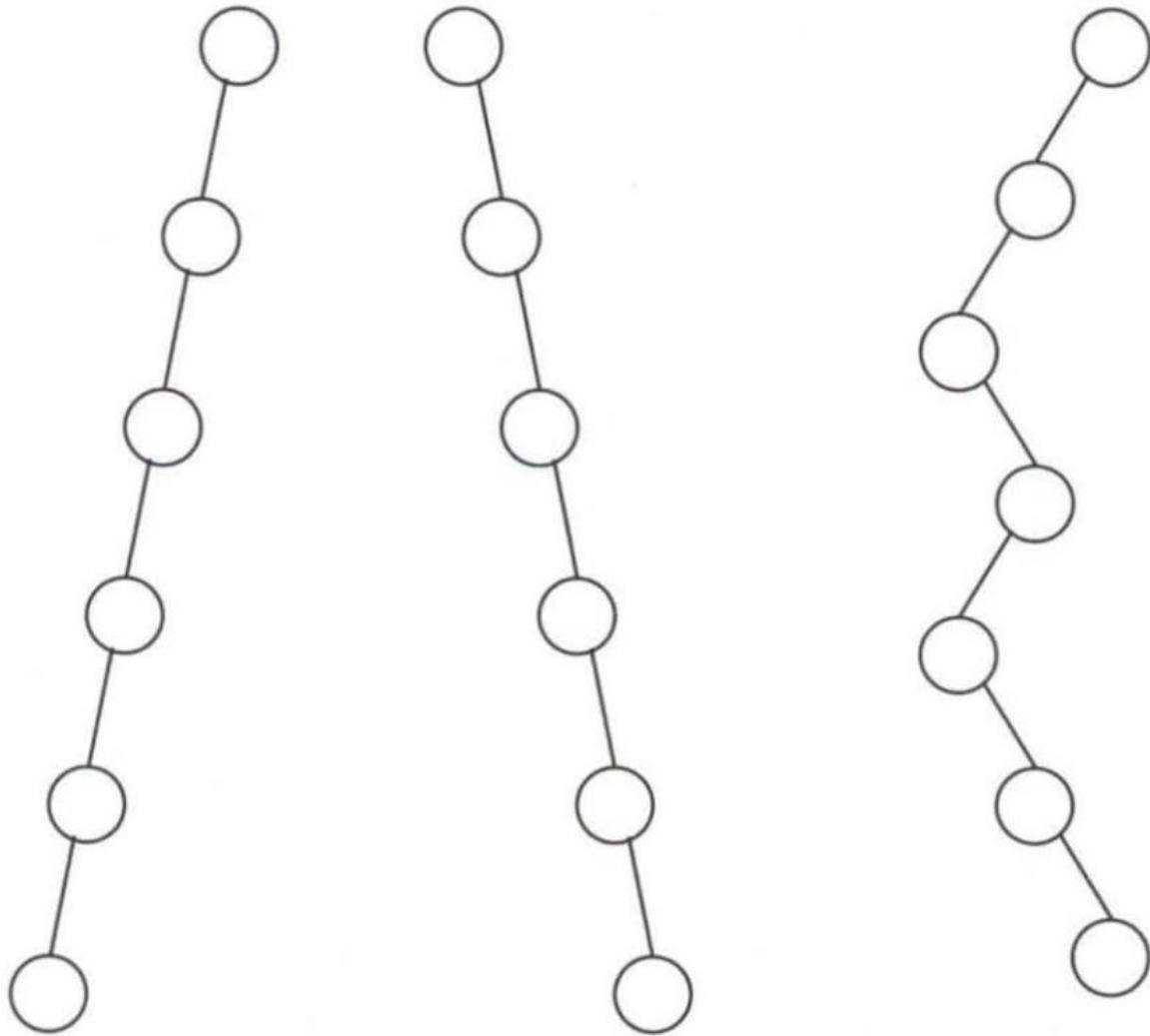
Recapitulando...



- **Árvore binária cheia:** Se v é um nó tal que alguma subárvore de v é vazia, então v se localiza no último (maior) nível da árvore. v é um nó folha.



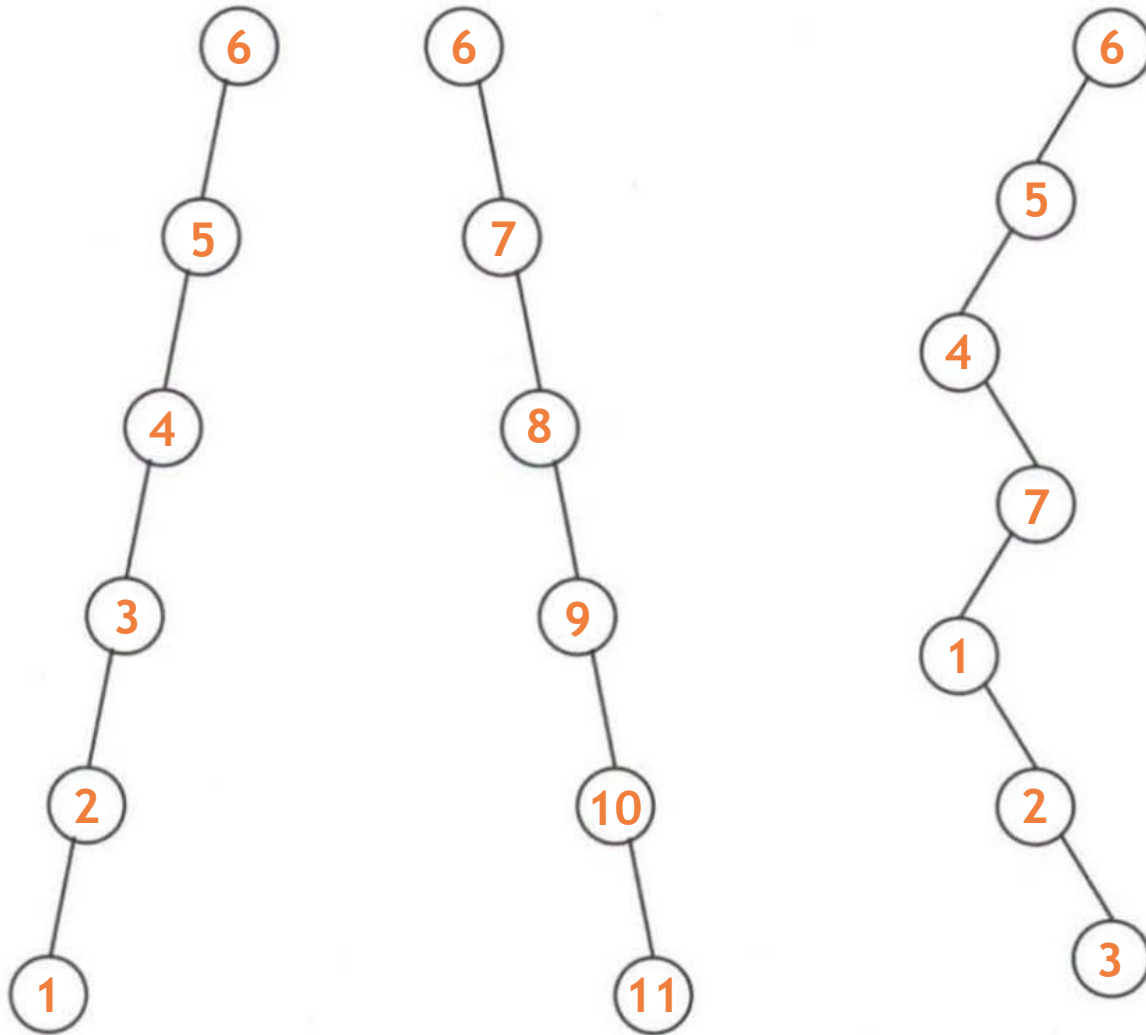
Recapitulando...



- **Árvore zigzague:** árvore binária que possui altura máxima, ou seja, é igual a **n** nós.



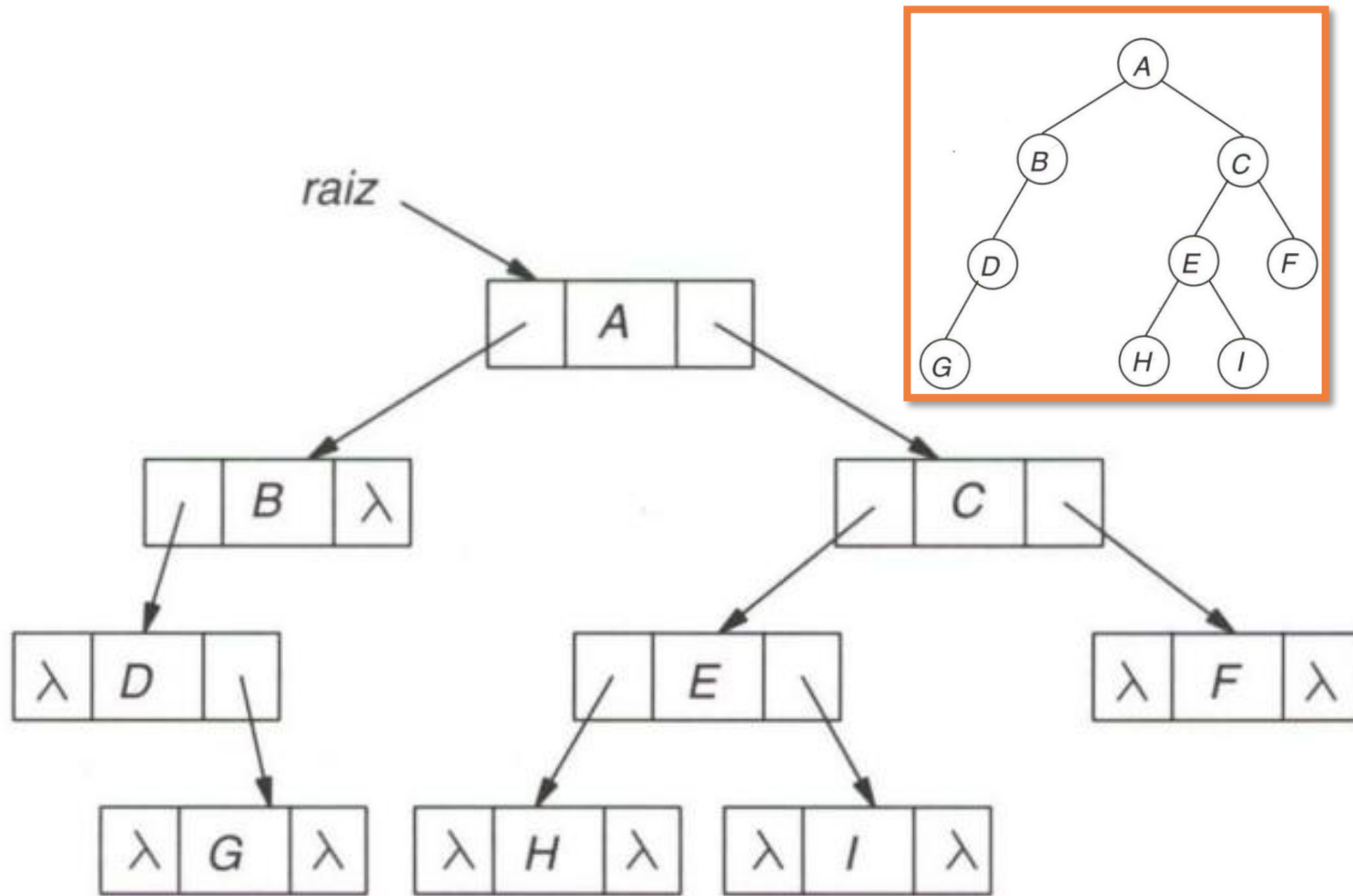
Recapitulando...



- **Árvore ziguezague:** árvore binária que possui altura máxima, ou seja, é igual a **n** nós.



Recapitulando...



- Representação encadeada de árvores binária
- Campo de informação.
- **Ponteiro** para nó esquerdo.
- **Ponteiro** para nó direito.



Percurso em Árvores Binárias

- Visita **sistemática** a **cada nó** da Árvore.
- Operação básica para **manipulação** de árvores.
- Percorrer a Árvore **significa** visitar **todos** os seus **nós** uma vez.
- Para ter um **algoritmo de percurso**, resta **definir** a **ordem** das **operações**:

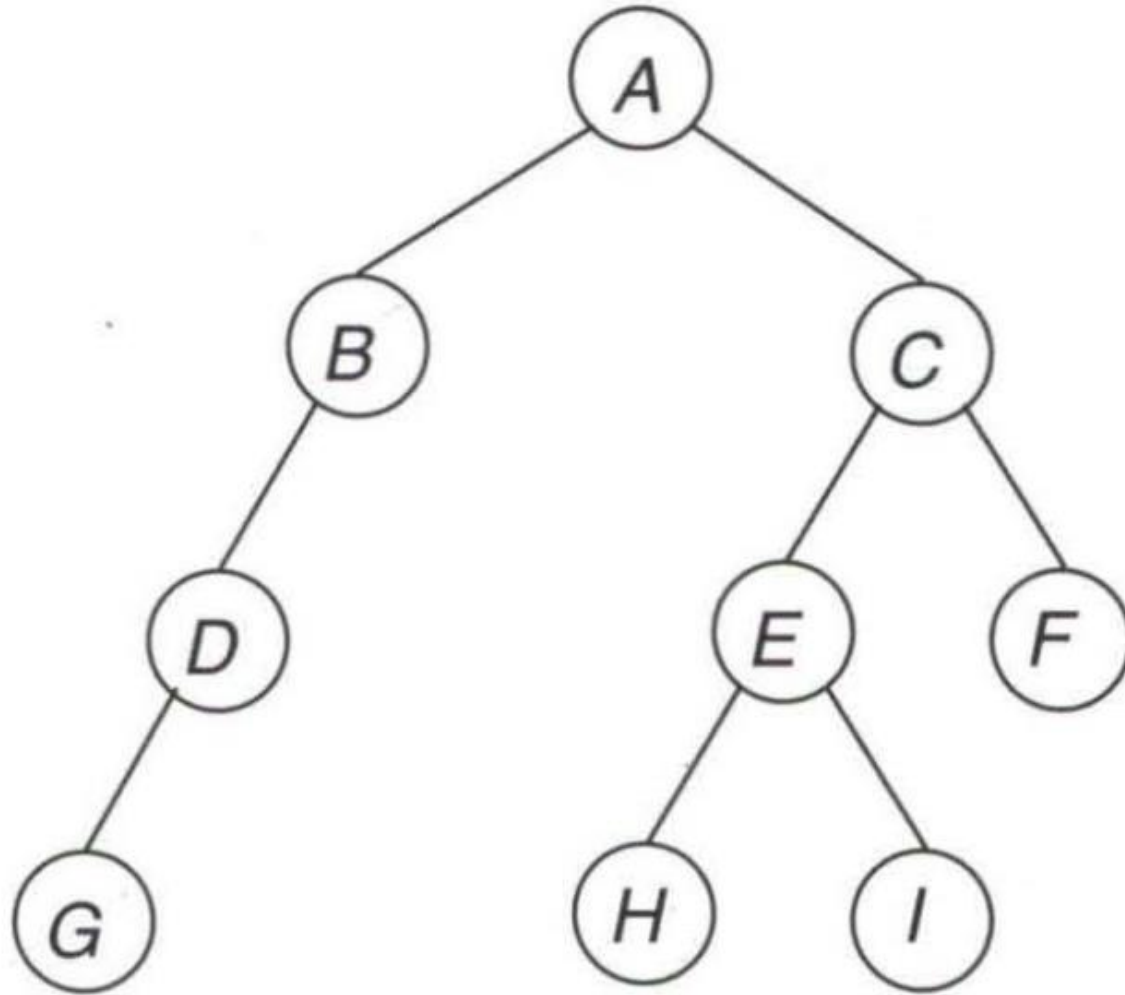


Percurso em Árvores Binárias

- Percurso em **pré-ordem**:
 - Visitar a raiz;
 - Percorrer sua sub árvore esquerda, em pré-ordem;
 - Percorrer sua sub árvore direita, em pré-ordem.



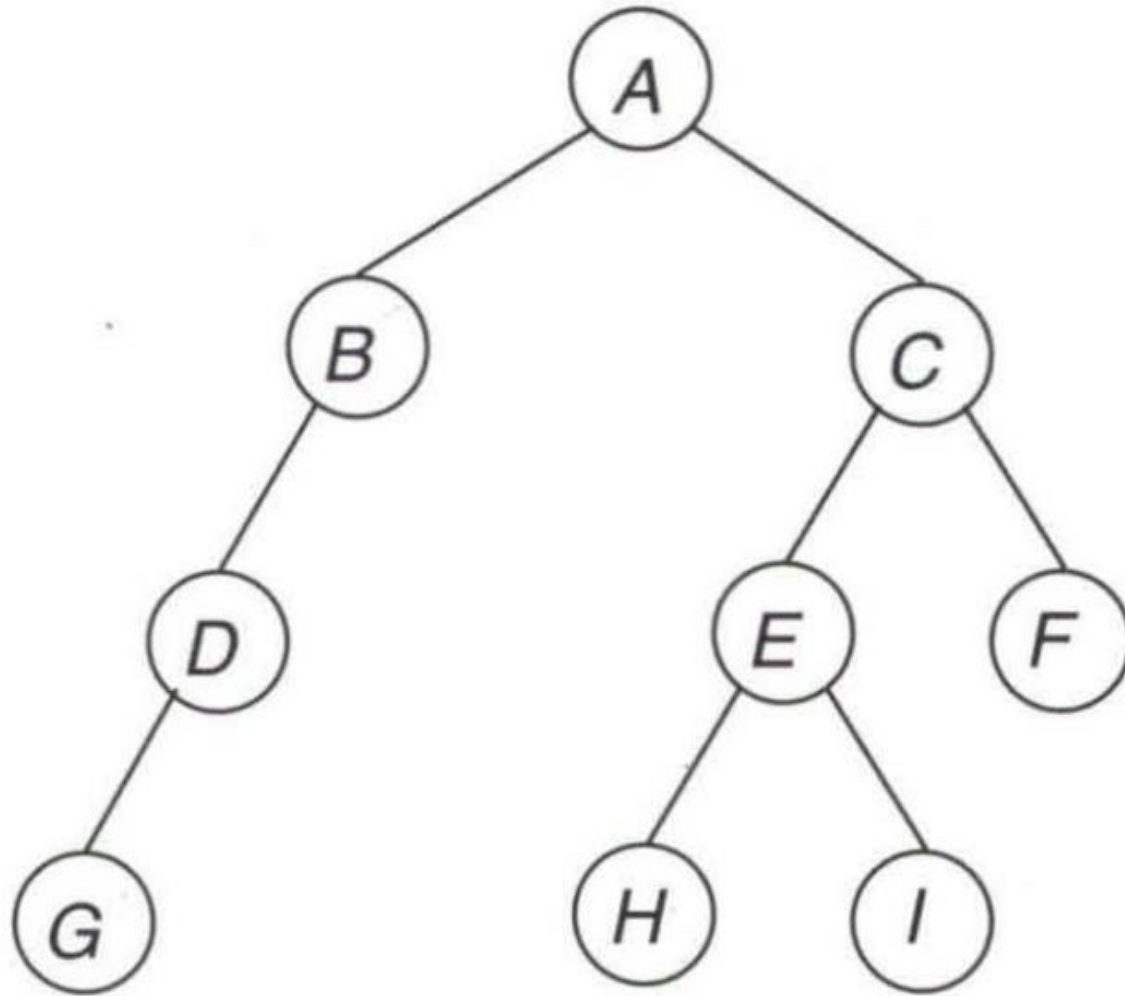
Percurso em Árvores Binárias



- **Percurso em pré-ordem:**
- ???



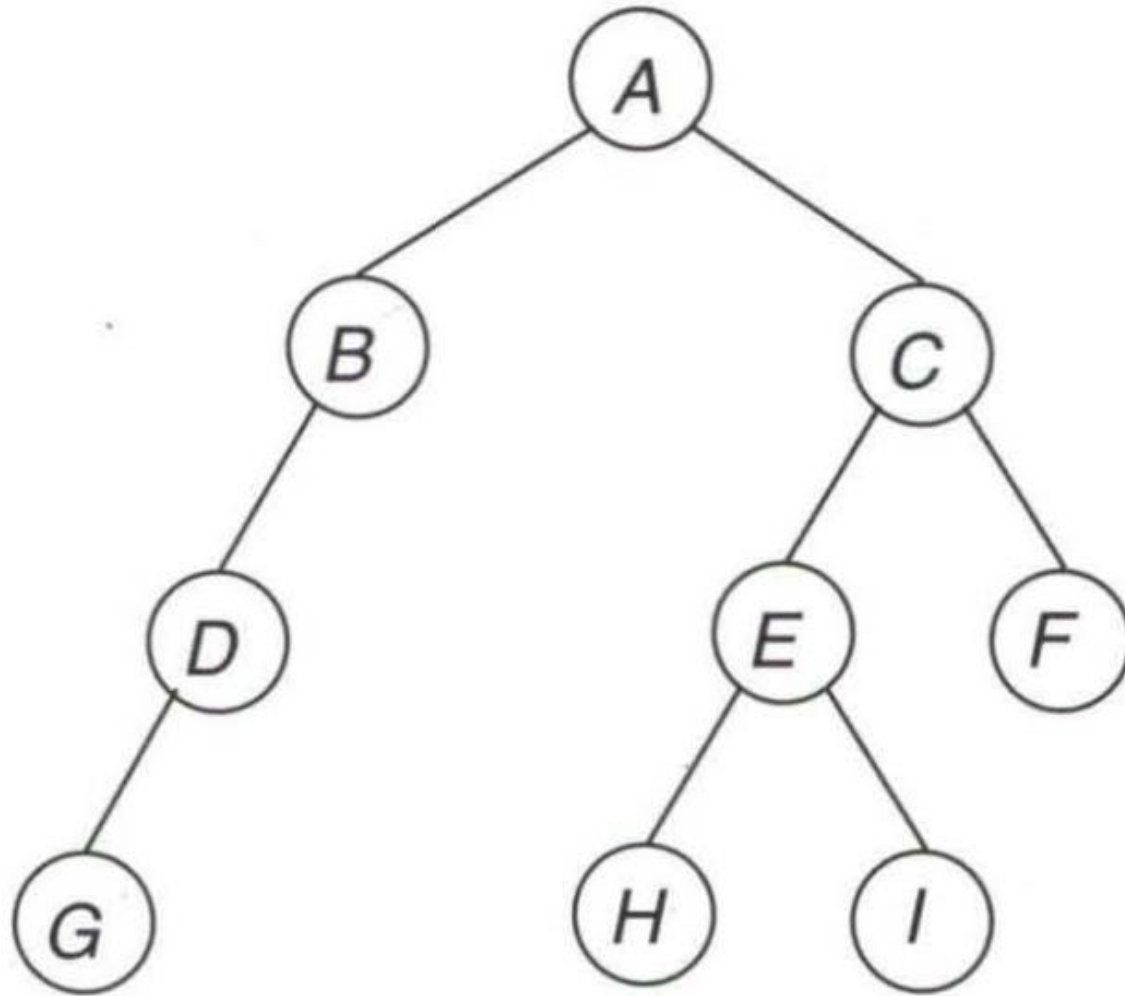
Percurso em Árvores Binárias



- Percurso em pré-ordem:
- A



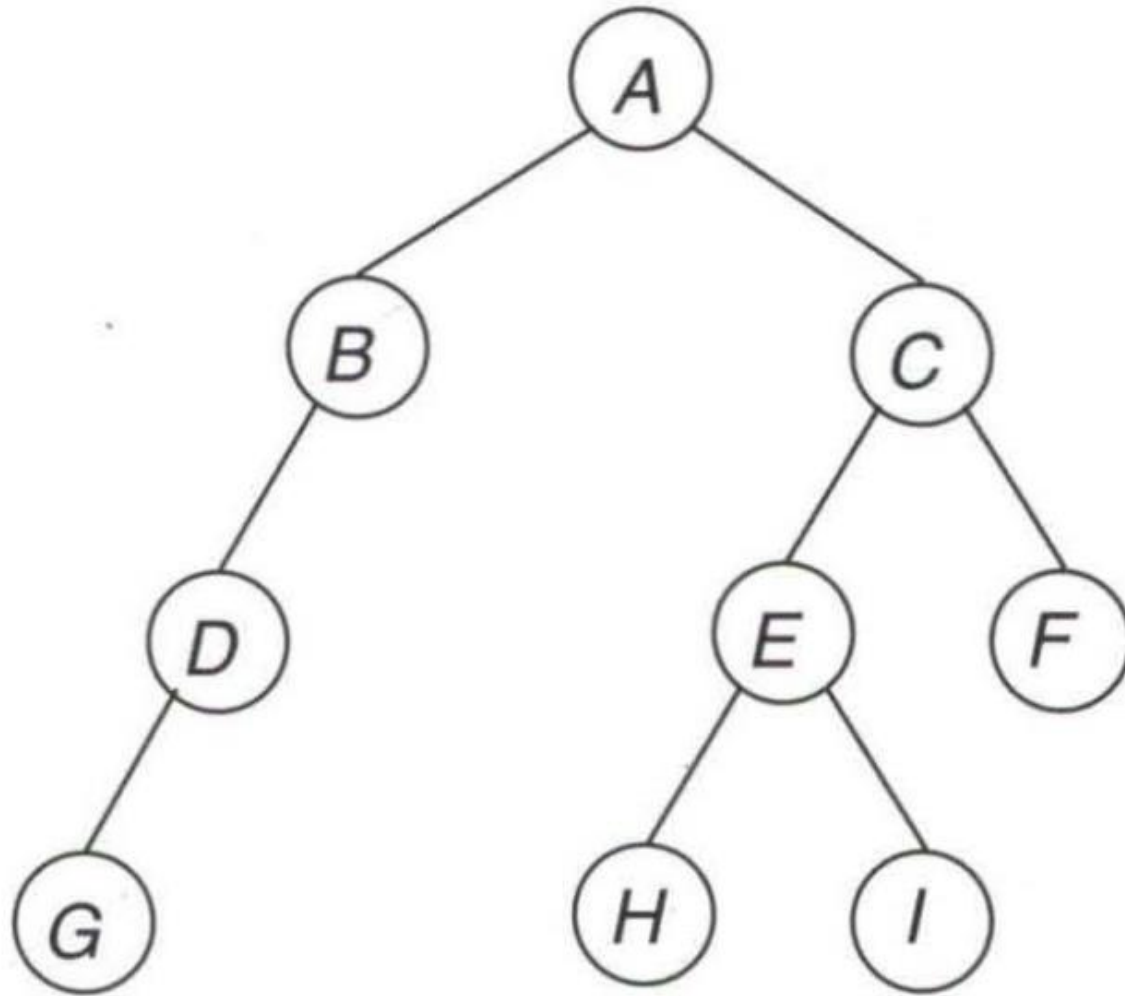
Percurso em Árvores Binárias



- **Percurso em pré-ordem:**
- **A B**



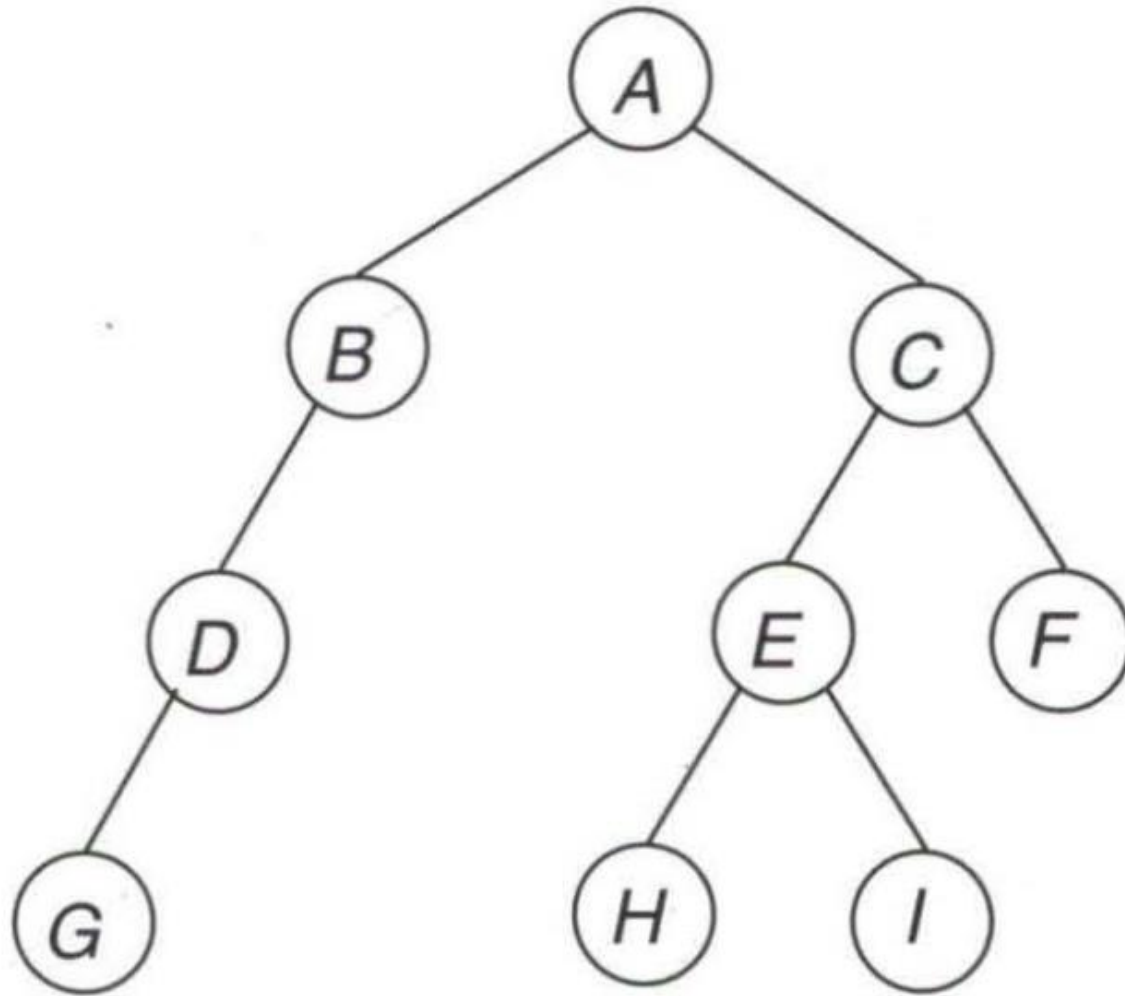
Percurso em Árvores Binárias



- **Percurso em pré-ordem:**
- **A B D**



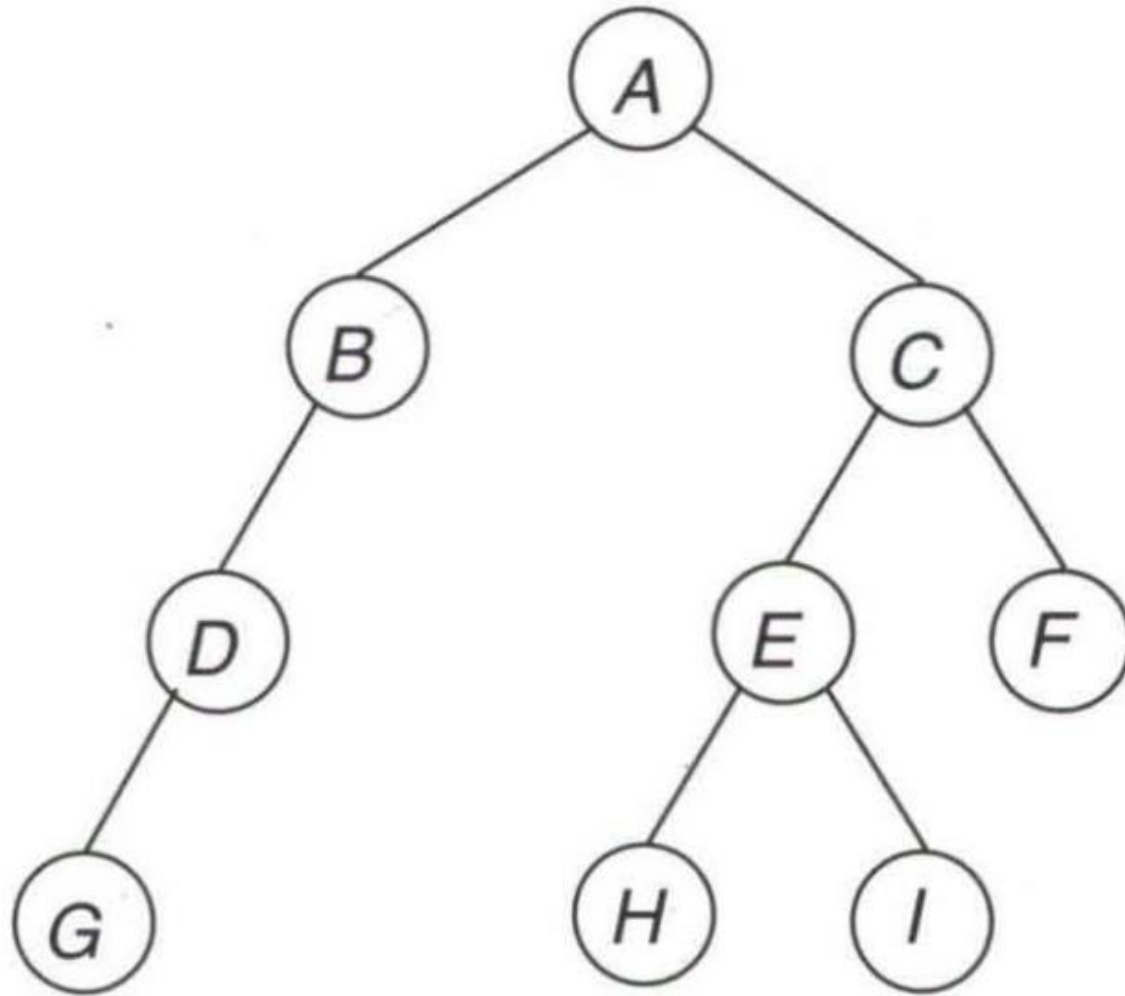
Percurso em Árvores Binárias



- **Percurso em pré-ordem:**
- **A B D G**



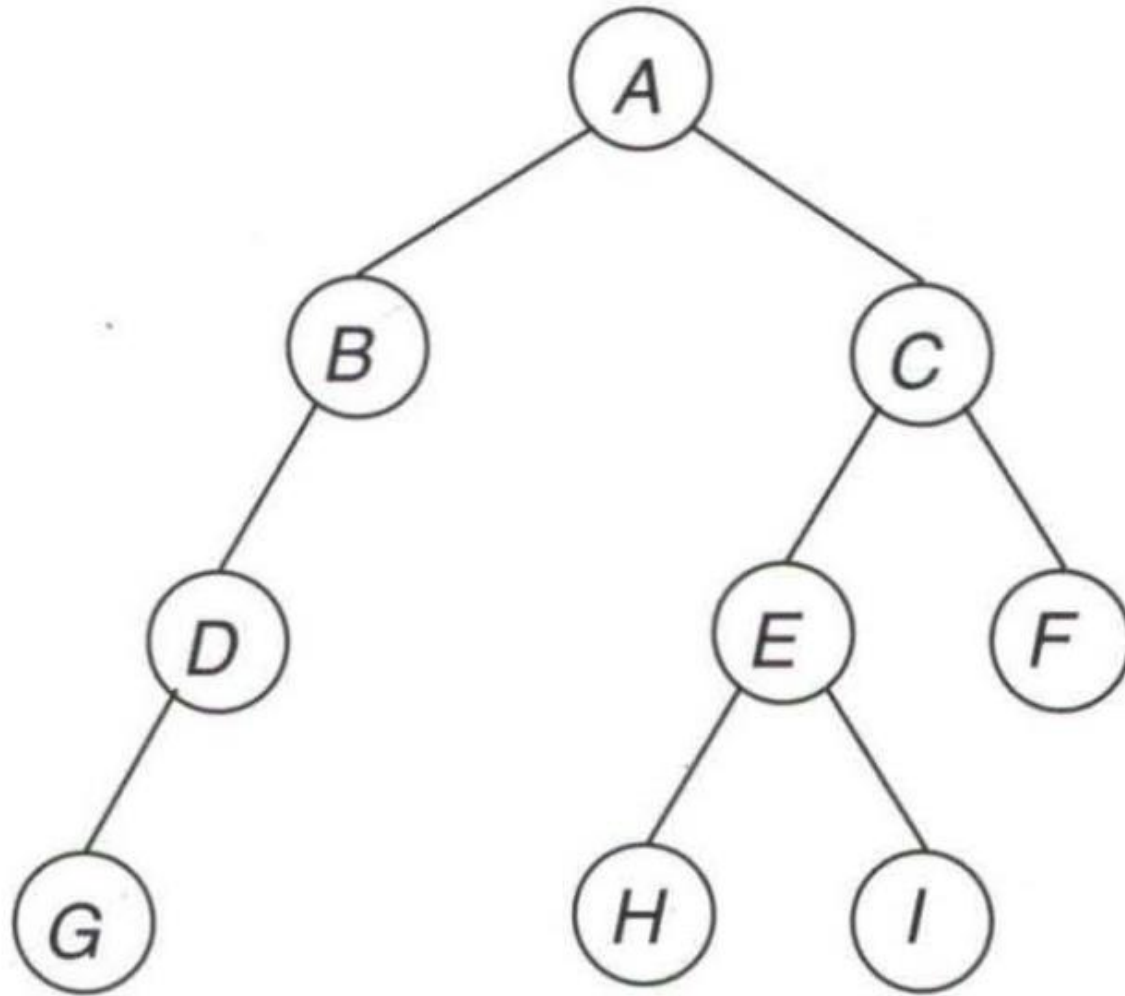
Percurso em Árvores Binárias



- Percurso em pré-ordem:
- **A B D G C**



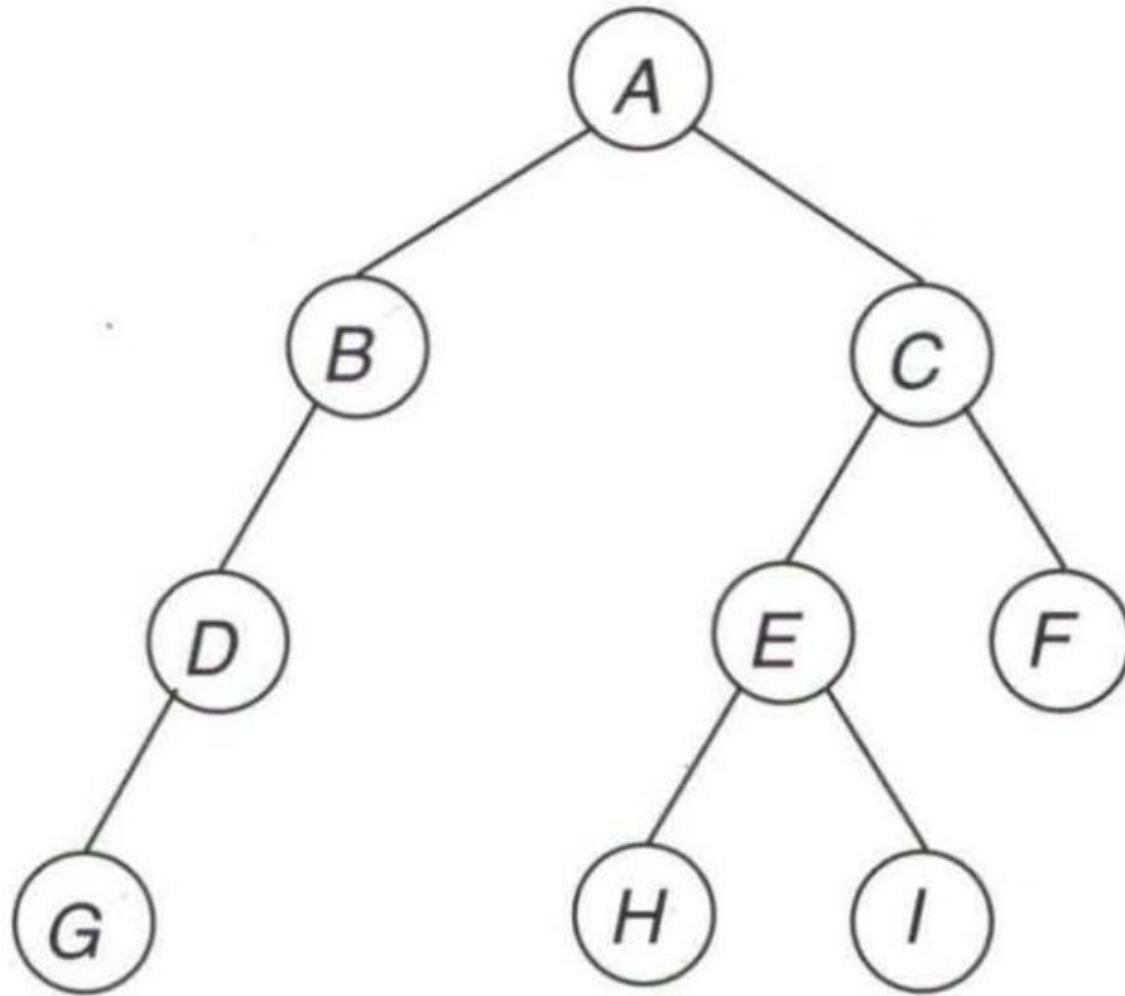
Percurso em Árvores Binárias



- Percurso em pré-ordem:
- **A B D G C E**



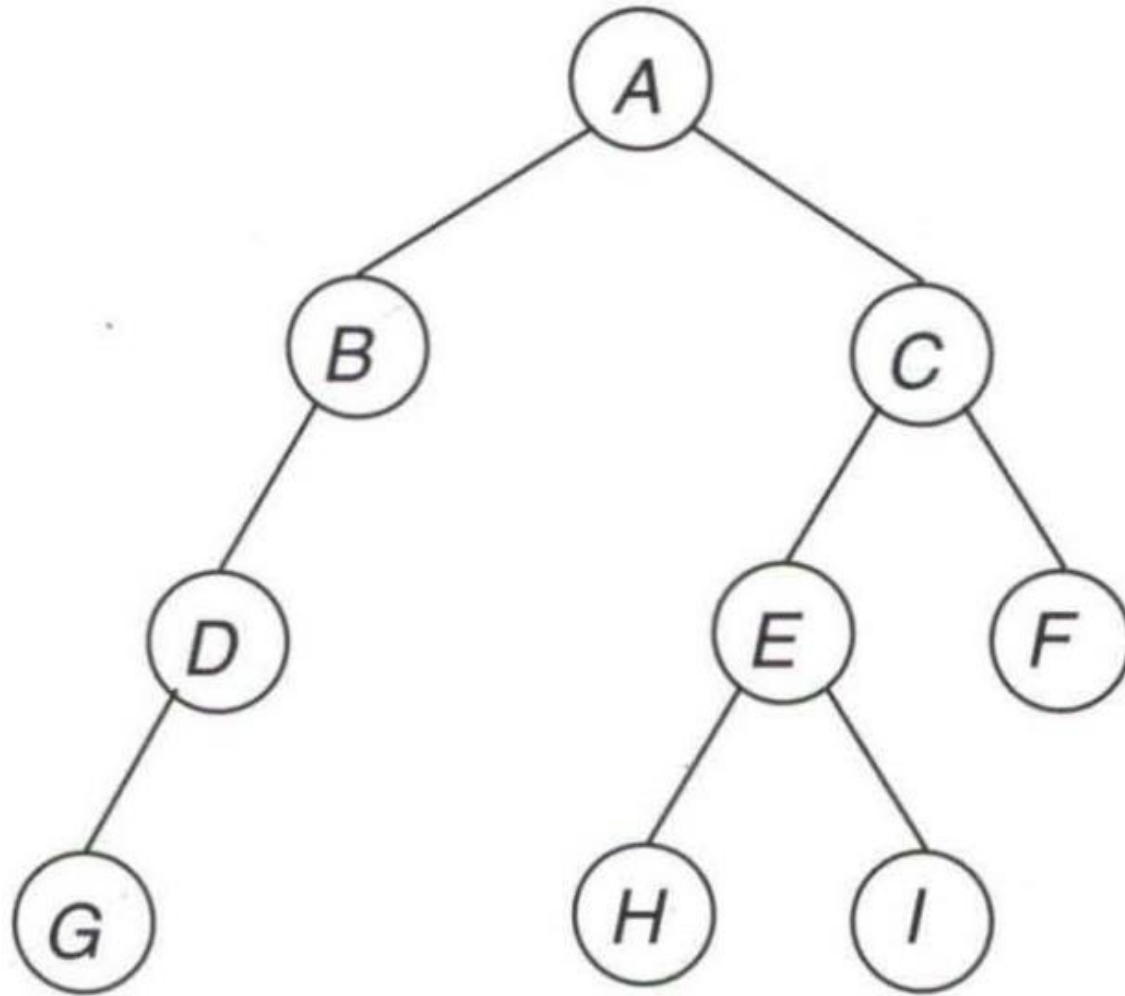
Percurso em Árvores Binárias



- Percurso em pré-ordem:
- **A B D G C E H**



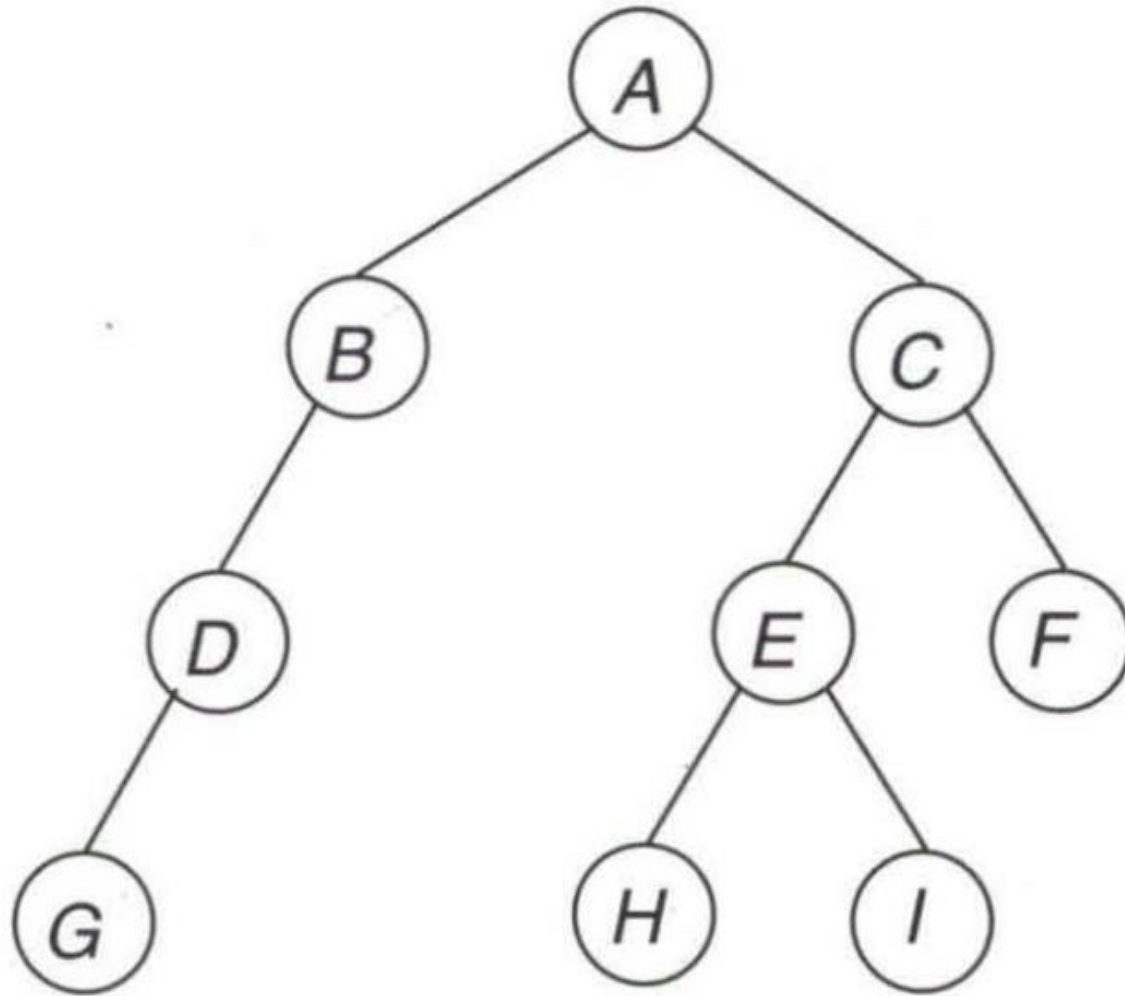
Percurso em Árvores Binárias



- Percurso em pré-ordem:
- **A B D G C E H I**



Percurso em Árvores Binárias



- Percurso em pré-ordem:
- **A B D G C E H I F**

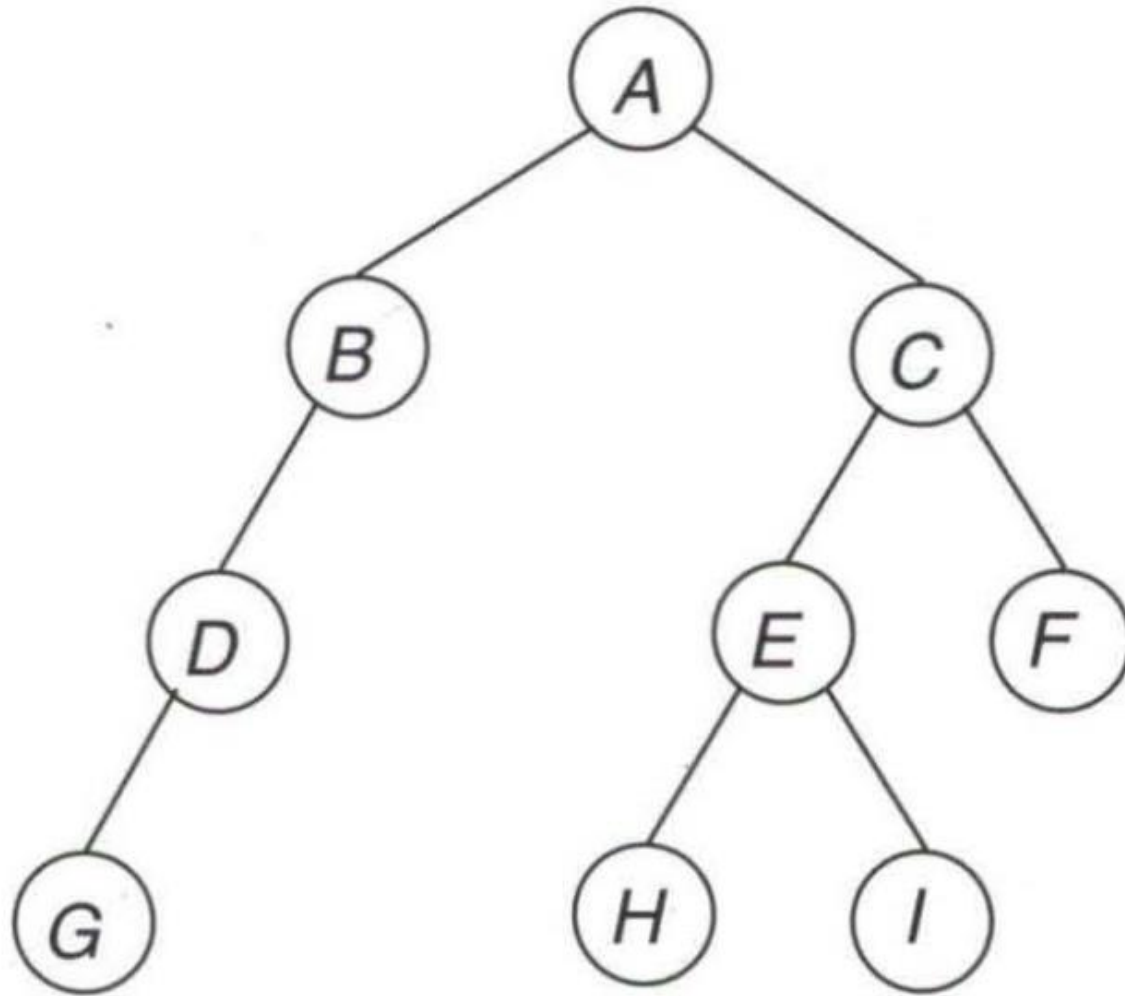


Percurso em Árvores Binárias

- Percurso em **pós-ordem**:
 - Percorrer sua sub árvore esquerda, em **pós-ordem**;
 - Percorrer sua sub árvore direita, **pós-ordem**;
 - Visitar a raiz.



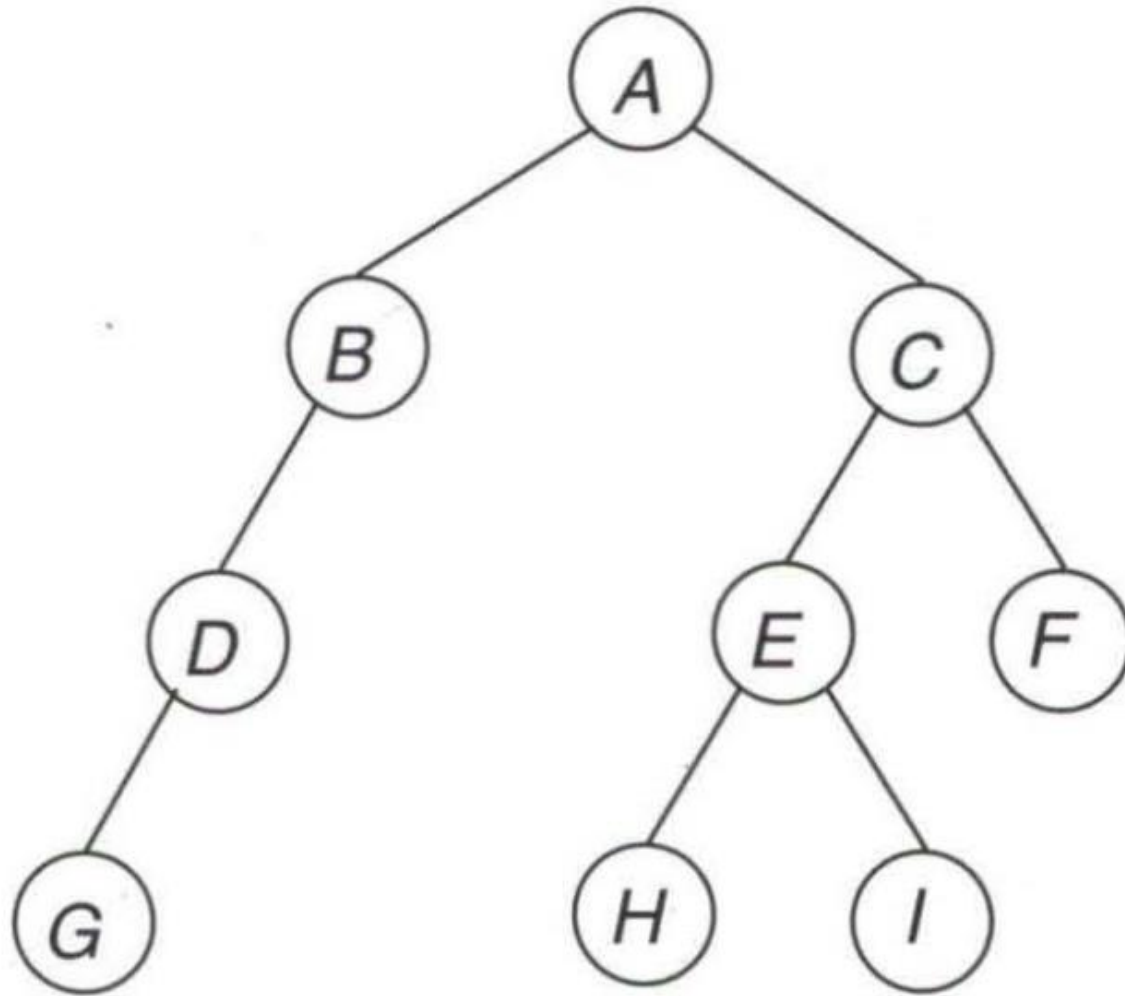
Percurso em Árvores Binárias



- **Percurso em pós-
ordem :**
- ???



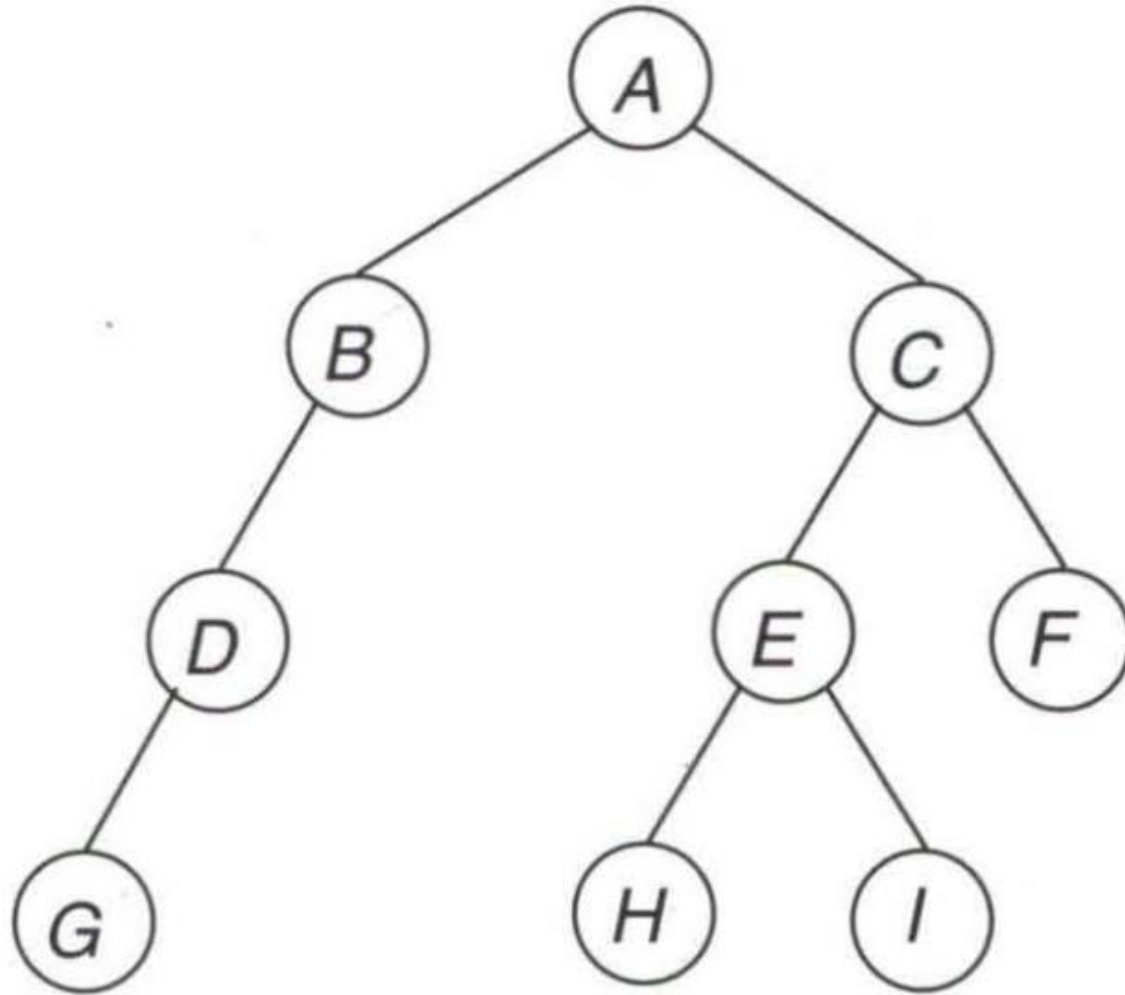
Percurso em Árvores Binárias



- **Percurso em pós-ordem :**
- **G**



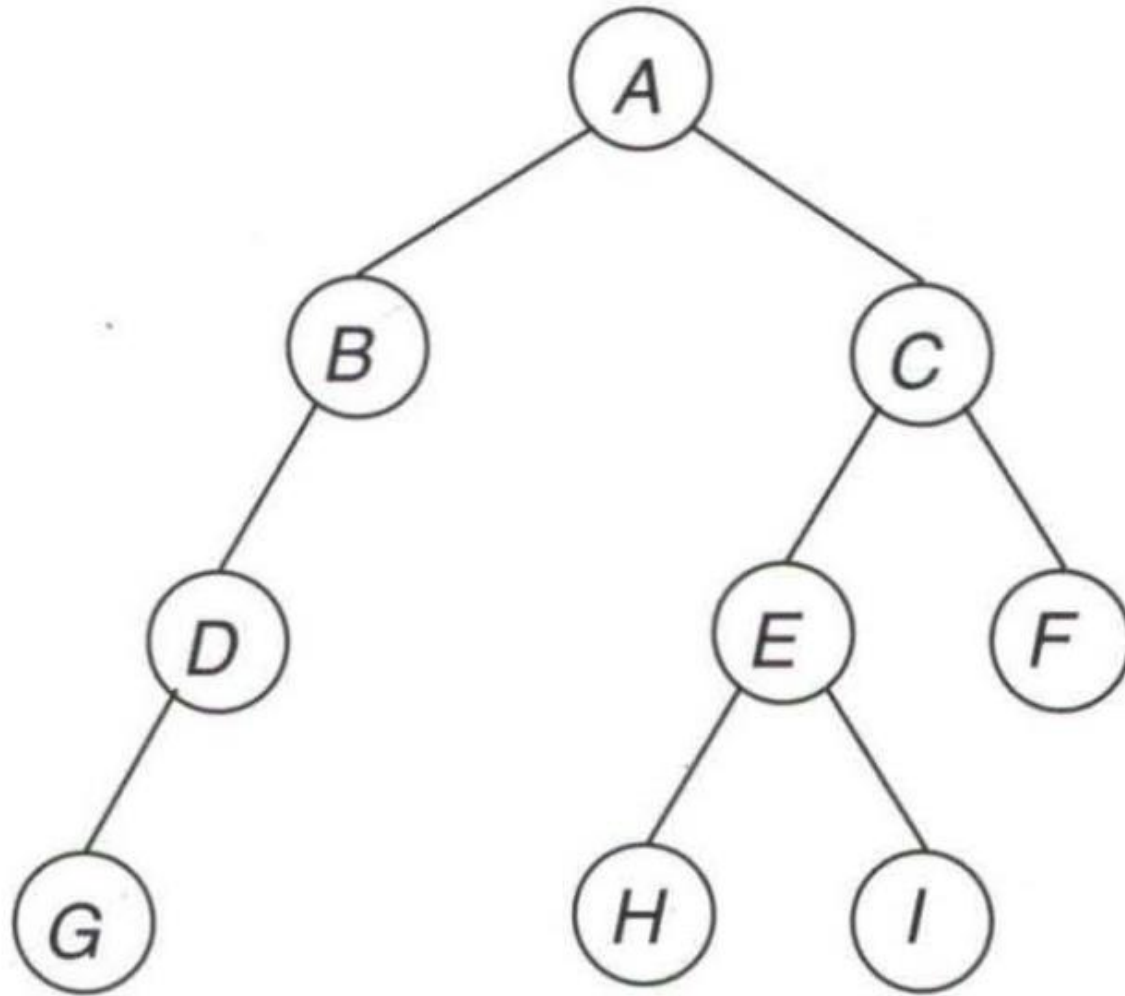
Percurso em Árvores Binárias



- **Percurso em pós-
ordem :**
- **G D**



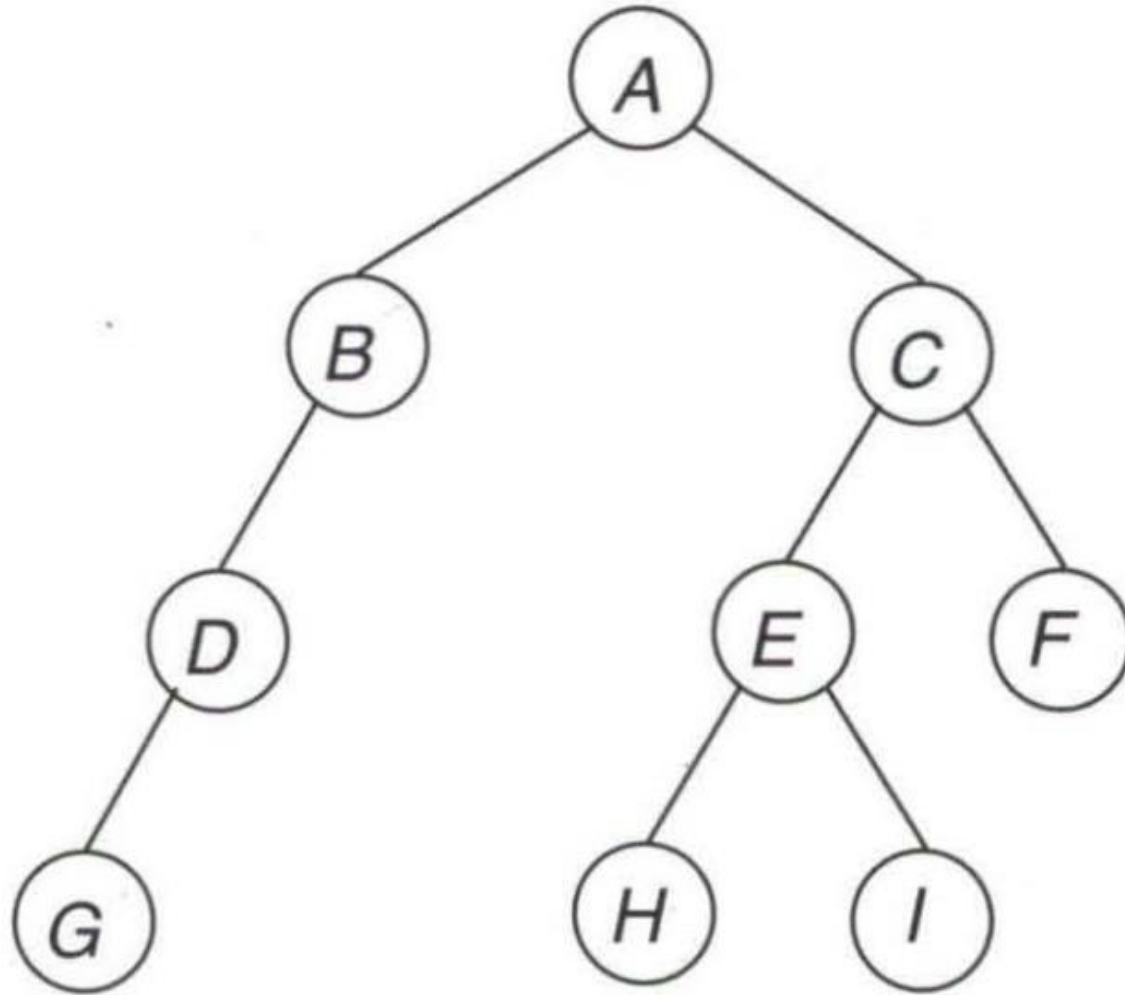
Percurso em Árvores Binárias



- **Percurso em pós-
ordem :**
- **G D B**



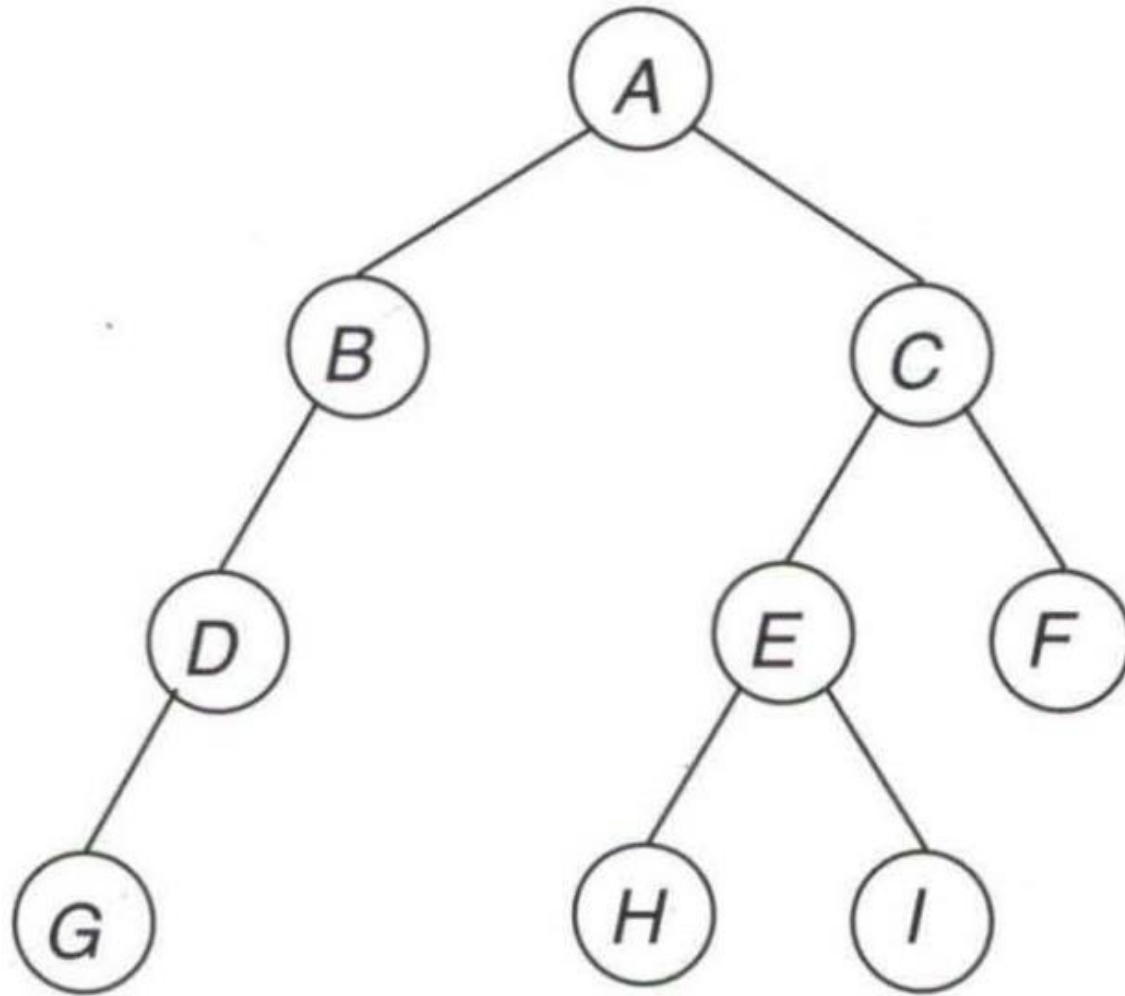
Percurso em Árvores Binárias



- Percurso em pós-
ordem :
- **G D B H**



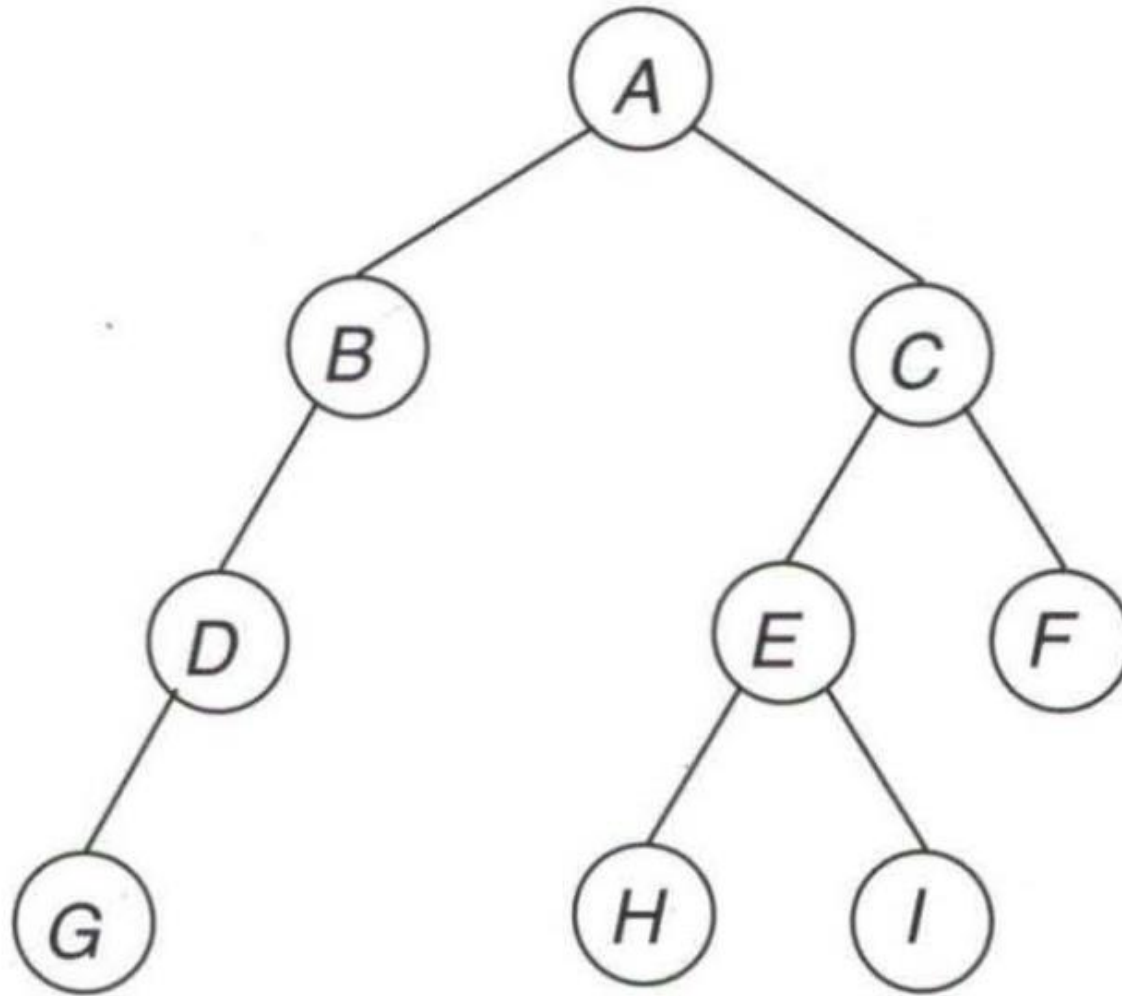
Percurso em Árvores Binárias



- Percurso em pós-
ordem :
- **G D B H I**



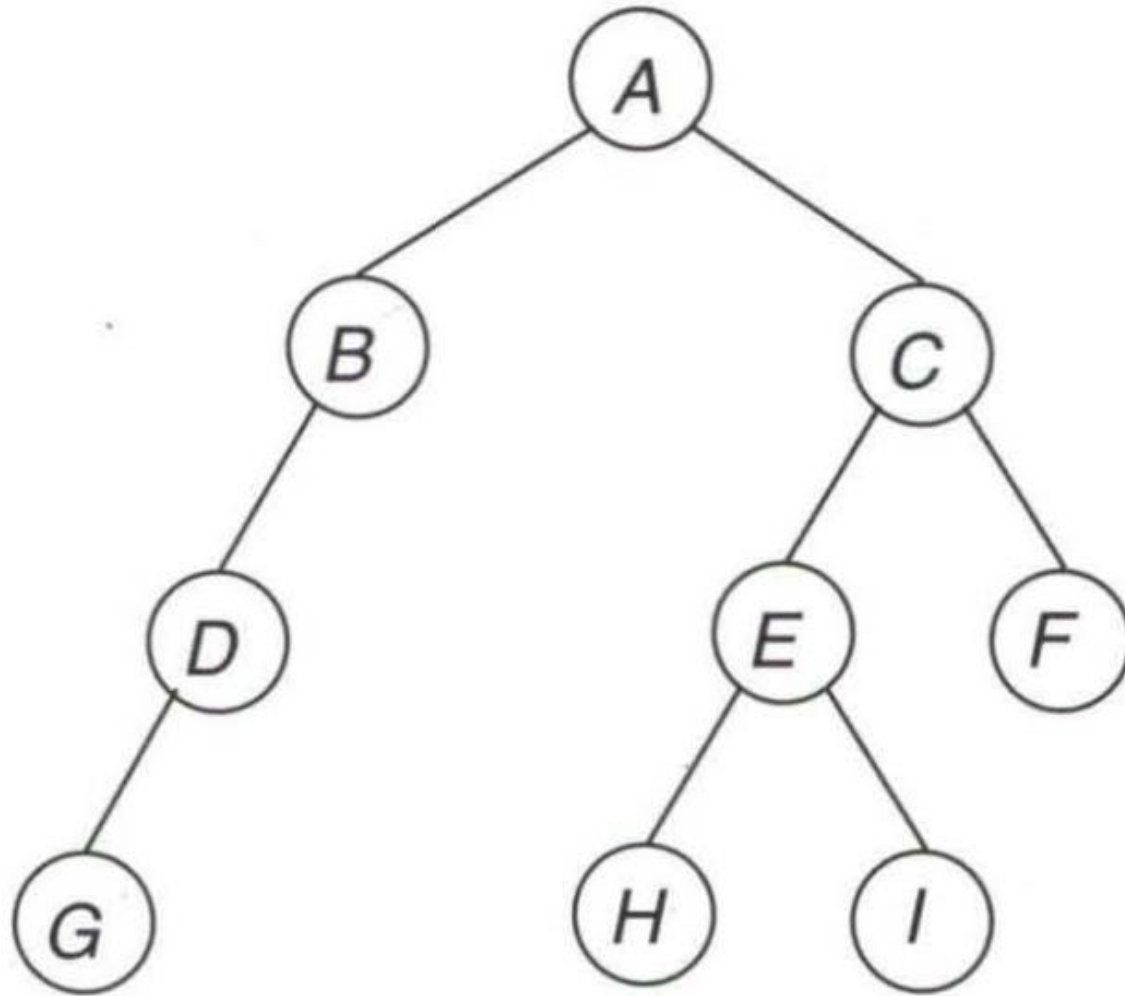
Percurso em Árvores Binárias



- Percurso em pós-
ordem :
- **G D B H I E**



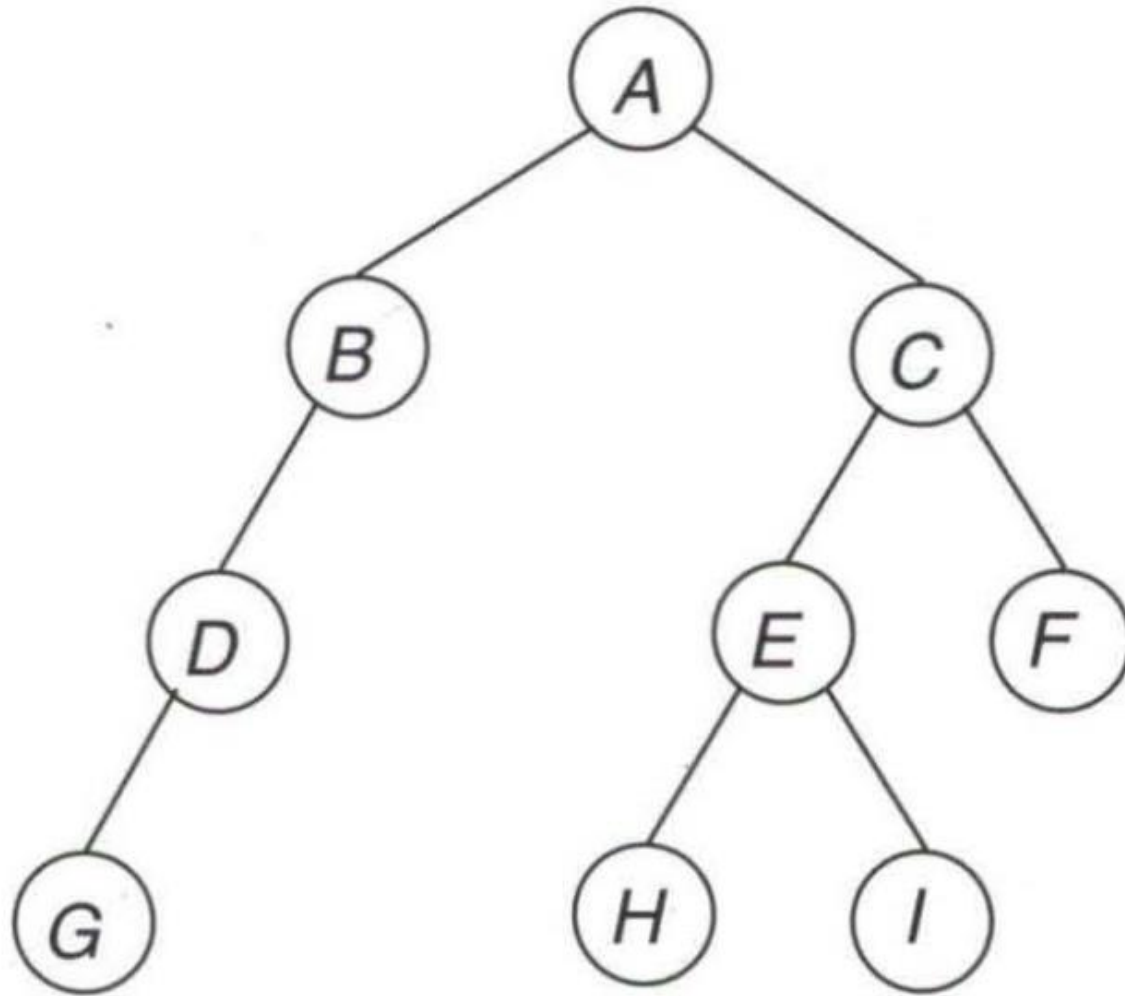
Percurso em Árvores Binárias



- Percurso em pós-
ordem :
- **G D B H I E F**



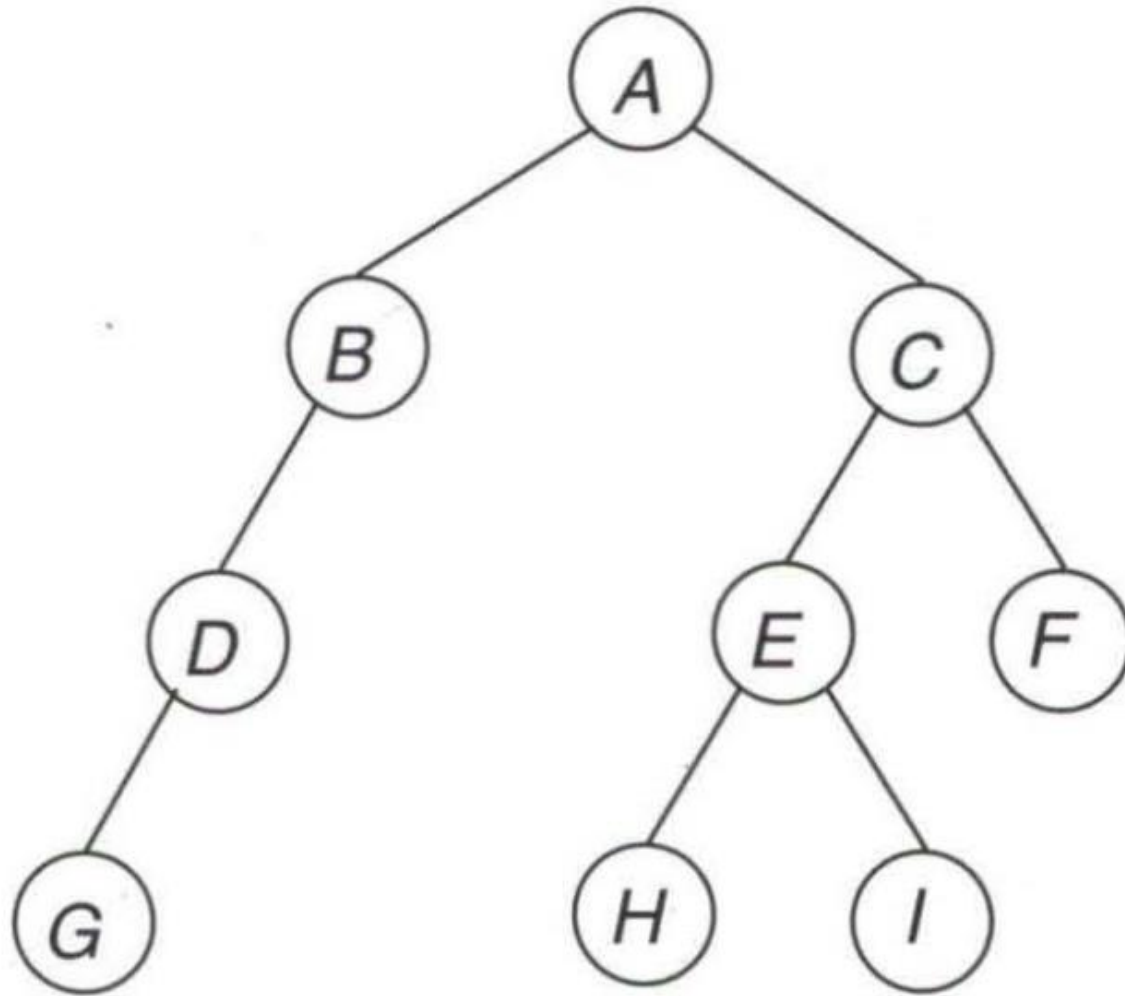
Percurso em Árvores Binárias



- Percurso em pós-
ordem :
- **G D B H I E F C**



Percurso em Árvores Binárias



- Percurso em pós-
ordem :
- **G D B H I E F C A**



Exercícios

- **[POSCOMP 2016 - FUNDATEC]** A operação de **destruição** de uma **árvore** requer um tipo de percurso em que a **liberação** de um **nó** é realizada **apenas após todos** os seus **descendentes** terem sido também **liberados**. Segundo essa descrição, a operação de destruição de uma árvore deve ser implementada utilizando o percurso:
 - A) Em ordem.
 - B) Pré-ordem.
 - C) Central.
 - D) Simétrico.
 - E) Pós-ordem.



Exercícios

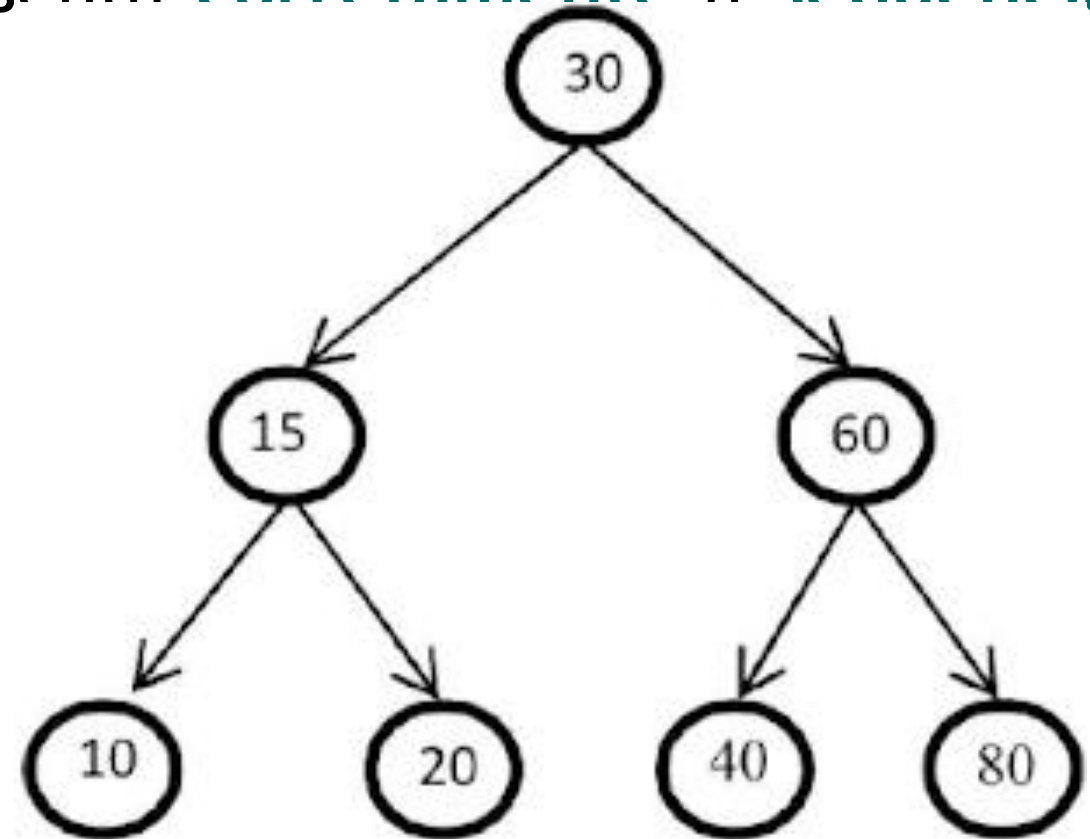
- **[POSCOMP 2016 - FUNDATEC]** A operação de **destruição** de uma **árvore** requer um tipo de percurso em que a **liberação** de um **nó** é realizada **apenas após todos** os seus **descendentes** terem sido também **liberados**. Segundo essa descrição, a operação de destruição de uma árvore deve ser implementada utilizando o percurso:
 - A) Em ordem.
 - B) Pré-ordem.
 - C) Central.
 - D) Simétrico.
 - **E) Pós-ordem.**



Exercícios

- [POSCOMP 2013 - COPS - UEL] Observe a Árvore Binária a seguir e assinale a **alternativa** que apresenta **corretamente** a **seqüência** de **inserção** que **gera** essa **árvore**:

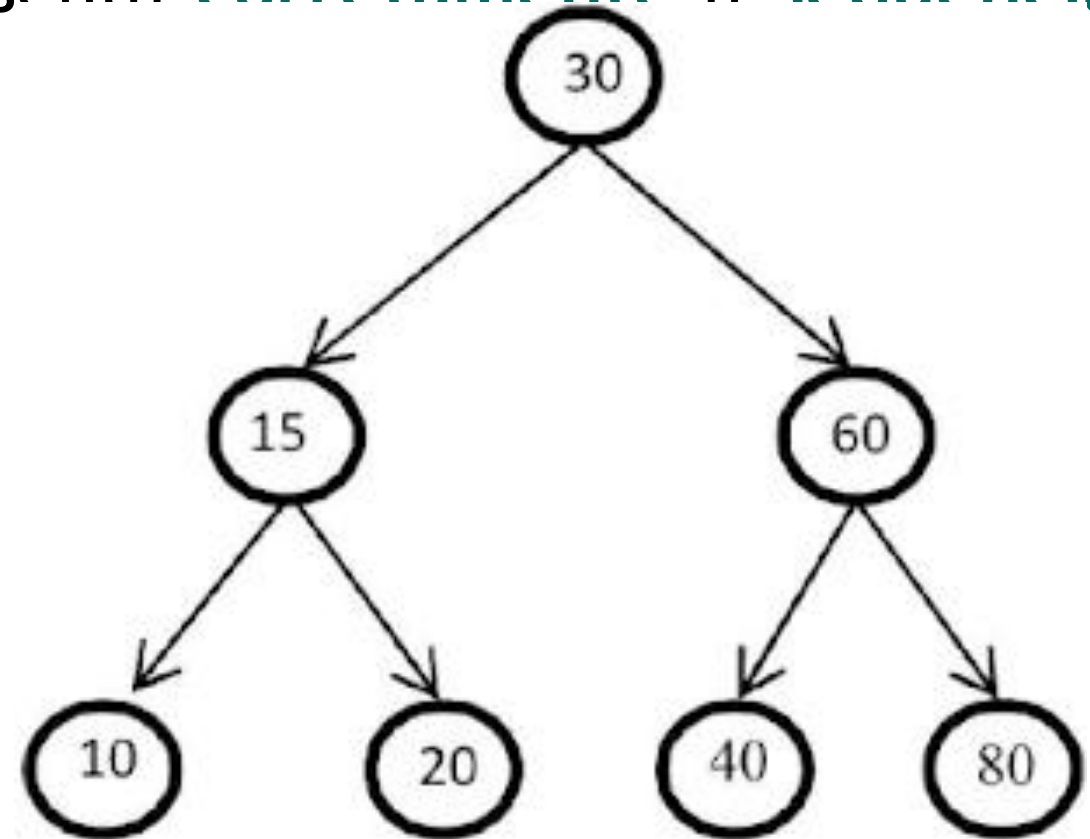
- A) 30, 15, 40, 10, 20, 60, 80
- B) 30, 15, 40, 10, 20, 80, 60
- C) 30, 15, 60, 10, 20, 40, 80
- D) 30, 60, 20, 80, 15, 10, 40
- E) 30, 60, 40, 10, 20, 15, 80



Exercícios

- [POSCOMP 2013 - COPS - UEL] Observe a Árvore Binária a seguir e assinale a **alternativa** que apresenta **corretamente** a **seqüência** de **inserção** que **gera** essa **árvore**:

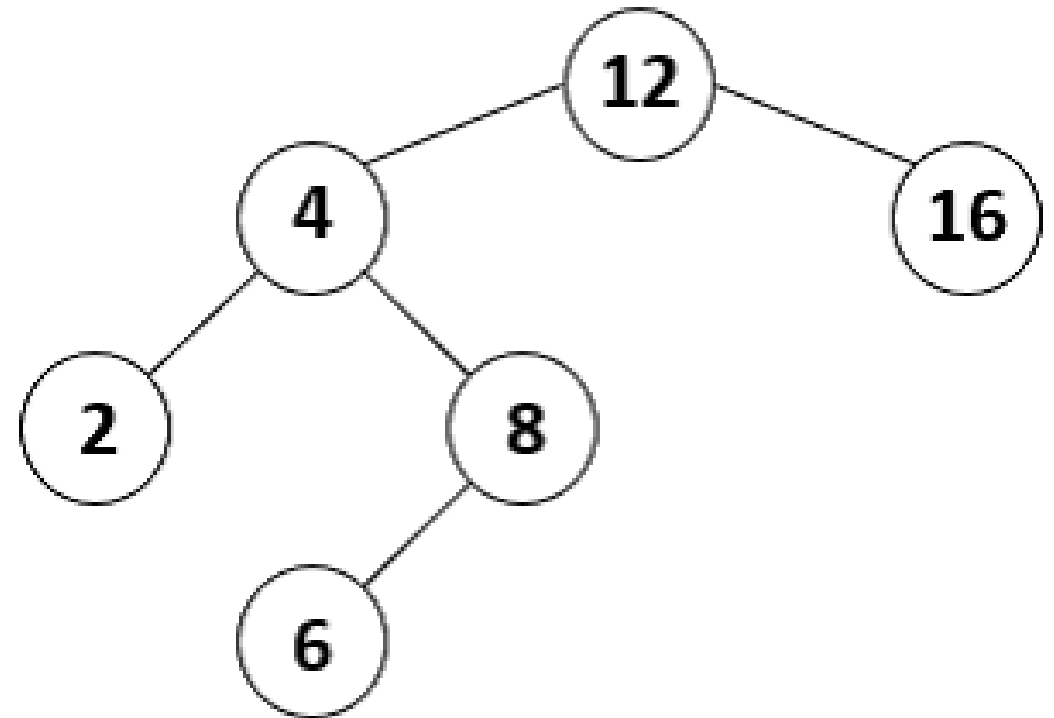
- A) 30, 15, 40, 10, 20, 60, 80
- B) 30, 15, 40, 10, 20, 80, 60
- **C) 30, 15, 60, 10, 20, 40, 80**
- D) 30, 60, 20, 80, 15, 10, 40
- E) 30, 60, 40, 10, 20, 15, 80



Exercícios

- **[POSCOMP 2016 - FUNDATEC]** Considere a árvore binária a seguir. Os **resultados** das **consultas** dos nós dessa árvore binária em **pré-ordem** e **pós-ordem** são, respectivamente:

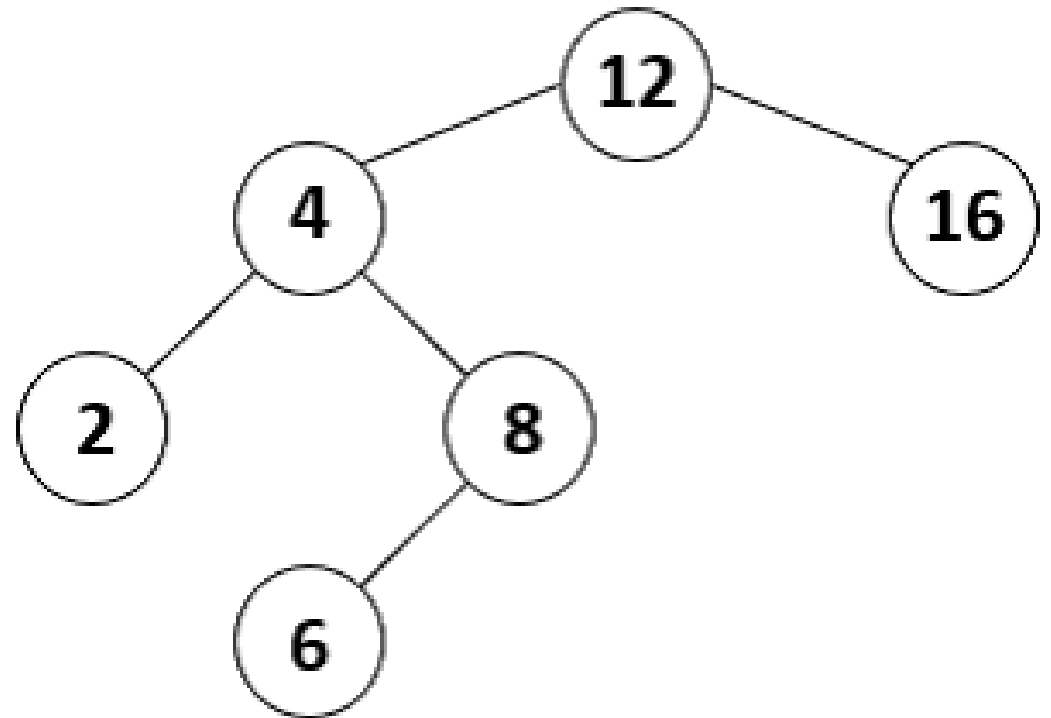
- A) (2 4 6 8 12 16) e (2 6 8 4 16 12)
- B) (12 4 2 8 6 16) e (2 6 8 4 16 12)
- C) (12 4 2 8 6 16) e (2 4 6 8 12 16)
- D) (2 6 8 4 16 12) e (12 4 2 8 6 16)
- E) (2 4 6 8 12 16) e (12 4 2 8 6 16)



Exercícios

- **[POSCOMP 2016 - FUNDATEC]** Considere a árvore binária a seguir. Os **resultados** das **consultas** dos nós dessa árvore binária em **pré-ordem** e **pós-ordem** são, respectivamente:

- A) (2 4 6 8 12 16) e (2 6 8 4 16 12)
- **B) (12 4 2 8 6 16) e (2 6 8 4 16 12)**
- C) (12 4 2 8 6 16) e (2 4 6 8 12 16)
- D) (2 6 8 4 16 12) e (12 4 2 8 6 16)
- E) (2 4 6 8 12 16) e (12 4 2 8 6 16)

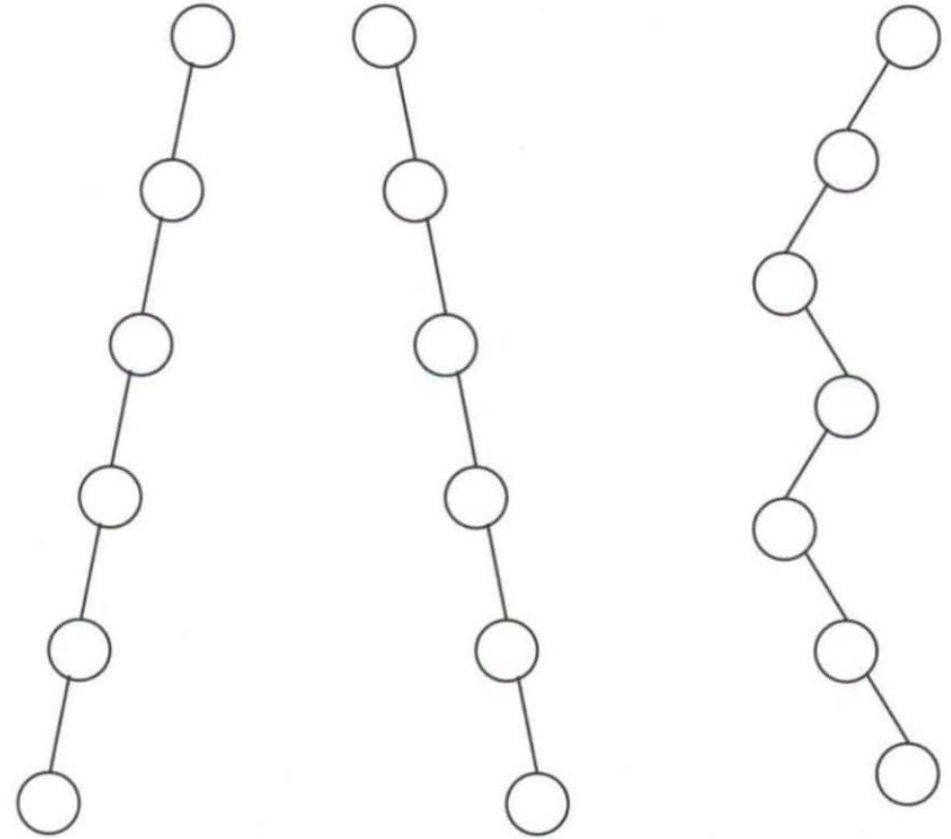
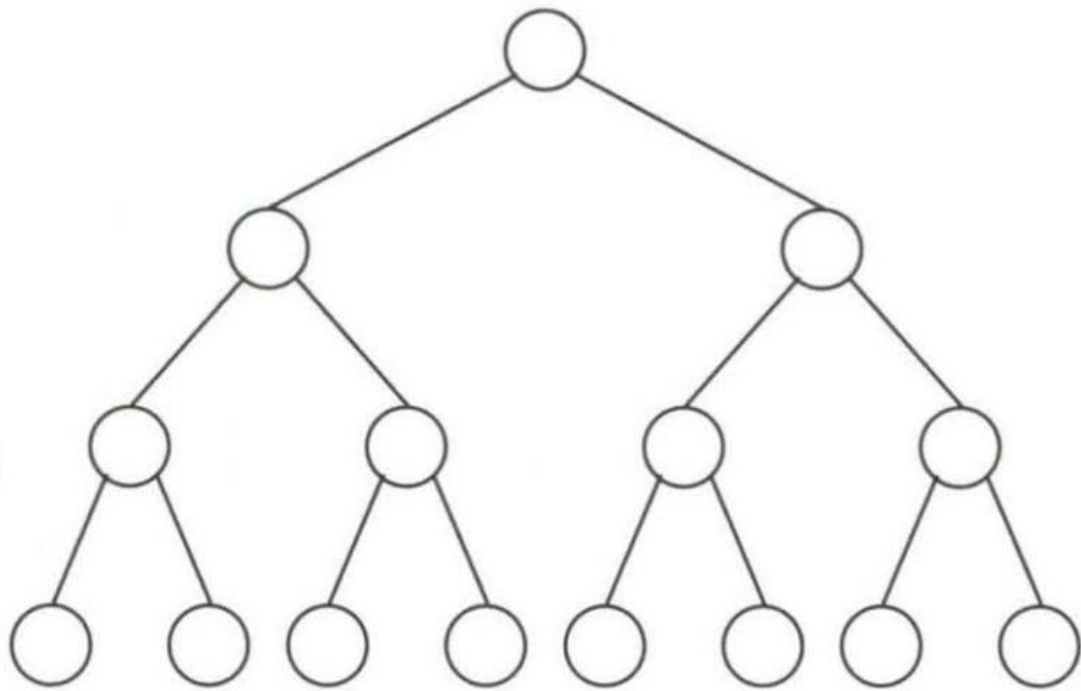


Conceito de balanceamento

- As **Árvores Binárias** são projetadas para um acesso rápido à informação.
- Idealmente a **Árvore** deve ser **razoavelmente equilibrada**.



Conceito de balanceamento

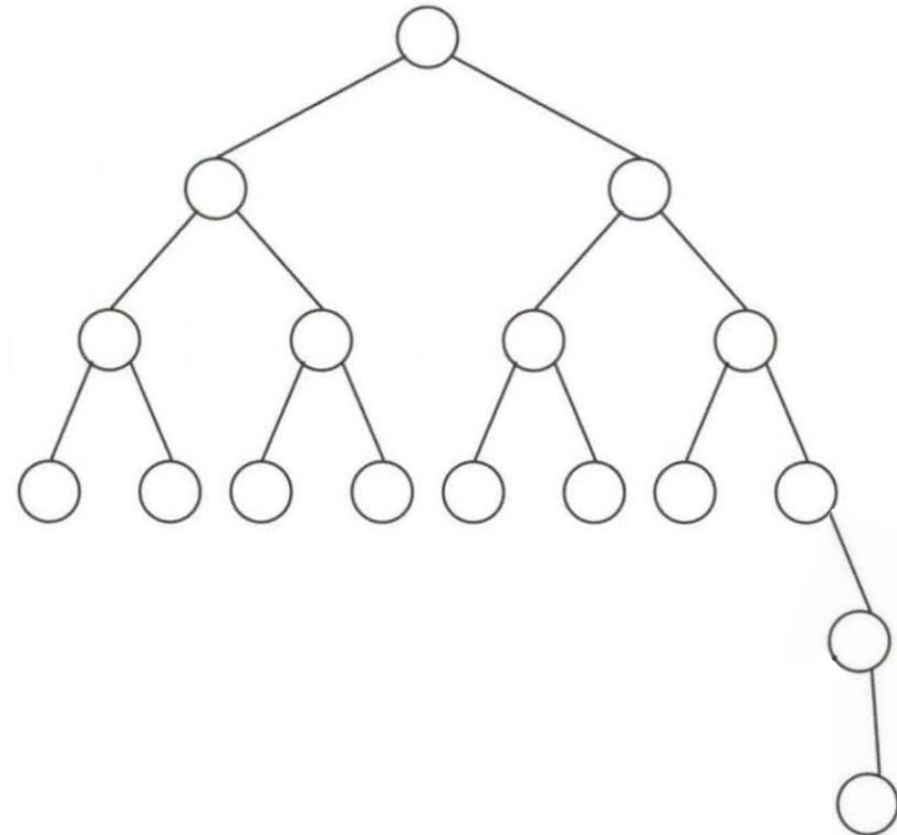


Qual é mais eficiente?



Conceito de balanceamento

- Com sucessivas inserções de dados principalmente ordenados, a **Árvore** pode se **degenerar** com o tempo.



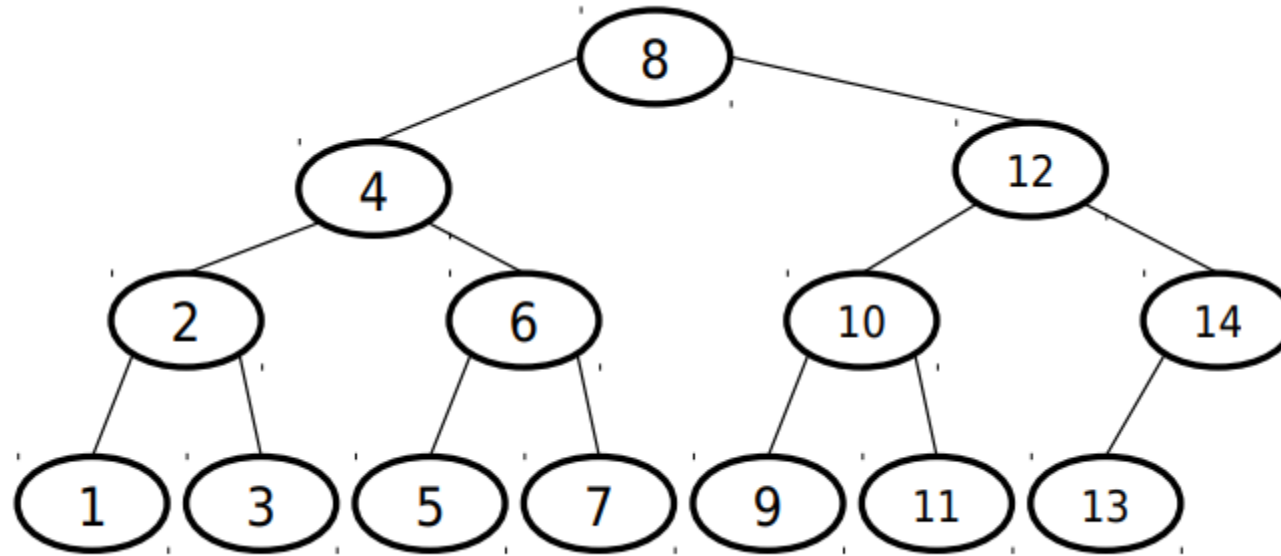
Conceito de balanceamento

- **Árvores Completas** minimizam o número de comparações efetuadas.
- Contudo, para garantir essa **propriedade** em **aplicações dinâmicas**, é preciso **reconstruir** a **Árvore** para seu **estado ideal** a **cada** operação sobre seus **nós**.



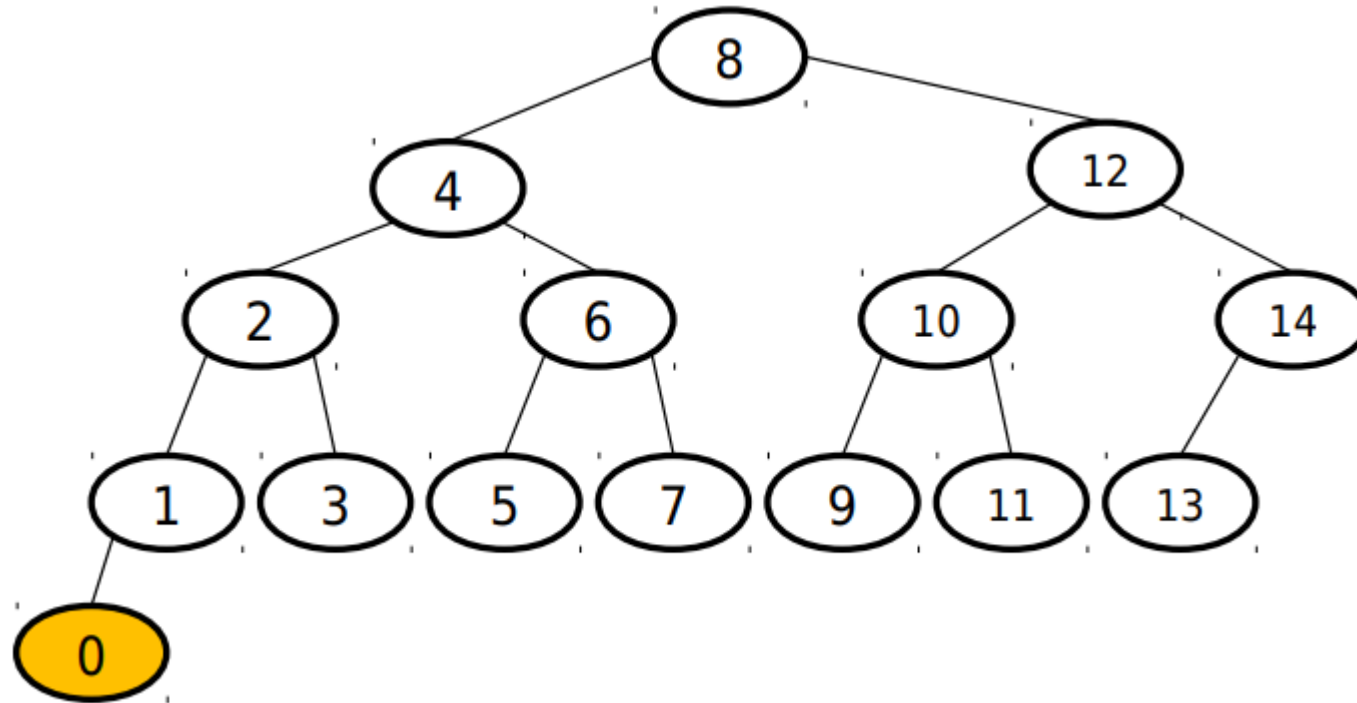
Conceito de balanceamento

- Suponha a inclusão da chave 0 (zero):



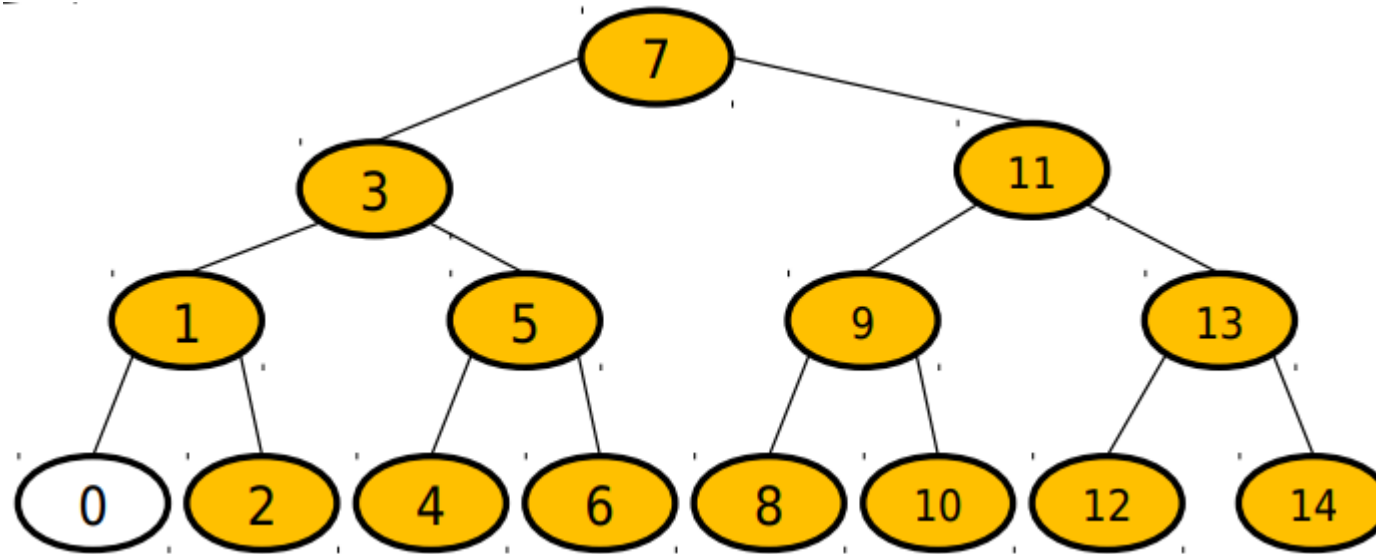
Conceito de balanceamento

- Suponha a inclusão da chave 0 (zero):



Conceito de balanceamento

- Suponha a inclusão da chave 0 (zero):

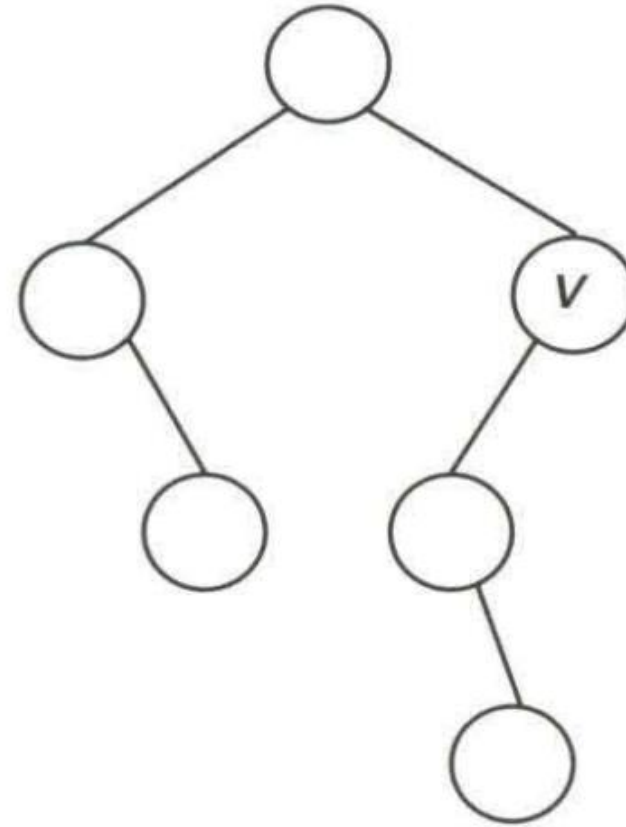
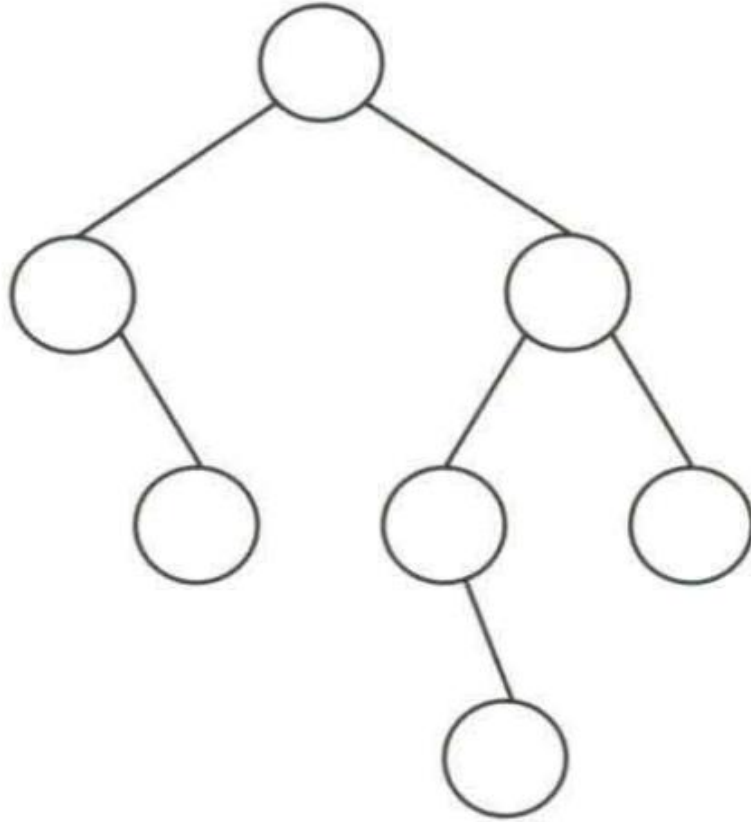


Árvores A.V.L.

- Uma **Árvore Binária** T é denominada **A.V.L.** quando, para qualquer **nó** de T , as alturas de suas **subárvore** (**ESQUERDA** e **DIREITA**) diferem no **maximo** por **uma** unidade.
- Se o **fator de balanceamento** de **qualquer nó** for **maior** do que **1** então a **Árvore** tem que ser **balanceada**.

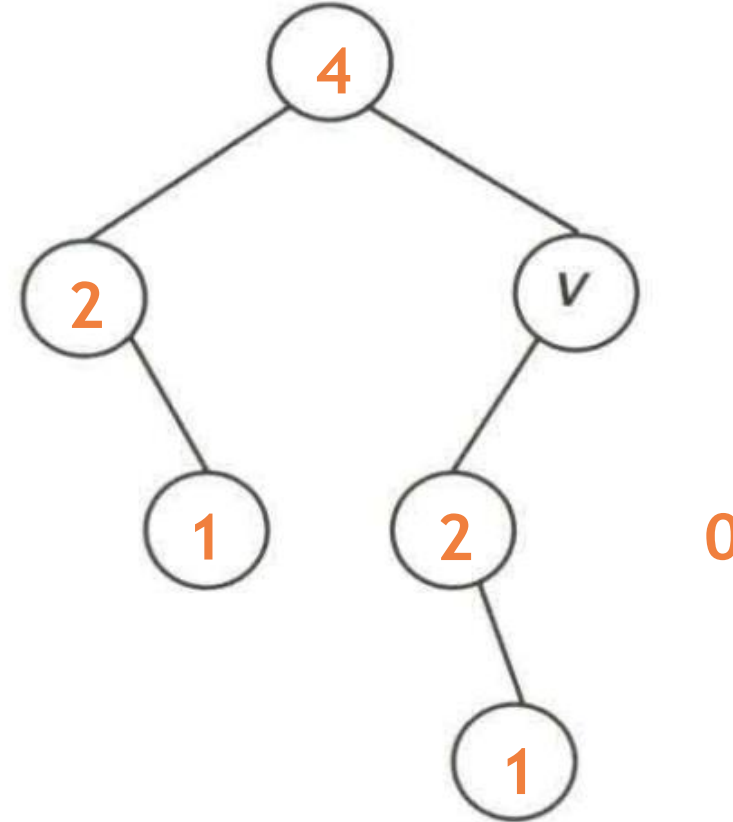
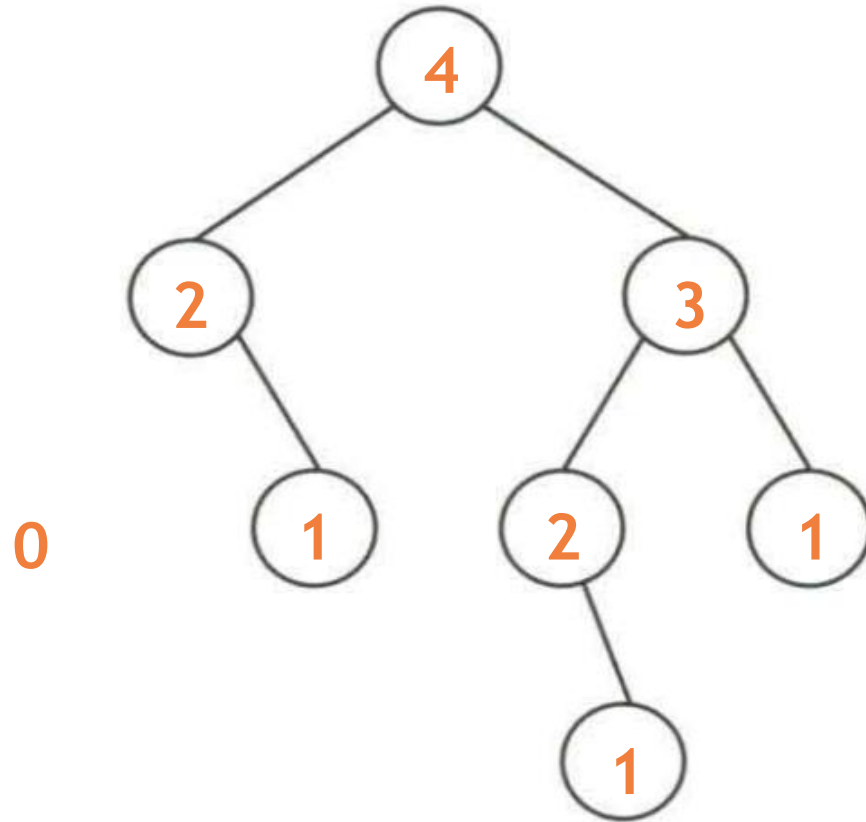


Árvores A.V.L.



Árvores A.V.L.

- Altura dos nós:



Árvores A.V.L.

- A **segunda** Figura, não é **A.V.L.**, pois a **subárvore esquerda** do nó **v** assinalado possui **altura dois** e a **subárvore direita** é de **altura zero**.



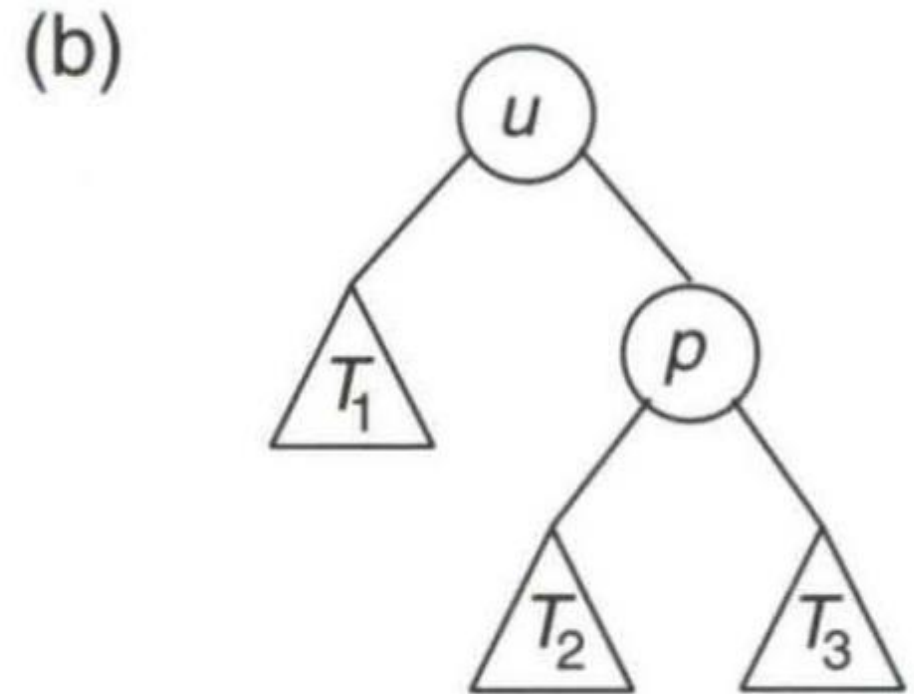
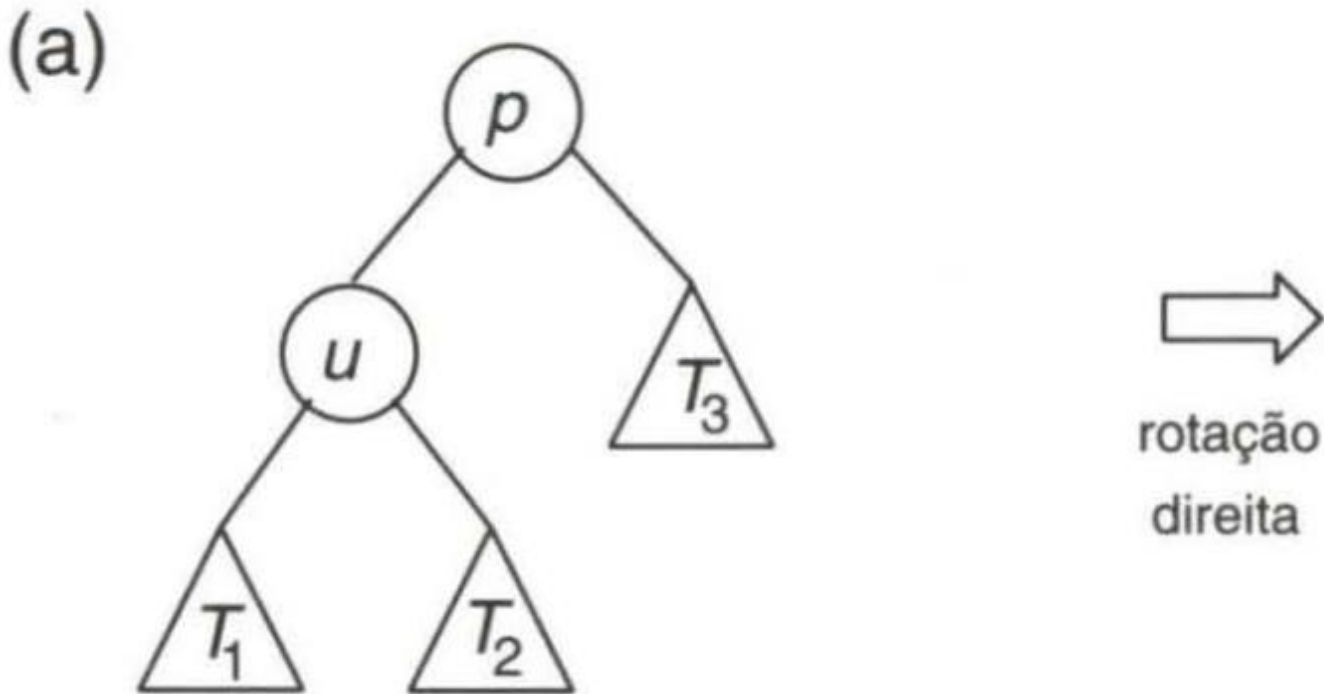
Inserção em árvores A.V.L.

- Na **inserção** utiliza-se um processo de **balanceamento** que pode ser de **4** tipos **específicos**:



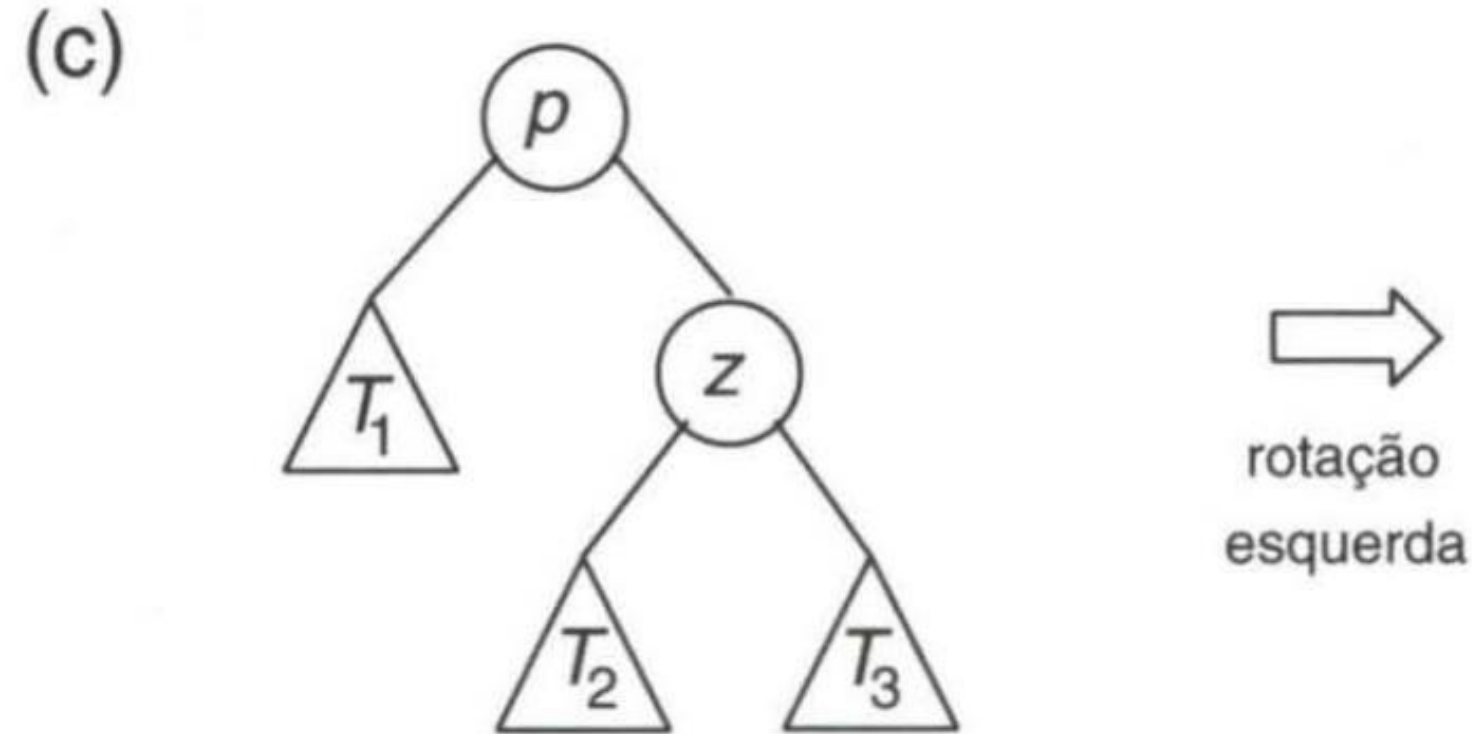
Inserção em árvores A.V.L.

- Rotação Direita:

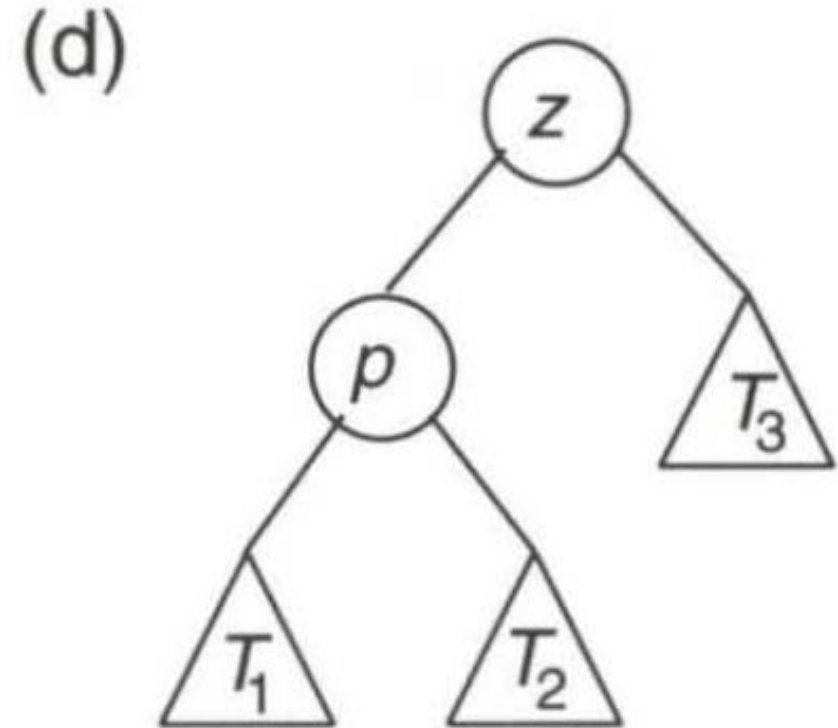


Inserção em árvores A.V.L.

- Rotação Esquerda:

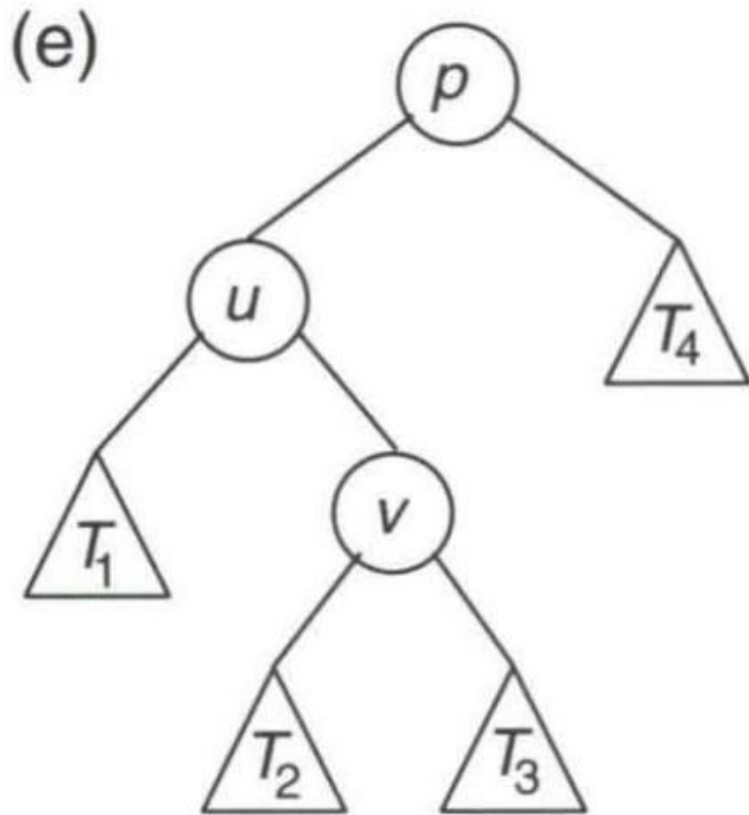


→
rotação
esquerda

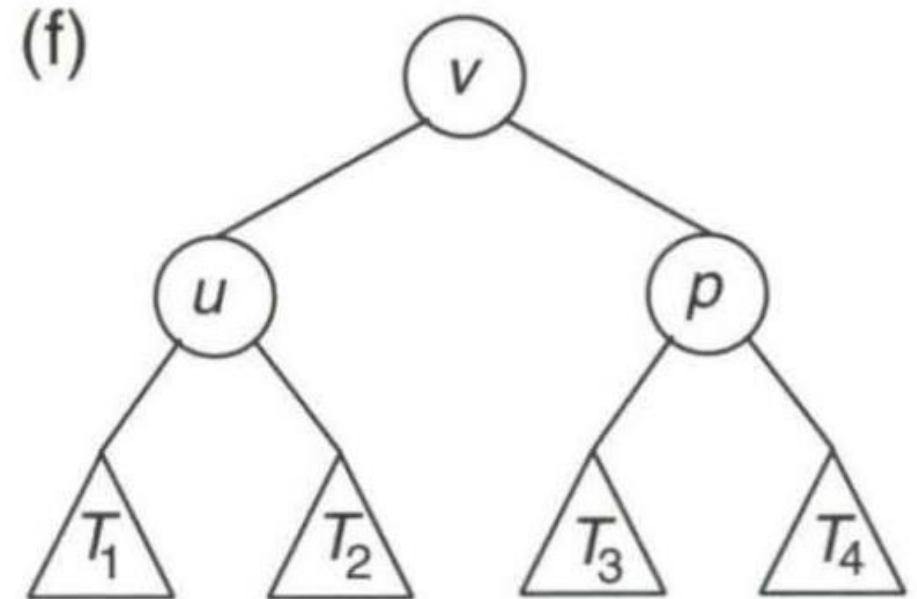


Inserção em árvores A.V.L.

- Rotação Dupla Direita:

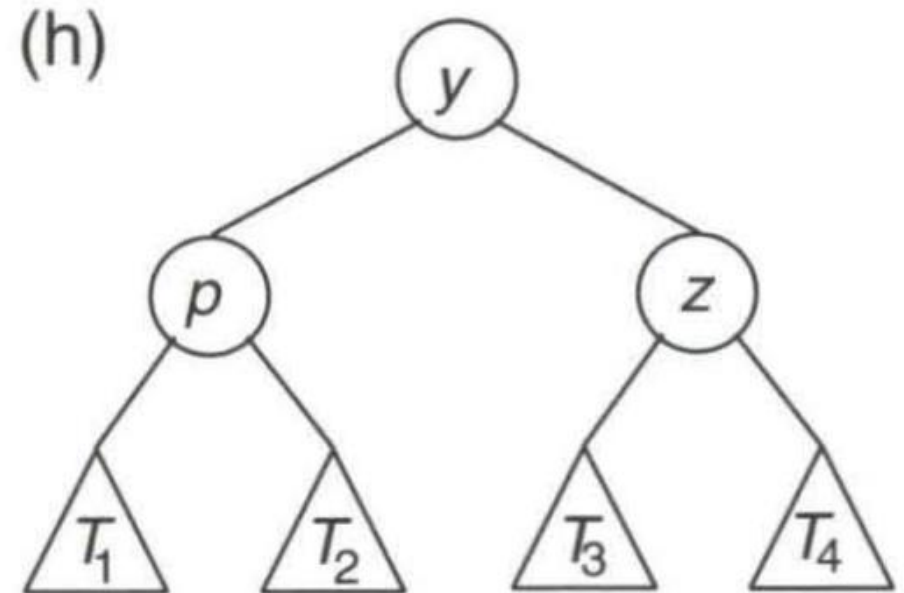
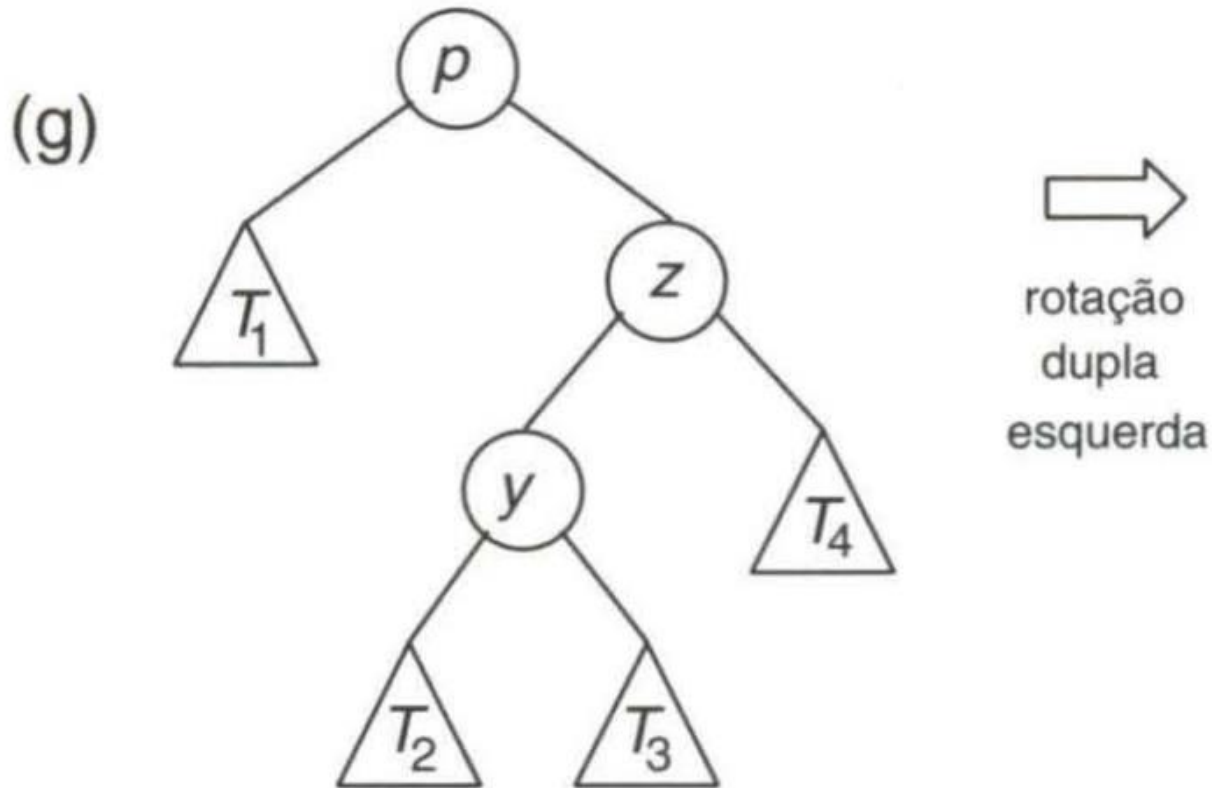


→
rotação
dupla
direita



Inserção em árvores A.V.L.

- Rotação Dupla Esquerda:



Inserção em árvores A.V.L.

- As subárvores **T1** , **T2** , **T3** e **T4** podem ser vazias ou não.



Continuação Percurso de Árvores Binárias e Introdução à Árvores A.V.L.

Até a próxima!