

# Trabalho 01

## Projeto de Filtros Analógicos

Welliton Jhonathan Leal Babinski

Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Pato Branco  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica  
Processamento de Sinais  
Prof. Rafael Cardoso

22 de Maio de 2020

### Resumo

Este trabalho é uma pesquisa sobre os filtros analógicos de tempo contínuo, abordando o tema com foco especial nos filtros ativos, suas classificações, principais tipos de aproximações, transformações de frequências, definições teóricas e implementações práticas.









| Frequency Response                | Low-Pass  | High-Pass   | Band-Pass   | Band-Reject   |
|-----------------------------------|---|---|---|---|
| Continuous-Time and Discrete-Time |  |  |  |  |
| Passive and Active                |  |  |  |  |

Figura 1: Classificação de Filtros  
Fonte: Adaptado de (RAZAVI, 2014)

## 1 Introdução

Os filtros elétricos analógicos estão em uso desde os primórdios da engenharia elétrica. Filtros ressonantes simples, embora talvez não tenham sido explicitamente chamados na época, foram usados nas comunicações por rádio antes da introdução dos primeiros dispositivos ativos. (PAARMANN, 2006)

Os filtros eletrônicos analógicos estão presentes em praticamente todos os equipamentos eletrônicos. Existem tipos óbvios de equipamentos, como rádios, televisões e sistemas estéreo. Equipamentos de teste, como analisadores de espectro e geradores de sinal, também precisam de filtros. Mesmo quando os sinais são convertidos em um formato digital usando conversores analógico-digitais, geralmente são necessários filtros analógicos para evitar *aliasing*. (WINDER, 2002)

Um filtro passa uma faixa de frequências enquanto rejeita outra. Um filtro pode ser passivo ou ativo. Os filtros passivos são construídos com resistores, capacitores e indutores. Os filtros ativos são construídos com resistores, capacitores e amplificadores operacionais. Os filtros podem separar os sinais desejados dos sinais indesejados, bloquear os sinais interferentes, aprimorar a fala e o vídeo e alterar os sinais de outras maneiras. (MALVINO; BATES, 2016) Os filtros podem ser classificados de várias formas de acordo com sua variedade de propriedades de como na Figura 1.

O desenvolvimento de filtros ativos tem sido bem diferente do de filtros passivos. Como os filtros passivos são limitados em termos dos tipos de componentes utilizados, os circuitos e configurações de circuitos disponíveis são bastante limitados. Por outro lado, como há um grande número de dispositivos e confi-

gurações ativos disponíveis, os tipos de circuitos adequados para uso como filtros ativos também são muito grandes. Desde a década de 1960 até agora, literalmente centenas de circuitos de filtros ativos foram propostos. Por várias razões, principalmente práticas, os filtros ativos comumente usados parecem estar limitados a algumas configurações mais populares. Isso não quer dizer que outros circuitos não possam executar as mesmas tarefas de filtragem. Em vez disso, esses circuitos populares são bastante adequados para quase todas as necessidades de engenharia. (SU, 2012)

## 2 Filtros Ativos

### 2.1 Tipos de Filtros

Existem quatro tipos de filtros principais comumente usados e eles são classificados como:

#### 2.1.1 Passa-Baixas

Com um filtro passa-baixas, as frequências entre zero e a frequência de corte são chamadas de banda passante. As frequências acima da frequência de corte são chamadas de banda de parada. A região de *roll-off* entre a banda passante e a parada é chamada de transição. Um filtro passa-baixas ideal tem atenuação zero (perda de sinal) na banda passante, atenuação infinita na faixa de parada e transição vertical. A Figura 2 mostra a resposta de frequência de um filtro passa-baixas. (MAL-

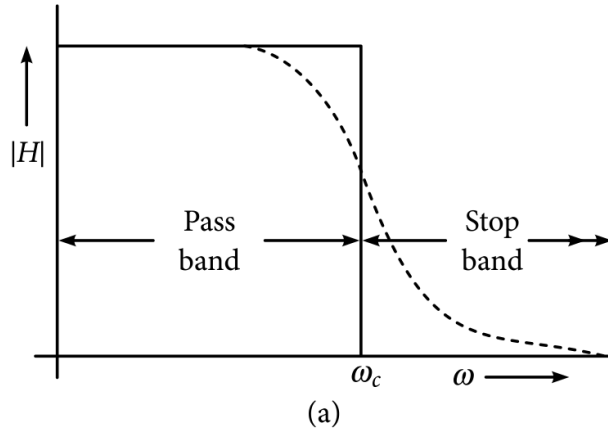


Figura 2: Resposta ideal e prática do tipo Passa-Baixas  
Fonte: Adaptado de (SIDDIQI, 2020)

### 2.1.2 Passa-Altas

Com um filtro passa-altas, as frequências entre zero e a frequência de corte são a banda de parada. As frequências acima da frequência de corte são a banda passante. Um filtro passa-altas ideal possui atenuação infinita na faixa de parada, atenuação zero na faixa de passagem e transição vertical. A Figura 3 mostra a resposta de frequência de um filtro passa-altas. (MALVINO; BATES, 2016)

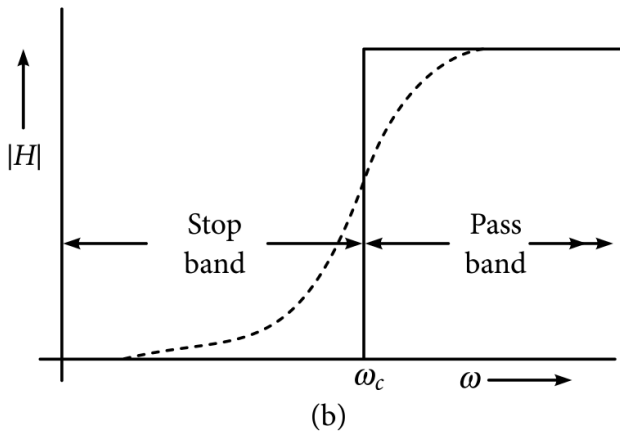


Figura 3: Resposta ideal e prática do tipo Passa-Altas  
Fonte: Adaptado de (SIDDIQI, 2020)

### 2.1.3 Passa-Banda

Com um filtro passa-banda, a banda passante são todas as frequências entre as frequências de corte inferior e superior. As frequências abaixo da frequência de corte inferior e acima da frequência de corte superior são a banda de parada. Um filtro passa-banda ideal tem atenuação zero na banda passante, atenuação infinita na banda parada e duas transições verticais. A Figura 4 mostra a resposta de frequência de um filtro passa-altas. (MALVINO; BATES, 2016)

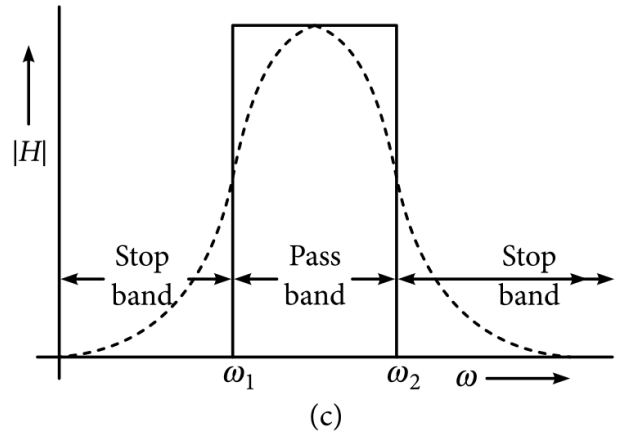


Figura 4: Resposta ideal e prática do tipo Passa-Banda  
Fonte: Adaptado de (SIDDIQI, 2020)

### 2.1.4 Rejeita-Banda

Com um filtro rejeita-banda, a banda de parada são todas as frequências entre as frequências de corte inferior e superior. As frequências abaixo da frequência de corte inferior e acima da frequência de corte superior são a banda passante. Um filtro de parada de banda ideal possui atenuação infinita na banda de parada, nenhuma atenuação na banda de passagem e duas transições verticais. A Figura 5 mostra a resposta de frequência de um filtro passa-altas. (MALVINO; BATES, 2016)

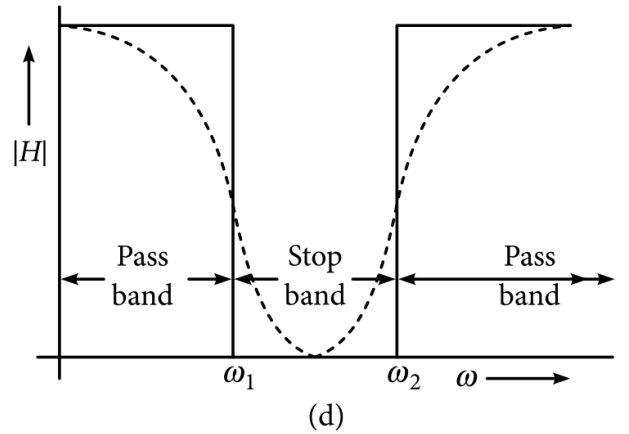


Figura 5: Resposta ideal e prática do tipo Rejeita-Banda  
Fonte: Adaptado de (SIDDIQI, 2020)

## 2.2 Filtros de Primeira Ordem

Um filtro de primeira ordem possui um único pólo com um valor real negativo porque sua equação diferencial de entrada e saída é da ordem um. A função de transferência é:

$$H(s) = \frac{B(s).a}{s+b}, \quad (1)$$

onde  $b$  é um número real não negativo.  $B(s)$  é um polinômio em  $s$  de uma ordem não superior a um e cuja raiz é o zero do filtro. Um zero possível e sua

localização em relação ao polo determinam o tipo de filtro: passa-baixas, passa-altas, passa tudo, avanço ou atraso. (NAHVI; EDMINISTER, 2018)

### 2.2.1 Implementação Passa-Baixas

A partir da relação de tensão do circuito da figura 6(a):

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{1/(R_1 C)}{s + 1/(R_2 C)}, \quad (2)$$

Comparando com a equação genérica 1, obtemos as igualdades,  $a = -\frac{1}{R_1 C}$ ,  $b = \frac{1}{R_2 C}$  e a relação  $\frac{a}{b} = -\frac{R_2}{R_1}$ . A função de transferência do filtro é

$$H(s) = -\frac{K/(R_1 C)}{s + 1/(R_2 C)}, \quad (3)$$

onde ganho  $K = \frac{a}{b}$ . Um circuito alternativo é mostrado na figura 6(b), o qual não introduz a inversão de fase como o da figura 6(a). (DELIYANNIS *et al.*, 2019)

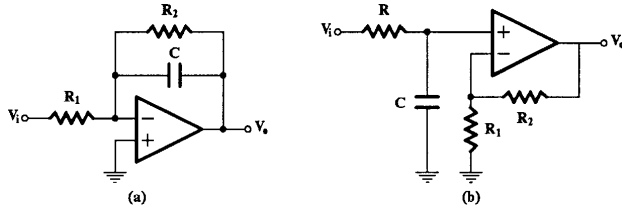


Figura 6: (a) Circuito Passa-Baixas de Primeira Ordem, (b) Circuito alternativo

Fonte: Adaptado de (DELIYANNIS *et al.*, 2019)

### 2.2.2 Implementação Passa-Altas

A partir da relação de tensão do circuito da figura 7(a):

$$H(s) = -\frac{R_2}{R_1} \frac{s}{s + 1/(R_1 C)} \quad (4)$$

Comparando com a equação  $H(s) = \frac{as}{s+b}$ , obtemos as igualdades,  $a = -\frac{R_2}{R_1}$ ,  $b = \frac{1}{R_1 C}$ . Claramente, o valor de um componente terá que ser selecionado arbitrariamente. A função de transferência do filtro será

$$H(s) = -\frac{Ks}{s + 1/(RC)}, \quad (5)$$

onde o ganho  $K = a$ . (DELIYANNIS *et al.*, 2019)

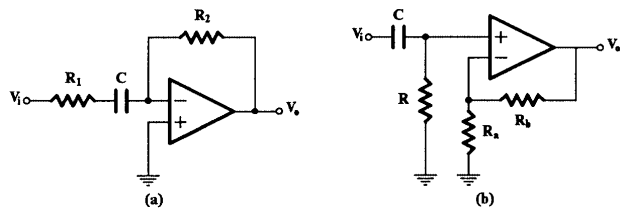


Figura 7: (a) Circuito Passa-Altas de Primeira Ordem, (b) Circuito alternativo

Fonte: Adaptado de (DELIYANNIS *et al.*, 2019)

## 2.3 Filtros de Segunda Ordem

Os filtros de segunda ordem têm um par de pólos no plano da metade esquerda. Os zeros possíveis determinam o tipo de filtro: passa-baixas, passa-altas, passa tudo, passa banda, *notch*, etc. A função de transferência é:

$$H(s) = \frac{B(s).a}{s^2 + b_1.s + b_2}, \quad (6)$$

onde a e b são números reais positivos. B(s) é um polinômio em s de uma ordem não superior a 2 e cujas raízes são os zeros do filtro. (NAHVI; EDMINISTER, 2018) Há várias topologias de filtro ativas (configurações de circuito) que podem ser usadas para implementar um filtro. Vamos nos limitar ao popular filtro Sallen-Key. Essa forma é muito conveniente, pois implementa naturalmente o fator quadrático que estamos usando para a descrição da função de aproximação. (THEDE, 2004)

### 2.3.1 Implementação Passa-Baixas

A partir da relação de tensão do circuito da figura 8:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\frac{\mu}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{s^2 + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1-\mu}{R_2 C_2}\right)s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (7)$$

onde  $\mu = 1 + R_b/R_a$ , Utilizando a expressão padrão

$$H_{PB}(s) = \frac{G\omega^2}{s^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)s + \omega_0^2}, \quad (8)$$

onde  $G = \mu$ , temos

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (9)$$

$$Q = \frac{\frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}}{\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1-\mu}{R_2 C_2}} \quad (10)$$

Se nenhuma restrição for imposta ao ganho G, temos cinco valores de elementos para satisfazer 9 e 10. Portanto, somos livres para fazer algumas escolhas arbitrárias. Essas escolhas arbitrárias também nos oferecem oportunidades de levar em consideração aspectos práticos do circuito. (SU, 2012)

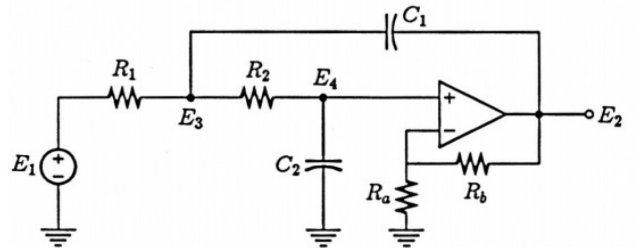


Figura 8: (a) Circuito Passa-Baixas de Segunda Ordem  
Fonte: Adaptado de (SU, 2012)

### 2.3.2 Implementação Passa-Altas

A partir da relação de tensão do circuito da figura 9:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\mu s^2}{s^2 + \left(\frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1-\mu}{R_1 C_1}\right)s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (11)$$

onde  $\mu = 1 + R_b/R_a$ , Utilizando a expressão padrão para uma função de passa-altas

$$H_{PA}(s) = \frac{G s^2}{s^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)s + \omega_0^2}, \quad (12)$$

podemos identificar os seguintes relacionamentos:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (13)$$

$$Q = \frac{1}{\frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1-\mu}{R_1 C_1}} \quad (14)$$

Semelhante ao passa-baixas, se não colocarmos nenhuma restrição em G existem cinco elementos de circuito cujos valores podem ser escolhidos em uma ampla variedade de maneiras de satisfazer as equações 13 e 14. Nós também temos muita flexibilidade na escolha desses valores de elementos.(SU, 2012)

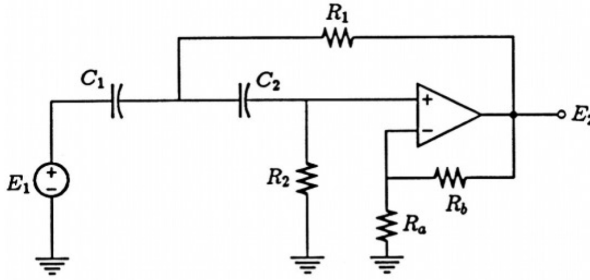


Figura 9: (a) Circuito Passa-Altas de Segunda Ordem  
Fonte: Adaptado de (SU, 2012)

### 2.3.3 Implementação Passa-Banda

Para implementar um passa-banda Sallen-Key, é necessário mais um elemento, como mostrado no circuito da figura 10. A análise da relação de tensão do circuito nos resulta em:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\frac{\mu}{R_1 C_1} s}{s^2 + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_3 C_2} + \frac{1}{R_3 C_1} + \frac{1-\mu}{R_2 C_1}\right)s + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (15)$$

Usando a expressão padrão para uma função de transferência de passa-banda

$$H_{PF}(s) = \frac{G \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)s}{s^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)s + \omega_0^2} \quad (16)$$

identificamos as seguintes expressões para os três parâmetros:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}} \quad (17)$$

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}}}{\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_3 C_2} + \frac{1}{R_3 C_1} + \frac{1-\mu}{R_2 C_1}} \quad (18)$$

$$G = \frac{\frac{\mu}{R_1 C_1}}{\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_3 C_2} + \frac{1}{R_3 C_1} + \frac{1-\mu}{R_2 C_1}} \quad (19)$$

Se não houver restrição no valor de G, existem seis valores de elementos para satisfazer duas equações. Novamente, há muita flexibilidade na escolha dos valores dos elementos.(SU, 2012)

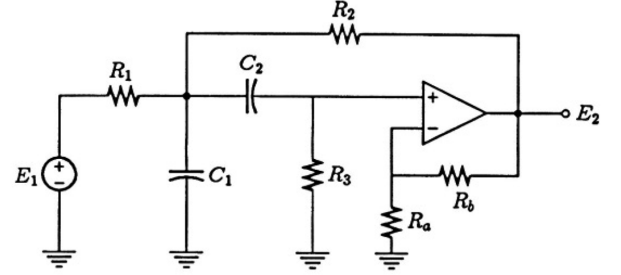


Figura 10: (a) Circuito Passa-Banda de Segunda Ordem  
Fonte: Adaptado de (SU, 2012)

## 2.4 Filtros de Alta Ordem

Na maioria dos casos, a seletividade fornecida por um filtro de segunda ordem não é adequada. É necessário realizar funções de filtro de ordem superior para satisfazer os rigorosos requisitos de seletividade em sistemas de telecomunicações, instrumentação especial e muitas outras aplicações. Para realizar essas funções de filtro de alta ordem, duas abordagens principais foram consideradas mais úteis na prática.

- A primeira é cascatear estágios de segunda ordem sem feedback (filtro em cascata) ou através da aplicação de feedback negativo (filtros de feedback de múltiplos circuitos, MLFs).
- A segunda é usar combinações de componentes ativos (por exemplo, amp ops) e passivos (resistores e capacitores), a fim de simular as indutâncias ou a operação de uma escada LC de alta ordem.
- Ainda há outra abordagem, o uso de apenas um amp-op incorporado em uma rede RC, a fim de realizar a função de alta ordem, embora possível, foi descartado por razões de alta sensibilidade.(DELIYANNIS *et al.*, 2019)

## 3 Aproximações de Filtros

As respostas ideais são impossíveis de serem obtidas com circuitos práticos, então são utilizadas aproximações como meios para as mesmas ficarem próximas das ideais. Cada aproximações oferece suas vantagens e desvantagens, a escolha dela depende do que é aceitável e cumpra os requisitos de projeto.

Todas as aproximações e procedimentos de projeto de filtro referem-se exclusivamente a filtros passa-baixas normalizados. O problema de projetar um filtro

de um tipo diferente passa-baixas (por exemplo, passa-altas ou passa-banda) é transformado inicialmente em um problema de projeto de filtro passa-baixas normalizado que, no final, é transformado no tipo desejado usando a transformação de frequência correspondente. (DIMOPOULOS, 2012)

A solução do problema de aproximação é uma etapa importante no procedimento de projeto de um filtro e é igualmente importante no projeto de filtros analógicos e digitais. É através da solução desse problema que o projetista do filtro determina a função do filtro, a resposta que satisfaz as especificações. Obviamente, a função obtida dessa maneira satisfará as especificações apenas aproximadamente e não exatamente. (DELIYANNIS *et al.*, 2019) Os principais critérios levados em conta nas decisões do projetista no momento da escolha do tipo de aproximação como representado na Figura 11 são:

- *Ripple* de Banda Passante
- Banda de Transição
- Atenuação da Banda de rejeição
- *Ripple* na Banda de Rejeição

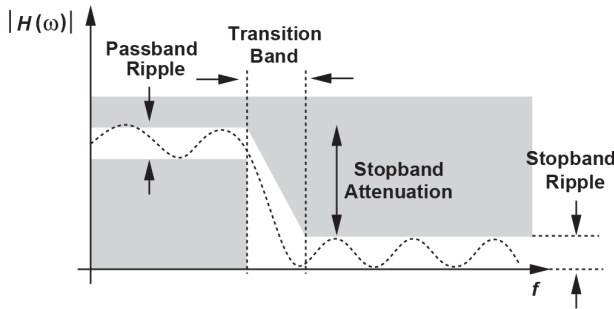


Figura 11: Modelo para resposta em Frequência.  
Fonte: Adaptado de (RAZAVI, 2014)

### 3.1 Butterworth (Maximally Flat Approximation)

A principal vantagem de um filtro Butterworth é a uniformidade da resposta da banda passante. A principal desvantagem é a taxa de *roll-off* relativamente lenta em comparação com as outras aproximações. (MALVINO; BATES, 2016)

A equação 20 fornece a resposta de magnitude da aproximação Butterworth, onde  $\omega_0$  é a frequência da borda da banda passante para o filtro,  $n$  é a ordem da aproximação e  $\epsilon$  é o fator de ajuste de ganho da banda passante. Se definirmos  $\epsilon = 1$  e  $\omega_0 = 1$ , o filtro terá um ganho de  $1/2$  ou  $-3,01$  dB na frequência da borda da banda passante normalizada de  $1$  rad/s.

$$|H_B(j(\omega/\omega_0))| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}}}, n = 1, 2, 3... \quad (20)$$

onde  $\epsilon = \sqrt{10^{-0,1 \cdot a_{pass}} - 1}$

A ordem do filtro Butterworth depende das especificações fornecidas pelo usuário. Essas especificações incluem as frequências e os ganhos da borda. (THEDE, 2004) A equação padrão para o cálculo da ordem Butterworth é dada em 21.

$$n_B = \frac{\log [(10^{-0,1 \cdot a_{stop}} - 1)/(10^{-0,1 \cdot a_{pass}} - 1)]}{2 \cdot \log \left( \frac{\omega_{stop}}{\omega_{pass}} \right)} \quad (21)$$

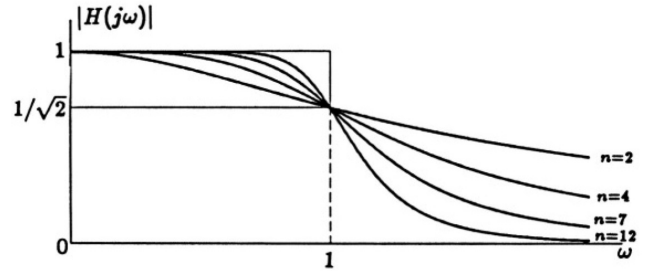


Figura 12: Resposta Butterworth Passa-Baixas  
Fonte: Adaptado de (SU, 2012)

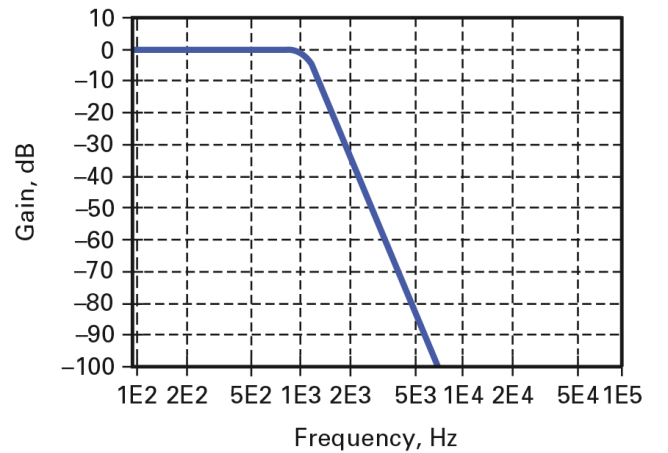


Figura 13: Exemplo de Resposta Butterworth Passa-Baixas  
Fonte: Adaptado de (MALVINO; BATES, 2016)

### 3.2 Chebyshev

Em algumas aplicações, uma resposta plana de banda passante não é importante. Nesse caso, uma aproximação de Chebyshev pode ser preferida, porque é mais rápida na região de transição do que um filtro Butterworth. O preço pago por esse lançamento mais rápido é que ondulações aparecem na banda passante da resposta de frequência. (MALVINO; BATES, 2016) A magnitude da função de transferência é definida na equação 22:

$$|H_B(j(\omega/\omega_0))| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \cdot C_n^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)}}, n = 1, 2, 3... \quad (22)$$

onde  $\epsilon = \sqrt{10^{-0,1 \cdot a_{pass}} - 1}$  e  $C_n(\omega)$  é o polinômio de Chebyshev do primeiro tipo de grau  $n$ .



A ordem do filtro Chebyshev dependerá das especificações fornecidas pelo usuário. Como no caso Butterworth, o valor de  $n$  realmente calculado deve ser arredondado para o próximo número inteiro mais alto para garantir que as especificações sejam atendidas. (THEDE, 2004) A equação padrão para o cálculo da ordem Chebyshev é dada em 23.

$$n_C = \frac{\cosh^{-1} \left[ \sqrt{(10^{-0,1.a_{stop}} - 1) / (10^{-0,1.a_{pass}} - 1)} \right]}{\cosh^{-1} \left( \frac{\omega_{stop}}{\omega_{pass}} \right)} \quad (23)$$

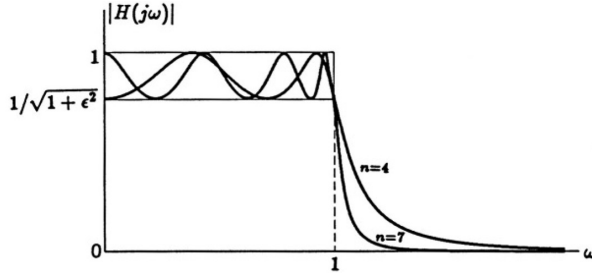


Figura 14: Resposta Chebyshev Passa-Baixas  
Fonte: Adaptado de (SU, 2012)

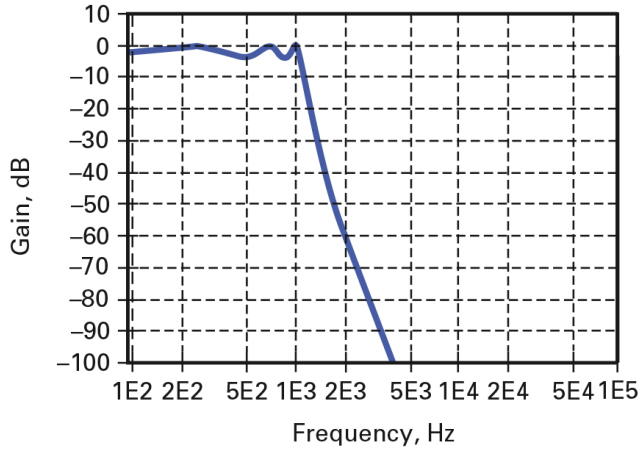


Figura 15: Exemplo de Resposta Chebyshev Passa-Baixas  
Fonte: Adaptado de (MALVINO; BATES, 2016)

### 3.3 Elíptica (Cauer Approximation)

Algumas aplicações precisam da implementação mais rápida possível na região de transição. Se uma banda passante ondulada e uma banda de parada ondulada forem aceitáveis, um projetista poderá escolher a aproximação elíptica. Também conhecido como filtro Cauer, esse filtro otimiza a região de transição às custas da banda passante e da banda parada. (MALVINO; BATES, 2016) A magnitude da função de transferência é definida na equação 24:

$$|H_E(j(\omega/\omega_0))| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 R_n^2 \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)}}, n = 1, 2, 3... \quad (24)$$

onde  $\epsilon = \sqrt{10^{-0,1.a_{pass}} - 1}$  e a integral elíptica completa do primeiro tipo a qual será usada com mais frequência do que a integral incompleta e é definida como  $CEI(k) = u(\pi/2, k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 x)^{-1/2} dx$ . A ordem da função de aproximação elíptica necessária para atender às especificações de um filtro é dada em 25.

$$n_E = \frac{CEI(rt) \cdot CEI(\sqrt{1 - kn^2})}{CEI(\sqrt{1 - kn^2}) \cdot CEI(kn)}, \quad (25)$$

em que CEI se refere à integral elíptica completa e a razão  $rt$  e o kernel  $kn$  são definidos como:  $rt = \frac{\omega_{pass}}{\omega_{stop}}$  e  $kn = \sqrt{(10^{-0,1.a_{pass}} - 1) / ((10^{-0,1.a_{stop}} - 1))}$

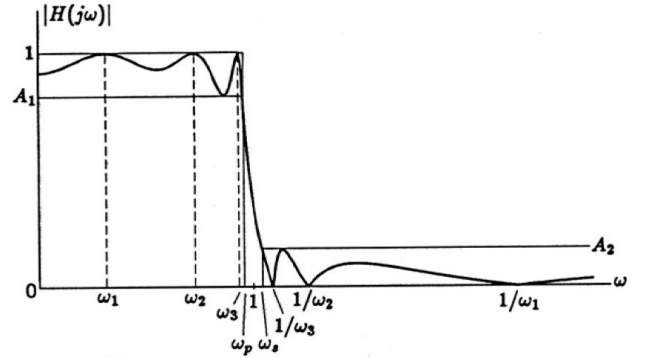


Figura 16: Resposta Elíptica Passa-Baixas  
Fonte: Adaptado de (SU, 2012)

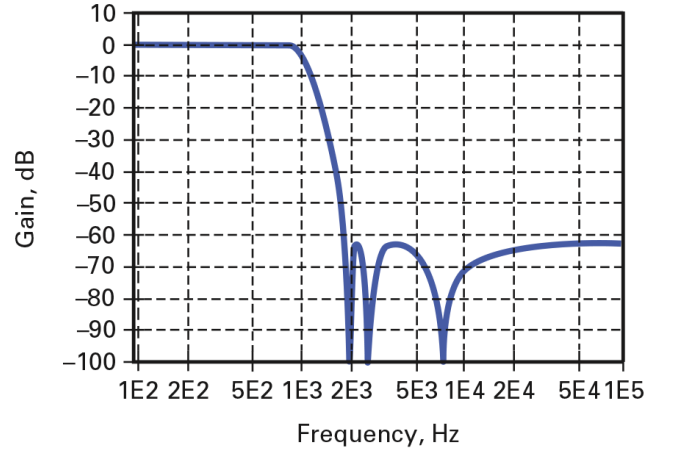


Figura 17: Exemplo de Resposta Elíptica Passa-Baixas  
Fonte: Adaptado de (MALVINO; BATES, 2016)

## 4 Transformações de Frequência

Todas as aproximações apresentadas são usadas para aproximar o ganho ideal do passa-baixas dentro de certas tolerâncias determinadas com as especificações do filtro passa-baixas. Para projetar outros tipos de filtros, as aproximações correspondentes devem ser apresentadas. Em vez de repetir todas as aproximações para os filtros passa-altas, passa-banda e rejeita-banda, são usadas transformações de frequência que transformam um filtro passa-baixas normalizado em qualquer

outro tipo de filtro. Em outras palavras, para projetar um filtro passa-altas, passa-banda ou rejeita-banda, primeiro projetamos um filtro passa-baixas normalizado auxiliar que pode ser transformado em qualquer outro tipo de filtro. (DIMOPOULOS, 2012)

#### 4.1 Transformação Passa-Baixas para Passa-Altas

- Inicialmente considerando um filtro passa-baixas normalizado onde a banda de passagem é  $0 < \omega < \omega_p$  e  $\omega_p = 1$  tal que a função de transferência respectiva do filtro é denominada  $H_{PB}(s)$ .
- Utilizando a transformação  $s = \frac{\Omega_0}{S}$ , onde  $\Omega_0$  é a frequência de corte, no eixo imaginário tem-se que  $\omega = -\frac{\Omega_0}{\Omega}$ .
- Aplicando  $s = \frac{\Omega_0}{S}$  na função de transferência do filtro passa-baixas, obtém-se a função de transferência de um filtro passa-altas  $H_{PA}(S)$ , como podemos ver na equação 26. (SU, 2012)

$$H_{PA}(S) = H_{PB}\left(\frac{\Omega_0}{S}\right) \quad (26)$$

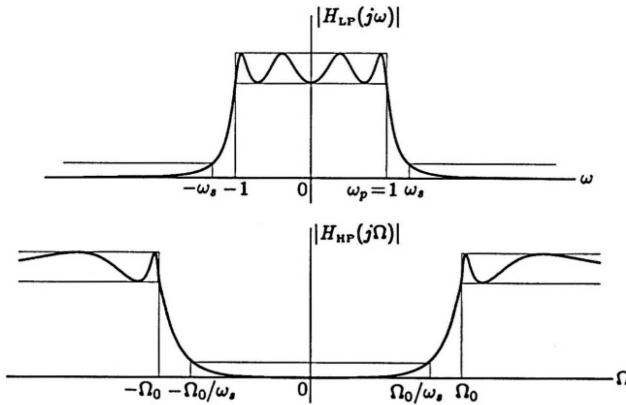


Figura 18: Transformação Passa-Baixas para Passa-Altas  
Fonte: Adaptado de (SU, 2012)

#### 4.2 Transformação Passa-Baixas para Passa-Banda

- Novamente, como realizado na subseção 4.1, considerando um filtro passa-baixas normalizado onde a banda de passagem é  $\omega_p = 1$  de função de transferência  $H_{PB}(s)$ .
- Utilizando a transformação  $s = \frac{S^2 + \Omega_0^2}{BS}$
- Aplicando  $s = \frac{\Omega_0}{S}$  na função de transferência do filtro passa-baixas, obtém-se a função de transferência de um filtro passa-banda  $H_{PB}(S)$ , como podemos ver na equação 27. (SU, 2012)

$$H_{PF}(S) = H_{PB}\left(\frac{S^2 + \Omega_0^2}{BS}\right) \quad (27)$$

- No eixo imaginário tem-se que  $j\omega = \frac{-\Omega^2 + \Omega_0^2}{Bj\Omega}$ , ou  $\Omega^2 - B\omega\Omega - \Omega_0^2 = 0$ , onde para  $\omega = 0$  tem-se  $\Omega = \pm\Omega_0$ . Se  $\omega = \pm\infty$ , tem-se  $\Omega = 0$  e  $\Omega = \pm\infty$ .
- Para  $\omega = \omega_p = 1$ , resolvendo a equação quadrática  $\Omega^2 - B\Omega - \Omega_0^2 = 0$ , temos:  $\Omega = \frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4} + \Omega_0^2}$ , onde obtemos dois valores para  $\Omega$ , um  $\Omega_2$  positivo e um  $\Omega_1$  negativo.
- Para  $\omega = -1$ , na mesma equação, obtemos duas raízes iguais a  $-\Omega_2$  e  $\Omega$ . Portanto, uma banda passa-baixas é mapeada em duas regiões de passagem, uma no eixo positivo e outra no eixo negativo. Também vemos que  $B = \Omega_2 - \Omega_1$ , expressão a qual é a largura de banda do filtro passa-banda.
- Multiplicando  $\Omega_1$  com  $\Omega_2$  e simplificando, é obtida a relação 28:

$$\frac{\Omega_0}{\Omega_1} = \frac{\Omega_2}{\Omega_0} \quad (28)$$

Portanto, a borda superior da banda,  $\Omega_2$ , e a borda inferior da banda,  $\Omega_1$ , são geometricamente simétricas em relação à frequência central. A frequência  $\Omega_0$  é conhecida como centro da banda ou frequência central da característica do passa-banda.

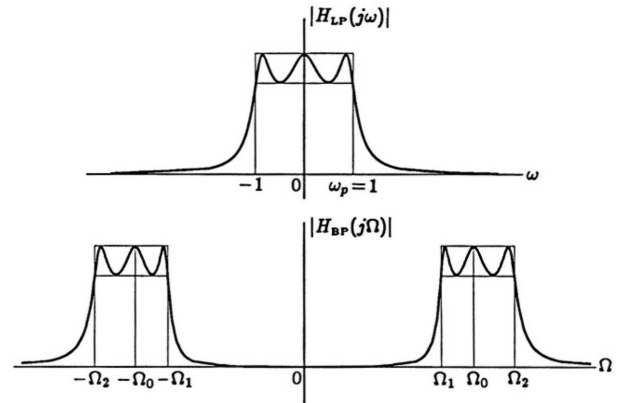


Figura 19: Transformação Passa-Baixas para Passa-Banda  
Fonte: Adaptado de (SU, 2012)

#### 4.3 Transformação Passa-Baixas para Rejeita-Banda

- Inicialmente considerando um filtro passa-baixas normalizado onde  $\omega > \omega_s = 1$
- Utilizando a transformação  $s = \frac{BS}{S^2 + \Omega_0^2}$ , ou  $\Omega^2 + \frac{B}{\omega}\Omega - \Omega_0^2 = 0$
- Os pontos são mapeados para o eixo, resolvendo as equações quadráticas em 29:

$$\Omega^2 \pm B\Omega - \Omega_0^2 = 0 \quad (29)$$

A solução dessas duas equações renderizará quatro valores de  $\Omega$  dos quais, se considerados em grupo, são idênticos aos encontrados na subseção 4.2 e seus negativos. (SU, 2012)

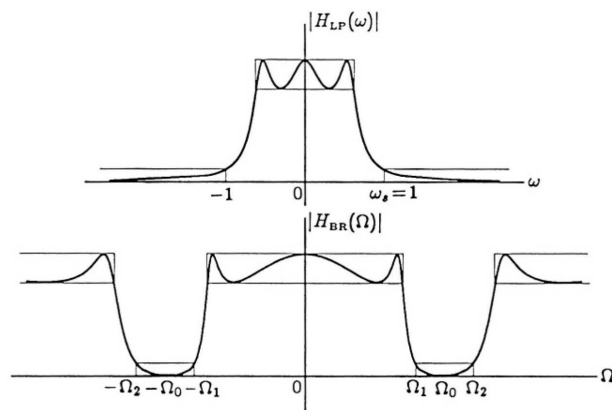


Figura 20: Transformação Passa-Baixas para Rejeita-Banda

Fonte: Adaptado de (SU, 2012)

## Referências

- DELIYANNIS, T.; SUN, Y.; FIDLER, J. K. **Continuous-time active filter design**. [S.l.]: Crc Press, 2019.
- DIMOPOULOS, H. G. **Analog electronic filters: Theory, design and synthesis**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- MALVINO, A. P.; BATES, D. J. **Electronic principles**. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 2016.
- NAHVI, M.; EDMINISTER, J. **Schaum's outline of theory and problems of electric circuits**. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 2018.
- PAARMANN, L. D. **Design and analysis of analog filters: A signal processing perspective**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. v. 617.
- RAZAVI, B. **Fundamentals of microelectronics**. [S.l.]: Wiley, 2014.
- SIDDIQI, M. A. **Continuous Time Active Analog Filters**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2020.
- SU, K. L. **Analog filters**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- THEDE, L. **Practical analog and digital filter design**. [S.l.]: Artech House, 2004.
- WINDER, S. **Analog and digital filter design**. [S.l.]: Elsevier, 2002.