Trabalho 03
Análise de Fourier

Welliton Jhonathan Leal Babinski

Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Pato Branco
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Processamento de Sinais
Prof. Dr. Rafael Cardoso

25 de Agosto de 2020

Resumo

Este trabalho trata da análise e síntese de uma Série de Fourier de Tempo Discreto também conhecida por sua abreviação como DTFS, série a qual é obtida na primeira etapa do trabalho a partir de uma composição de sinais senoidais amostrados primeiramente desconhecidos contidos em um sinal de tempo discreto periódico, na segunda etapa o mesmo processo é realizado, porém com a ajuda da Transformada Rápida de Fourier conhecida como FFT, Na última etapa a função que rege o comportamento dos sinal é conhecida e para isso a mesma é utilizada para fazer as verificações desejadas sobre os resultados já desenvolvidos anteriormente.

1 Introdução

O desenvolvimento da análise de Fourier tem uma longa história envolvendo muitos grandes indivíduos e a investigação de muitos fenômenos físicos diferentes. O conceito de usar "somas trigonométricas"que são somas harmonicamente relacionadas a senos e cossenos ou exponencionais complexos periódicos, para descrever fenômenos periódicos, volta pelo menos até os Babilônios, que usavam ideias desse tipo para prever eventos astronômicos. (OPPENHEIM *et al.*, 1997)

A análise de Fourier é uma família de técnicas matemáticas, todas baseadas na decomposição de sinais em sinusóides. A transformada discreta de Fourier (DFT) é o membro da família usado com sinais digitalizados. O único tipo de transformada de Fourier que pode ser usado em DSP é a DFT. Em outras palavras, os computadores digitais só podem trabalhar com informações discretas e de comprimento definido. Quando você luta com questões teóricas, enfrenta problemas como dever de casa e pondera sobre mistérios matemáticos, pode acabar usando os três primeiros membros da família transformada de Fourier. Quando você se senta diante do computador, usará apenas o DFT.(SMITH, 2013)

Para realizar a análise de frequência em um sinal de tempo discreto x (n), convertemos a sequência no domínio do tempo em uma representação equivalente no domínio da frequência. (PROAKIS, 2006)

Considerando uma sequência $\tilde{x}(n)$ que é periódica com período N de modo que $\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + kN)$ para qualquer valor inteiro de k, É possível, representar $\tilde{x}(n)$ em termos de uma série de Fourier, isto é, por uma soma de sequências de seno e cosseno ou sequências exponenciais equivalentemente complexas com frequências que são múltiplos inteiros da frequência fundamental $\frac{2\pi}{N}$ associada a a sequência periódica. A representação da série de Fourier de uma sequência periódica, 1, precisa conter apenas N dessas exponenciais complexas e, portanto, tem a forma (OPPENHEIM; SCHAFER, 1975)

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j(2\pi/N)nk} \tag{1}$$

Para obter os coeficientes $\tilde{X}(k)$ da seqüência periódica $\tilde{x}(n)$, usamos o fato de que

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j(2\pi/N)nk} = \begin{cases}0, caso contrário\\1, parar = mN, m inteiro\end{cases} \tag{2}$$

Multiplicando ambos os lados por $e^{-j(2\pi/N)nr}$ e somando de $n = 0$ até $N - 1$, nós obtemos

$$\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j(2\pi/N)nr} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{X}e^{j(2\pi/N)(k-r)n} \tag{3}$$

Ou, trocando a ordem da soma no lado direito da equação

$$\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j(2\pi/N)nr} = \sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)\Big[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{j(2\pi/N)(k-r)n}\Big] \tag{4}$$

Então, utilizando a equação 2

$$\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j(2\pi/N)nr} = \tilde{X}(k) \tag{5}$$

Assim, os coeficientes $\tilde{X}(k)$ na equação 1 são obtidos pela relação

$$\tilde{x}(n) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j(2\pi/N)nk} \tag{6}$$

Os coeficientes da série de Fourier podem ser interpretados como uma sequência de comprimento finito, dada pela Eq. 6 para k = 0,. . . , N - 1 e zero caso contrário, ou como uma sequência periódica definida para todo k pela 6. Claramente, ambas as interpretações são equivalentes. Geralmente é mais conveniente interpretar os coeficientes da série de Fourier X (k) como uma sequência periódica. Desta forma, existe uma dualidade entre os domínios do tempo e da frequência para a representação da série de Fourier de sequências periódicas. As equações 1 e 6 juntas podem ser vistas como um par de transformação e serão referidas como a representação discreta da série de Fourier (DFS) de uma sequência periódica. (OPPENHEIM; SCHAFER, 1975)

2 Análise, Coeficientes e Síntese do Sinal Amostrado

Importando os dados do sinal periódico de função desconhecida fornecido a partir do arquivo "dados.mat" foi possível plota-lo como se segue na figura 1.

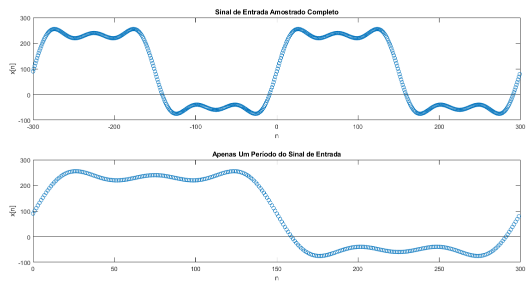

Figura 1: Sinal de Entrada Amostrado Completo e Um Período do Sinal

Fonte: *Software* Matlab

A partir do sinal de entra da é possível descobrir o seu número de amostras que é igual a $N = 300$, a frequência de amostragem já é conhecida, $FS = 18000Hz$, é possível determinarmos o período T, e mais alguns parâmetros foram definidos para otimizar o nosso código.

2.1 Pela Série de Fourier no Tempo Discreto (DTFS)

Como primeiro etapa, é implementada em código a equação de análise 6 da DTFS sobre o sinal e a partir dos dos coeficientes Ck da série discreta de fourier se torna possível realizar o cálculo do módulo e a fase de cada um deles, os quais como pedido são apresentados nas imagens abaixo, tanto em função de k na figura 2 como em função das frequências ena figura 3.

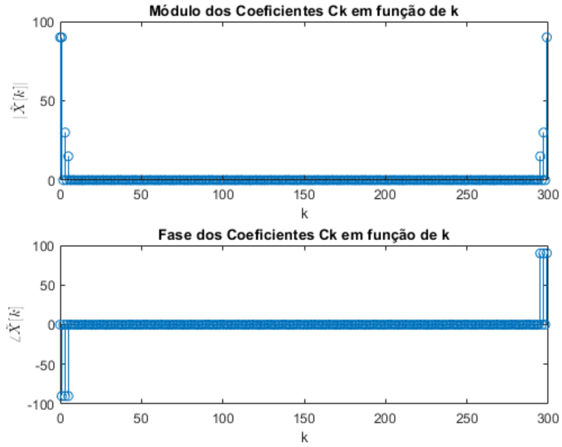

Figura 2: Módulo e Fase dos Coeficientes Ck em Função de k

Fonte: *Software* Matlab

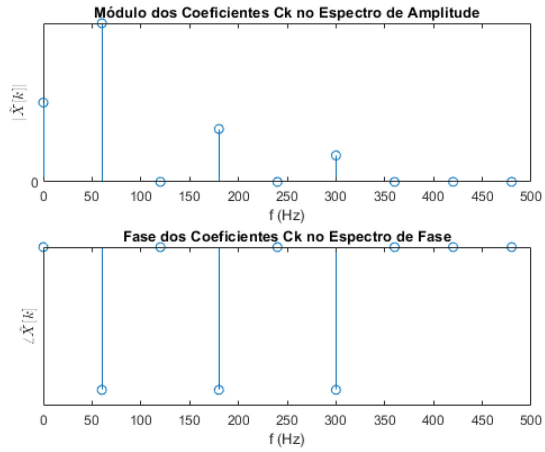

Figura 3: Módulo e Fase dos Coeficientes Ck no Espectro de Frequências

Fonte: *Software* Matlab

Por fim, é realizado então o processo contrário, por meio da equação 1 de síntese da DTFS é possível reconstruir o sinal original utilizando e conhecendo apenas os coeficientes Ck já encontrados, o sínal sintetizado se segue na figura 4.

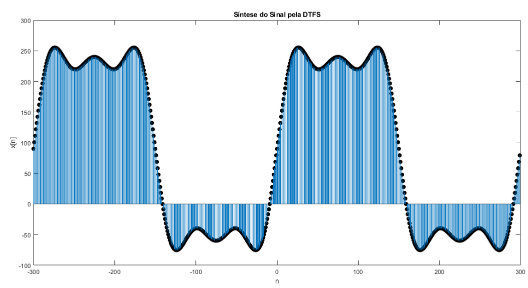

Figura 4: Síntese do Sinal pela DTFS

Fonte: *Software* Matlab

2.2 Pela Transformada Rápida de Fourier (FFT)

Na segunda etapa, foi utilizado a Transformada Rápida de Fourier conhecida como FFT para realizar o mesmo processo de extração dos coeficientes, a mesma serve como subtituta da DTFS, desta vez porém não é necessáio implementar uma equação sobre o sinal, o comando *fft* do *Software* Matlab utiliza de um algoritmo que nos retorna como saída os valores dos coeficientes Ck, nomeados como XK no código. Partindo desta facilidade já foi possível calcular os Módulos e Fases dos respectivos coeficientes, suas respostas se mostraram exatamente iguais aos calculados na primeira etapa, os mesmos seguem abaixo em função de k na figura 5 como em função das frequências ena figura 6.

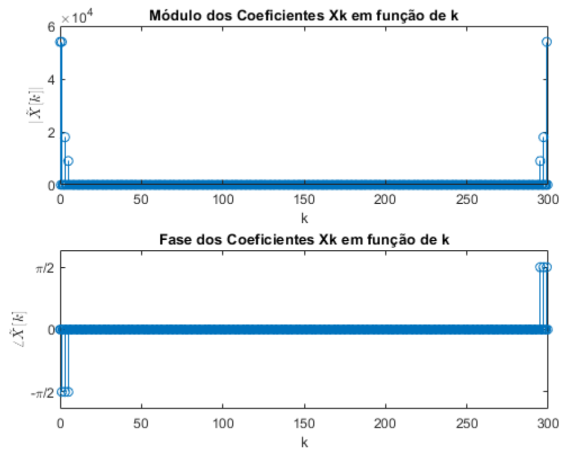

Figura 5: Módulo e Fase dos Coeficientes Xk em função de k

Fonte: *Software* Matlab

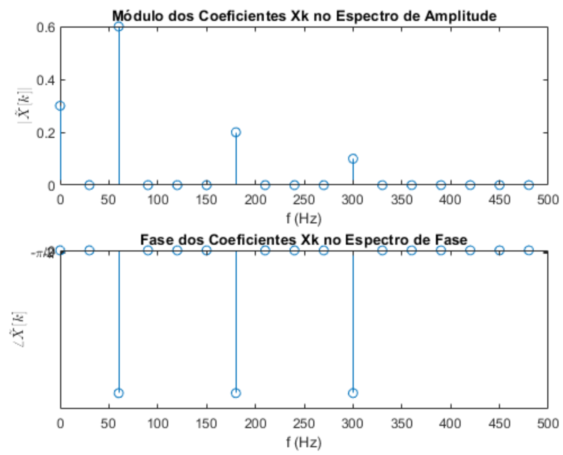

Figura 6: Módulo e Fase dos Coeficientes Xk no Espectro de Frequências

Fonte: *Software* Matlab

Por fim de mais esta etapa, a partir dos coeficientes Xk encontrados, podemos realizar o processo de síntese do sinal novamente utilizando a equação 1 e verificar se obtemos novamente um sinal equivalente ao original, o que se sucedeu na Figura 7.

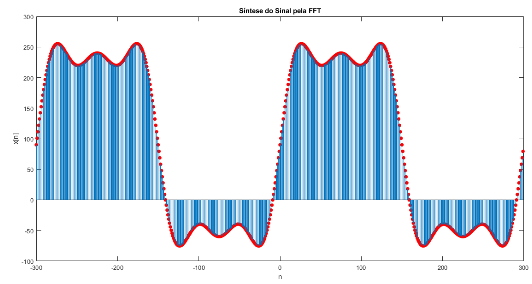

Figura 7: Módulo e Fase dos Coeficientes Xk no Espectro de Frequências

Fonte: *Software* Matlab

3 Sinais e Seus Componentes Harmonicos

Após realizarmos todos os procedimentos necessários para as análises, extração dos coeficientes e síntese nas duas etapas principais, para verificarmos se existe a igualdade entre os dois sinais sintetizados a partir dos coeficientes encontrados e o sinal original amostrado do arquivo, a equivalência além de em valores foi confirmada também visualmente na sobreposição dos três sinais como visto na figura 8.

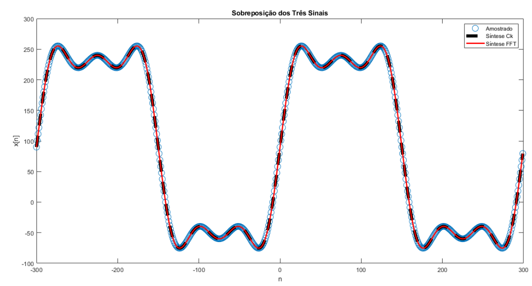

Figura 8: Sobreposição dos Três Sinais, Original Amostrado e as duas Sínteses

Fonte: *Software* Matlab

Se fazendo posse da função que descreve o comportamento do sinal antes desconhecido, agora podemos realizar algumas verificações sobre os resultados, a função segue abaixo

$$x[n] = 90 + 180sen\Big(\frac{2\pi 60}{18000}n\Big) + 60sen\Big(\frac{2\pi 180}{18000}n\Big) + 30sen\Big(\frac{2\pi 300}{18000}\Big) \tag{7}$$

Pela equação 7 podemos observar que o que compõe o sinal são

- Sinal Constante em 0hz de Amplitude 90
- Sinal Senoidal de Frequência natural em 60Hz com Amplitude de 180
- Sinal Senoidal de Frequência harmônica em 180Hz com Amplitude de 60
- Sinal Senoidal de Frequência harmônica em 300Hz com Amplitude de 30

Implicações acima que vão de encontro com todos os valores de módulo e fase já encontrados nas tabelas e análises gráficas dos coeficientes das 2 etapas do trabalho, portanto, o sinal amostrado desconhecido e o sinal conhecido são equivalentes. Para uma melhor visualização, o sinal 7 foi decomposto e suas componentes e plotadas em mesma escala na imagem 9 abaixo.

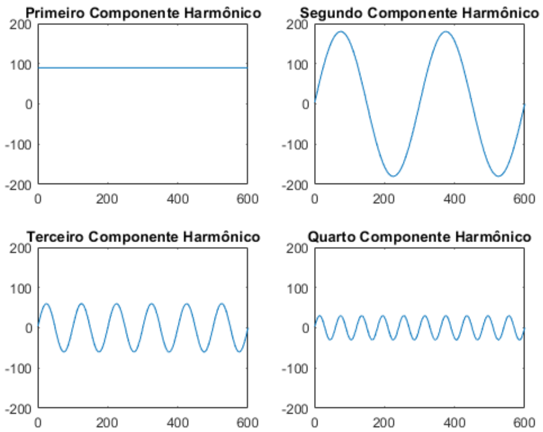

Figura 9: Os 4 sinais que compõe o sinal amostrado
Fonte: *Software* Matlab

4 Conclusão

Este trabalho possibilitou realizarmos de forma analítica uma confirmação prática via software Matlab, partindo da equivalencia teórica da DTFS e da FFT como ferramentas para análise e síntese de sinais de de tempo discreto amostrados no mundo digital, ambas proporcionaram respostas iguais comprovando o fato, também foi comprovado que a partir da análise e coeficientes de Fourier é possível sintetizarmos qualquer sinal desconhecido com exatidão sem precisarmos conhecer a função que define seu comportamento.

Em última análise enfatiza-se tal importância das Séries de Fourier em si tanto no mundo contínuo quanto no digital onde com o poder computacional necessário, se pode compor ou decompor sinais de qualquer espécie, tipo, curvatura e formato, quanto maior a sua ordem e maior a complexidade da série, mais refinada, aproximada e definida se torna o sinal de resposta, em outras palavras, quanto maior o caos e desordem no domínio da frequência, maior ordem e beleza é gerada no domínio do tempo, praticamente quase todo tipo de sinal imáginavel pode ser modelado por uma aproximação extremamente fiel a partir da somatória de simples ondas senoidais e cosenoidais.

Referências

OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W. **Digital Signal Processing:(by) Alan V. Oppenheim (and) Ronald W. Schafer**. [S.l.]: Prentice-Hall, 1975.

OPPENHEIM, A. V.; WILLSKY, A. S.; HAMID, S. **Signals and systems, Processing series**. [S.l.]: Prentice Hall Upper Saddle River, 1997.

PROAKIS, J. G. **Dimitris. G, Manolakis**. [S.l.: s.n.], 2006.

SMITH, S. **Digital signal processing: a practical guide for engineers and scientists**. [S.l.]: Elsevier, 2013.