Alunos:	**Nota:**
1 -	
2 -	
3 -	
4 -	**Data:**

Encontro 1 – Parte B

Sistemas não lineares e linearizados utilizando Simulink.

1. Objetivo.

Através de simulações no SIMULINK avaliar e comparar os efeitos das não linearidades para um caso de estudo referente a um sistema não linear.

Os modelos matemáticos serão representados no *domínio da frequência* e *domínio do tempo*.

2. Introdução.

Sistemas dinâmicos lineares são aqueles representados por equações diferenciais (ou a diferenças) lineares. O termo linear refere-se à aplicabilidade do *Princípio da Superposição* e *Homogeneidade*. O principio de superposição refere-se se o sinal de entrada $u_1(t)$ produz como solução $y_1(t)$ e se o sinal de entrada $u_2(t)$ produz como solução $y_2(t)$, então o sinal de entrada $u_1(t) + u_2(t)$ produzirá a solução $y_1(t) + y_2(t)$. O termo "homogeneidade" refere-se se o sinal de entrada $u_1(t)$ produz como solução $y_1(t)$, então o sinal de entrada $Au_1(t)$ produzirá a solução $Ay_1(t)$.

A análise e o projeto de sistemas lineares são extremamente facilitados devido à existência de soluções analíticas para equações diferenciais (ou a diferenças) lineares. Entretanto, sistemas reais são em geral não lineares, com comportamento dinâmico complexo se comparado com os sistemas lineares. Sistemas não lineares são descritos por equações diferenciais (ou a diferenças) não lineares e não satisfazem o Princípio da Superposição nem homogeneidade. Quase sempre estas equações não possuem soluções analíticas e frequentemente é possível obter apenas estimativas ou soluções aproximadas das verdadeiras soluções.

Os procedimentos para determinar as soluções de problemas que possuam sistemas não lineares, em geral, são complexos. Devido a esta dificuldade matemática inerente a sistemas não lineares, normalmente é necessário introduzir sistemas lineares equivalentes no lugar dos não lineares. Estes sistemas lineares equivalentes somente são válidos dentro de uma faixa limitada de operação. Uma vez que um sistema não linear é aproximado por um modelo matemático linear, várias ferramentas lineares podem ser aplicadas para fins de análise e projeto.

Na prática, muitos sistemas eletromecânicos, hidráulicos, pneumáticos e outros envolvem relações não lineares entre as variáveis. Por exemplo, a saída de um componente pode saturar para sinais de entrada de grande amplitude ou a presença de uma zona morta que afeta em relação a pequenos sinais.

Nesta experiência será utilizado um circuito não linear.

3. Caso de estudo.

Na **Fig. 1**. Apresenta-se o circuito não linear para análise.

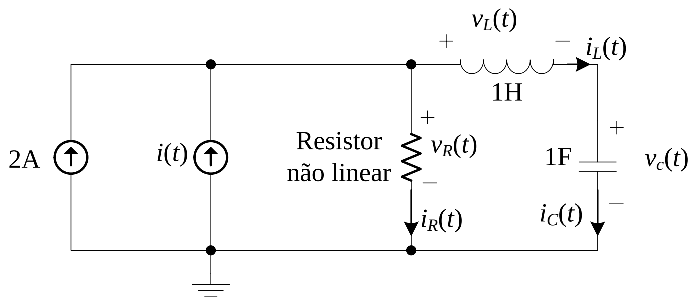

Fig 1. Sistema para análise

Considerar como entrada do sistema a fonte de pequenos sinais $i(t)$, e como saída a tensão encima do capacitor $v_c(t)$. O circuito contém um resistor não linear cuja relação tensão-corrente é definida por $i_R(t) = e^{v_R(t)}$.

Sabendo que:

$$
\begin{aligned}
i_c(t) &= C\frac{dv_c(t)}{dt} \\
v_L(t) &= L\frac{di_L(t)}{dt}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Escolhe-se como variáveis de estado $v_c(t)$ e $i_L(t)$, o sistema não linear representado no espaço de estados será:

$$
\begin{cases}
\dot{v}_c(t) = i_L(t) \\
\dot{i}_L(t) = -v_c(t) + \ln\left(2 + i(t) - i_L(t)\right)
\end{cases}
\qquad
\left\{ v_c(t) = v_c(t) \right.
\tag{2}
$$

O diagrama de blocos será conforme apresentado na **Fig. 2**.

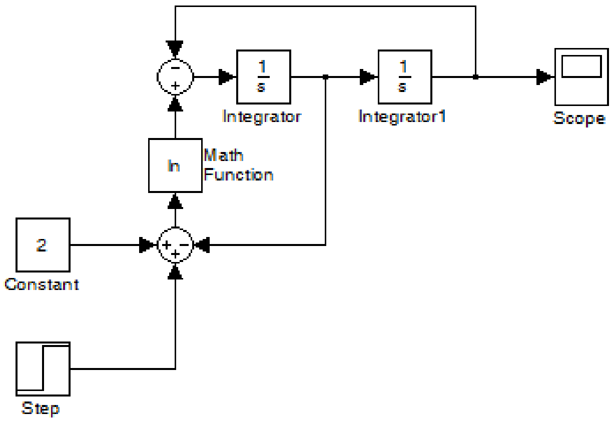

Fig 2. Diagrama de blocos do sistema não linear.

Para efeitos de simulação considerar como corrente de entrada um degrau de valor 0,1 a ser aplicado em t=40s.

Na continuação será linearizado o sistema anterior.

O ponto de operação para as variáveis de estado são: v_{co}=ln(2); i_{Lo}=0A. O ponto de operação para o resistor não linear é: i_{Ro}=2; v_{Ro}=ln(2). A parte não linear do sistema está dada pela equação a seguir, o qual será linearizado.

$$v_R(t) = \ln\left(i_R(t)\right) \tag{3}$$

A equação linearizada resulta em:

$$v_R(t) = \ln(2) + \frac{1}{2}\left(i_R(t) - 2\right) \tag{4}$$

Na eq (2), sabe-se que $\ln\left(2 + i(t) - i_L(t)\right) = v_R(t)$, então substituindo a eq (4) na eq (2)

$$\begin{cases} \dot{v}_c(t) = i_L(t) \\ \dot{i}_L(t) = -v_c(t) + \ln(2) + \frac{1}{2} i_R(t) - 1 \end{cases} \tag{5}$$

Substituindo $i_R(t)$ em função das variáveis de estado obtém-se:

$$\begin{cases} \dot{v}_c(t) = i_L(t) \\ \dot{i}_L(t) = -v_c(t) + \ln(2) - \frac{1}{2} i_L(t) + \frac{1}{2} i(t) \end{cases} \tag{6}$$

Sabendo que: $i_L(t)=\delta i_L(t)+i_{Lo}$; $v_c(t)=\delta v_c(t)+v_{co}$ .A representação no espaço de estados ao redor do ponto de operação do sistema linearizado será:

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{v}_c(t) \\ \delta\dot{i}_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_c(t) \\ \delta i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} i(t)$$
$$\delta v_c(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_c(t) \\ \delta i_L(t) \end{bmatrix} \tag{7}$$

Aplicando a Transformada de Laplace na primeira equação da eq (7), obtém-se a função de transferência do sistema linearizado conforme segue:

$$\frac{\delta V_c(s)}{I(s)} = \frac{1}{2s^2 + s + 2} \tag{8}$$

Para efeitos de comparação finalmente monta-se o sistema não linear e os dois sistemas linearizados em um único diagrama conforme ilustrado na **Fig. 3**.

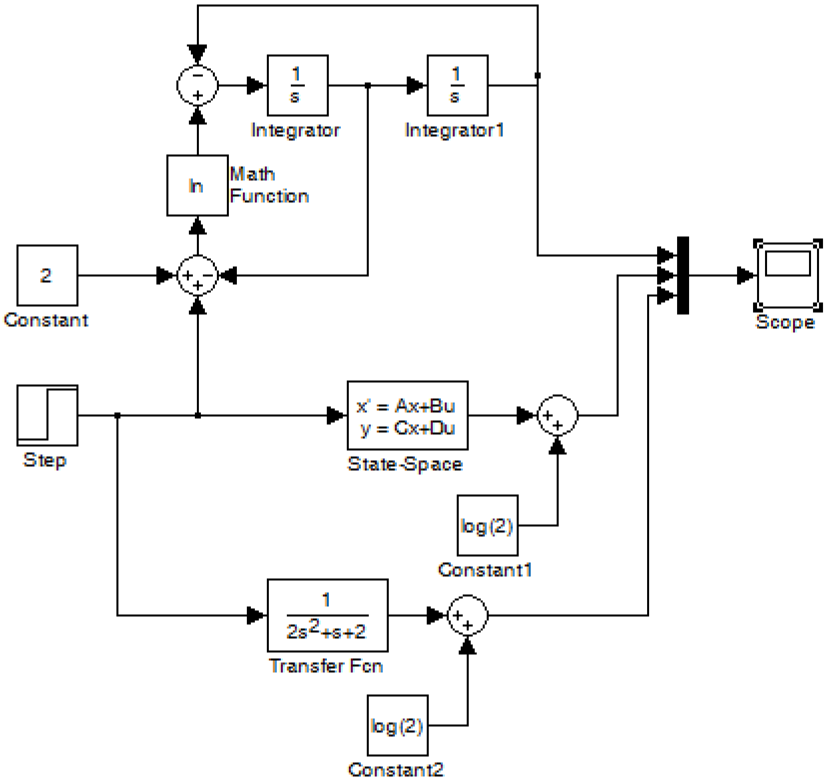

Fig 3. Diagrama contendo todos os casos de representação.

Na figura anterior, observa-se que na saída dos sistemas linearizados é necessário somar o ponto de operação para poder comparar com o sistema não linear.

O resultado da comparação apresenta-se na **Fig 4**.

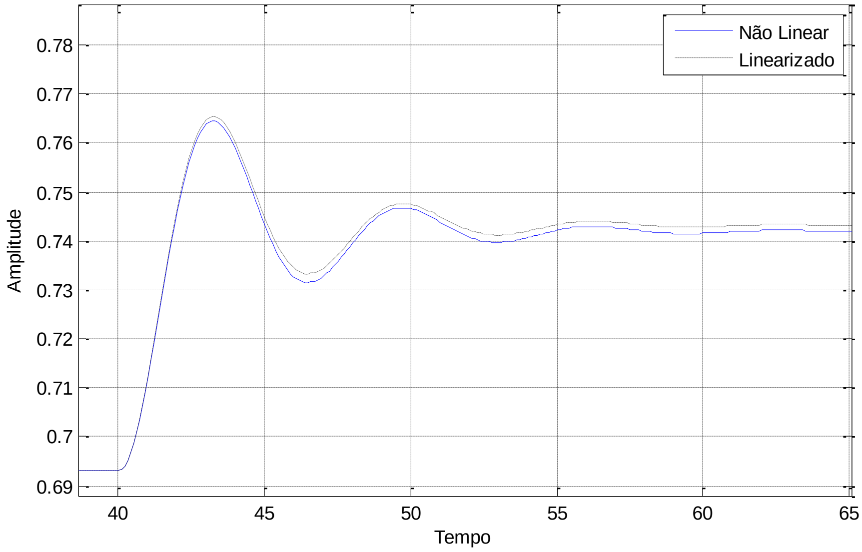

Fig 4. Comparação do sistema não linear com o linearizado.

4. Exercícios.

Seja o sistema apresentado na **Fig. 5**, com entrada $f(t)$ e saída $x_2(t)$.

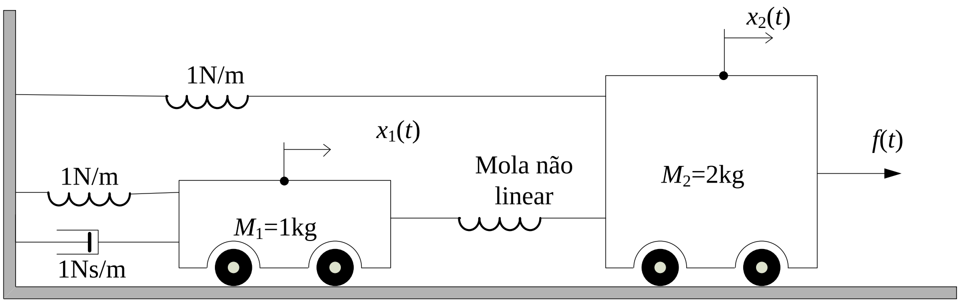

Fig 5. Sistema para análise do exercício.

O sistema possui uma mola não linear cuja função está dada por $f_m(t) = 2\sqrt{x_m(t)}$, em que $x_m(t)$ é a deformação da mola quando nela é aplicada uma força $f_m(t)$.

A força aplicada no sistema é $f(t)=2+\delta f(t)$, em que $\delta f(t)$ é uma pequena força em torno do valor constante de 2N.

a) Determinar o modelo não linear no espaço de estados (do mesmo modo ao da eq. 2).
b) Determinar o modelo linearizado no espaço de estados ao redor do ponto de operação.
c) Determinar a função de transferência ao redor do ponto de operação.
d) Representar e graficar os modelos obtidos no Simulink (Modelo não linear e linearizado). Comparar a resposta do sistema não linear com o linearizado em duas situações: i) quando $\delta f(t)$=0,1N e; ii) quando $\delta f(t)$=0,8N. O que pode ser

concluído da aproximação do sistema linearizado com o sistema não linear para cada uma das situações anteriores?