Winger-Eckart 定理

首先给出这个定理的内容，然后介绍一些前置知识，最后给出证明。

这个定理实际上就是把 k 阶不可约（球谐）张量算符的矩阵元用角动量基表示出来，即

$$\langle \tau j'm'|T_q^{(k)}|\tau jm\rangle = S_{mqj'm'}^{jk}\frac{1}{\sqrt{2j'+1}}\langle \tau' j'||T^{(k)}||\tau j\rangle = (-1)^{j'-m'}\begin{pmatrix} j' & k & j \\ -m' & q & m \end{pmatrix}\langle \tau' j'||T^{(k)}||\tau j\rangle \tag{1}$$

这个定理将只与对称性有关的部分分离出来体现在 Clebsch-Gorden 系数中，与相互作用有关的部分体现在约化矩阵元中。

Clebsch-Gordan 系数

CG 系数实际上就是一个酉矩阵，将两个子空间直积的基矢 $|j_1m_1\rangle \otimes |j_2m_2\rangle$ 变换为一个大空间的基矢 $|j_1j_2jm\rangle$。因为这两个子空间的直积就是大空间所以这两个基矢实际上是同一个空间中的基矢，只是他们之间差一个酉变换，而 CG 系数就是这个酉变换的矩阵形式。

在给定 j_1 和 j_2 的前提下，即 j_1 和 j_2 是固定的，并且可以取任意轨道角动量 L 或者 S。由于 $|j_1m_1j_2m_2\rangle = |j_1m_1\rangle \otimes |j_2m_2\rangle$ 是基矢，则必然有完备关系

$$\sum_{m_1}\sum_{m_2}|j_1m_1j_2m_2\rangle\langle j_1m_1j_2m_2| = 1 \tag{2}$$

上式没有对 j_1 和 j_2 求和是因为这两个量是给定的，根据完备关系可以得到

$$\begin{aligned}|j_1j_2jm\rangle &= |j_1j_2jm\rangle \\ &= \sum_{m_1m_2}|j_1m_1j_2m_2\rangle\langle j_1m_1j_2m_2|j_1j_2jm\rangle \\ &= \sum_{m_1m_2}|j_1m_1j_2m_2\rangle S_{m_1m_2jm}^{j_1j_2}\end{aligned} \tag{3}$$

其中 $S_{m_1m_2jm}^{jm} = \langle j_1m_1j_2m_2|j_1j_1jm\rangle$ 就是 Clebsch-Gorden 系数，接下来给出具体形式

3j 符号