

Winger-Eckart 定理

首先给出这个定理的内容，然后介绍一些前置知识，最后给出证明。

这个定理实际上就是把 k 阶不可约（球谐）张量算符的矩阵元用角动量基表示出来，即

$$\langle \tau j' m' | T_q^{(k)} | \tau j m \rangle = S_{mqj' m'}^{jk} \frac{1}{\sqrt{2j'+1}} \langle \tau j' || T^{(k)} || \tau j \rangle = (-1)^{j'-m'} \begin{pmatrix} j' & k & j \\ -m' & q & m \end{pmatrix} \langle \tau j' || T^{(k)} || \tau j \rangle \quad (1)$$

这个定理将只与对称性有关的部分分离出来体现在 Clebsch-Gordan 系数中，与相互作用有关的部分体现在约化矩阵元中。

Clebsch-Gordan 系数

CG 系数实际上就是一个酉矩阵，将两个子空间直积的基矢 $|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$ 变换为一个空间的基矢 $|j_1 j_2 j m\rangle$ 。因为这两个子空间的直积就是大空间所以这两个基矢实际上是同一个空间中的基矢，只是他们之间差一个酉变换，而 CG 系数就是这个酉变换的矩阵形式。其中 j, j_1, j_2 都是总角动量的本征值， m, m_1, m_2 都是角动量 z 方向投影算符的本征值。

在给定 j_1 和 j_2 的前提下，即 j_1 和 j_2 是固定的，并且可以取任意轨道角动量 L, S 或者 $L+S$ 。由于 $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$ 是基矢，则必然有完备关系

$$\sum_{m_1} \sum_{m_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2| = 1 \quad (2)$$

上式没有对 j_1 和 j_2 求和是因为这两个量是给定的，根据完备关系可以得到

$$\begin{aligned} |j_1 j_2 j m\rangle &= |j_1 j_2 j m\rangle \\ &= \sum_{m_1 m_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle \\ &= \sum_{m_1 m_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle S_{m_1 m_2 j m}^{j_1 j_2} \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $S_{m_1 m_2 j m}^{j_1 j_2} = \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle$ 就是 Clebsch-Gordan 系数，接下来通过推导给出具体形式。

首先考虑 $m = j$ 的特殊情况，用总自旋角动量 z 方向投影的升算符作用在 $|j_1 j_2 j m\rangle$ ，即

$$J_+ |j_1 j_2 j m\rangle \quad (4)$$

由于 $m = j$ ，所以有

$$J_+ |j_1 j_2 j m\rangle = J_+ |j_1 j_2 j j\rangle = 0 \quad (5)$$

因为 m 最大取值就为 j ，最小为 $-j$ ，所以使用升算符作用得到 0，从子空间的角度看，可以得到

$$J_+ |j_1 j_2 j j\rangle = (J_{1+} + J_{2+}) \sum_{m_1 m_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle S_{m_1 m_2 j j}^{j_1 j_2} \delta(m_1 + m_2, j) \quad (6)$$

其中 δ 函数是因为子空间的自旋角动量 z 方向投影算符的本征值的和应该等于大空间自旋角动量 z 方向投影算符的

本征值。由上面的说明可以得到

$$\begin{aligned}
0 &= J_+ |j_1 j_2 j j\rangle = (J_{1+} + J_{2+}) \sum_{m_1 m_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle S_{m_1 m_2 j j}^{j_1 j_2} \delta(m_1 + m_2, j) \\
&= \sum_{m_1 m_2} |j_1 m_1 + 1 j_2 m_2\rangle \sqrt{(j_1 - m_1)(j_1 + m_1 + 1)} S_{m_1 m_2 j j}^{j_1 j_2} \delta(m_1 + m_2, j) \\
&+ \sum_{m_1 m_2} |j_1 m_1 j_2 m_2 + 1\rangle \sqrt{(j_2 - m_2)(j_2 + m_2 + 1)} S_{m_1 m_2 j j}^{j_1 j_2} \delta(m_1 + m_2, j) \\
&= \sum_{m_1 m'_2} |j_1 m_1 + 1 j_2 m'_2 + 1\rangle \sqrt{(j_1 - m_1)(j_1 + m_1 + 1)} S_{m_1 m'_2 + 1 j j}^{j_1 j_2} \delta(m_1 + m'_2 + 1, j) \\
&+ \sum_{m'_1 m_2} |j_1 m'_1 + 1 j_2 m_2 + 1\rangle \sqrt{(j_2 - m_2)(j_2 + m_2 + 1)} S_{m'_1 + 1 m_2 j j}^{j_1 j_2} \delta(m'_1 + 1 + m_2, j) \\
&= \sum_{m_1 m_2} |j_1 m_1 + 1 j_2 m_2 + 1\rangle \\
&\quad \left(\sqrt{(j_1 - m_1)(j_1 + m_1 + 1)} S_{m_1 m_2 + 1 j j}^{j_1 j_2} + \sqrt{(j_2 - m_2)(j_2 + m_2 + 1)} S_{m_1 + 1 m_2 j j}^{j_1 j_2} \right) \delta(m_1 + m_2 + 1, j)
\end{aligned} \tag{7}$$

其中最后一步将两项合并是因为狄拉克符号中只是换了一个符号表示，基矢没有变，即使考虑表象，基矢也不会变。由上面推导，可以得到一个递推关系，即

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(j_1 - m_1)(j_1 + m_1 + 1)} S_{m_1 m_2 + 1 j j}^{j_1 j_2} = -\sqrt{(j_2 - m_2)(j_2 + m_2 + 1)} S_{m_1 + 1 m_2 j j}^{j_1 j_2} \delta(m_1 + m_2 + 1, j) \\
&\rightarrow S_{m_1 m_2 + 1 j j}^{j_1 j_2} = -\frac{\sqrt{(j_2 - m_2)(j_2 + m_2 + 1)}}{\sqrt{(j_1 - m_1)(j_1 + m_1 + 1)}} S_{m_1 + 1 m_2 j j}^{j_1 j_2} \delta(m_1 + m_2 + 1, j) \\
&\rightarrow S_{m_1 m_2 j j}^{j_1 j_2} = -\sqrt{\frac{(j_2 - m_2 + 1)(j_2 + m_2)}{(j_1 - m_1)(j_1 + m_1 + 1)}} S_{m_1 + 1 m_2 - 1 j j}^{j_1 j_2} \delta(m_1 + m_2, j)
\end{aligned} \tag{8}$$

通过递推公式，将上式右边的 m_1 递推至最大值 j_1 ，由于 $m_1 + m_2 = m = j$ 所以将 m_1 递推至最大值时， $m_2 = 0$ ，不会小于最小值 $-j$ 。所以可以得到

$$\begin{aligned}
S_{m_1 m_2 j j}^{j_1 j_2} &= (-1)^{j_1 - m_1} \sqrt{\frac{(j_2 - m_2 + 1)(j_2 + m_2)}{(j_1 - m_1)(j_1 + m_1 + 1)}} \cdots \sqrt{\frac{(j_2 - m_2 + j_1 - m_1)(j_2 + m_2 - j_1 + m_1 + 1)}{(j_1 - m_1 - j_1 + m_1 + 1)(j_1 + m_1 + j_1 - m_1)}} \\
&\quad S_{j m_2 - j_1 + m_1 j j}^{j_1 j_2} \delta(m_1 + m_2, j) \\
&= (-1)^{j_1 - m_1} \sqrt{\frac{(j_2 + j_1 - j)!}{(j_2 - m_2)!} \frac{(j_2 + m_2)!}{(j_2 - j_1 + j)!} \frac{(j_1 - m_1)!}{1!} \frac{(2j_1)!}{(j_1 + m_1)!}} S_{j j - j_1 j j}^{j_1 j_2} \delta(m_1 + m_2, j) \\
&= (-1)^{j_1 - m_1} \sqrt{\frac{(j_1 + m_1)!(j_2 + m_2)!}{(j_1 - m_1)!(j_2 - m_2)!}} \sqrt{\frac{(j_1 + j_2 - j)!}{(j_2 - j_1 + j)!(2j_1)!}} S_{j j - j_1 j j}^{j_1 j_2} \\
&= (-1)^{j_1 - m_1} \sqrt{\frac{(j_1 + m_1)!(j_2 + m_2)!}{(j_1 - m_1)!(j_2 - m_2)!}} S
\end{aligned} \tag{9}$$

其中反复用到了 $m_1 + m_2 = j$ ， S 为

$$S = \sqrt{\frac{(j_1 + j_2 - j)!}{(j_2 - j_1 + j)!(2j_1)!}} S_{j j - j_1 j j}^{j_1 j_2} \tag{10}$$

S 是一个与 m_1 和 m_2 无关的常数，可以利用 $\langle j_1 j_2 j j | j_1 j_2 j j \rangle = 1$ 来确定，即

$$\begin{aligned}
\langle j_1 j_2 j j | j_1 j_2 j j \rangle &= \sum_{m'_1 m'_2} \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle [S_{m'_1 m'_2 j m}^{j_1 j_2}]^\dagger S_{m_1 m_2 j m}^{j_1 j_2} \delta(m'_1 + m'_2, j) \delta(m_1 + m_2, j) \\
&= \sum_{m'_1 m'_2} \sum_{m_1 m_2} \delta_{m'_1 m_1} \delta_{m'_2 m_2} [S_{m'_1 m'_2 j m}^{j_1 j_2}]^\dagger S_{m_1 m_2 j m}^{j_1 j_2} \delta(m'_1 + m'_2, j) \delta(m_1 + m_2, j) \\
&= \sum_{m_1 m_2} |S_{m_1 m_2 j m}^{j_1 j_2}|^2 \delta(m_1 + m_2, j) \\
&= 1
\end{aligned} \tag{11}$$

将??式代入上式得到

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{m_1 m_2} \frac{(j_1 + m_1)!(j_2 + m_2)!}{(j_1 - m_1)!(j_2 - m_2)!} S^2 \\
&= \sum_{m_1 j - m_1} \frac{(j_1 + m_1)!(j_2 + j - m_1)!}{(j_1 - m_1)!(j_2 - j + m_1)!} S^2 \\
&= \sum_{m_1} \frac{(j_1 + m_1)!(j_2 + j - m_1)!}{(j_1 - m_1)!(j_2 - j + m_1)!} S^2
\end{aligned} \tag{12}$$

根据下式（书上的一个等式关系）可以将??化简

$$\frac{(a + b + 1)!(b - d)!}{(c + d)!(a + b - c - d + 1)!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a + s)!(b - s)!}{(c + s)!(d - s)!} \tag{13}$$

将??代入??可以得到

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{(j_1 + j_2 + j + 1)!(j_1 - j_2 + j)!(j_2 - j_1 + j)!}{(j_1 + j_2 + j)!(j_1 + j_2 + j - j_2 + j - j_1 + 1)!} S^2 \\
&= \frac{(j + j_1 + j_2 + 1)!(j + j_1 - j_2)!(j - j_1 + j_2)!}{(j + j_1 + j_2)!(2j + 1)!} S^2 \\
S^2 &= \frac{(j + j_1 + j_2)!(2j + 1)!}{(j + j_1 + j_2 + 1)!(j + j_1 - j_2)!(j - j_1 + j_2)!} \\
S &= \sqrt{\frac{(j + j_1 + j_2)!(2j + 1)!}{(j + j_1 + j_2 + 1)!(j + j_1 - j_2)!(j - j_1 + j_2)!}}
\end{aligned} \tag{14}$$

将上式代入??可以得到

$$S_{m_1 m_2 j j}^{j_1 j_2} = (-1)^{j_1 - m_1} \sqrt{\frac{(j_1 + m_1)!(j_2 + m_2)!}{(j_1 - m_1)!(j_2 - m_2)!}} \sqrt{\frac{(j + j_1 + j_2)!(2j + 1)!}{(j + j_1 + j_2 + 1)!(j + j_1 - j_2)!(j - j_1 + j_2)!}} \delta(m_1 + m_2, j) \tag{15}$$

3j 符号