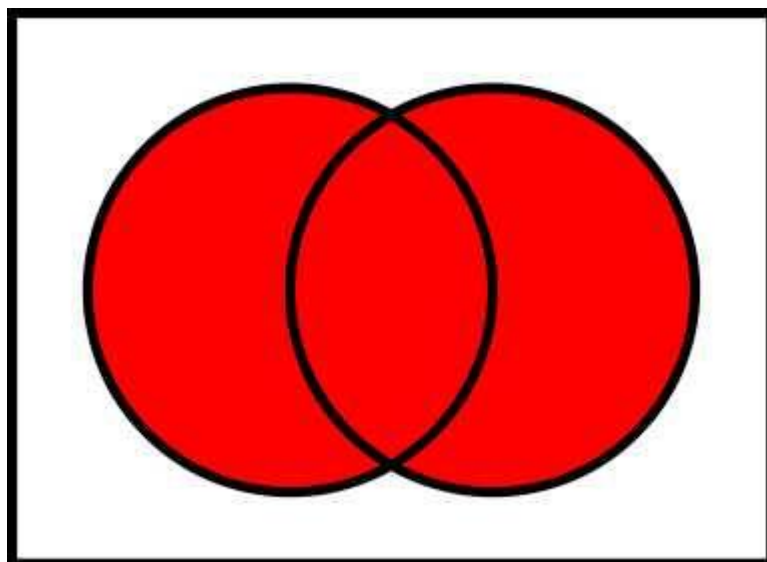


# XOR(Exclusive or)

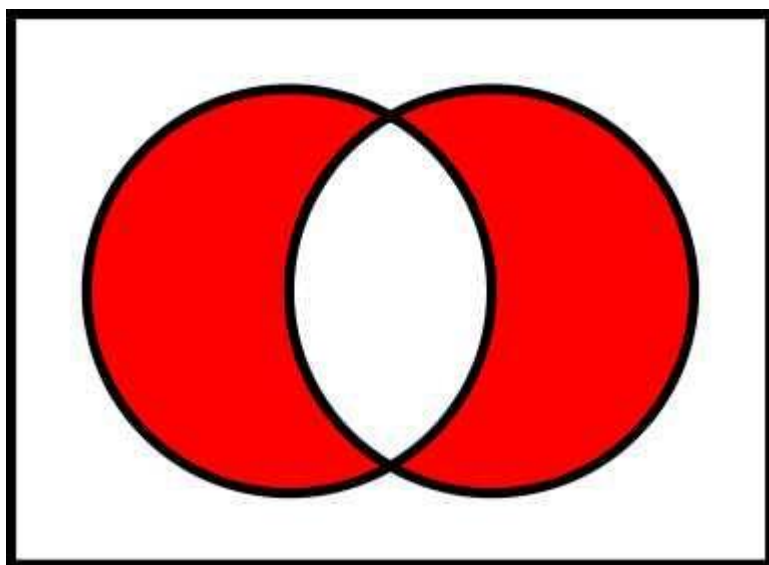
异或是  $Z_2$  群的加法运算，满足加法结合律和交换律.

`exclusive` 有一个意思是『排外的』。如果我们说 A 和 B 是『mutually exclusive』，那就是说 A 和 B 互不相容，互相排斥。回想一下『或』这个词在数学里的意思——『一个元素在集合 A 或集合 B 里』往往意味着『它只在 A 里』、『它只在 B 里』、『它在 A 和 B 的交集里』这三种情况中的一种。

『或』的维恩图如下

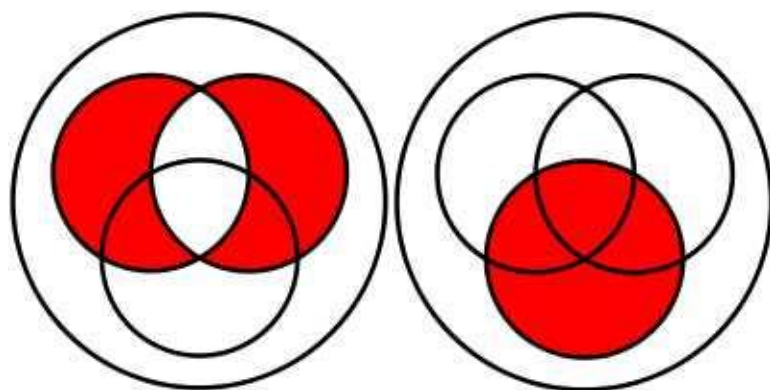


『异或』则不同，不允许『共存』的情况，因为是 exclusive 的，所以维恩图如下：

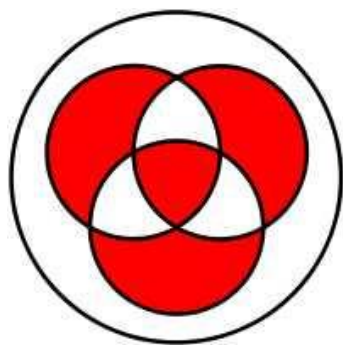


那三个圈的维恩图是什么样的呢？

在两个圈的基础上加上一个圈：



异或一下，得到：



在维恩图中，当我们用一个新的圈来异或已有的圈，我们相当于是在做『反色』操作。所以，异或操作是交换且结合的。

关于  $a \oplus b \oplus a = b$ , 即 异或 是 异或 的逆运算。

假设有两个数  $A=a$  和  $B=b$  , 我们要不依靠第三个变量交换它们。首先把  $B$  加到  $A$  上。

$$A = A + B = a + b$$

然后  $A$  现在就是  $a$  和  $b$  的和。  $B$  仍然是  $b$ 。所以我们现在要让  $B$  变为  $a$  就是  $B = A - B = a + b - b = a$ 。然后我们让  $A$  变成  $b$ ,

$$A = A - B = a + b - a = b$$

那么我们用二进制的性质。

下面举例子：（数字后的  $b$  表示这是个二进制数）

$$A = 1101b \quad B = 1011b$$

然后我们按照下面的规则分别对每一位做加法：

$$1+0=1 \quad 0+1=1 \quad 0+0=0 \quad \text{如果有进位, 我们就不要了: } 1+1=0$$

我们把这个运算用 “ $\wedge$ ” 符号表示。

和上面步骤一样：先求 “和”

$$A = A \wedge B = 1101b \wedge 1011b = 0110b$$

然后我们要算上面的 “和” “减”  $B$  的值来得到原来  $a$  的值。减是上面的 “ $\wedge$ ” 的逆运算，那么就是：

$$1-0=1 \quad 1-1=0 \quad 0-0=0 \quad \text{同时我们规定, 减法的借位也不需要:}$$

$$0-1=1$$

然后我们继续来算：

$$B = A \wedge B = 0110b \wedge 1011b = 1101b$$

$$A = A \wedge B = 0110b \wedge 1101b = 1011b$$

和上面的利用加法的交换原理是一样的。

我们现在再来看我们刚才定义的“^”运算：

$$0^0=0$$

$$0^1=1$$

$$1^0=1$$

$$1^1=0$$

这就是异或。

## 不用算术运算符实现两个数的加法(按位异或)

对于二进制的加法运算，若不考虑进位，则

$1+1=0, 1+0=1, 0+1=1, 0+0=0$ ，通过对比异或，不难发现，此方法与异或运算类似。因而排除进位，加法可用异或来实现。

然后考虑进位， $0+0$  进位为 0,  $1+0$  进位为 0,  $0+1$  进位为 0,  $1+1$  进位为 1，该操作与位运算的&操作相似。

那么加法运算可以这样实现：

1) 先不考虑进位，按位计算各位累加（用异或实现），得到值 a;

2) 然后再考虑进位，并将进位的值左移，得值 b，若 b 为 0，则 a 就是加法运算的结果，若 b 不为 0，则  $a+b$  即得结果（递归调用该函数）。

```
1 int bitAdd(int a, int b)
2 {
3     if(b==0)
4         return a;
5     int sum = a^b;
6     int carry =(a&b)<<1;
7     return bitAdd(sum, carry);
8 }
```

## 题目

给定正整数  $X$ ,  $Y$ , 询问满足  $a+b=X$  且  $a^b=Y$  的数对

$(a,b)(a \leq b)$  中,  $a$  最小的情况 ;

输出该情况下的  $a$  值并输出总情况数。

如果不存在这样的数对 , 输出 No solution.

多组数据。

对于 100% 的数据, 满足数据组  $t \leq 100000; X, Y \leq 1e18$ .

样例 :

Input:

3

7 7

4 2

9 7

Output:

4

1

No solution

Sol:

考虑到  $a+b=a^b(\text{不考虑进位})+(a\&b)\ll 1$  (考虑进位)。

所以设  $Z = (X-Y) \gg 1$ 。

则  $(a\&b) = Z$ ;

则最小的  $a$  值为  $Z$ 。

考虑  $(a^b) = Y$ , 则对于  $Y$  的二进制, 用加法实现异或, 只要  $Y$  的首位 1 分给  $b$ , 则之后可任意分配 1, 又考虑到  $Y$  为 0 时只有一种情况, 所以总情况数为  $2^{\max(0, \text{bit}(1) - \text{count}(Y))}$

考虑 No solution 的情况, 即  $(x-y) < 0$  或  $(x-y)$  为奇数 或  $Z\&Y$  不为 0 (考虑加法 与 异或 的关系)。