测定金属的杨氏模量

王崇斌 1800011716

1 数据及处理

1.1 CCD 成像系统测定杨氏模量

1.1.1 实验数据记录

表 1: 单个砝码质量的测量数据表

单个砝码质量 m_{i0}(g)	200.03	200.10	199.83	199.92	199.99
	199.84	200.30	199.72	200.43	

表 1 中的数据是按照实验中向砝码托上加砝码的顺序测出的质量。由天平的分度值可以看出，质量测量的相对不确定度很小，我们可以认为质量测量是准确的，在线性回归求杨氏模量时将质量作为自变量。

表 2: 测量金属丝受外力拉伸后伸展变化数据表

i	m_i(g)	r_i(cm)	$r_i^{'}$(cm)	$\bar{r}_i$(cm)
0	0	0.415	0.411	0.413
1	200.03	0.402	0.400	0.401
2	400.13	0.388	0.389	0.3885
3	599.96	0.376	0.376	0.376
4	799.88	0.364	0.366	0.365
5	999.87	0.353	0.354	0.3535
6	1199.71	0.341	0.342	0.3415
7	1400.01	0.330	0.330	0.330
8	1599.73	0.318	0.318	0.318
9	1800.16	0.308	0.307	0.3075

测量金属丝伸长量的显微镜刻线板的允差为 $e = 0.05$ mm

金属丝的长度 $L = 80.10$cm，木尺的允差为 0.1cm

表 3: 螺旋测微器测量金属丝的直径

d(mm)	0.331	0.323	0.323	0.322	0.323
	0.321	0.320	0.321	0.322	0.321

实验中使用的螺旋测微器的零点读数为 $d_0 = 0.000$ mm，所以我们可以得到金属丝的平均直径

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10} d_i = 0.3227 \text{ mm}$$

实验室中使用的螺旋测微器的允差 $e = 0.004$ mm，可以计算出金属丝直径的平均值 $\bar{d}$ 的标准差：

$$\sigma_{\bar{d}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = \frac{e}{\sqrt{3n}} = 7.3 \times 10^{-4} \text{ mm}$$

1.1.2 使用逐差法处理数据

使用逐差法处理数据避免了算式中的测量数据相互抵消，可以充分利用所有的测量结果，减小极端数据或者实验失误对于实验结果的影响。

$$\begin{aligned}
\bar{\delta L} &= \left|\frac{(\bar{r_5}-\bar{r_0})+(\bar{r_6}-\bar{r_1})+(\bar{r_7}-\bar{r_2})+(\bar{r_8}-\bar{r_3})+(\bar{r_9}-\bar{r_4})}{25}\right| \\
&= \frac{(0.413-0.3535)+(0.401-0.3415)+(0.3885-0.330)+(0.376-0.318)+(0.365-0.3075)}{25} \text{ cm} \\
&= 0.01172 \text{ cm}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\delta m} &= \left|\frac{(m_5-m_0)+(m_6-m_1)+(m_7-m_2)+(m_8-m_3)+(m_9-m_4)}{25}\right| \\
&= \frac{(999.87-0)+(1199.71-200.03)+(1400.01-400.13)+(1599.73-599.96)+(1800.16-799.88)}{25} \text{ g} \\
&= 199.78 \text{ g}
\end{aligned}$$

我们可以根据上面的算式得到不确定度的计算公式：

$$\begin{aligned}
\sigma_{\bar{\delta L}} &= \frac{\sigma_L}{\sqrt{10}} = \frac{e}{\sqrt{30}} = \frac{0.005}{\sqrt{30}} \text{ cm} = 9.1 \times 10^{-4} \text{ cm} \\
\sigma_{\bar{\delta m}} &= \frac{\sigma_m}{\sqrt{10}} = \frac{e}{\sqrt{30}} = \frac{0.01}{\sqrt{30}} \text{ g} = 1.8 \times 10^{-3} \text{ g}
\end{aligned}$$

给出杨氏模量的计算公式，计算结果（北京地区的重力加速度 $g \approx 9.80 \text{ m/s}^2$）：

$$E = \frac{4\bar{\delta m}gL}{\pi d^2 \bar{\delta L}} = 1.636 \times 10^{11}\text{Pa}$$

依据杨氏模量的计算公式我们可以得到标准差的合成公式：

$$\sigma_E = E\sqrt{\frac{e_L^2}{3L^2} + \left(\frac{\sigma_{\bar{\delta L}}}{\bar{\delta L}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{\delta m}}}{\bar{\delta m}}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_{\bar{d}}}{\bar{d}}\right)^2} = 1.3 \times 10^{-10}$$

因此杨氏模量应表示为 $E = (1.6 \pm 0.1) \times 10^{11}\text{Pa}$

1.1.3 使用最小二乘法处理数据

由杨氏模量的计算公式可以得到：

$$\Delta L = \frac{4gL}{\pi d^2 E}\Delta m$$

我们假定 m 的测量是准确的，那么可以根据 ΔL 的剩余方差与其测量产生的标准差合成后计算直线斜率的标准差，从而计算出杨氏模量与其标准差。拟合的结果是 $|k| = 5.864 \times 10^{-4}\text{m/kg}$ $r^2 = 0.999$

ΔL 的剩余方差为：

$$\sigma_{\Delta L}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i^2}{n-2} = \frac{6.0 \times 10^{-10}}{8} = 7.5 \times 10^{-11} \text{ (m}^2\text{)}$$

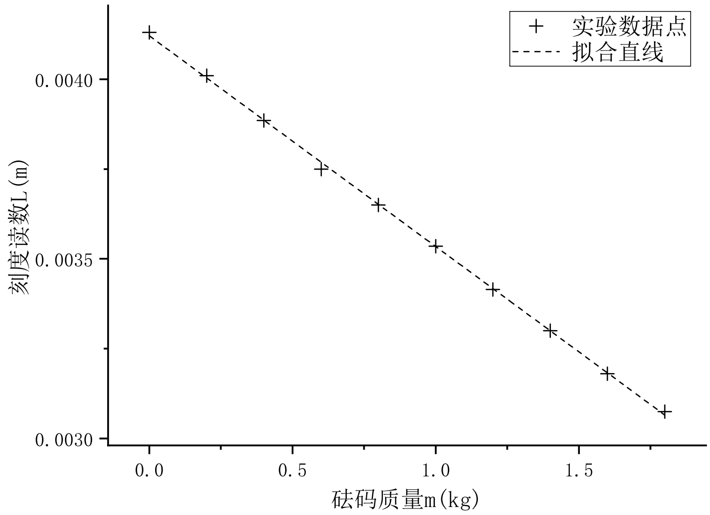

图 1: 金属丝的伸长量随砝码质量的变化关系

结合 ΔL 测量时产生的误差，可以合成单个 ΔL 的标准差：

$$\sigma_{\Delta L} = \sqrt{\frac{e^2}{3} + \sigma_{\Delta L}^2} = 3.0 \times 10^{-5}\ \mathrm{m}$$

这样可以计算出斜率的标准差为：

$$\sigma_k = \frac{\sigma_{\Delta m}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\Delta m_i - \bar{\Delta m})^2}} = 5.0 \times 10^{-5}\ \mathrm{m/kg}$$

可以用斜率计算杨氏模量：

$$E = \frac{4gL}{\pi d^2 k} = 1.637 \times 10^{11}\ \mathrm{Pa}$$

计算出杨氏模量的不确定度为：

$$\sigma_E = E\sqrt{\frac{e_L^2}{3L^2} + \left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_{\bar{d}}}{\bar{d}}\right)^2} = 1.4 \times 10^{10}\ \mathrm{Pa}$$

因此杨氏模量应该表示为：$E = (1.6 \pm 0.1) \times 10^{11}$ Pa

1.2 光杠杆装置测定杨氏模量

1.2.1 实验数据记录

首先给出本实验基本的数据，金属丝的长度 $L = 74.20$ cm，极限误差 $e_L = 0.1$ cm；刻度尺到平面镜的距离 $R = 120.00$ cm，极限误差 $e_R = 0.1$ cm；杠杆的长度 $D = 9.30$ cm，极限误差 $e_D = 0.01$ cm。同时给出金属丝直径测量数据表。

表 4: 螺旋测微器测量金属丝的直径数据表

d/(mm)	0.323	0.324	0.322	0.320	0.318
	0.319	0.318	0.321	0.321	0.322

由于使用的螺旋测微器零点读数 $d_0 = 0.000$ mm，可以计算出金属丝直径的平均值 $\bar{d} = 0.321$ mm。

表 5: 望远镜中钢尺的读数随所加砝码质量的变化数据表

i	m_i(g)	l_i(cm)	l_i'(cm)	$\bar{l}_i$(cm)
0	0	2.60	2.63	2.615
1	199.76	2.90	2.94	2.92
2	399.54	3.18	3.22	3.20
3	599.74	3.46	3.51	3.485
4	799.70	3.72	3.79	3.755
5	999.32	4.00	4.03	4.015
6	1199.15	4.29	4.31	4.30
7	1399.08	4.57	4.60	4.585
8	1599.14	3.85	4.90	4.875
9	1798.88	5.13	5.17	5.15
10	1998.84	5.44	5.44	5.44

1.2.2 使用最小二乘法处理数据

由于测量中金属丝的伸长量非常小，所以光杠杆倾角变化也为小角度，因此我们可以对各个量之间的关系做线性近似，得到本实验中杨氏模量的计算式：

$$E = \frac{8\Delta mgLR}{\pi d^2 D\Delta l}$$

将上式稍作变形，得到可以用于线性回归的表达式：

$$\Delta l = \frac{8gLR}{\pi d^2 DE}\Delta m$$

带入实验测得的数据可以计算出 $k = 0.01401\text{m/kg}$, $r^2 = 0.9998$

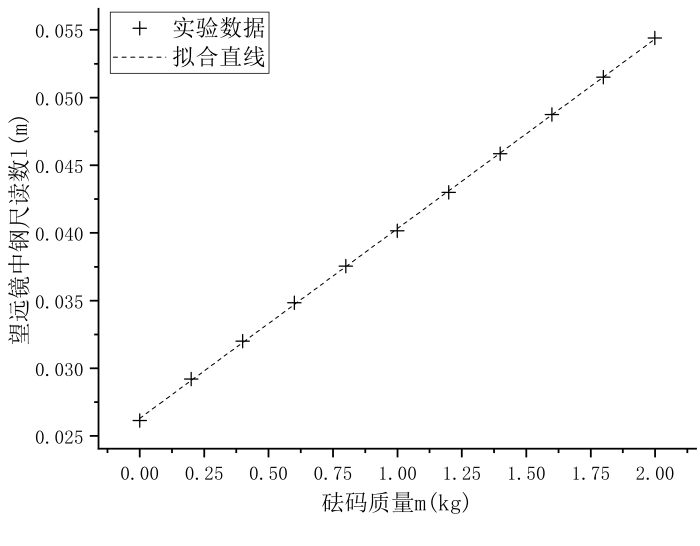

图 2: 刻度尺读数与砝码质量关系图

那么我们可以计算出金属丝的杨氏模量为：

$$E = \frac{8gLR}{\pi d^2 Dk} = 1.64 \times 10^{11}\ \text{Pa}$$

钢板尺的允差大约为 0.15 mm，对比测量中 l 的变化（约为 3 cm）来说相当小。注意这里是与 CCD 成像法测量杨氏模量相比较的，虽然显微镜刻线板的允差为 0.05 mm，但是由于长度变化太小，导致相对误差很大。因此不经过严谨地计算，也可以看出光杠杆法测量金属的杨氏模量有着更小的不确定度。

1.3 梁的弯曲测定杨氏模量

1.3.1 实验数据记录

首先给出钢梁的相关参数：

表 6: 钢梁的宽度 a 与厚度 h 数据表

a(mm)	10.149	10.145	10.120	10.130		
h(mm)	1.442	1.518	1.521	1.515	1.527	1.495

从上表的数据可以看出钢梁的参数相对于钢丝来说标准差更大，从实验测量发现钢梁在靠近两端的地方测量值会明显偏小。同时计算出 $\bar{a} = 10.136$ mm, $\bar{h} = 1.503$ mm。

表 7: 读数显微镜读数 λ 与钢梁下砝码质量数据表

i	m_i(g)	$\lambda_i(mm)$	λ_i'(mm)	$\bar{\lambda}_i$(mm)
0	0	44.213	44.200	44.2065
1	200.82	43.838	43.845	43.8415
2	400.50	43.498	43.500	43.499
3	600.46	43.160	43.162	43.161
4	800.94	42.802	42.800	42.801
5	1000.57	42.480	42.480	42.480

最后给出钢梁两个支点之间的距离，即有效长度 $l = 17.20$ cm。

1.3.2 使用最小二乘法处理数据

当挠度很小时，材料的杨氏模量可以表示为：

$$E = \frac{\Delta mgl^3}{4\Delta\lambda ah^3}$$

表示为方便进行线性回归的形式：

$$\Delta\lambda = \frac{gl^3}{4Eah^3}\Delta m$$

通过最小二乘法得到 $|k| = 0.00173$ m/kg, $r^2 = 0.9998$

由杨氏模量的表达式可以得到：

$$E = \frac{gl^3}{4kah^3} = 2.09 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

2 分析与讨论

实验开始时金属丝伸长量不均匀的问题 由于金属丝不是严格意义上的细丝，是有粗细的，因此金属丝除了可以承受径向的拉力之外，还可以产生一定的垂直于细丝方向的力。这就导致了自由悬挂的金属丝不一定是竖直的，尤其是当金属丝上有小的弯折时，便可以承受较大的拉力而不完全伸直。实验中使用的金属丝难免会有这样的弯折，所以在刚开始加入砝码时，除了金属丝自身在拉力作用下伸长之外，还会因为弯折部分变直而

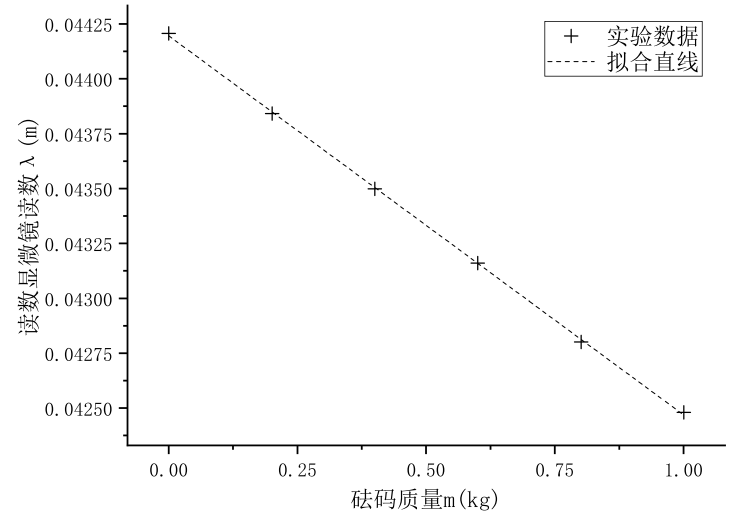

图 3: 读数显微镜读数与钢梁下砝码质量关系图

产生额外的伸长，因此，在最初加砝码时会观察到伸长量偏长的现象；为了尽可能消除这种现象，可以在测量开始时先在金属丝下方挂上一定质量的砝码，同时应该实验结束后测量金属丝的直径，因为使用螺旋测微器测量有可能造成金属丝的进一步弯折。

如果调节实验装置时竖直方向上残余了比较明显的摩擦力，那么这样产生的相对误差会因为砝码质量增加而减小，那么在最开始加砝码时会观察到伸长量偏小。

金属丝直径不均匀的问题　在实验测量中发现，金属丝的直径在靠近两端的地方偏大，而中间部位的直径非常均匀。这就说明金属丝的直径不均匀并不是由于生产原因造成的，只有可能是使用中的某些原因导致了金属丝的直径变化。个人推测的原因是由于金属丝在测量、调节仪器时都会产生振动或者晃动，由于两端可以近似认为是固定的，在晃动的过程中靠近两端的金属会受到反复的弯折，尤其是固定金属丝的地方一定非常容易出现疲劳，所以这部分的金属丝很可能偏离了理想的圆柱形，导致螺旋测微器在测量时无法用平面“卡住”直径，从而导致测量出的直径数据偏大，实验中的测量结果也正是这样。

3　收获与感想

这次的实验内容比较多，操作也比较繁杂，所以相比之前的实验消耗了更多的时间，对同学与老师的耐心都是一个不小的挑战（尤其是光杠杆用了很长时间才调节好的时候）。在实验时由于读数读的我眼花缭乱因此向同学吐槽说感觉每次的实验都像是光学实验，没想到那个同学认真地告诉我：因为光信号是最容易精确测量的信号呀。仔细一想，确实是这么回事，很多时候我们都是把难以察觉的量转化为光信号，这样不仅方便实验者观察实验现象并对实验做出调整也便于精确测量，这也让我想起了上周做的迈克尔逊干涉仪的实验，正是通过干涉条纹的变化，我们可以对很多几乎无法测量的量进行精确的测量。

在这次实验中我觉得最重要的除了如何测量金属丝（或者钢梁）的形边量，还有各种各样的长度测量值得关注。由于我们待测的长度可能处于空间中的不同位置，或者被测量的的物体有着各种各样的奇怪形状使得尺子并不易接近，对应的例子就有金属丝长度的测量与光杠杆长度的测量。在第一次测量光杠杆的长度时由于测量方法问题，测量的长度明显偏大，导致了计算出的杨氏模量明显偏小，在老师的提醒之下，才想到了精确测量光杠杆长度的方法，就是把光杠杆上的三个支点画在纸上，这样就可以很方便地做出垂线进而求出光杠杆的长度。这么看来，在很多实验细节中可能都隐藏着一些值得仔细思考的大学问。