

霍尔效应测量磁场

王崇斌 1800011716

1 数据处理

1.1 验证 $U_H - I_H$ 的线性关系

第一次测量时霍尔电流从 1, 2 端输入, 维持励磁线圈中电流大小为 $I_M = 0.600\text{A}$ 其中 U_1, U_2, U_3, U_4 分别对应电路 controls 霍尔电流与励磁电流的双刀双掷开关朝向为上上、下上、下下、上下时的电压读数 (以后全部按照这个约定), 这样的操作是为了尽可能消除副效应带来的系统误差。

表 1: 霍尔电流从 1, 2 接入时霍尔电压与霍尔电流关系的实验数据表

$I_H(\text{mA})$	$U_1(\text{mV})$	$U_2(\text{mV})$	$U_3(\text{mV})$	$U_4(\text{mV})$	$U(\text{mV})$
2	11.68	-11.69	11.69	-11.68	11.68
4	23.34	-23.33	23.37	-23.36	23.35
6	35.22	-35.20	35.06	-35.04	35.13
8	47.00	-46.95	46.76	-46.72	46.86
10	58.79	-58.71	58.47	-58.40	58.59

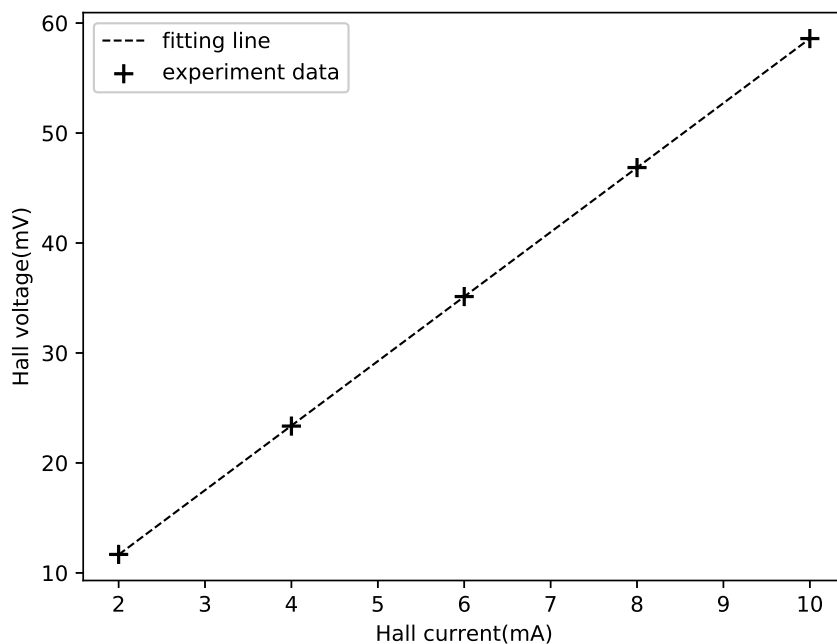


图 1: $U_H - I_H$ 关系图

从图中可以看出 $U_H - I_H$ 两者呈很好的线性关系, 这也验证了霍尔效应的正确性。这里给出图中曲线的参数: $k = 5.866\text{mV}/\text{mA}$, $b = -0.077\text{mV}$, $r = 0.999999$ 。

随后的实验将电流从 3, 4 输入，维持励磁线圈中电流大小为 $I_M = 0.600\text{A}$ 可以看出 $U_H - I_H$ 两者呈

表 2: 霍尔电流从 3, 4 接入时霍尔电压与霍尔电流关系的实验数据表

$I_H(\text{mA})$	$U_1(\text{mV})$	$U_2(\text{mV})$	$U_3(\text{mV})$	$U_4(\text{mV})$	$U(\text{mV})$
2	11.60	-11.60	11.73	-11.72	11.66
4	23.36	-23.32	23.48	-23.44	23.40
6	35.06	-34.96	35.24	-23.44	32.18
8	46.77	-46.61	47.03	-46.87	46.82
10	58.50	-58.25	58.85	-58.59	58.55

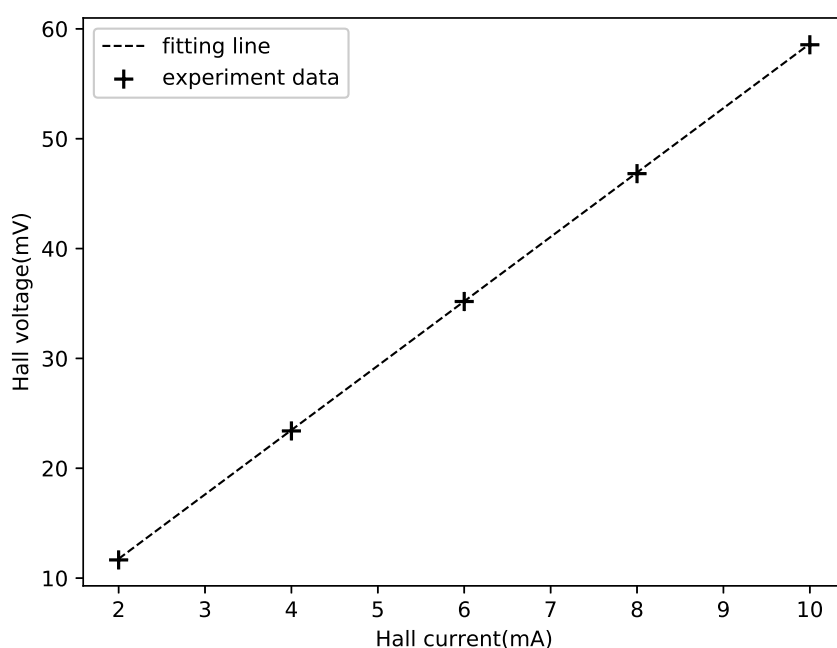


图 2: $U_H - I_H$ 关系图

很好的线性关系。这里给出图中曲线的参数: $k = 5.866\text{mV}/\text{mA}$, $b = -0.039\text{mV}$, $r = 0.999998$ 。

1.2 计算霍尔元件的灵敏度与其不确定度

实验思路是控制霍尔电流大小 $I_H = 10.000\text{mA}$ 不变，改变励磁线圈中的电流 I_M ，通过特斯拉计测量霍尔元件附近的磁场（注意保持特斯拉计探头与磁场方向垂直），测量霍尔电压（要修正）。根据霍尔效应的定义式可以得到灵敏度的表达式：

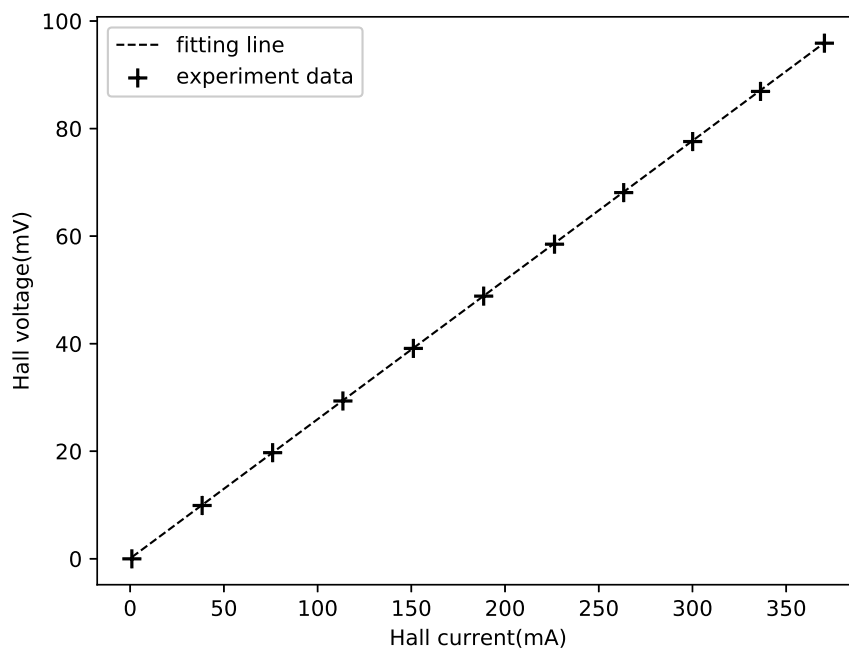
$$K_H = \frac{U_H}{I_H \cdot B}$$

通过最小二乘法拟合 $U_H - B$ 的关系，我们可以得到一个近乎直线的关系图，根据前面的讨论很容易知道直线的斜率为 $I_H \cdot K_H$ 。这里给出拟合直线的相关参数: $k = 0.2589\text{mV}/\text{mT}$, $b = -0.06297\text{mV}$, $r = 0.999996$

下面我们计算 K_H 的不确定度。首先应讨论本次实验中不确定度的来源，首考虑拟合直线斜率的不确定度，再根据 I_H 测量的不确定度计算出 K_H 不确定度。而 k 的不确定度分为三个部分，霍尔电压 U_H 的测

表 3: 霍尔电压与通过励磁线圈电流大小关系的实验数据表

$I_M(\text{mA})$	$U_1(\text{mV})$	$U_2(\text{mV})$	$U_3(\text{mV})$	$U_4(\text{mV})$	$U(\text{mV})$	$B(\text{mT})$
0.000	0.48	-0.4	-0.42	0.50	-0.01	0.9
0.100	10.13	-10.05	9.77	-9.69	9.91	38.4
0.200	20.02	-19.94	19.53	-19.44	19.73	76.0
0.300	29.54	-29.46	29.23	-29.15	29.34	113.5
0.400	39.30	-39.22	39.02	-38.94	39.12	151.1
0.500	49.00	-48.91	48.78	-48.69	48.84	188.6
0.600	58.62	-58.53	58.47	-58.39	58.50	226.4
0.700	68.17	-68.09	68.11	-68.02	68.10	263.3
0.800	77.62	-77.53	77.65	-77.56	77.59	300.1
0.900	86.92	-86.83	86.99	-86.90	86.91	336.3
1.000	95.84	-95.76	96.01	-95.92	95.88	370.4

图 3: $U_H - B$ 关系图

量允差和剩余方差、磁场强度的测量允差。重点在计算 k 的不确定度上。我们知道线性拟合的斜率公式为：

$$k = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (1)$$

考虑 x, y 均带有不确定度，此处假设每一个 x, y 带有的不确定度分别相等，根据误差合成公式可以得到：

$$\sigma_k = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial k}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial k}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2} \quad (2)$$

尝试化简上述表达式：

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\frac{x_i - \bar{x}}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)} \right]^2 \cdot \sigma_y^2 + \sum_{i=1}^n \left[\frac{(y_i - \bar{y})(\overline{x^2} - \bar{x}^2) - (\overline{xy} - \bar{x}\bar{y})(x_i - \bar{x}) \cdot 2}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)^2} \right]^2 \cdot \sigma_x^2} \\ &= \sqrt{\frac{\sigma_y^2}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)} + \frac{\overline{y^2} - \bar{y}^2}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)^2} \sigma_x^2} \\ &= \sqrt{\frac{\sigma_y^2}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)} + \frac{\sigma_x^2}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)} \cdot \frac{(\overline{xy} - \bar{x}\bar{y})^2}{(\overline{x^2} - \bar{x}^2)^2} \cdot \frac{(\overline{x^2} - \bar{x}^2)(\overline{y^2} - \bar{y}^2)}{(\overline{xy} - \bar{x}\bar{y})^2}} \\ &= \sqrt{\frac{\sigma_y^2}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)} + \frac{k^2 \sigma_x^2}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)} \cdot \frac{1}{r^2}} \end{aligned}$$

σ_y, σ_x 为单个数据携带的标准差，需注意 σ_y 中包含了线性拟合时的剩余标准差即可。显然将公式中的 x, y 换为 B, U_H 即为我们需要使用的公式。由于仪器的允差与待测量的大小有关，为了保险起见，我们用所有测量值中最大的来计算允差。

$$e_B = 370.4 \times 0.01 + 0.2 = 3.90 \text{ mT}$$

$$e_{I_H} = 10.000 \times 0.005 + 0.004 = 0.054 \text{ mA}$$

$$e_{U_i} = 96.01 \times 0.005 + 0.03 = 0.51 \text{ mV}$$

由上述数据可以计算出由允差引起的标准差为：

$$\sigma_B = 2.25 \text{ mT}$$

$$\sigma_{I_H} = 0.031 \text{ mA}$$

$$\sigma_{U_{H_e}} = \frac{e_{U_H}}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = 0.15 \text{ mV}$$

下面给出剩余方差贡献的 U_H 的标准差

$$\sigma_{U_{H_0}} = k \sqrt{\frac{1/r^2 - 1}{n - 2}} = 2.3 \times 10^{-4} \text{ mV}/(\text{mA} \cdot \text{mT})$$

因此可以得到 U_H 的标准差为：

$$\sigma_{U_H} = \sqrt{\sigma_{U_{H_e}}^2 + \sigma_{U_{H_0}}^2} = 0.15 \text{ mV}$$

$$\bar{B}^2 - \bar{B}^2 = 15182(\text{mT}^2)$$

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{\sigma_{U_H}^2}{n(\bar{B}^2 - \bar{B}^2)} + \frac{k^2 \sigma_B^2}{n(\bar{B}^2 - \bar{B}^2)} \cdot \frac{1}{r^2}} = 0.0016(\text{mV}/\text{mT})$$

由 K_H 的表达式可以得到其不确定度的计算公式：

$$K_H = \frac{k}{I_H} = \frac{0.2589}{10.000} = 0.02589 \text{ (mV}/(\text{mA} \cdot \text{mT}))$$

$$\sigma_{K_H} = K_H \sqrt{\left(\frac{\sigma_{I_H}}{I_H}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2} = 1.8 \times 10^{-4} \text{ (mV/(mA} \cdot \text{mT))}$$

因此 $K_H = (0.0259 \pm 0.0002) \text{ mV/(mA} \cdot \text{mT)}$

下面根据计算出的 K_H 来计算磁场强度大小 B_c 并绘制磁化曲线。

表 4: I_M 与 B_c 数据表

$I_M(\text{A})$	0.000	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700	0.800	0.900	1.000
$B_c(\text{mT})$	0.0	38.1	75.9	112.9	150.5	187.9	225.0	261.9	298.4	334.3	368.8

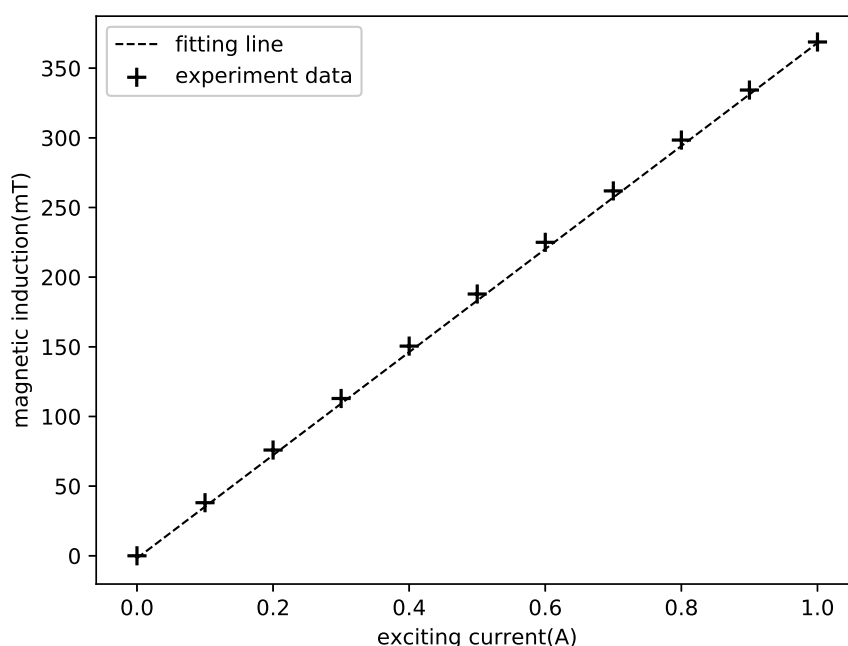


图 4: 磁化曲线

从理论上讲, 如果考虑铁芯是一个线性介质, 那么励磁电流与磁感应强度之间应该呈严格的线性关系, 但是在实验中就已经发现了随着电流的增大, 磁感应强度的增大量不断减小, 为了清晰地看出这一结果, 在上图中标出了拟合直线, 可以看到中部的点分布在直线之上。

下面讨论电磁铁的磁感应强度的横向分布。控制励磁电流 $I_M = 0.600\text{A}$, $I_H = 10.000\text{mA}$ 测量磁感应强度随着横向距离的变化, 同时给出 $B-x$ 关系图。

说明一下, 这里的 x 是直接由标尺上读出的, 由于标尺是倒放的, 所以此图中绝对值小的横坐标表示距离电磁铁近的位置。可以看到, 在电磁铁内部一定范围内磁感应强度近似不变, 可以认为是一匀强磁场。

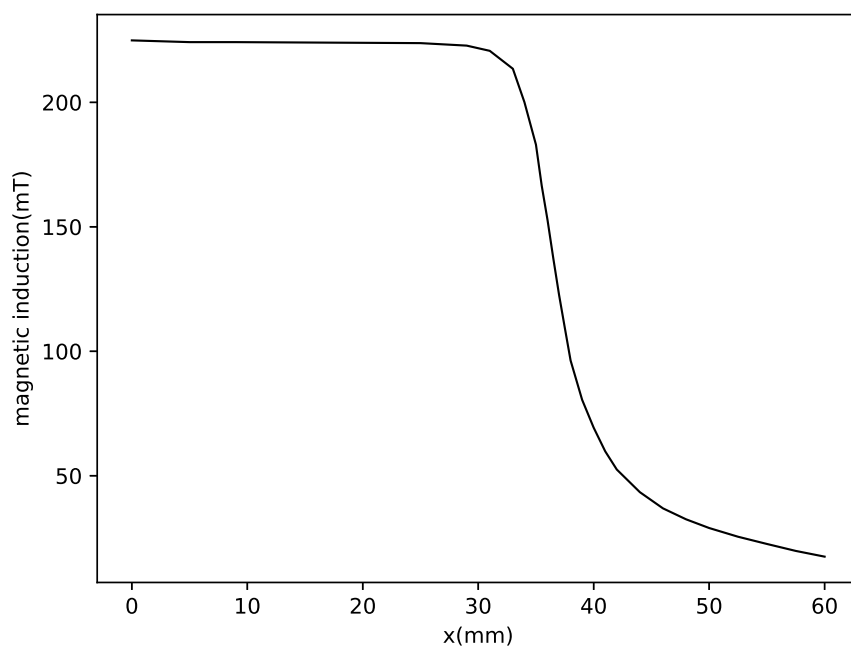
2 思考题

Q 在测量 $B-I_M$ 曲线中, $I_M = 0$ 时 U_H 测量仍有较小的电压, 这是为什么?

在本实验中为了消除副效应的影响, 我们利用副效应的特点, 通过开关改变霍尔电流的方向与励磁线圈中电流方向, 测得四组不同的数据, 来尽可能消除副效应。可是这样就蕴含了两个假设, 改变电流方向后电流大小不变、电磁铁中的磁感应强度大小不变, 前一个很容易通过监测电流表读数来保证, 而后一个就只能通过假设铁芯是理想的线性介质来保证, 所以本实验中的铁芯应该是软磁性材料。

表 5: 电磁铁磁感应强度横向分布数据表

$x(\text{mm})$	60.0	57.5	55.0	52.5	50.0	48.0	46.0	44.0	42.0	41.0
$U_H(\text{mV})$	4.55	5.15	5.87	6.63	7.53	8.46	9.60	11.28	13.66	15.54
$B(\text{mT})$	17.5	19.8	22.6	25.5	29.0	32.5	36.9	43.4	52.5	59.8
$x(\text{mm})$	40.0	39.0	38.0	37.5	37.0	36.5	36.0	35.5	35.0	34.0
$U_H(\text{mV})$	18.03	20.92	25.04	28.45	31.91	35.73	39.37	43.29	47.59	52.50
$B(\text{mT})$	69.3	80.5	96.3	109.4	122.7	137.4	152.8	166.5	183.0	200.1
$x(\text{mm})$	33.0	31.0	29.0	25.0	21.0	17.0	13.0	9.0	5.0	0.0
$U_H(\text{mV})$	55.52	57.38	57.92	58.18	58.22	58.25	58.26	58.28	58.30	58.48
$B(\text{mT})$	213.5	220.7	222.8	223.8	223.9	224.0	224.1	224.2	224.2	224.9

图 5: 磁感应强度随 x 的分布

软磁性材料的磁滞回线很窄，也就是在磁化结束后撤去外磁场只有极少量的剩余磁性，但是这样的少量也只是相比较硬磁性材料而言，并不是很小无法表征，所以在实验进行中，没有通电的电磁铁依然会有少量剩余磁性，这就是 U_H 在 I_H 等于 0 时不为 0 的原因。

3 分析与讨论

霍尔元件灵敏度的影响因素 从实验一的数据中可以看出，无论是选择哪种接法（即霍尔电流的方向），所测得的灵敏度是一样的（虽然此时磁感应强度未知，但是是维持不变的，比较拟合直线的斜率即可），这就说明了霍尔元件的灵敏度与接法无关。

粗略的理论分析表明， $K_H = \frac{1}{pqd}$ ，其中 p 为载流子浓度， q 为单个载流子所带电荷量， d 为霍尔元件厚度，那么可以看出，这与霍尔元件的大小和边长均无关系，说明这个粗略的模型还是挺可靠的。

为什么在实验三中原要重新计算磁感应强度 在实验中就可以发现，用特斯拉计测量磁场强度很依赖探头的位置与角度，因此单个测量量的不确定度较大，通过多组数据线性拟合后会使得最终计算出来的灵敏度相对不确定度更小，根据这个与电压、电流数据（测量时允差均很小）计算磁场强度，可以使重新计算出的磁场强度不确定度比直接测量的的小，因此使绘制的磁化曲线更加准确。

断开开关时的火花 实验中观察发现，在断开励磁线圈的开关时由明显的火花出现，这是因为励磁线圈由很大的电感，在断开电路瞬间电流突变，导致电路两端会产生瞬时极高的电动势，因此在做实验时还应注意安全问题。

4 收获与感想

本次实验是我这学期做的最顺利的以此电学实验，感觉无论从速度上还是完成度上均由提高一改之前面对一堆导线束手无策的状态，自己还是有点进步的嘛。