

Logistic 模型

王崇斌 1800011716

2022 年 3 月 11 日

我们来考察一个非常简单而广为人知的数值模型, 其由如下迭代关系定义:

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n) \quad (1)$$

其中 $r > 0$ 为可调参数, 等式右端的函数 $f(x)$ 被称为 Logistic 函数. 为了方便与画图相互配合, 本题决定使用 Python 作为编程语言, 后续作业中会使用在数值计算上更有优势的编译型语言, C++ 或者 Fortran 等.

1. 作为最初步的认识, 分别取 $r = 0.5$, $r = 1.5$, 任取几个 0-1 之间的初值 x_0 , 计算序列 $\{x_n\}$, 绘图观察它们的行为.

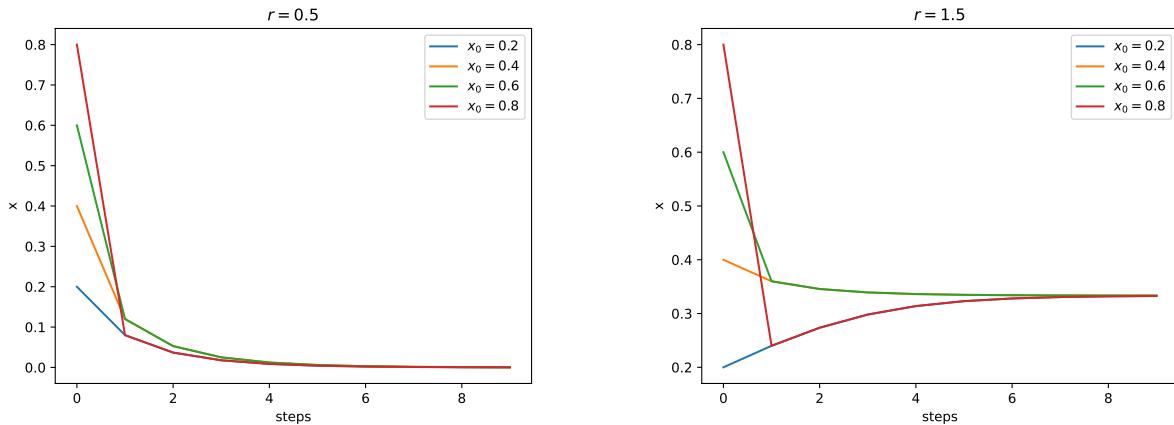


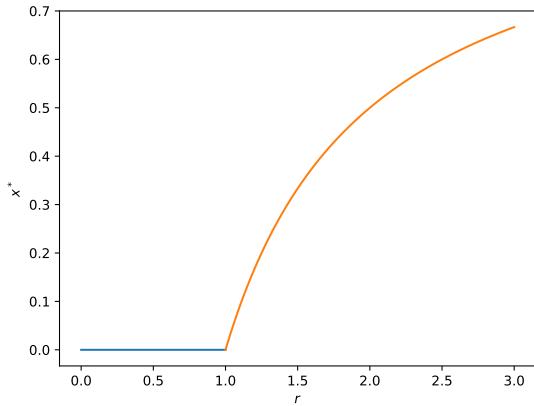
表 1: 选取 $r = 0.5$, $r = 1.5$ 与不同初始值时迭代序列随步数的演化

解: 可以看出在 $r = 0.5$, $r = 1.5$ 这两个参数下, 对于不同的 $x \in [0, 1]$, 序列均会收敛到稳定值, 对于两个不同的参数收敛值不同. 同时从图??的第二张图可以看出, 对于 $r = 1.5$, 不同初值 x_0 有着不单调的收敛行为.

2. 显然, 对于不同的 r 值, x_n 将迅速收敛于某一特定的 x^* 初, 而与初值无关. x^* 必将满足自治方程: $x^* = f(x^*)$. 作为一个二元一次方程, 其存在两个根. 试判断并证明哪一个根才是最终收敛的不动点, 画出 x^* 随 r 的变化关系图. 一般而言, 其收敛阶 p 与收敛率 C 各是多少.

解: 自治方程的根容易直接给出: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 1 - 1/r$; 由不动点迭代的理论可知, 不动点稳定的判据是 $|f'(x^*)| < 1$, $f'(x) = r - 2rx$, $x = 0$ 为稳定点的条件是 $0 < r < 1$, $x = 1 - 1/r$ 为稳定点的条件是 $1 < r < 3$, 当 $r > 3$ 时两个自治方程的解均不是稳定点. 这与上一问的数值结果相符合. 将上述讨论绘制成图: 由不动点迭代的知识可知:

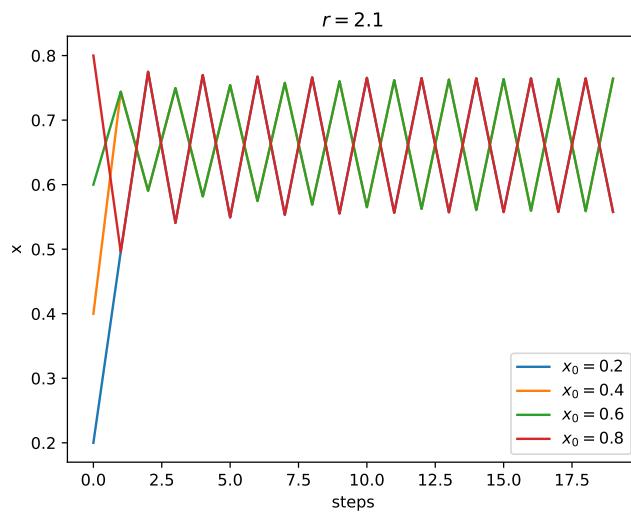
$$\frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n} \approx f'(x) \quad (2)$$

图 1: 收敛的不动点 x^* 随参数 r 的变化关系

那么对于本题中的情况, 只要导数不为零均对应着线性收敛 $p = 1$ (导数为 0 可能对应着高阶的收敛, 开平方算法就是一个具体的例子). 那么 $0 < r < 1$ 时收敛率为 r , $1 < r < 3$ 时收敛率为 $|2 - r|$.

3. 当 r 大于某个特定值 r_1 时, 上述条件无法满足. 取 $r = r_1 + 0.1$ 以及不同的初值 x_0 , 计算序列 $\{x_n\}$. 绘图观察并描述他们的行为.

解: 从第二问的分析可知, 本题目中要求的 $r = 3.1$, 经过测试, 只有 $x_0 \in [0, 1)$ 时序列才是有界的.

图 2: $r = 3.1$ 时不同初值下的序列随迭代步数的演化

4. 序列最终会在某两个特定值 x_1^*, x_2^* 之间震荡. 事实上, 考察复合迭代序列 $x_{n+2} = f(f(x_n))$, 其定义的序列依旧收敛于某一个固定值, 从而依旧可以使用前述方法来分析. 试证明, 这类迭代收敛的必要条件是 $|f'(x_1^*)f'(x_2^*)| \leq 1$, 并绘制出 x_1^*, x_2^* 随 r 的变化关系.

解：首先可以直接写出复合迭代的递推关系：

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= f(f(x_n)) \\ &= rf(x_n)(1 - f(x_n)) \\ &= r^2(1 - x_n)(1 - rx_n(1 - x_n)) \end{aligned} \quad (3)$$

根据上式，自治方程可以写为：

$$x = r^2(1 - x_n)(1 - rx_n(1 - x_n)) \quad (4)$$

可以分解因式为：

$$0 = x(x - 1 + 1/r)(x^2 - (1 + 1/r)x + 1/r(1 + 1/r)) \quad (5)$$

容易给出自治方程的四个根为：

$$\begin{cases} x_1^* = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{r} + \sqrt{1 - \frac{2}{r} - \frac{3}{r^2}} \right) \\ x_2^* = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{r} - \sqrt{1 - \frac{2}{r} - \frac{3}{r^2}} \right) \\ x_3^* = 1 - \frac{1}{r} \\ x_4^* = 0 \end{cases} \quad (6)$$

根据前几问的分析可知，当 $r > 3$ 时，迭代序列不会稳定收敛到 x_3^* , x_4^* ，那么对于复合迭代序列也不可能收敛到这两个值，复合迭代序列一定收敛到前两个根。从数值实验的结果可以断言（事实上这个结论可以直接计算验证）：

$$\begin{aligned} f(x_1^*) &= x_2^* \\ f(x_2^*) &= x_1^* \end{aligned} \quad (7)$$

有了前面的结论之后可以分析复合迭代序列的稳定性，在 x_1^* 附近 $[f(fx_1^*)]' = f'(f(x_1^*))f'(x_1^*) = f'(x_2^*)f'(x_1^*)$ ，有了这样的求导关系，结合不动点的稳定性判据 $|f'(x)| \leq 1$ ，可以直接得到题目中的结论 $|f'(x_1^*)f'(x_2^*)| \leq 1$ 。

下面绘制收敛点 x_1^* , x_2^* 随 r 的变化关系示意图，可以从数值实验和理论计算两个角度来考虑。理论分析已经在上文中给出，现在考虑数值实验的具体方案， $r \in [3.1, 5.1]$ ，从中选取 100 个点，每个 r 均选取相同的初值 $x_0 = 0.5$ ，演化总步数为 1000 步（根据前几问的经验，这么多步数应该足以收敛），取最后 128 个点作为收敛的点，将这些点绘制成散点图，并将理论计算的结果同时绘制作为对比：

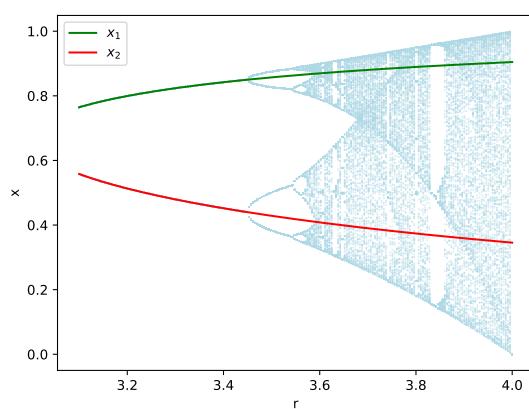


图 3: x_1^* , x_2^* 随 r 的变化关系

从上图对比看出，理论计算的结果在一定的范围内是有效的，同时观察到了随着参数 r 的增长，这一间理论分析的结果会变失效，序列不在会只在两个点之间震荡，收敛的结果会出现分岔现象。

5. 继续缓慢增大 r , 请展示周期为 2 的震荡逐渐变成周期 4, 周期 8……试定义一个量, 可以一般性描述序列向各类稳定震荡的平均收敛速度, 并可以由一段有限序列近似算出. 在 $r \in (0, 4)$ 上等距取点, 绘制收敛速度随 r 的变化, 描述其与不同振荡周期的关系.

解: 选取 $r \in [3.1, 3.58]$, 绘制绘制出稳定震荡点随 r 的变化关系如下图所示:

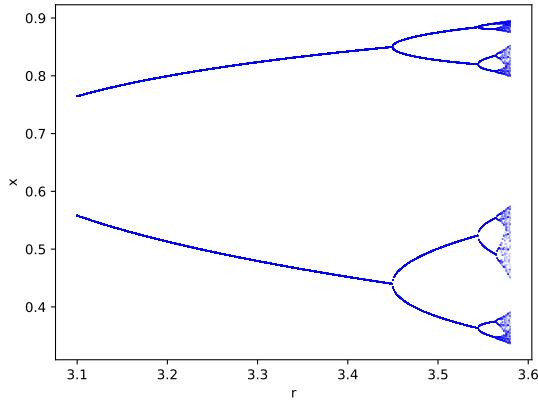


图 4: 不同 r 值时迭代序列的稳定震荡趋势

下面给出采用 $x_0 \in [0.1, 0.9]$ 均匀采点作为初值, $r = 3.4, 3.5, 3.56, 3.367$ 作为参数时迭代方程的演化:

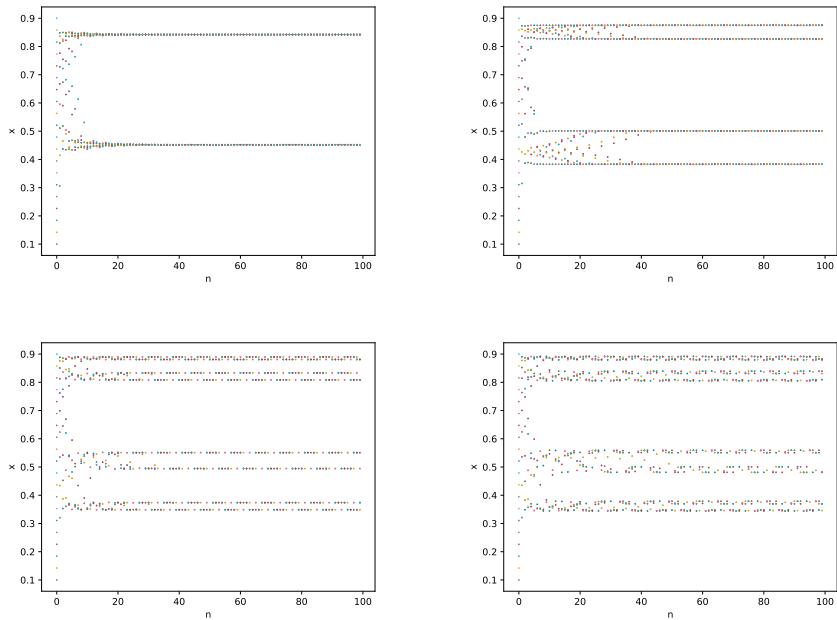


表 2: 采用不同的参数 r 值和不同的初始条件下的收敛结果

为了定义一个描述向稳定震荡收敛速度的量, 首先考虑怎样描述序列收敛到稳定震荡这样一件事情。我个人的想法是借用统计物理中系综的概念, 考虑在 0 时刻给定系统的初始值分布为 $[0, 1]$ 上的平均分布 (数值实现是可以在这个区间上等距均匀取点), 记为 $\rho(x, 0)$, 在系统演化的过程中密度分布也会随时间演化, 记 n 时刻时系统的密度分布为 $\rho(x, n)$. 如果系统在 $n \rightarrow \infty$ 时可以达到稳定的震荡, 希望密度函数 $\rho(x, +\infty)$ 存在且

可以表示为若干个 δ 分布的和:

$$\rho(x, +\infty) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta(x - x_j) \quad (8)$$

其中 x_j 是稳定震荡时能取到的一个值. 这样的分布任意阶矩都存在, 可以完全由任意阶矩 $M_j := \int \rho(x) x^j dx$ 来描述, 为了方便起见, 这里考虑用平均值来描述, 首先绘制出不同 r, n 时平均值 $\langle x \rangle$ 的变化关系, 考察一下这种描述方式到底现不现实, 经过数值实验后发现, 完全不太现实, 事实上密度函数并不收敛, 也是震荡的.

为了描述收敛, 考虑定义另外的序列 y_n (原序列的切萨罗和) :

$$y_n := \frac{\sum_{j=1}^n x_j}{n} \quad (9)$$

容易想象, 对于一个稳定震荡的序列 x_n , 这样构造出的 y_n 应该是一个收敛的序列. 为了进一步确信, 考虑以周期 2 为例绘制出原序列 x_n 和切萨罗求和过后的序列 y_n ($x_0 = 0.5$) :

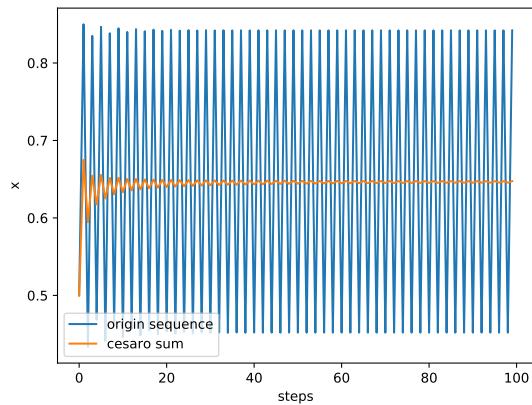


图 5: 周期 2 时原序列与切萨罗求和之后的比较

将不同周期的震荡序列的切萨罗和绘制在同一张图中比较 ($x_0 = 0.5$) :

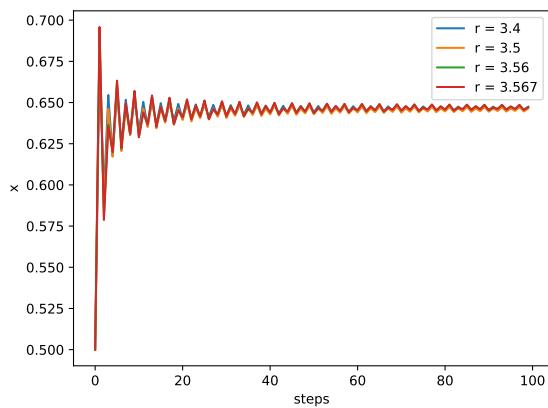


图 6: 不同震荡周期的序列的切萨罗和的收敛行为 $x_0 = 0.5$

从图中可以看出, 对于初值 $x_0 = 0.5$ 不同周期的序列收敛速度基本一致, 尝试了其他的初值, 发现切萨罗和的收敛行为对初值敏感, 不适合作为一个描述收敛的量:

6. 绘制震荡值随 r 的变化关系. 依次缩小绘图范围, 将坐标原点分别放在周期 1、周期 2 的分岔点, 周期 2、周期 4 的分岔点, 周期 4、周期 8 的分岔点, 描述你观察到的现象.

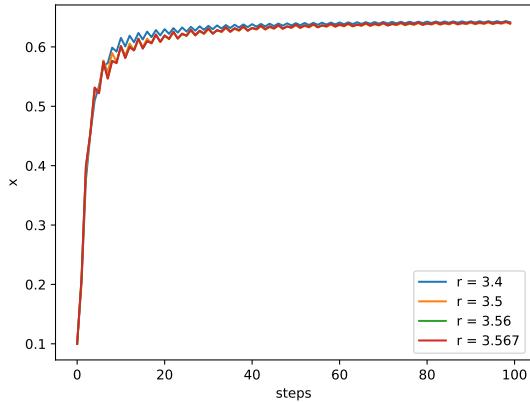


图 7: 不同震荡周期的序列的切萨罗和的收敛行为 $x_0 = 0.1$

解: 有了第 5 问中分岔随 r 变化的关系, 大致可以确定各个分岔的位置. 为了精确描述周期 1 与周期 2 的分岔点, 将 r 的值选取在在 $[2.997, 2.9992]$ 之间, 均匀取 200 个点, 以 $x_0 = 0.5$ 为初始值, 演化 5000 步, 取最后 64 个点作为收敛的点绘制在图中:

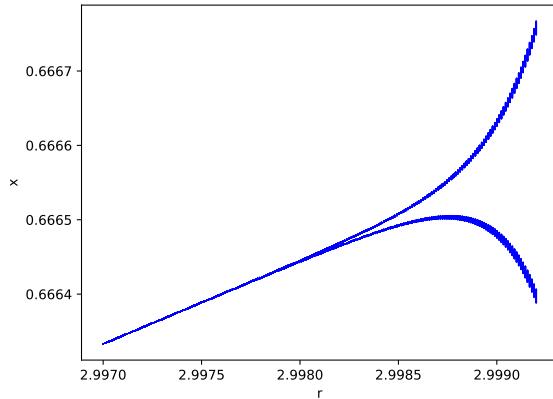


图 8: 周期 1 与周期 2 分岔点

从图中可以看出, 周期一与周期二的分岔点 $r \approx 2.9989$ (精确到万分位), 这与前几问中的理论分析 ($r = 3$) 略有差别, 个人认为是数值精度造成的.

为了精确描述周期 2 与周期 4 的分岔点, r 选取在 $[3.448, 3.4505]$ 之间, 均匀取 200 个点, 以 $x_0 = 0.5$ 为初始值, 演化 5000 步, 取最后 64 个点作为收敛的点绘制在图中:

从图中可以看出, 周期 2 与周期 4 的分岔点 $r \approx 3.4490$ (精确到万分位).

为了精确描述周期 4 与周期 8 的分岔点, r 选取在 $[3.54, 3.55]$ 之间, 均匀取点 200 个, 以 $x_0 = 0.5$ 为初始值, 演化 10000 步, 取最后 128 个点作为收敛的点绘制在图中:

从图中可以看出, 周期 4 和周期 8 的分岔点 $r \approx 3.5440$ (精确到万分位)

为了精确描述周期 8 与周期 16 的分岔点, r 选取在 $[3.562, 3.568]$ 之间, 均匀取点 300 个, 以 $x_0 = 0.5$ 为初始值演化 10000 步, 取最后 128 个点作为收敛的点绘制在图中:

从图中可以看出, 周期 8 与周期 16 的分岔点 $r \approx 3.5644$ (精确到万分位)

为了进一步分析分岔现象, 将 r 选取在 $[3.5686, 3.5689]$, 均匀取点 300 个, 以 $x_0 = 0.5$ 为初始值, 演化 10000 步, 取最后 256 个点作为收敛的点绘制在图中: 从图中可以得到, 周期 16 到周期 32 的分岔点处 $r = 3.56874$

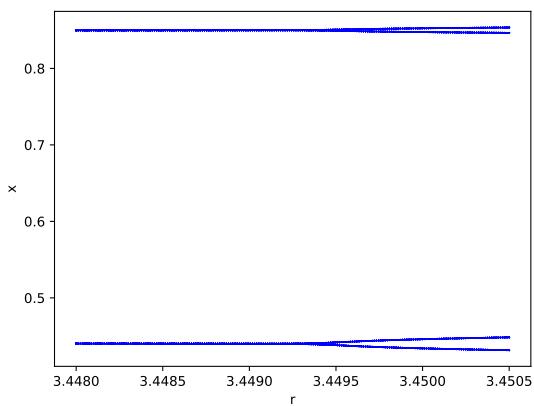


图 9: 周期 2 与周期 4 的分岔点

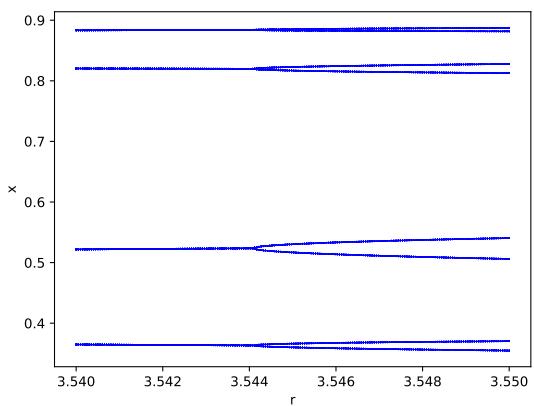


图 10: 周期 4 与周期 8 的分岔点

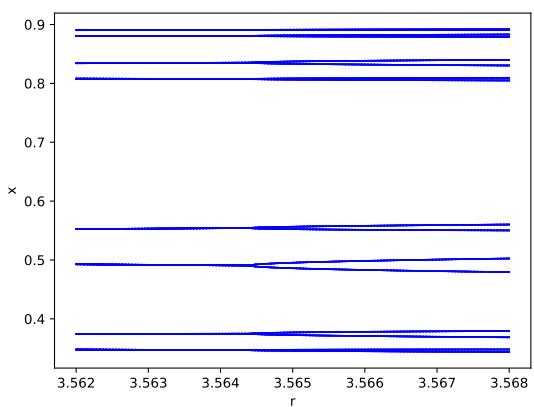


图 11: 周期 8 与周期 16 的分岔点

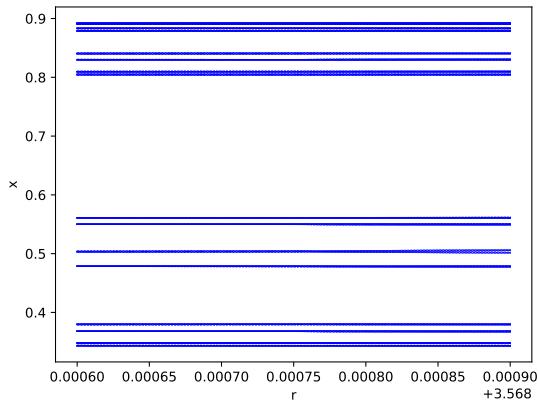


图 12: 周期 16 到周期 32 的分岔点

7. 计算相邻分岔点之间的横轴距离 Δr , 说明相邻 Δr 之比渐进于一个常数 F , 计算出 F 与无穷周期分岔点 r_∞ 的值.

解: 有了第 6 问的数据, 可以直接计算出:

$$\begin{cases} \Delta r_1 = 3.4490 - 2.9980 = 0.4510 \\ \Delta r_2 = 3.5440 - 3.4490 = 0.0950 \\ \Delta r_3 = 3.5644 - 3.5440 = 0.0204 \\ \Delta r_4 = 3.56874 - 3.5644 = 0.00430 \end{cases} \quad (10)$$

那么可以计算出相邻 Δr 的比值:

$$\begin{cases} F_1 = 0.211 \\ F_2 = 0.215 \\ F_3 = 0.211 \end{cases} \quad (11)$$

那么可以将 F 取为 $F = 0.211$, 无穷周期分岔点 r 可以按下式计算:

$$r_\infty = r_{8 \rightarrow 16} + \Delta r_4 \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} F^j = 3.5712 \quad (12)$$

为了验证这一点, 将 r 选取在 $[3.562, 3.629]$, 均匀取点 400 个, 以 $x_0 = 0.5$ 为初始值, 演化 10000 步将最后 512 步作为收敛点绘制在图中: 可以看到第一次出现无穷周期的 r 值就应该在 3.57 附近, 但是显然收敛值随 r 的变化显示出了异常复杂的图样, 在图中可以看到从有周期到无周期再到有周期的变化, 也能在其中看到奇怪的颜色较深的曲线, 这表明收敛点更倾向于集中在这些地方.

8. 对于 $r = 4$ 的情形, 试解析求解该迭代序列, 论证此时一般不存在稳定的振荡周期.

解: 做变换 $x = \sin^2(y)$, x 的取值范围为 $[0, 1]$, 那么 y 的取值范围为 $[0, \pi/2]$, 在这个范围内 $x \leftrightarrow y$ 之间的变换为一一映射. 容易将迭代关系写为:

$$\begin{aligned} \sin^2(y_{n+1}) &= x_{n+1} = r(1 - x_n)x_n \\ &= r \cos^2(y_n) \sin^2(y_n) \\ &= \frac{r}{4} \sin^2(2y_n) \end{aligned} \quad (13)$$

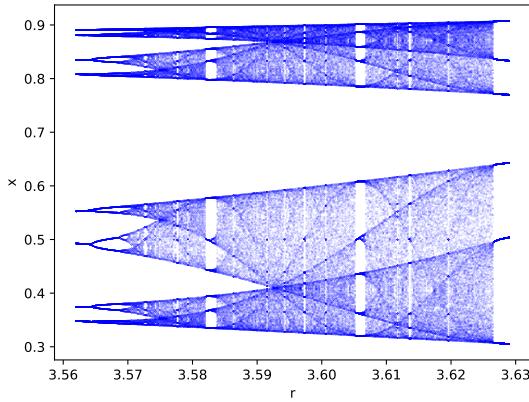


图 13: 分岔现象的大致图像

如果取 $r = 4$, 那么可以得到 $\sin^2(y_{n+1}) = \sin^2(2y_n)$, 由于我们限制了 y 的取值范围, 因此得到 y_{n+1} 与 y_n 的关系:

$$y_{n+1} = \begin{cases} 2y_n & \text{if } 2y_n < \pi/2 \\ 2y_n - \pi & \text{if } \pi/2 \leq 2y_n \leq \pi \end{cases} \quad (14)$$

那么 y_n 总可以表示为: $y_n = 2^n y_0 - N\pi$, 其中 N 为一个正整数. 那么:

$$x_n = \sin^2 y_n = \sin^2(2^n y_0) \quad (15)$$

若想要 x_n 呈现出周期性, 那么 $2^n y_0$ 至少要满足 $2^n y_0 / \pi$ 的小数部分只有有限种状态, 比如对应 y_0 是 π 有理数倍的情况, 对于无理数的情况, 我无法证明小数点后面的数值只取有限个状态 (但是感觉上是不对的), 这种初值对应的序列不可能存在稳定的振荡周期.

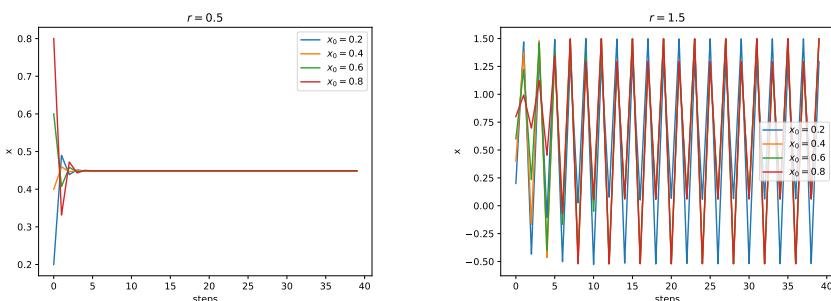
9. 选择另一个你喜欢的函数 $g(x)$, 其在从原点开始的某段区域上是凸函数, 将 $x(1-x)$ 替换成为 $g(X)$, 重复 1-7 问的计算, 说明可以看到类似的现象, 并得到完全相同的 F 值.

解: 将函数选为: $g(x) = 2 - \cosh(x)$, 它是一个 $[0, 1]$ 之间的凸函数, 递推关系可以写为:

$$x_{n+1} = r(2 - \cosh(x)) \quad (16)$$

自治方程的根并不能解析算出.

9-1: 首先令 $r = 0.5, r = 1.5$ 绘制出迭代序列 可以看出 $r = 0.5$ 时迭代序列收敛, 但是 $r = 1.5$ 时迭代序

表 3: $r = 0.5, 1.5$ 时迭代序列收敛的情况

列产生了震荡.

9-2: 由于自治方程的根难以解析求解, 考虑直接绘制出收敛点随 r 的变化关系, 同时在其中观察分岔现象. r 在区间 $[0.1, 1.75]$ 中等距选点 200 个, 选取初始值 $x_0 = 0.5$, 演化 5000 步, 取最后 256 个点作为收敛的点绘制在图中.

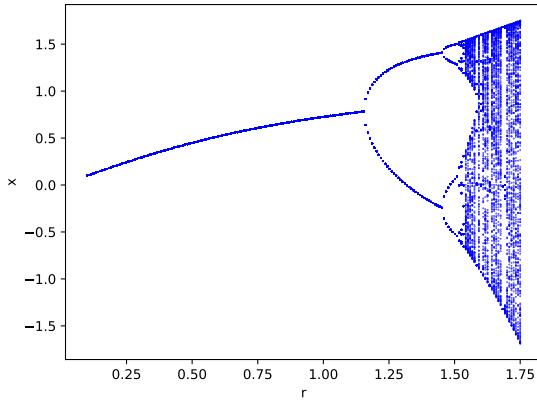


图 14: 收敛点随 r 的变化与分岔现象

9-3: 现在来探究分岔点具体的位置. (原题目中有些解析计算的问题本例中无法重复) 首先给出周期 1 到周期 2 分岔点的示意图, r 在区间 $[1.152, 1.158]$ 中均匀取点 400 个, 初值为 $x_0 = 0.5$, 演化 5000 步取最后 64 个点作为收敛的点,

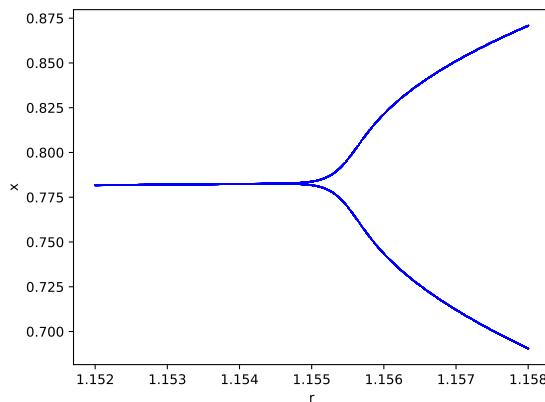


图 15: 周期 1 与周期 2 分岔点附近示意图

分岔点的位置 $r \approx 1.1547$

做出周期 2 到周期 4 分岔的示意图, r 在区间 $[1.450, 1.455]$ 中均匀取点 400 个, 初值为 $x_0 = 0.5$, 演化 5000 步取最后 64 个点作为收敛的点,

分岔点的位置 $r \approx 1.4522$

做出周期 4 到周期 8 分岔的示意图, r 在区间 $[1.50, 1.52]$ 中均匀取点 400 个, 初值为 $x_0 = 0.5$, 演化 5000 步取最后 64 个点作为收敛的点,

分岔点的位置 $r \approx 1.5107$

做出周期 8 到周期 16 分岔的示意图, r 在区间 $[1.52, 1.526]$ 中均匀取点 400 个, 初值为 $x_0 = 0.5$, 演化 10000 步取最后 256 个点作为收敛的点,

分岔点的位置 $r \approx 1.5233$

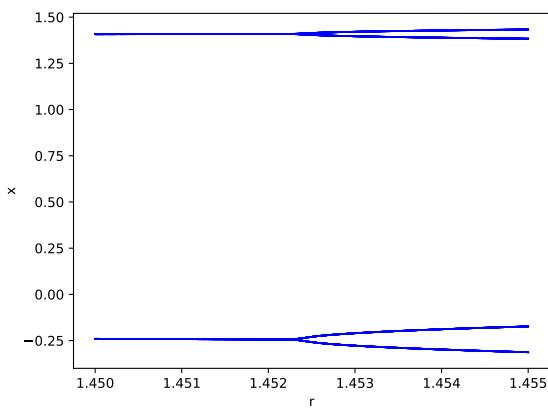


图 16: 周期 2 与周期 4 分岔点附近示意图

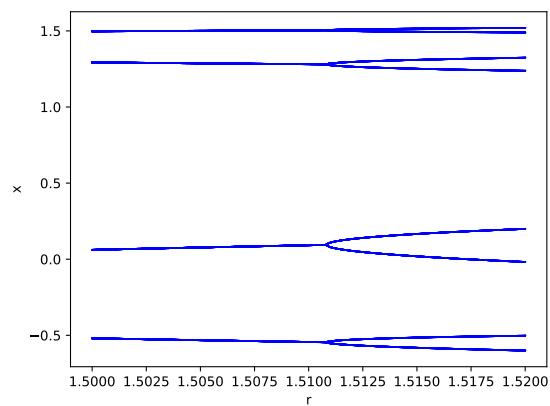


图 17: 周期 4 与周期 8 分岔点附近示意图

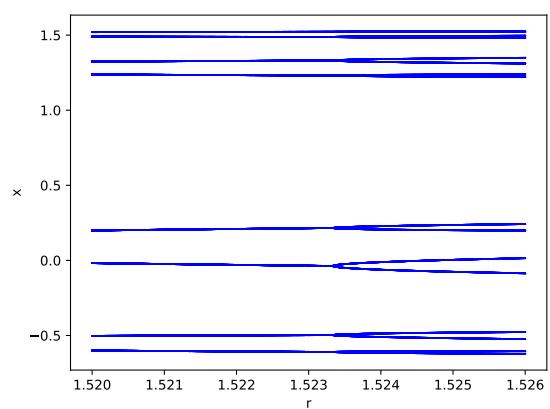


图 18: 周期 8 与周期 16 分岔点附近示意图

做出周期 16 到周期 32 分岔的示意图, r 在区间 $[1.5259, 1.5261]$ 中均匀取点 400 个, 初值为 $x_0 = 0.5$, 演化 10000 步取最后 256 个点作为收敛的点,

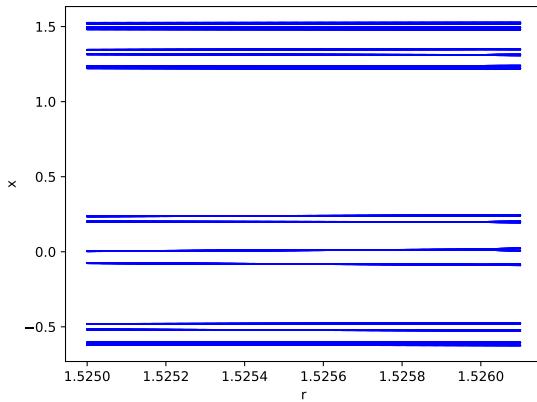


图 19: 周期 16 与周期 32 分岔点附近示意图

分岔点的位置 $r \approx 1.5260$

为了直观起见给出分岔的总览,

有了这些数据后可以直接算出相邻分岔点之间的距离:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta r_1 = 0.2975 \\ \Delta r_2 = 0.0585 \\ \Delta r_3 = 0.0126 \\ \Delta r_4 = 0.0027 \end{array} \right. \quad (17)$$

那么可以计算比值:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = 0.197 \\ F_2 = 0.216 \\ F_3 = 0.222 \end{array} \right. \quad (18)$$

与之前的 F 对比可以看出, 两者基本相等.

