1

1.2 对儿子身高-父亲身高（$s = at + b$）进行回归分析，求出a, b。

考虑直接应用线性回归的结论：

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{\langle s \cdot t\rangle - \langle s\rangle \langle t\rangle}{\langle t^2\rangle - \langle t\rangle^2} = r \\
b &= \frac{\langle t^2\rangle \langle s\rangle - \langle t\rangle \langle s \cdot t\rangle}{\langle t^2\rangle - \langle t\rangle^2} = \mu(1-r)
\end{aligned} \tag{1}
$$

那么回归直线可以表示为:

$$
s = r \cdot t + \mu(1-r) \tag{2}
$$

如果考虑儿子身高由上述回归直线决定，那么：

$$
\langle s\rangle = r \cdot \langle t\rangle + \mu(1-r) \tag{3}
$$

其中平均的含义是**按照t的分布求平均**，如果$\langle t\rangle = \mu$，那么容易看出父亲和儿子的平均身高是相同的。

但是可以从回归直线观察到一个现象，由于$r < 1$，那么当父亲身高增加一定量时，儿子身高增加量小于父亲的身高增加量（但是儿子的身高有一定的初始值，即直线有正的纵轴截距），将回归直线改写为：

$$
s = \mu + r(t-\mu) \tag{4}
$$

可以看出当父亲身高小于平均身高时，儿子的身高高于父亲的身高；当父亲的身高高于平均身高时，儿子的身高小于父亲的身高，这与题干中和阅读材料中描述的“向均值回归”现象所一致。

1.3 对父亲身高-儿子身高（$t = a \cdot s + b$）进行回归分析。利用上一问使用过的公式可以得到：

$$
t = r \cdot s + \mu(1-r) \tag{5}
$$

同样仿照上一问，可以得到儿子和父亲平均身高一样高。

如果将回归直线改写成：

$$t = \mu + r(s - \mu) \tag{6}$$

可以看出当儿子的身高低于平均身高时，父亲的身高高于儿子的身高；当儿子的身高高于平均身高时，父亲的身高低于平均身高。

2

1.连抛三次正面朝上

$$\begin{aligned} P(\text{狄青钱}|\text{连抛三次朝上}) &= \frac{P(\text{连抛三次朝上}|\text{狄青钱})P(\text{狄青钱})}{P(\text{连抛三次朝上})} \\ &= \frac{P(\text{连抛三次朝上}|\text{狄青钱})P(\text{狄青钱})}{P(\text{连抛三次朝上}|\text{狄青钱}) + P(\text{连抛三次朝上}|\text{正常钱})} \\ &= \frac{1 \cdot 1/2}{1 \cdot 1/2 + (1/2)^3 \cdot 1/2} \\ &= \frac{8}{9} \end{aligned} \tag{7}$$

2.连抛四次正面朝上

$$\begin{aligned} P(\text{狄青钱}|\text{连抛四次朝上}) &= \frac{P(\text{连抛四次朝上}|\text{狄青钱})P(\text{狄青钱})}{P(\text{连抛四次朝上})} \\ &= \frac{P(\text{连抛四次朝上}|\text{狄青钱})P(\text{狄青钱})}{P(\text{连抛四次朝上}|\text{狄青钱}) + P(\text{连抛四次朝上}|\text{正常钱})} \\ &= \frac{1 \cdot 1/2}{1 \cdot 1/2 + (1/2)^4 \cdot 1/2} \\ &= \frac{16}{17} \end{aligned} \tag{9}$$

3.第四次抛出后为反面

这个可以不用贝叶斯公式计算，可以直接得出结论是狄青钱的概率为0，否则不会出现反面朝上的情况（当然用贝叶斯公式计算也可以得到同样的结果）。