《理论力学》第三次作业参考答案

1 题目一

1.1 (1)

瞬心在 O 点上方

$$r = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} a \tag{1}$$

1.2 (2)

$$a = \frac{(v_1 + v_2)^2}{4a} \tag{2}$$

2 题目二

$$\lambda_{1,2} = 11I_0, \qquad \lambda_3 = 2I_0 \tag{3}$$

对应归一化了的特征矢量

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

将前两个矢量正交化

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

3 题目三

- 如果
$$\omega^2 < \frac{(4+2\sqrt{2})g}{a} \tag{6}$$
小球会到达另一侧，在对称的位置（$\theta = 7\pi/4$）开始反向运动；

- 如果
$$\omega^2 > \frac{(4+2\sqrt{2})g}{a} \tag{7}$$
那么开始反向运动的位置在同一侧，为
$$\cos\theta = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2g}{a\omega^2}\right) \tag{8}$$

- 如果恰好有
$$\omega^2 = \frac{(4+2\sqrt{2})g}{a} \tag{9}$$
小球会正好停在最底端。

4 题目四

4.1 (1)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{m}{2}\omega^2\left(x^2+y^2\right) = 0 \tag{10}$$

4.2 (2)

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= -(Q_1+Q_2) \\ \frac{dS_1}{dx} &= \sqrt{2mQ_1 - m^2\omega^2x^2} \\ \frac{dS_2}{dy} &= \sqrt{2mQ_2 - m^2\omega^2y^2} \end{aligned} \tag{11}$$

4.3 (3)

第一个式子可以直接解出 $T=-(Q_1+Q_2)t$，剩下两个保留为积分式，于是

$$S(x,y,t)=-(Q_1+Q_2)t+\int\sqrt{2mQ_1-m^2\omega^2x^2}\mathrm{d}x+\int\sqrt{2mQ_2-m^2\omega^2y^2}\mathrm{d}y \tag{12}$$

4.4 (4)

$$\begin{aligned}P_i&=-\frac{\partial S}{\partial Q_i}\\&=t-m\int\frac{\mathrm{d}x_i}{\sqrt{2mQ_i-m^2\omega^2x_i^2}}\\&=t+\frac{1}{\omega}\arccos\left(\frac{m\omega x_i}{\sqrt{2mQ_i}}\right)\end{aligned} \tag{13}$$

因此

$$x_i=-\sqrt{\frac{2Q_i}{m\omega^2}}\cos\left(\omega(t-P_i)\right) \tag{14}$$

4.5 (5)

闭合，椭圆形状（可能退化为线段）。

4.6 (6)

$$S=-Et+M\theta+\int\sqrt{2mE-m^2\omega^2r^2-\frac{M^2}{r^2}}\mathrm{d}r \tag{15}$$

4.7 (7)

首先，若 $M\neq 0$，有

$$\begin{aligned}P&=-\frac{\partial S}{\partial M}\\&=-\theta+\int\frac{M/r^2}{\sqrt{2mE-m^2\omega^2r^2-M^2/r^2}}\mathrm{d}r\\&=-\theta-\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1-M^2u/mE}{\sqrt{1-M^2\omega^2/E^2}}\right)\end{aligned} \tag{16}$$

因此

$$r^2=\frac{M^2/(mE)}{1-\sqrt{1-M^2\omega^2/E^2}\cos\left(2(\theta+P)\right)} \tag{17}$$

或者整理为标准的椭圆形式

$$r = \frac{b}{\sqrt{1-\epsilon^2\cos^2(\theta+\theta_0)}} \tag{18}$$

这里

$$b = \sqrt{\frac{E-\sqrt{E-M^2\omega^2}}{m\omega^2}}, \qquad \epsilon^2 = \frac{2\sqrt{E-M^2\omega^2}}{E+\sqrt{E-M^2\omega^2}} \tag{19}$$

若 $M=0$，则直接得到 $\theta = \mathrm{Const}$，$|r| \leq \sqrt{2E/(m\omega^2)}$，退化为线段。

5 题目五

证明题。