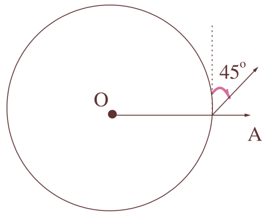
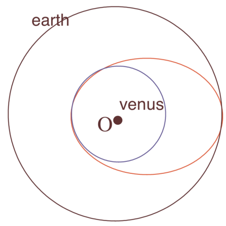
2019-2020 学年春季学期《理论力学 A》第二次作业

要求：请发送一个电子版文档至课程的公共邮箱，文件名和邮件题目请取为“学号 + 姓名 + 作业 2”。因为作业里面免不了要用公式，请提交一个 latex 编辑的作业解答 (用 word 编辑也行，但敲公式会麻烦一些)。交作业时间为五一长假之后 5 月 10 日周日晚 12 点之前。晚交扣 10% 的作业分，晚交一周以上扣 20% 的作业分，晚交两周以上扣 40% 的作业分，超过一个月，作业就不再收了。也就是说，该次作业记为 0 分。

1. 人们通常把航天器达到环绕地球、脱离地球和飞出太阳系所需要的最小发射速度，分别称为第一宇宙速度、第二宇宙速度 (也称脱离速度) 和第三宇宙速度 (也称太阳的逃逸速度)。





   (a) 在地球赤道处以第一宇宙速度的一半和仰角 45° 发射一物体，求该物体以 OA 为极轴的轨道方程。

   (b) 把地球和金星绕太阳运动的轨道都近似看成在同一平面的园，半径分别为 R 和 $0.7R$，现从地面发射一个如图中轨道所示的人造行星去考查金星，发射速度最小为多少?

   (c) 在地球上以第三宇宙速度 v3 正对太阳发射一星体 (正对太阳是指星体基本上飞出地球的引力作用后，相对于地球的速度矢量正好指向太阳)，求其轨道方程 (地球轨道近似看成圆)。

2. 中心力场中的圆轨道 (刘川老师书第三章第 5 题)
   考虑两个质量分别为 m_1 和 m_2 的非相对论性的粒子之间有如下的有心势能相互作用：$U(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = k|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^\beta$，其中 k, β 是两个同号的实常数 (这保证了如果 $\beta > 0$，则 $k > 0$，因此粒子的运动不会跑到无穷远。如果 $\beta < 0$，则 $k < 0$，U 也是一个吸引的势能)。

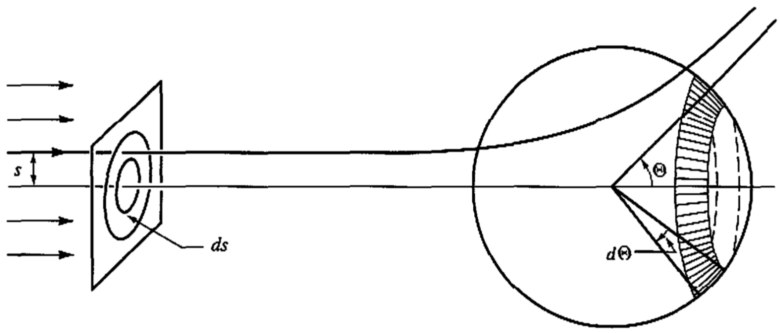
   (a) 写出两粒子体系的拉氏量 L。引入质心坐标 $\vec{R}$ 和相对坐标 $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$，说明这个两体问题可以化为一个单体问题。通过选取质心系，进一步说明这个三维的单体问题可以化为一个折合质量为 m 的，关于径向坐标 $r = |\vec{x}|$ 的一维动力学问题。给出 m 与 m_1，m_2 的关系并写出等效的一维问题的有效势能 $V_{\text{eff}}(r)$。

   (b) 现在考虑这个问题中局限在有限区域的一个圆轨道 (即 $r(t) = r_0$ 为常数)，参数 k 及 β 如何取值才能使在这样的圆轨道附近的扰动是稳定的？

   (c) 考虑圆轨道稳定的情况。这时如果在该稳定圆轨道附近做一个微扰 $r(t) = r_0 + \eta(t)$，说明 $\eta(t)$ 的运动是一个简谐振动，并给出其振动本征频率。

   (d) 当该圆频率与圆轨道的圆频率之比为有理数时，轨道才是闭合的。在 $k > 0, \beta = 15/25$ 和 $k < 0, \beta = -2/9$ 这两种情况下，微扰的轨道是否闭合？如果闭合，请大致画出它的行为。

3. 散射问题：(Goldstein, Chapter 3, Exer 5)



Apply the formulation of the preceding exercise to compute numerically $\Theta(s)$ and the differential cross section of $\sigma(\Theta)$ for the repulsive potential

$$V = \frac{V_0}{1+r} \tag{1}$$

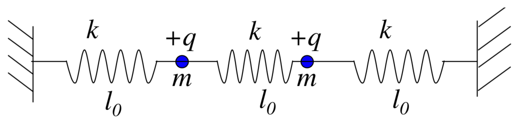
and for a total energy $E = 1.2V_0$. It is suggested that 16-point Gauss-Legendre quadrature will give adequate accuracy. Does the scattering exhibit a rainbow?

4. 汤川势：
从带电粒子在库伦场中的散射出发，我们得到了著名的卢瑟福公式。下面我们把库伦势换成汤川势 (Yuakawa potential),

$$U(r) = -\alpha \frac{e^{-r/a}}{r}, \quad a > 0, \quad \alpha > 0 \tag{2}$$

   (a) 写出质点在汤川势下的运动方程。
   (b) 给出系统的一维有效势；定性地描述在不同的能量和角动量下，运动轨道的特性。
   (c) 假设轨道是近似圆轨道，请证明近心点每个周期进动大约 $\pi\rho/a$，其中 ρ 是轨道半径。
   (d) 考虑质点在汤川势下发生散射，求相应的散射截面微分公式。

5. 两质点由三个弹簧联结在同一直线上运动，质点的质量都是 m，三个弹簧的自然长度都为 l_0 和两边两个弹簧弹性系数为 k，中间为 k'，两固定端点之间的距离为 $3l_0$。



   (a) 如果 $k' = 3k$，求体系的小振动频率。
   (b) 如果 $k' = k$，且每个质点都带正电荷 q(如图所示)，再求体系小振动频率。

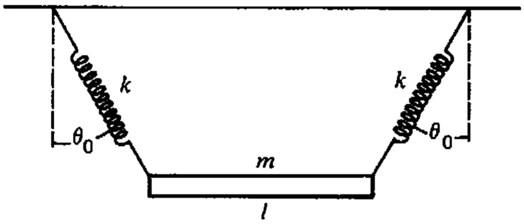
6. 分子振动 (Goldstein, Chapter 6, Exer 7)
In the linear triatomic molecule, suppose that motion in y and z directions is governed by the potentials

$$\begin{aligned} V_y &= \frac{k}{2}(y_2 - y_1)^2 + \frac{k}{2}(y_3 - y_2)^2 \\ V_z &= \frac{k}{2}(z_2 - z_1)^2 + \frac{k}{2}(z_3 - z_2)^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Find the eigenfrequencies for small vibrations in three dimensions and describe the normal modes. What symmetries do the zero frequencies represent?

7. Goldstein, Chapter 6, Exer 11

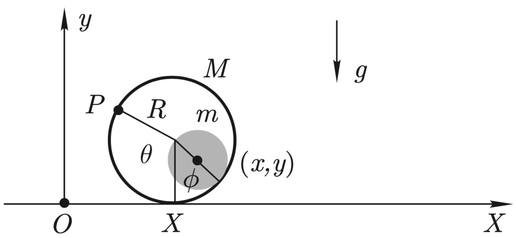
   A uniform bar of length l and mass m is suspended by two equal springs of equilibrium length b and force constant k, as shown in the diagram.



   Find the normal modes of small oscillation in the plane.

8. 圆管中滚动的圆柱体 (刘川老师书第四章第 4 题)

   考虑一个质量均匀分布、总质量为 M、半径为 R 的中空圆管 (厚度可忽略) 在水平平面上做纯滚运动。它的内部有一个质量为 m，半径 $r = R/2$ 的实心圆柱。圆柱在圆管内部也做纯滚. 整个体系处在重力加速度为 g 的重力场中。将 $t = 0$ 时刻圆管上某个固定的点 P 与地面接触的点 O 选为坐标原点，X 轴正方向向右。设在时刻 t，圆管的圆心位置 (也就是与地面接触的点) 的坐标为 $X(t)$，圆心与 P 点连线与垂直方向夹角取为 $\theta(t)$。对圆管内部的圆柱体，定义圆柱体质心的坐标为 (x, y)(x 相对于原点 O，y 相对于地面)。令圆柱中心到圆柱与圆管内壁的接触点半径与垂直方向的夹角记为 $\phi(t)$。我们将用 $(X(t), \theta(t); x(t), y(t), \phi(t))$ 来描写整个力学系统。



   (a) 利用圆管和圆柱的纯滚约束条件给出 $X(t)$ 与 $\theta(t)$ 之间的关系以及圆柱体质心坐标 (x, y) 与 $X(t)$ 以及 $\phi(t)$ 之间的关系 (因此，只需要 θ 和 ϕ 就足以描写整个力学系统了)。

   (b) 将上问得到的约束条件对时间求导，给出广义速度 $(\dot{X}, \dot{x}, \dot{y})$ 与 $(\dot{\theta}, \dot{\phi})$ 之间的关系。

   (c) 给出圆管质心平动的动能及其绕质心转动的动能，用 $\dot{\theta}$ 表达。

   (d) 给出圆柱体平动动能表达式，用 $\dot{\theta}$ 和 $\dot{\phi}$ 表达。

   (e) 计算圆柱体绕其质心的转动动能 (已知半径为 r 的均匀圆柱绕其轴的转动惯量为 $(1/2)mr2$)，特别注意圆柱的角速度不仅仅来自 $\dot{\phi}$, 它还受 $\dot{\theta}$ 影响。

   (f) 写出系统的重力势能并综合以上结果给出整个力学体系的拉格朗日量 $L(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi})$。

   (g) 给出体系的运动方程 (θ 和 ϕ 的)。

   (h) 讨论体系在 $\phi \ll 1$ 附近的小振动的频率。