《理论力学》第二次作业参考解答

1 卫星发射

记地球质量和半径为 M_E 和 R_E，地球的轨道半径为 R，太阳质量为 M_s

1.1 (a)

首先，不难得出第一宇宙速度为 $v_1 = \sqrt{GM_E/R_E}$，因此发射时的角动量和能量分别为

$$J = mR_E \frac{v_1}{2} \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} m\sqrt{GM_E R_E}, \quad E = \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}v_1\right)^2 - \frac{GM_E m}{R_E} = -\frac{7}{8}\frac{GM_E m}{R_E} \tag{1}$$

代入轨道方程

$$\frac{J^2}{m\alpha} = r\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{m\alpha 2}} \cos(\phi + \phi_0)\right) \tag{2}$$

式中 $\alpha = GMm$。再考虑到题目选取的极轴，得到轨道方程为

$$r = \frac{R_E/8}{1 + \frac{5\sqrt{2}}{8}\cos(\phi + \phi_0)} = \frac{R_E/8}{1 - \frac{7}{8}\cos\phi - \frac{1}{8}\sin\phi} \tag{3}$$

1.2 (b)

轨道半长轴 $a = 17R/20$，因此有

$$E = -\frac{GM_s m}{2a} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_s m}{R} \tag{4}$$

由此得出太阳系下的初速度（也就是脱离地球时相对太阳的速度）

$$v = \sqrt{2GM_s\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2a}\right)} = \sqrt{\frac{14}{17}\frac{GM_s}{R}} \tag{5}$$

再进入地球参考系，地球轨道速度为 $v_E = \sqrt{GM_S/R}$，那么发射速度 v_0 满足

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_E m}{R_E} = \frac{1}{2}m(v - v_E)^2 \tag{6}$$

得到

$$v_0 = \sqrt{\frac{31GM_s}{17R} - \frac{2GM_s}{R}\sqrt{\frac{14}{17}} + \frac{2GM_E}{R_E}} \tag{7}$$

1.3 c

第三宇宙速度，表明当脱离地球进入太阳参考系后，物体能正好具有脱离太阳的速度 $\sqrt{2GM_s/R}$，因此相对地球的速度为

$$u = \sqrt{\frac{2GM_s}{R}} - v_E = \left(\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{\frac{GM_s}{R}} \tag{8}$$

按照题述，这个速度并没有与地球轨道速度共线，而是垂直。那么角动量和能量为

$$J = mRv_E, \qquad E = \frac{1}{2}m(u^2 + v_E^2) - \frac{GM_s m}{R} \tag{9}$$

类似第一问，可以得到轨道方程

$$r = \frac{R}{1 + (\sqrt{2} - 1)\sin\phi} \tag{10}$$

这里选取了 $\phi = 0$ 时，$r = R$ 的初条件。

2 中心力场中的圆轨道

2.1 (a)

引入质心坐标和相对坐标

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_2}{m_1 + m_2}, \qquad \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \tag{11}$$

则可以将系统的拉氏量

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - k\left|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\right|^\beta \tag{12}$$

化为

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\dot{x}^2 - k|\mathbf{x}|^\beta \tag{13}$$

而中心力场下角动量守恒，由此不难得到

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \qquad V_{\text{eff}} = \frac{J^2}{2mr^2} + kr^\beta \tag{14}$$

2.2 (b)

首先，圆轨道需要存在，也即

$$\left.\frac{dV_{\text{eff}}}{dr}\right|_{r=r_0} = k\beta r_0^{\beta-1} - \frac{J^2}{mr_0^3} = 0 \tag{15}$$

这要求 $k\beta > 0$。之后，该圆轨道需要稳定，要求

$$\left.\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2}\right|_{r=r_0} = k(\beta^2 + 2\beta)r_0^{\beta-2} > 0 \tag{16}$$

这要求 $k(\beta^2 + 2\beta) > 0$。因此最终

$$k < 0, -2 < \beta < 0 \quad \text{或} \quad k > 0, \beta > 0 \tag{17}$$

2.3 (c)

接上一问，在平衡位置附近将拉氏量展开

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\eta}^2 - V_{\text{eff}} \approx \frac{1}{2}m\dot{\eta}^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2}\right]_{r=r_0}\eta^2 \tag{18}$$

由此直接得到

$$\omega = \sqrt{\frac{\beta(\beta+2)kr_0^{\beta-2}}{m}} \tag{19}$$

2.4 (d)

利用平衡位置和角动量的关系，不难得到圆周运动的频率为

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\beta kr_0^{\beta-2}}{m}} \tag{20}$$

因此 $\omega/\omega_0 = \sqrt{\beta+2}$ 需要为有理数，而

$$\begin{aligned} &k > 0,\ \beta = 15/25,\ \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\sqrt{65}}{5} \\ &k < 0,\ \beta = -2/9,\ \ \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{4}{3} \end{aligned} \tag{21}$$

因此前者不闭合，后者闭合。

3 散射问题

转角公式

$$\phi = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(J/r^2)\,\mathrm{d}r}{\sqrt{2m[E-V(r)]-J^2/r^2}} \tag{22}$$

其中 $r_{\min}$ 是方程 $2m[E-V(r)]-J^2/r^2=0$ 的根，而角动量 $J=\sqrt{2mE}s$，s 为瞄准距离，由此

$$\phi = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{s\mathrm{d}r}{r\sqrt{r^2[1-V(r)/E]-s^2}} \tag{23}$$

散射角 $\chi=\pi-2\phi$。被积函数在 $r\to r_{\min}$ 时会出现一个发散，不适合进行数值积分。

引入变量替换

$$r=\frac{r_{\min}}{1-\rho^2} \tag{24}$$

则可以将散射角写为

$$\chi=\pi-4s\int_0^1 \frac{\rho\mathrm{d}\rho}{\sqrt{r_{\min}^2(1-V/E)-s^2(1-\rho^2)^2}} \tag{25}$$

这个表达式则不再出现任何发散。

数值计算 $\chi(s)$ 如下

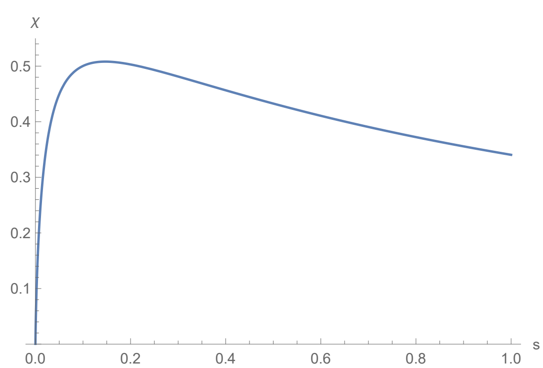

图 1: $s\in[0,1]$

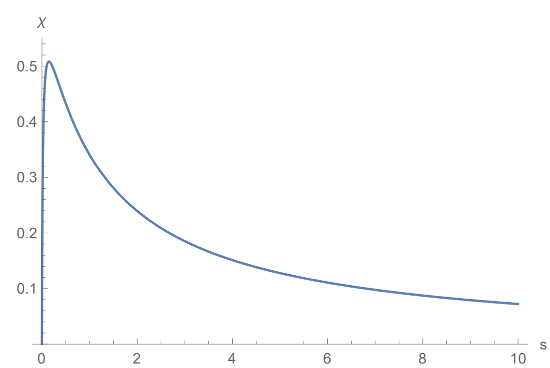

图 2: $s\in[0,10]$

发现 $s=0.15$ 附近偏转角 χ 出现极大值约 0.51，这首先导致微分散射截面在此处会出现一个发散；其次，$s(\chi)$ 将不是单值函数，微分散射截面也会出现两支，因此

$$\sigma(\chi)=\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\chi}=\sum_{i=1,2}\frac{s(\chi)}{\sin\chi}\left|\frac{ds}{d\chi}\right|_i \tag{26}$$

这里 $i=1$ 表示最开始 χ 随 s 单调上升的部分，$i=2$ 则是后续下降的部分。

绘图如下

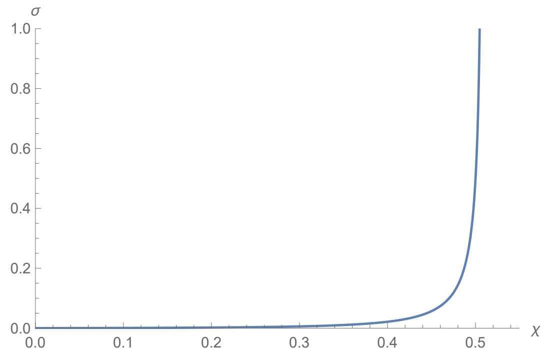

图 3: $i=1$

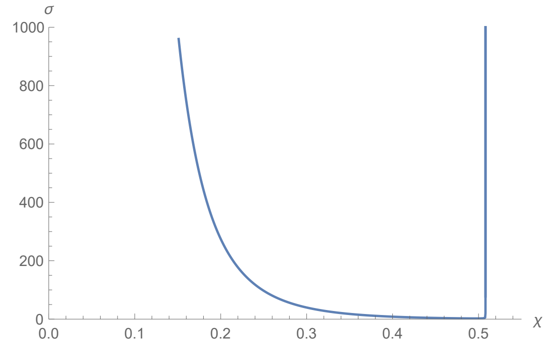

图 4: $i=2$

形成彩虹，我个人的理解是：这一势能的散射存在 $\chi=0$ 和 $\chi=\chi_{\max}$ 两个微分散射截面发散的位置，前者是固定的，但后者的位置随着入射能量会单调变化，因此在这个角度附近就可以形成类似于彩虹的分布。若有其它理解，只要合理即可。

4 汤川势

4.1 (a)

拉氏量

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2\right)-V(r) \tag{27}$$

代入拉氏方程，首先可以得到角动量守恒 $J=mr^2\dot{\phi}$，之后关于 r 的方程则是

$$m\ddot{r}=\frac{J^2}{mr^3}-\alpha e^{-r/a}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{ar}\right) \tag{28}$$

4.2 (b)

有效势能

$$V_{\text{eff}}=\frac{J^2}{2mr^2}-\alpha\frac{e^{-r/a}}{r} \tag{29}$$

作出适当定性分析即可。

4.3 (c)

类似第二题。首先，圆轨道的平衡位置有

$$\left.\frac{dV_{\text{eff}}}{dr}\right|_{r=\rho}=-\frac{J^2}{m\rho^3}+\alpha e^{-\rho/a}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{a\rho}\right)=0 \tag{30}$$

再计算二阶导数

$$\left.\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2}\right|_{r=\rho} = \alpha e^{-\rho/a}\left(\frac{1}{\rho^3}+\frac{1}{a\rho^2}-\frac{1}{a^2\rho}\right) \tag{31}$$

由此，可以得到小振动的频率和圆周运动的频率分别为

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{m}e^{-\rho/a}\left(\frac{1}{\rho^3}+\frac{1}{a\rho^2}-\frac{1}{a^2\rho}\right)}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{m}e^{-\rho/a}\left(\frac{1}{\rho^3}+\frac{1}{a\rho^2}\right)} \tag{32}$$

那么每一周期将会进动

$$2\pi\left(\frac{\omega_0}{\omega}-1\right) = 2\pi\left(\sqrt{\frac{a+\rho}{a+\rho-\rho^2/a}}-1\right) \approx \pi\frac{\rho^2}{a^2} \tag{33}$$

4.4 (d)

散射角有公式

$$\chi = \pi - 2\phi = \pi - 2\int_{r_{\min}}^{\infty}\frac{(J/r^2)\,\mathrm{d}r}{\sqrt{2m[E-V(r)]-J^2/r^2}} \tag{34}$$

其中 $r_{\min}$ 是方程 $2m[E-V(r)]-J^2/r^2=0$ 的根。

利用换元 $u=1/r$，得到

$$\begin{aligned}\phi &= \int_0^{u_0}\frac{J\mathrm{d}u}{\sqrt{2m\left(E+\alpha u e^{-1/au}\right)-M^2u^2}} \\ &\approx \int_0^{u_0}\frac{J\mathrm{d}u}{\sqrt{2m(E+\alpha u-\alpha/a)-M^2u^2}} \\ &= \arccos\left(1\middle/\sqrt{1+\frac{2EJ^2}{m\alpha^2}-\frac{J^2}{\alpha m^2 a}}\right)\end{aligned} \tag{35}$$

由此，再代入 $J=\sqrt{2mE}b$，b 为瞄准距离，就可以得到

$$b = \frac{\alpha}{2E}\sqrt{\frac{1}{1-\alpha/(aE)}}\cot\frac{\chi}{2} \tag{36}$$

最终微分散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{1}{1-\alpha/(aE)}\frac{\alpha^2}{16E^2}\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} \approx \left(1+\frac{\alpha}{aE}\right)\frac{\alpha^2}{16E^2}\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} \tag{37}$$

5 两质点三弹簧

5.1 (a)

两个质点的位矢分别记为 x_1 和 x_2，则有拉氏量

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2\right)-\frac{1}{2}kx_1^2-\frac{1}{2}kx_2^2-\frac{1}{2}k'(x_1-x_2)^2 \tag{38}$$

由此得到

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1&=-\left(k+k'\right)x_1+k'x_2\\ m\ddot{x}_2&=-\left(k+k'\right)x_2+k'x_1 \end{aligned} \tag{39}$$

本征频率可以由行列式得到

$$\begin{vmatrix} k+k'-m\omega^2 & -k' \\ -k' & k+k'-m\omega^2 \end{vmatrix}=0 \tag{40}$$

由此得到

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}},\qquad \omega_2=\sqrt{\frac{2k'+k}{m}}=\sqrt{\frac{7k}{m}} \tag{41}$$

5.2 (b)

此时的拉氏量为

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2\right)-\frac{1}{2}kx_1^2-\frac{1}{2}kx_2^2-\frac{1}{2}k(x_1-x_2)^2+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{(l_0+x_2-x_1)} \tag{42}$$

那么

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1&=-2kx_1+kx_2-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{(l_0+x_2-x_1)^2}\\ m\ddot{x}_2&=-2kx_2+kx_1+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{(l_0+x_2-x_1)^2} \end{aligned} \tag{43}$$

由此，考虑到对称性，平衡位置将改变为 $x_2=-x_1\equiv x_0$，x_0 满足

$$3kx_0=\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\left(l_0+2x_0\right)^2} \tag{44}$$

重新定义 x_1 和 x_2 的原点为新平衡位置，在这附近展开

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -2kx_1 + kx_2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{(l_0+2x_0)^2}(2x_1-2x_2) \\ m\ddot{x}_2 &= -2kx_2 + kx_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{(l_0+2x_0)^2}(2x_1-2x_2) \end{aligned} \tag{45}$$

由此不难得到

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m} + \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 m\left(l_0+2x_0\right)^3}} \tag{46}$$

6 分子振动

分子设为 mMm 型，由于 y, z 方向上具有完全一样的势能，且不同方向不存在耦合，因此处理起来完全一样。三个位矢标记为 u_1, u_2, u_3，有拉氏量

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m\left(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_3^2\right) + \frac{1}{2}M\dot{u}_2^2 - \frac{k}{2}\left(u_2-u_1\right)^2 - \frac{k}{2}\left(u_3-u_2\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{M}_{ij}\dot{u}_i\dot{u}_j - \frac{1}{2}\mathbf{K}_{ij}u_iu_j \end{aligned} \tag{47}$$

其中

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} \tag{48}$$

解本征值 $\det(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M}) = 0$，得到

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k(2m+M)}{mM}} \tag{49}$$

对应的本征矢量为

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2m}{M} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{50}$$

零本征频率代表整体平动，也即反映了空间平移对称性。

7 Goldstein, Chapter 6, Exer 11

杆的质心位置为 x, y，杆与水平方向的夹角为 ϕ。首先有动能

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 \\
&= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{1}{3}(l\dot{\phi}/2)^2\right)
\end{aligned}
\tag{51}
$$

这里利用了 $I = ml^2/12$。

下面计算势能。记两侧弹簧的伸长量为 $\delta b_\pm$。这里将有一个问题：如果考虑重力，弹簧具有初始伸长量 Δb，则 $b = b_0 + \Delta b$，那么

$$
\begin{aligned}
\delta b_\pm &= \sqrt{\left[\left(x \pm \frac{l}{2}\cos\phi\right) \mp \left(\frac{l}{2} + b\sin\theta_0\right)\right]^2 + \left[y \pm \frac{l}{2}\sin\phi - b\cos\theta_0\right]^2} - b_0 \\
&\approx \Delta b - y\cos\theta_0 \mp x\sin\theta_0 \mp \frac{1}{2}l\phi\cos\theta_0 \\
&\quad + \frac{1}{2b}\left[x^2\cos\theta_0^2 + y^2\sin\theta_0^2 + \frac{1}{4}l^2\phi^2\left(\sin\theta_0^2 + \frac{2b}{l}\sin\theta_0\right) - x\left(\frac{1}{2}l\phi\right)2\sin\theta_0\cos\theta_0\right. \\
&\quad \left.\mp xy2\sin\theta_0\cos\theta_0 \pm y\left(\frac{1}{2}l\phi\right)2\sin\theta_0^2\right]
\end{aligned}
\tag{52}
$$

这里 Δb 会作为零阶项出现，因此在平方后，二阶项会进入到势能表达式，导致结果变得特别复杂。简单起见，以下结果均基于忽略 Δb，也即

$$
\delta b_\pm \approx -y\cos\theta_0 \mp x\sin\theta_0 \mp \frac{1}{2}l\phi\cos\theta_0 \tag{53}
$$

那么

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2}k\left(\delta b_+^2 + \delta b_-^2\right) \\
&= k\left(x^2\sin^2\theta_0 + y^2\cos^2\theta_0 + (l\phi/2)^2\cos^2\theta_0 + 2x(l\phi/2)\cos\theta_0\sin\theta_0\right)
\end{aligned}
\tag{54}
$$

由此得到（广义坐标选取为 x、y、$l\phi/2$）

$$
\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m/3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = 2k\begin{pmatrix} \sin^2\theta_0 & 0 & \cos\theta_0\sin\theta_0 \\ 0 & \cos^2\theta_0 & 0 \\ \cos\theta_0\sin\theta_0 & 0 & \cos^2\theta_0 \end{pmatrix} \tag{55}
$$

解本征值问题得到

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}\cos^2\theta_0}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{2k}{m}(1+2\cos^2\theta_0)} \tag{56}$$

对应的本征矢量

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 \\ 0 \\ -\sin\theta_0 \end{pmatrix} \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \eta_3 = \begin{pmatrix} \sin\theta_0 \\ 0 \\ 3\cos\theta_0 \end{pmatrix} \tag{57}$$

如果不忽略 Δb 进行计算，有 $\Delta b = mg/(2k\cos\theta_0)$，可以得到矩阵

$$\mathbf{K} = 2k \begin{pmatrix} \sin^2\theta_0 + \frac{mg\cos\theta_0}{2kb} & 0 & \cos\theta_0\sin\theta_0 - \frac{mg\sin\theta_0}{2kb} \\ 0 & \cos^2\theta_0 + \frac{mg\sin^2\theta_0}{2kb\cos\theta_0} & 0 \\ \cos\theta_0\sin\theta_0 - \frac{mg\sin\theta_0}{2kb} & 0 & \cos^2\theta_0 + \frac{mg\left(2b\sin\theta_0/l+\sin^2\theta_0\right)}{2kb\cos\theta_0} \end{pmatrix} \tag{58}$$

这个本征值问题有一个较为简单的本征频率，对应 y 方向竖直的振动

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}\cos^2\theta_0 + \frac{g}{b}\sin\theta_0\tan\theta_0}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{59}$$

但另外两个本征频率的表达式比较复杂。

8 圆管中滚动的圆柱体

8.1 (a)

$$X = R\theta, \quad x = R\theta + \frac{R}{2}\sin\phi, \quad y = R - \frac{R}{2}\cos\phi \tag{60}$$

8.2 (b)

$$\dot{X} = R\dot{\theta}, \quad \dot{x} = R\dot{\theta} + \frac{R}{2}\cos\phi\dot{\phi}, \quad \dot{y} = \frac{R}{2}\sin\phi\dot{\phi} \tag{61}$$

8.3 (c)

圆管平动动能

$$T_1 = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 \tag{62}$$

圆管转动动能

$$T_2 = \frac{1}{2}I_M\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 \tag{63}$$

8.4 (d)

圆柱体平动动能

$$T_3 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\theta}^2 + \frac{\dot{\phi}^2}{4} + \cos\phi\dot{\theta}\dot{\phi}\right) \tag{64}$$

8.5 (e)

角速度 $\omega = 2\dot{\theta} + \dot{\phi}$，因此

$$T_4 = \frac{1}{2}I_m\omega^2 = \frac{1}{16}mR^2(2\dot{\theta}+\dot{\phi})^2 \tag{65}$$

8.6 (f)

拉氏量

$$L = \left(M + \frac{3}{4}m\right)R^2\dot{\theta}^2 + \left(\frac{1}{2}m\cos\phi + \frac{1}{4}m\right)R^2\dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{3}{16}mR^2\dot{\phi}^2 - mR\left(1 - \frac{1}{2}\cos\phi\right)g \tag{66}$$

8.7 (g)

首先拉氏量不显含 θ，因此

$$\left(2M + \frac{3}{2}m\right)\dot{\theta} + \left(\frac{1}{2}m\cos\phi + \frac{1}{4}m\right)\dot{\phi} = \text{const.} \tag{67}$$

对 ϕ 则有

$$(2+4\cos\phi)\ddot{\theta} + 3\ddot{\phi} - 4\sin\phi\dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{4g}{R}\sin\phi = 0 \tag{68}$$

8.8 (h)

小角度近似下，方程变为

$$\left(2M+\frac{3}{2}m\right)\dot{\theta}+\left(\frac{1}{2}m+\frac{1}{4}m\right)\dot{\phi}=\text{const.} \tag{69}$$

这告诉我们

$$\ddot{\theta}=-\frac{1}{2}\frac{3m}{4M+3m}\ddot{\varphi} \tag{70}$$

因此两个坐标的振动具有同样的频率。而另一个方程变为

$$6\ddot{\theta}+3\ddot{\phi}+\frac{4g}{R}\phi=0 \tag{71}$$

也即

$$\ddot{\phi}+\frac{4M+3m}{3M}\frac{g}{R}\phi=0 \tag{72}$$

因此振动频率

$$\omega=\sqrt{\frac{4M+3m}{3M}\frac{g}{R}} \tag{73}$$