# 2019-2020 学年春季学期《理论力学 A》第一次作业

要求：请发送一个电子版文档至课程的公共邮箱，文件名和邮件题目请取为"学号 + 姓名 + 作业 1"。因为作业里面免不了要用公式，请提交一个 latex 编辑的作业解答 (用 word 编辑也行，但敲公式会麻烦一些)。交作业时间为 4 月 12 日周日晚 12 点之前。晚交扣 10% 的作业分，晚交一周以上扣 20% 的作业分，晚交两周以上扣 40% 的作业分，超过一个月，作业就不再收了。也就是说，该次作业记为 0 分。

1. 一个质点在半径为 $a$ 的圆环上运动。圆环平面保持竖直，并绕其过圆心的竖直轴以匀角速度 $\omega$ 转动。写出质点在重力作用下的运动方程和初积分。$\omega$ 小于何值才能使质点不在底部的某一处平衡，并求此位置。

2. 广义势与广义力：
   一质点受到的作用力由广义势 $U = V(\vec{r}) + \vec{\sigma}\cdot\vec{J}$ 给出，其中 $\vec{r}$ 是质点对固定点 $O$（原点）的矢径，$\vec{J}$ 是对 $O$ 点的角动量，$\vec{\sigma}$ 为空间的常矢量。写出质点所受到的广义力和拉氏方程。（这里，我们把广义力定义为 $Q_i \equiv -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}$。）

3. 洛伦兹变换与四矢量：

   (a) 请证明 d'Alembert 算符 $\Box^2 = \partial_\mu \partial^\mu$ 具有洛伦兹不变性。

   (b) 请证明 $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}$ 是洛伦兹不变量。其中 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ 是电磁场张量。$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ 是 Levi-Civita 符号，按照约定

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = \begin{cases} +1 & \text{if } (\mu,\nu,\alpha,\beta) \text{ is an even permuation of } (0,1,2,3) \\ -1 & \text{if } (\mu,\nu,\alpha,\beta) \text{ is an odd permuation of } (0,1,2,3) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1}$$

4. 变分法：
   过两个点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 作一曲线，使此曲线绕 $y$ 轴旋转所得曲面面积最小，求曲线满足的微分方程。

5. 弯曲时空中粒子的测地线（刘川老师书第二章第 8 题）：
   按照广义相对论的观点，一个外加引力场可以用一个时空依赖的度规张量场 $g_{\mu\nu}(x)$ 来刻画。这时一个相对论性粒子在其中的作用量仍然可以由公式

$$S = -mc\int ds \tag{2}$$

   给出，只不过其中 $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$。该粒子的运动方程仍然可以由最小作用量原理给出。试给出这个协变形式的运动方程。（注意：由于现在度规张量 $g_{\mu\nu}(x)$ 不再是平直时空中的简单形式 $g_{\mu\nu} = (+---)$，因此它的逆 $g^{\mu\nu}(x)$ 也不再简单，而且也不等于 $g_{\mu\nu}(x)$。因此最终的方程中将包含度规张量的各种导数，即所谓的克氏符号 (Christoffel symbol)。）

6. 带电标量介子场与电磁场相互作用：

(a) 四维时空中的自由实标量场 $\phi(x)$ 的拉格朗日密度函数可以写为

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{3}$$

这里我们定义了 $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$、$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$。

相应的作用量定义为

$$S = \int d^4x\, \mathcal{L} \tag{4}$$

请从最小作用量原理出发，证明相应的场方程 (欧拉-拉格朗日方程) 为

$$\left(\Box^2 + m^2\right)\phi = 0 \tag{5}$$

其中 d'Alembert 算符定义为 $\Box^2 = \partial_\mu \partial^\mu$。

(b) 四维时空中的自由复标量场 $\phi(x)$ 的拉格朗日密度函数可以写为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - \frac{1}{2}m^2\phi\phi^* \tag{6}$$

对于复标量场，请写出所有的场方程 (欧拉-拉格朗日方程)。

(c) 容易验证，在 $U(1)$ 变换下

$$\phi(x) \quad \to \quad e^{i\alpha}\phi(x) \tag{7}$$

拉格朗日密度函数 (6) 是不变的。那么，根据诺特定理，必然存在着一个相应的守恒量。请证明，与 $U(1)$ 变换对应的守恒流 $j_\mu = (\partial_\mu \phi)\phi^* - \phi(\partial_\mu \phi^*)$ 满足条件

$$\partial^\mu j_\mu = 0 \tag{8}$$

根据这个条件，我们马上得到

$$Q \equiv \int_{\text{all space}} j^0\, d^3x \tag{9}$$

是一个守恒荷，满足 $\frac{d}{dt}Q = 0$。

(d) 为了表征带电的复标量场与电磁场 $A^\mu$ 相互作用，我们在自由场拉格朗日函数的基础上引入相互作用项

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - \frac{1}{2}m^2\phi\phi^* + j_\mu A^\mu \tag{10}$$

其中 $j_\mu = (\partial_\mu \phi)\phi^* - \phi(\partial_\mu \phi^*)$。请给出相应的场方程，并给出 $\partial^\mu j_\mu =?$ 的等式右边。