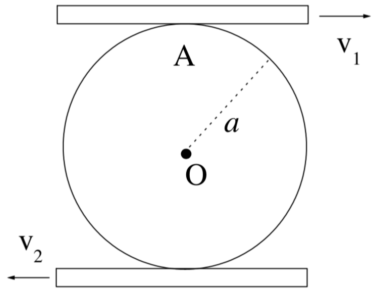
2019-2020 学年春季学期《理论力学 A》第三次作业

要求：请发送一个电子版文档至课程的公共邮箱，文件名和邮件题目请取为"学号 + 姓名 + 作业 2"。因为作业里面免不了要用公式，请提交一个 latex 编辑的作业解答 (用 word 编辑也行，但敲公式会麻烦一些)。交作业时间为 6 月 10 日周三晚 12 点之前。

1. 半径为 a 的圆柱夹在互相平行的两板间, 两板分别以 v_1, v_2 反向运动, 若圆柱和板之间无滑动, 求 (1) 圆柱瞬心的位置; (2) 圆柱与上板的接触点 A 的加速度 (A 点是圆柱上的点)。【所谓瞬心，就是瞬时转动轴。我们可以找到某个时刻的瞬时转动轴，在该时刻，刚体绕着只绕着瞬时转动轴做转动，不做平动。】

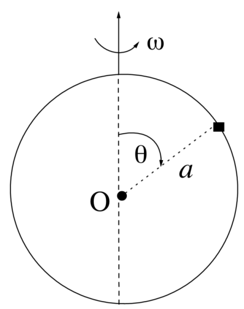


2. 一刚体对定点 O 的惯量张量为

$$(I) = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix} I_0$$

从求解本征值问题找出主轴坐标系的三个轴的方向及其主转动惯量。【惯量张量不一定是定义在质心上的，或者说定点 O 不一定是刚体的质心。】

3. 一半径为 a 的光滑圆环，绕平面内过圆心的铅直轴以恒定的角速度 ω 转动。一质量为 m 的小环套在大环上，由 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 处无初速下滑。问小球滑至何处开始反向，请给出反向处的角度 θ_0？【圆环反向的情况和角速度 ω 有关，需要针对不同的 ω 值进行分析】



4. 二维各向同性谐振子（刘川老师书第六章第 3 题）
考虑一个二维各向同性的谐振子，其哈密顿量为 $H = \vec{p}^2/(2m) + (m/2)\omega^2\vec{x}^2$。我们将利用哈密顿-雅可比方法求解它的运动。

- 在直角坐标中写出作用量函数 $S(\vec{x},t)$ 所满足的哈密顿-雅可比方程。
- 进行分离变量，即令 $S(x_1,x_2,t)=T(t)+S_1(x_1)+S_2(x_2)$，写出 T 及各个 $S_i(x_i)$ 所满足的常微分方程。
- 选取两个方向的机械能为相应的 Q_i, 给出 $T(t)$ 和 $S_i(x_i)$ 的表达式, 从而给出 $S(x,y,t)$ 的完全解 (积分先不着急计算)。
- 利用 $P_i=-\partial S/\partial Q_i$ 定义新的广义动量并给出粒子的轨迹 $x_i(t)$, 说明 P_i 与不同方向上振动的位相相关联。
- 利用上问中粒子的轨迹方程 $x(t)$，说明粒子的轨道是否闭合及其形状。
- 利用哈密顿-雅可比理论在二维极坐标 (r,θ) 中求解同样的力学问题. 极坐标中粒子的哈密顿量为

  $$H=\frac{1}{2m}\left[p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right]+\frac{1}{2}m\omega^2r^2$$

  令 $S(r,\theta,t)=T(t)+\Theta(\theta)+R(r)$ 进行分离变量，给出相应的完全解 (积分表达式即可)。
- 给出粒子的轨道方程 $r(\theta)$ 的显式。这个轨道的形状如何？提示：仅仅需要积出 $r(\theta)$ 的部分，不需要时间依赖 $r(t)$。在完成积分的过程中，你可以令新的变量 $u=1/r^2$，这样可以简化积分并且可以利用下列的积分公式：

  $$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}=\cos^{-1}\left(\frac{b-2x}{\sqrt{b^2+4a}}\right)$$

5. Poisson bracket (Goldstein, Chapter 9, Exer 39)

   - Show from the Poisson bracket condition for conserved quantities that the Runge-Lenz vector $\vec{A}$,

     $$\vec{A}=\vec{p}\times\vec{L}-\frac{mk\vec{r}}{r}$$

     is a constant of the motion for the Kepler problem.
   - Verify the Poisson bracket relations for the components of $\vec{A}$ as given by $[A_i,L_j]=\epsilon_{ijk}A_k$