《理论力学》第一次作业参考解答

1 转动圆环上的质点

自由度为 1，取为质点径矢与竖直轴的夹角 θ。选择转动参考系，则拉氏量写为

$$L = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + mga\cos\theta + \frac{1}{2}m\omega^2a^2\sin^2\theta \tag{1}$$

拉氏量不显含时间 t，因此有能量守恒的初积分

$$E = \dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - L = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - mga\cos\theta - \frac{1}{2}m\omega^2a^2\sin^2\theta \tag{2}$$

拉氏量代入拉氏方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \tag{3}$$

得到

$$ma^2\ddot{\theta} = -mga\sin\theta + m\omega^2a^2\sin\theta\cos\theta = 0 \tag{4}$$

将该运动方程乘上 $d\theta$ 再积分，也可以得到能量守恒。

平衡时要求 $\ddot{\theta} = 0$，则

$$mga\sin\theta = m\omega^2a^2\sin\theta\cos\theta \tag{5}$$

得到平衡时的 θ_0

$$\theta_0 = 0 \quad \text{或} \quad \cos\theta_0 = \frac{g}{\omega^2a} \tag{6}$$

需要考查平衡位置的稳定性，为此将运动方程在平衡位置附近展开

- $\theta_0 = 0$ 附近

$$ma^2\ddot{\theta} \approx (-mga + m\omega^2a^2)\theta \tag{7}$$

因此，如果 $\omega^2 < g/a$，则 θ 有小量偏移后，可以自行回到平衡位置，反之则不能；

- $\cos\theta_0 = \frac{g}{\omega^2a}$ 附近，首先要求 $\omega^2 > g/a$，解才存在

$$
\begin{aligned}
ma^2\ddot{\theta} &\approx (-mga\cos\theta_0 - m\omega^2a^2\sin^2\theta_0 + m\omega^2a^2\cos^2\theta_0)(\theta-\theta_0) \\
&= \left(\frac{mg^2}{\omega^2} - m\omega^2a^2\right)(\theta-\theta_0)
\end{aligned} \tag{8}
$$

因此，该解只要存在，则一定稳定。

2 广义势与广义力

由题给定义，代入广义势

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q} &= -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \mathbf{v}} \\
&= -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{J}) + \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{J}) \\
&= -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} - m(\mathbf{v}\times\boldsymbol{\sigma}) + m\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{r}) \\
&= -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} + 2m\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{v}
\end{aligned} \tag{9}
$$

如果对矢量公式不熟悉，也可以写成分量形式进行推导

$$
\begin{aligned}
Q_i &= -\frac{\partial V}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial q_i}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{J}) + \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{J}) \\
&= -\frac{\partial V}{\partial q_i} - m\frac{\partial}{\partial q_i}(\sigma_j\epsilon_{jkl}q_k\dot{q}_l) + \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(\sigma_j\epsilon_{jkl}q_k\dot{q}_l) \\
&= -\frac{\partial V}{\partial q_i} - m\epsilon_{jil}\dot{q}_l\sigma_j + m\frac{d}{dt}(\epsilon_{jki}\sigma_j q_k) \\
&= \left(-\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} + 2m\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{v}\right)_i
\end{aligned} \tag{10}
$$

由此不难得到运动方程

$$
m\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} + 2m\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{v} \tag{11}
$$

3 洛伦兹变换与四矢量

3.1 d'Alembert 算子

Lorentz 变换后，有

$$
\partial'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu\partial_\nu, \qquad \partial'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\partial^\nu \tag{12}
$$

因此

$$
\Box' = \partial'_\mu\partial'^\mu = \Lambda_\mu{}^\nu\Lambda^\mu{}_\nu\Box = \Box \tag{13}
$$

3.2 $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}$

首先，不难判断电磁场张量是协变的，因此 Lorentz 变换后有

$$\epsilon^{\rho\sigma\tau\eta}F'_{\rho\sigma}F'_{\tau\eta} = \epsilon^{\rho\sigma\tau\eta}\Lambda_\rho{}^\mu\Lambda_\sigma{}^\nu\Lambda_\tau{}^\alpha\Lambda_\eta{}^\beta F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \tag{14}$$

要证明的即是

$$\epsilon^{\rho\sigma\tau\eta}\Lambda_\rho{}^\mu\Lambda_\sigma{}^\nu\Lambda_\tau{}^\alpha\Lambda_\eta{}^\beta = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \tag{15}$$

根据行列式的定义

$$\det\Lambda = \epsilon^{\rho\sigma\tau\eta}\Lambda_\rho{}^0\Lambda_\sigma{}^1\Lambda_\tau{}^2\Lambda_\eta{}^3 \tag{16}$$

通过交换指标，可以普遍写出

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\det\Lambda = \epsilon^{\rho\sigma\tau\eta}\Lambda_\rho{}^\mu\Lambda_\sigma{}^\nu\Lambda_\tau{}^\alpha\Lambda_\eta{}^\beta \tag{17}$$

对于（proper）Lorentz 变换，$\det\Lambda = 1$，完成证明。

注：这里有一个小问题：洛伦兹群是满足 $\Lambda^T g\Lambda = g$ 的群元所构成的群，只能保证 $|\det(\Lambda)| = 1$。而这其中可以通过 $\det(\Lambda)$ 大于 0 或小于 0，以及 Λ_{00} 分量大于 0 或小于 0 将群分成四支，这四支之间则通过时间和空间反演再联系起来。我们通常关注的是 $\det(\Lambda)$ 和 Λ_{00} 分量都大于 0 的一支（proper, orthochronous），一个最显然的原因是，只有这一支包含了恒等变换。熟悉一点群论的同学，也可以类比一下 O(3) 和 SO(3)。

对于这个题目，事实上 $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}$ 是赝标量，在反演下会变一个符号，也就是因为 $\det(\Lambda)$ 可以从 $+1$ 跳到 -1。

4 变分法

绕 y 轴旋转所得面积为

$$S = 2\pi\int_{x_1}^{x_2}|x|\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x \tag{18}$$

因此拉氏量（舍弃一个无关紧要的常系数）$L = |x|\sqrt{1+y'^2}$ 不显含 y，我们直接得到

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0 \tag{19}$$

也即

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{|x|y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \mathrm{Const} \tag{20}$$

5 弯曲时空中粒子的测地线

作用量为

$$S = -mc\int ds = -mc\int \sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}ds \tag{21}$$

其中 $\dot{x}^\mu = dx^\mu/ds$，那么拉氏量（舍弃一个无关紧要的常系数）

$$L = \sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} \tag{22}$$

此时作用量仍然是一个泛函。泛函极值要求拉氏方程

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\rho} - \frac{\partial L}{\partial x^\rho} = 0 \tag{23}$$

现在则可以利用 $L = 1$ 了。我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\rho} - \frac{\partial L}{\partial x^\rho} \\
=&\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}(g_{\mu\rho} + g_{\rho\mu})\dot{x}^\mu\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \\
=&g_{\alpha\rho}\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \frac{1}{2}(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho})\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}
\end{aligned} \tag{24}$$

6 带电标量介子场与电磁场相互作用

6.1 自由实标量场

泛函极值要求拉氏方程

$$\partial_\mu\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \tag{25}$$

于是得到

$$(\Box + m^2)\phi = 0 \tag{26}$$

6.2 自由复标量场

同上一问类似，只是需要将 ϕ 和 $\phi^\star$ 视为两个独立变量[1]。那么

$$\partial_\mu\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \qquad \partial_\mu\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\star)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\star} = 0 \tag{27}$$

[1]这一点可以这样来理解，若有两个独立变量 a, b，则 $\phi = a + ib$ 和 $\phi^\star = a - ib$ 建立起了 $\{\phi, \phi^\star\}$ 和 $\{a, b\}$ 之间的可逆映射，因此 ϕ 和 $\phi^\star$ 也必然是两个独立变量。

得到

$$(\Box + m^2)\phi = 0, \qquad (\Box + m^2)\phi^\star = 0 \tag{28}$$

6.3 守恒流

直接代入题给的守恒流

$$\begin{aligned}\partial^\mu j_\mu &= \partial^\mu \left[(\partial_\mu\phi)\phi^\star - \phi(\partial_\mu\phi^\star)\right] \\ &= (\Box\phi)\phi^\star - \phi(\Box\phi^\star)\end{aligned} \tag{29}$$

再使用上一问求出的运动方程即可得到 0。

6.4 与电磁场的相互作用

同样，代入拉氏方程

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0, \qquad \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\star)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\star} = 0 \tag{30}$$

得到

$$\begin{aligned}(\Box + m^2)\phi - 4(\partial_\mu\phi)A^\mu - 2\phi(\partial_\mu A^\mu) = 0 \\ (\Box + m^2)\phi^\star + 4(\partial_\mu\phi^\star)A^\mu + 2\phi^\star(\partial_\mu A^\mu) = 0\end{aligned} \tag{31}$$

从而

$$\begin{aligned}\partial^\mu j_\mu &= (\Box\phi)\phi^\star - \phi(\Box\phi^\star) \\ &= 4\partial_\mu(\phi\phi^\star A^\mu)\end{aligned} \tag{32}$$