

# 鼓的振动模态

最终提交前需要修改；王崇斌 1800011716

## 1 鼓与振动

### 1.1 鼓的构造

鼓是一种由近似圆柱形的鼓身和鼓身一端或两端蒙上拉紧的膜构成的打击乐器。演奏时通常是演奏者击打圆形的鼓面，鼓面振动发出声音，可以将发声过程看作圆形薄膜的振动过程。但是真实的鼓发声过程并不简单地对应于一个边界固定的圆形薄膜的自由振动（没有耗散，没有外力），比如我们忽略了鼓面的能量耗散：鼓面与空气的相互作用，鼓面本身的阻尼等等。想要建立准确的符合实际的模型，首先需要在物理上对鼓进行分类。

鼓作为振动系统可以分为 3 类 [1]：1. 由单个薄膜与封闭的空气室构成（kettledrums），2. 由单个薄膜和两侧均开放的空气室构成（tom-toms, congas），3. 由两片薄膜与中间封闭的空气室耦合而成（bass drums, snare drums）。可以看到，真实的情况远比理想的薄膜振动要复杂，不仅涉及到鼓面与空气作用导致的能量耗散，甚至涉及到两个鼓面振动的耦合。

### 1.2 膜自由振动波动方程的建立

要想精确描述一个振动过程，必须找到与之对应的波动方程。但是真实的情况非常复杂，只能先从理想的情况开始讨论。我们假设膜上的每一点都在垂直于薄膜平面（平衡位置）的方向上做小振动，这样用一个标量可以完全描述每一点的运动情况，得到的波动方程是标量波动方程。用坐标  $(x, y)$  来标记平衡时每一点的位置，用  $u(x, y)$  来标记与平衡位置的偏离。假设薄膜没有厚度，薄膜的形变不能带来法向的张力，即膜的内部只有平行于薄膜的张力（这个假设与柔软的弦是一样的），很显然这个假设对于平板（和细杆）是不成立的，也就是说将要得到的波动方程并不能描述与它们的振动。

建立波动方程的思路是考虑一小块薄膜的受力情况，写出它对应的运动方程。如下图所示，OABC 表示偏离平衡位置的薄膜，O 点的坐标为  $(x, y)$ 。假设这个薄膜的应力张量为  $\sigma$ ，在最一般的情况下也是位置与时间的函数。可以通过应力张量表示出这个小薄膜的每个边的受力情况：

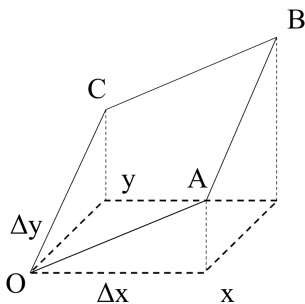


图 1: 受力分析

$$F_{AB,x} = \int_A^B \sigma_{xy} dx + \sigma_{xx} dy \approx \sigma_{xx}(x + \Delta x, y) \Delta y \quad (1)$$

$$F_{AB,y} = \int_A^B \sigma_{yy} dx + \sigma_{yx} dy \approx \sigma_{yx}(x + \Delta x, y) \Delta y \quad (2)$$

$$F_{OC,x} = \int_O^C \sigma_{xy} dx + \sigma_{xx} dy \approx \sigma_{xx}(x, y) \Delta y \quad (3)$$

$$F_{OC,y} = \int_O^C \sigma_{yy} dx + \sigma_{yx} dy \approx \sigma_{yx}(x, y) \Delta y \quad (4)$$

$$F_{OA,x} = \int_O^A \sigma_{xy} dx + \sigma_{xx} dy \approx \sigma_{xy}(x, y) \Delta x \quad (5)$$

$$F_{OA,y} = \int_O^A \sigma_{yy} dx + \sigma_{yx} dy \approx \sigma_{yy}(x, y) \Delta x \quad (6)$$

$$F_{CB,x} = \int_C^B \sigma_{xy} dx + \sigma_{xx} dy \approx \sigma_{xy}(x, y + \Delta y) \Delta x \quad (7)$$

$$F_{CB,y} = \int_C^B \sigma_{yy} dx + \sigma_{yx} dy \approx \sigma_{yy}(x, y + \Delta y) \Delta x \quad (8)$$

上面的约等于在薄膜很小的情况下成立，忽略了一些在后面计算二阶导数时可以忽略的高阶小量。下面将计算每个边的受力在  $z$  方向上的分量（因为我们假设只在  $z$  方向上有运动），假设薄膜只做微小的振动，在这种情况下， $x$  方向的力在  $z$  方向的贡献可以用薄膜沿  $x$  方向的切线与  $x$  轴夹角的正切值，也就是  $\frac{\partial u}{\partial x}$  来衡量；同样的， $y$  方向的力对  $z$  方向的力的贡献可以用  $\frac{\partial u}{\partial y}$  来衡量。那么 AB, CO 两个边对于  $z$  方向的力的贡献为：

$$F_1 = \sigma_{xx}(x + \Delta x, y) \Delta y \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, y) + \sigma_{yx}(x + \Delta x, y) \Delta y \frac{\partial u}{\partial y}(x + \Delta x, y) \quad (9)$$

$$- \sigma_{xx}(x, y) \Delta y \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \sigma_{yx}(x, y) \Delta y \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \quad (10)$$

$$\approx \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \Delta x \Delta y \quad (11)$$

同理 OA, CB 两个边对于  $z$  方向力的贡献为：

$$F_2 \approx \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \sigma_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \Delta x \Delta y \quad (12)$$

那么，根据 Newton 运动定律，薄膜微元的振动方程可以写为：

$$F_1 + F_2 = \rho \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (13)$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \sigma_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (14)$$

这是一般的没有能量耗散的薄膜小振动时所满足的方程，其中应力张量可以是位置和时间的函数，在小振动假设下，一般认为其只是位置的函数。考虑到应力张量总是一个对称张量 [2]，可以将上面的波动方程表示为一个更加紧凑的形式，其中使用了求和约定：

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (15)$$

进一步假设薄膜在平衡时内部的应力张量是一个常量（与位置无关，比如在各个方向均匀地拉伸一个各向同性方形薄膜），同时考虑到这是一个对称张量，那么可以选取一个特殊的直角坐标系使得每一点处的张量都具有对角的形式，方程可以化简为：

$$\sigma_{xx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma_{yy} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (16)$$

如果进一步假设薄膜是各向同性的, 应力张量为一个常数乘上单位张量那么薄膜的小振动方程在任意一个直角坐标系下都可以写成:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad c^2 = \frac{\rho}{\sigma} \quad (17)$$

其中  $c$  称为波速。将要求解的就是这个波动方程, 这是一个理想化的模型, 我们做了足够多的假设。

## 2 固定边界的圆膜的振动

### 2.1 问题的描述

由于鼓面的四周是完全固定的, 在考虑初始条件后可以构成一个定解问题。假设圆膜的半径为  $a$ , 给定初始时刻时圆膜上每一点的位移和速度, 定解问题可以写为:

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla^2 u \\ u|_{x^2+y^2=a^2} = 0 \\ u|_{t=0} = f(x, y), \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g(x, y) \end{cases} \quad (18)$$

由于求解区域的特殊性, 考虑将方程转化到极坐标中, 同时要转换方程与定解条件:

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \\ u|_{\phi=0} = u|_{\phi=2\pi}, \frac{\partial u}{\partial \phi}|_{\phi=0} = \frac{\partial u}{\partial \phi}|_{\phi=2\pi} \\ u|_{r=0} \text{ finit}, u|_{r=a} = 0 \\ u|_{t=0} = F(r, \phi), \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = G(r, \phi) \end{cases} \quad (19)$$

将直角坐标转换成极坐标时, 人为地增添了一些边界条件, 这些边界条件在物理上很好理解: 首先在直角坐标系中原点并不是奇点, 因此转换为极坐标后也得要求原点的解不能发散 (不是奇点); 其次解应该是角度的周期函数, 因为转过  $2\pi$  角度回到圆膜上同一个点, 振动情况完全相同。

也可以给出数学角度的理解 (其中可能包含不严谨的语言): 直角坐标与极坐标之间的变换将一个圆形和一个长方形对应了起来, 但是这个“对应”的性质不总是很好, 首先圆心处映射并不是单射, 圆心对应于长方形的一个边; 其次边界并不对应边界, 圆形的边界对应于长方形的一个边, 圆形区域内部的一条线 (规定  $\phi = 0$  的那条线) 对应于长方形的两个边。这个映射破坏了原本圆形的拓扑, 相当于挖去了圆心后再沿圆心处将圆形剪开, 再把这个图形“连续地”映射成了一个长方形。在计算积分时, 由于“性质不好”的点对于积分的贡献为零, 所以可以使用这个变换计算积分。但是讨论区域上的函数时, 区域的性质会影响其上函数的性质, 最直接的就是影响连续性和可微性, 上面的边界条件相当于将定义在矩形上的函数“沿着某个边粘起来”, 使之可以定义在圆形的区域上。

将要求解的是转化到极坐标后, 与原来问题等价的方程。

### 2.2 没有耗散的情形

上面导出的方程对应于没有耗散的情形, 希望能够通过求解方程给出固定边界圆膜振动的普遍描述。首先假设方程具有满足  $r\phi$  方向边界条件 (不一定满足初始条件) 的分离变量形式的特解:

$$u(r, \phi, t) = v(r, \phi)T(t) \quad (20)$$

将所有分离变量形式的解线性组合使其满足初始条件就可以得到定解问题的解。将这样的解代入方程并分离变量:

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T} = \frac{1}{rv(r, \phi)} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 v(r, \phi)} \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} \quad (21)$$

方程两边没有相同的自变量, 因此只能等于同一个常数, 令其为  $-\lambda$ , 得到两个常微分方程:

$$T''(t) + \lambda c^2 T(t) = 0 \quad (22)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} + \lambda v = 0 \quad (23)$$

其中  $v$  满足的  $r, \phi$  方向上的边界条件与  $u$  的相同, 共同构成一个偏微分方程本征值问题, 求解出所有本征值  $\lambda$  与本征函数并与对应的时间方程的解组合就得到圆膜振动的一个特解, 考虑到本征函数的完备性, 这些解的线性组合可以构成满足任意初始条件的解, 因此研究这个偏微分方程的本征值问题与对应的分离变量的解的性质对于研究圆膜振动有着重要的意义。

为了求解偏微分方程本征值问题, 进一步考虑  $v$  也有分离变量形式的满足边界条件的解  $v(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi)$ , 带入方程分离变量得到:

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \lambda r^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = \mu \quad (24)$$

通过  $v(r, \phi)$  满足的边界条件得到  $R(r), \Phi(\phi)$  满足的边界条件 (直接带入):

$$\begin{cases} R(r)\Phi(0) = R(r)\Phi(2\pi) \\ R(r)\Phi'(0) = R(r)\Phi'(2\pi) \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} R(0)\Phi(\phi) \text{ finit} \\ R(0)\Phi(\phi) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

考虑到  $R, \Phi$  均不恒等于 0 (否则只能给出 0 解), 这些边界条件与分离变量产生的两个微分方程构成了常微分方程本征值问题:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \left( \lambda - \frac{\mu}{r^2} \right) R = 0 \\ R(0) \text{ finit} \\ R(a) = 0 \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \mu \Phi = 0 \\ \Phi(0) = \Phi(2\pi) \\ \Phi'(0) = \Phi'(2\pi) \end{cases} \quad (28)$$

本征值问题 [28] 的解这里不仔细求解 (容易写出方程的通解, 仔细讨论满足边界条件的非平凡解就可以得到本征值和本征函数), 直接给出结论 (可以参考 [3] 第 15 章第 4 节):

$$\begin{cases} \mu = m^2 \\ \Phi_{m1} = \sin(m\phi) \\ \Phi_{m2} = \cos(m\phi) \\ m = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (29)$$

这里注意一下对于同一个本征值  $m^2 \neq 0$  对应两个简并的本征函数; 但当  $m^2 = 0$  时, 仅对应一个本征函数  $\Phi_{02} = 1$ 。

对于本征值问题 [27], 首先将其转化为标准形式, 令  $x = \sqrt{\lambda}r, y = R(r)$ :

$$\begin{cases} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) + \left( 1 - \frac{m^2}{x^2} \right) y = 0 \\ y(0) \text{ finit} \\ y(\sqrt{\lambda}a) = 0 \\ m = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (30)$$

这是一个整数阶 Bessel 方程，其通解可以写为（参考 [3] 第 17 章第 1 节）：

$$y(x) = AJ_m(x) + BN_m(x) \quad (31)$$

其中  $J_m(x)$ ,  $N_m(x)$  为  $m$  阶 Bessel 函数与  $m$  阶 Neumann 函数。由于整数阶 Neumann 函数在 0 处发散，为了满足  $x = 0$  处函数值有界的边界条件，只能要求  $B = 0$ 。带入另一个边界条件可以得到：

$$J_m(\sqrt{\lambda}a) = 0 \quad (32)$$

这意味着需要知道 Bessel 函数的零点进而得到可取的  $\lambda$  值（本征值），用  $\mu_i^{(m)}$  表示  $m$  阶 Bessel 函数的零点（ $i$  是对于不同零点的一个标记）， $\lambda$  满足的条件为：

$$\sqrt{\lambda}a = \mu_i^{(m)} \Rightarrow \lambda = \left(\frac{\mu_i^{(m)}}{a}\right)^2 \quad (33)$$

可以证明 Bessel 函数的零点均对称分布在实轴上 [4]，对于整数阶 Bessel 函数，由于其具有奇偶性 [3]： $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$  因此正根和负根给出线性相关的本征函数，不妨只考虑正根（如果考虑 0 为 Bessel 方程的根即  $\lambda = 0$  的情况，会使得本征函数整体为 0，舍去），每一个本征值  $\lambda_{mi} = \left(\frac{\mu_i^{(m)}}{a}\right)^2$  对应一个本征函数。

至此我们得到了本征值问题 [27] 的解：

$$\begin{cases} \lambda_{mi} = \left(\frac{\mu_i^{(m)}}{a}\right)^2 \\ R_{mi} = J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)}r}{a}\right) \\ i = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (34)$$

其中  $\mu_i^{(m)}$  为  $m$  阶 Bessel 函数的第  $i$  个正零点。与角向方程的本征值问题 [28] 的解组合后可以构成偏微分方程本征值问题 [23] 的解：

$$\begin{cases} \lambda_{mi} = \left(\frac{\mu_i^{(m)}}{a}\right)^2 \\ v_{1mi} = J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)}r}{a}\right) \sin(m\phi) \\ v_{1mi} = J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)}r}{a}\right) \sin(m\phi) \\ m = 0, 1, 2, \dots \quad i = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (35)$$

在得到  $\lambda$  的取值后，可带入时间的方程 [22] 得到对应的  $T(t)$  的通解：

$$T_{mi}(t) = A_{mi} \sin(\omega_{mi}t) + B_{mi} \cos(\omega_{mi}t) \quad \omega_{mi} = \frac{c\mu_i^{(m)}}{a} \quad (36)$$

与对应的  $v_{mi}$  组合后可得到波动方程的特解：

$$\begin{cases} u_{1mi} = \sin(\omega_{mi}t + \phi_{1mi}) J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)}r}{a}\right) \sin(m\phi) \\ u_{2mi} = \sin(\omega_{mi}t + \phi_{2mi}) J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)}r}{a}\right) \sin(m\phi) \end{cases} \quad (37)$$

仔细观察特解 [37] 的特点，它表示圆膜上每一个点都以相同的频率  $\omega_{mi} = \frac{c\mu_i^{(m)}}{a}$  在平衡位置附近振动，振幅的分布用本征函数 [23] 描述，其上有始终不振动的点称为波节，也有振幅为极大值的波腹，这样的波并不向

远处传播而是在一定区域内以固定的模式振动，称其为 **驻波**，描述驻波的特解 [37] 称为 **驻波解**，我们定义驻波解对应的振动模式为圆膜振动的 **振动模态**，使用本征值问题 [23] 的指标  $(m, i)$  来标记每一个振动模态。由之前的讨论可知，定解问题 [19] 的解均可以表示为驻波解的线性组合：

$$u(r, \phi, t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} (A_{mi}u_{1mi} + B_{mi}u_{2mi}) \quad (38)$$

那么圆膜的任意一种振动可以等价地看作不同的振动模态以不同初相位相位振动的叠加（如果单独讨论一个振动模态，解中的相位没有绝对意义，但是讨论多个振动模态的叠加就要考虑振动的相位差）。因此，驻波解（振动模态）不但完备地描述了方程的解，而且具有清晰的物理图像。

## 2.3 振动模态的可视化

## 2.4 真实圆膜的振动

在构建波动方程 [17] 时，只考虑了膜横向张力在法向的分力，但真实的薄膜在振动过程中应考虑空气阻力与膜的法向张力的影响。一般而言，空气阻力使薄膜振动模态的频率降低，而法向张力使薄膜振动模态的频率上升，但是对于薄膜，空气阻力的影响是最主要的 [5]。

事实上空气阻力对于圆膜振动的影响非常复杂，应分为圆膜与自由空气的耦合、圆膜与封闭空气室耦合两种情况讨论。对于后者，圆膜具有圆柱对称性（ $m=0$ ）的振动模态会使得空气不断压缩与膨胀，这时空气压力会加快振动频率同时使振幅衰减很快，而  $m>0$  的振动模态只会使空气室内空气流动，不会压缩空气，这会使得所有非圆柱对称的振动模态频率降低；自由空气不会涉及到压缩与膨胀的问题，因而会降低所有振动模态的频率。

考虑最简单的情况，空气阻力正比于膜振动的速度  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ，将波动方程修改为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + 2b \frac{\partial u}{\partial t} \quad (39)$$

仿照之前分离变量解方程的过程，可看出分离变量后空间部分的方程与 [23] 完全一致，而时间部分的方程变成了：

$$T_{mi}''(t) - 2bT_{mi}'(t) + c^2\lambda_{mi}T_{mi}(t) = 0 \quad (40)$$

当阻尼足够小时（ $b^2 < c^2\lambda$ ）这个方程的通解为：

$$T_{mi}(t) = A_{mi}e^{-bt} \sin(\omega_{mi}'t + \phi_{mi}) \quad \omega_{mi}' = \sqrt{\left(\frac{c\mu_i^{(m)}}{a}\right)^2 - b^2} \quad (41)$$

从上面表达式可以看出，阻尼对于基频  $\omega_{01}$  的降低要比高频更加明显，即：

$$\frac{\omega_{mi}'}{\omega_{01}'} > \frac{\omega_{mi}}{\omega_{01}} \quad \forall i > 1, m > 0 \quad (42)$$

## 3 定音鼓的发声机制

## 4 有固定音高乐器与无固定音高乐器

## 5 致谢

## 参考文献

- [1] Thomas D. Rossing Neville H. Fletcher. *The physics of musical instruments*, pages 497–498. Springer-Verlag, New York, 1991.

- [2] 朗道, 栗弗席兹; 曹富新译. 理论物理学教程 (第七卷) 弹性理论, pages 7–8. 高等教育出版社, 北京, 2009.3.
- [3] 吴崇试. 数学物理方法 (第二版). 北京大学出版社, 北京, 2003.12.
- [4] 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论, pages 305–308. 北京大学出版社, 北京, 2012.5.
- [5] Thomas D. Rossing Neville H. Fletcher. *The physics of musical instruments*, pages 70–71. Springer-Verlag, New York, 1991.