南京大學

本 科 毕 业 论 文

院　　系	数学系
专　　业	基础数学
题　　目	Gamma 函数的 Stirling 级数
年　　级	2005　学号　051110011
学生姓名	陈 天 雳
指导教师	梅 加 强　职称　副 教 授
论文提交日期	二零零九年五月

学　　　　号：　051110011
论文答辩日期：　　　年　月　日
指 导 教 师：　　　　　（签字）

Dissertation for Bachelor of Science

Stirling Series of Gamma Function

Chen Tianpang
Supervised by Professor Mei JiaQiang
Pure Mathematics

Department of Mathematics, Nanjing University

May, 2009

南京大学本科生毕业论文(设计)中文摘要

毕业论文题目: Gamma 函数的 Stirling 级数

数学系 院系 基础数学 专业 2005级本科生姓名: 陈天雩

指导教师(姓名、职称): 梅加强 副教授

摘要:

关于N!的 Stirling 渐近式在分析和概率论中有很大的理论价值, 并且通过它可以得出一些精确的数值计算. 本文的结果是应用通过 Euler-Maclaurin 公式给出 Stirling 公式, 并运用 Gamma 函数的性质和函数的单调性给出 Gamma 函数的 Stirling 公式. 在此过程中用到了 Bernoulli 数和 Bernoulli 多项式.

关键词: 阶乘, Bernoulli 数, Stirling 公式, Γ 函数.

南京大学本科生毕业论文(设计)英文摘要

THESIS: Stirling Series of Gamma Function

DEPARTMENT: Department of Mathematics

SPECIALIZATION: Pure Mathematics

UNDERGRADUATE: Chen Tianpang

MENTOR: Professor Mei JiaQiang

ABSTRACT:

On the Asymptotic analysis and probability theory, The Stirling's formula have great theoretical value. It can be drawn through a number of precise numerical calculation. In this paper we obtain Stirling's formula by using the Euler-Maclaurin formula, and by these we compare the nature of Gamma function and N! function, in the end we obtain Stirling's Series of Gamma Function. In this process we use Bernoulli nonumber and Bernoulli polynomial.

KEYWORDS: Factorial, Bernoulli Numbers, Stirling Formula, Γ function.

目录

中文摘要 **i**

英文摘要 **ii**

第一章　Gamma 函数的 Stirling 级数 **1**

第二章　Stirling 公式余项 δ_n 的估计 **7**

2.1　用 Euler-Maclaurin 公式定性估计 7

2.2　用函数单调性定量估计 9

参考文献 **13**

致谢 **15**

第一章　Gamma 函数的 Stirling 级数

Gamma 函数的 Stirling 公式是 $n!$ 的 Stirling 公式的推广. 本章主要运用 Gamma 函数的性质以及函数的单调性进行推导. Gamma 函数的性质请参阅 **附录B**.

对于正整数的阶乘, 我们有 Stirling 公式作为渐近表示:

$$n! = \sqrt{2\pi\, n}(\frac{n}{e})^n e^{\delta_n},\ \ \delta_n = \frac{1}{12n} + \cdots .$$

将 $\Gamma(s)$ 视为阶乘的推广, 我们来推导类似的渐近表示.

引理1: $\Gamma(s) = \sqrt{2\pi} s^{s-\frac{1}{2}} e^{-s} e^{\mu(s)}$, $(s >\ 0)$, 其中 $\lim\limits_{s\to\infty} \mu(s) = 0$.

证明: 令

$$r(s) = \ln \frac{\Gamma(s)e^s}{\sqrt{2\pi}s^{s-1/2}} = \ln\Gamma(s) + s - (s-1/2)\ln s - \ln\sqrt{2\pi},$$

记 $g(s) = r(s) - r(s+1)$, 利用递推公式 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ 得

$$g(s) = (s+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{s}) - 1.$$

$g(s)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数:

$$g''(s) = \frac{1}{2s^2(s+1)^2} > 0.$$

由 Taylor 展开

$$\ln\frac{1+t}{1-t} = 2(\frac{t}{1} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \cdots)\quad (|\ t\ | < 1)$$

中代入 $t = (2s+1)^{-1}$ 得

$$g(s) = \frac{1}{3(2s+1)^2} + \frac{1}{5(2s+1)^4} + \frac{1}{7(2s+1)^6} + \cdots ,$$

由此得到以下估计

$$0 < g(s) < \frac{1}{3(2s+1)^2}[1 + \frac{1}{(2s+1)^2} + \frac{1}{(2s+1)^4} + \cdots] = \frac{1}{12s(s+1)}.$$

记 $\mu(s) - \sum_{n=0}^{\infty} g(s+n)$, 则上式表明 $\mu(s)$ 在 $(0,+\infty)$ 中内闭一致收敛, 且

$$0 < g(s) < \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{s+n} - \frac{1}{s+n+1}) = \frac{1}{12s}.$$

因为 $g(s)$ 为凸函数, 故 $\mu(s)$ 也是凸函数, 根据定义,

$$\mu(1) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n) = \sum_{n=1}^{\infty}[r(n) - r(n+1)] = r(1) = 1 - \ln\sqrt{2\pi}.$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty} r(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$ 是因为我们已经有了阶乘的 Stirling 公式. 记 $f(s) = \sqrt{2\pi}s^{s-\frac{1}{2}}e^{-s}e^{\mu(s)}$, 要证明引理，只需验证 $f(s)$ 满足 **定理B.1** (Bohr-Mollerup) 的三个条件即可. 首先有

$$\frac{f(s+1)}{f(s)} = (1+\frac{1}{s})^{s+\frac{1}{2}}se^{-1}e^{-g(s)} = s,$$

这说明 f 满足第一个条件. 第二个条件:

$$f(1) = \sqrt{2\pi}e^{-1}e^{\mu(1)} = 1.$$

第三个条件:

$$\ln f(s) = \ln\sqrt{2\pi} + (s-1/2)\ln s - s + \mu(s),$$

这是凸函数的和, 因此 $\ln f$ 是凸函数. 根据**定理B.1** 我们就证明了引理.

引理2: **引理1** 中的 $\mu(s)$ 是单调递减趋于 0 的.

证明:由 **附录B** 中的 **定理B.2** 知

$$\ln\Gamma(s) = -\gamma\, s - \ln s - \sum_{n=1}^{\infty}[s/n - \ln(1+s/n)],$$

逐项求导, 得

$$(\ln\Gamma(s))' = -\gamma - \frac{1}{s} - \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n} - \frac{1}{s+n}],$$

这个级数在 $(0,\ +\infty)$ 中内闭一致收敛, 因此逐项求导是可行的. 利用 Euler 常数的定义, 有

$$\begin{aligned}(\ln\Gamma(s))' &= \lim_{n\to\infty}[\ln n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}]-\frac{1}{s}-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}[\frac{1}{k}-\frac{1}{s+k}]\\ &= \lim_{n\to\infty}[\ln n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s+k}]-\frac{1}{s}.\end{aligned}$$

因为 $\psi(t)=\frac{1}{t+s}$ 是凸函数, 故

$$\int_{k}^{k+1}\frac{dt}{t+s}<\frac{1}{2}[\frac{1}{t+s+k}+\frac{1}{t+s+k+1}],\ \ k\geq\ 0.$$

因此有

$$\frac{1}{2}\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}+\cdots+\frac{1}{s+n}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+n+1}>\sum_{k=0}^{n+1}\int_{k}^{k+1}\frac{dt}{t+s}=\ln(s+n+1)-\ln s,$$

这说明

$$(\ln\Gamma(s))'\ \leq\lim_{n\to\infty}[\ln n-\ln(s+n+1)+\ln s+\frac{1}{2s}+\frac{1}{2(s+n+1)}]-\frac{1}{s}=\ln s-\frac{1}{2s},$$

从而

$$\gamma'(s)=(\ln\Gamma(s))'+1-\ln s-(s-\frac{1}{2})\frac{1}{s}\leq\ 0.$$

于是说明 $\gamma(s)$ 是单调递减的. 由 **引理1** 知 $\gamma(s)=\mu(s)$, 即引理得证.

由 **引理1** 和 **引理2** 可知

$$\mu(s)=\ln(\frac{\Gamma(s)e^{s}}{\sqrt{2\pi}s^{s-\frac{1}{2}}}),\ \ s>0,\ \ \lim_{s\to\infty}\mu(s)=0.$$

且 $\mu(s)$ 是单调递减的趋于 0.

我们现在要像第二章中对 δ_n 估计一样, 对 $\mu(s)$ 进行确切的估计. 事实上, 我们可以证明:

$$\mu(s)\ \simeq\frac{1}{12s}-\frac{1}{360s^{3}}+\frac{1}{1260s^{5}}-\frac{1}{1680s^{7}}+\frac{1}{1188s^{9}}-\cdots,\ \ \forall\, s>0. \tag{1.1}$$

上面的系数是第二章 (2.7) 中的系数. 上式等价于对 $s>0$ 有

$$0<\mu(s)\ \ <\ \ \frac{1}{12s}, \tag{1.2}$$

$$\frac{1}{12s}-\frac{1}{360s^{3}}\ \ <\ \ \mu(s)<\frac{1}{12s}, \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{12s}-\frac{1}{360s^3} &< \mu(s) < \frac{1}{12s}-\frac{1}{360s^3}+\frac{1}{1260s^5}, \\ \cdots &< \cdots.\end{aligned} \tag{1.4}$$

对于 $\forall\ s_0 > 0$ 令

$$\rho_n(s_0)\ = \rho(s_0+n) \quad (n =\ 0,1,2,\cdots)$$

由 **引理1**, 可知序列 $\rho_n(s_0)$ 趋向于 0. 让该序列递减, 只须

$$\rho_{n+1}(s_0)-\rho_n(s_0) = 1-(s_0+n+\frac{1}{2})\ln(a+\frac{1}{s_0+n}) < 0, \quad \forall\, n > 0.$$

只须

$$f(x) = \ln(1+\frac{1}{s_0+x})-\frac{1}{s_0+x+\frac{1}{2}} > 0 \quad \forall\, x > 0.$$

这是显然的. 因为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ 且

$$f'(x) = -\frac{1}{(s_0+x)(s_0+x+1)(2s_0+2x+1)^2} < 0, \quad \forall\, x > 0.$$

故序列 $\rho_n(s_0)$ 递减趋向于 0. 由于 s_0 是任意的, 故 $\mu(s) > 0$, $(s > 0)$ 成立.

(注意：我们的证明过程并没有用到 $\mu(s)$ 是递减趋于 0 的, 只是用到构造的序列是递减的).

下面我们来证明 (1.2) 式的成立. $\forall\ s_0 > 0$ 依照 **第二章** 的 **第一步** 我们只须令

$$\alpha_n(s_0) = \gamma(s_0+n)-\frac{A}{s_0+n} \quad (n = 0,1,2,\cdots).$$

寻找使序列 $\alpha_n(s_0)$ 递增的 A 的值. 仿照 **第二章** 过程做下去，就会得到式子 (1.2), 依次做下去就会得到式子 (1.3), (1.4) 进而得到 $\mu(s)$ 的估计式:

$$\mu(s)\ \simeq \frac{1}{12s}-\frac{1}{360s^3}+\frac{1}{1260s^5}-\frac{1}{1680s^7}+\frac{1}{1188s^9}-\cdots, \ \forall\, s > 0. \tag{1.5}$$

故 Gamma 函数的 Stirling 级数为:

$$\Gamma(s) = \sqrt{2\pi}s^{s-\frac{1}{2}}e^{-s}e^{\mu(s)},$$

其中

$$\mu(s)\ \simeq \frac{1}{12s}-\frac{1}{360s^3}+\frac{1}{1260s^5}-\frac{1}{1680s^7}+\frac{1}{1188s^9}-\cdots.$$

第二章　Stirling 公式余项 δ_n 的估计

对于正整数的阶乘, 我们有 Stirling 公式作为渐近表示:

$$n! = \sqrt{2\pi\, n}(\frac{n}{e})^n e^{\delta_n}, \delta_n = \frac{1}{12n} + \cdots .\ \ \delta_n \to\ 0,\ \ (n \to \infty)$$

本章主要用两种方法估计 δ_n: 函数的单调性定量估计(引自[6])和 Euler-Maclaurin 公式定性估计(引自[1]).

2.1　用 Euler-Maclaurin 公式定性估计

由 **附录B**的 $(B.1)$ 知: (Euler-Maclaurin公式)

$$\begin{aligned}\int_0^1\ f(s)ds = \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] - \sum_{k=1}^{m+1}\frac{B_{2k}}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)] \\ + \frac{1}{(2m+2)!}\int_0^1 B_{2m+2}(s) f^{(2m+2)}(s)ds,\end{aligned} \tag{2.1}$$

现在我们假设 f^{2m} 和 f^{2m+2} 在 $[0,1]$ 上具有相同的符号, 利用两次分部积分, 我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^1 (B_{2m}(s) - B_{2m}) f^{(2m)}(s)ds = -B_{2m}[f^{(2m-1)}(1) - f^{(2m-1)}(0)] \\ + \frac{1}{2m+2}\int_0^1 (B_{2m+2}(t) - B_{2m+2}) f^{(2m+2)}(s)ds,\end{aligned}$$

根据 **附录A** Bernoulli 多项式的**性质4**和**性质5**, 可知上式左边和右边第二项符号相反, 因而左边的符号与右边的第一项的符号相同，且存在 $\theta \in (0,\ 1)$, 使得

$$\int_0^1 (B_{2m}(s) - B_{2m}) f^{(2m)}(s)ds = -\theta \cdot\ B_{2m}[f^{(2m-1)}(1) - f^{(2m-1)}(0)].$$

这个结果可以作到一般区间 $[a,\ b]$ 中去.

下面我们考虑定义在 $(1,+\infty)$ 的函数 $f(t)$. 假设

(*) f^{2k}都具有相同的符号, 且 $f^{(2k+1)} \to 0\ (t \to \infty)$.

考虑 $f(t)$ 在区间 $[1,n]$ 上的积分. 将 $[1,n]$ 作 $n-1$ 等分, 在每一个小区间上运用 (2.1) 可以得到

$$\int_1^n f(t)dt = \sum_{i=1}^n f(i) - \frac{1}{2}f(n) - \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n) + R_n,$$

其中

$$\begin{aligned} R_n = & -\frac{1}{2}f(1) - \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(1) \\ & + \frac{1}{(2m+2)!} \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^1 (B_{2m+2}(t) - B_{2m+2}) f^{(2m+2)}(i+t)dt, \end{aligned}$$

由条件 $(*)$不难看出极限 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n$ 存在，记为 R, 于是

$$R_n - R = \frac{1}{(2m+2)!} \sum_{i=n}^{\infty} \int_0^1 (B_{2m+2}(t) - B_{2m+2}) f^{(2m+2)}(i+t)dt,$$

根据与上面类似的讨论并利用 $(*)$ 可以得到 $\theta_n \in (0,\ 1)$, 使得

$$R_n - R = -\theta_n \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(n),$$

于是得到下面的公式

$$\begin{aligned} \int_1^n f(t)dt = & \sum_{i=1}^n f(i) - \frac{1}{2}f(n) - \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n) \\ & + R - \theta_n \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} f^{(2m+1)}(n), \theta_n \in (0,\ 1). \end{aligned}$$

对函数 $f(t) = \ln t$ 用这个公式，得

$$\begin{aligned} n\ln n - n = & C + \ln(n!) - \frac{1}{2}\ln n - \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} \frac{1}{n^{2k-1}} \\ & - \theta_n \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)(2m+1)} \frac{1}{n^{2k+1}}, \theta_n \in (0,\ 1). \end{aligned} \tag{2.2}$$

把 $n! = \sqrt{2\pi\, n}(\frac{n}{e})^n e^{\delta_n}$ 代入 (2.2) 中，并令 $n \to \infty$ 可得 $C = -\frac{1}{2}\ln 2\pi$,且得到 $\mu(n)$ 如下展

式 (∗∗) (后面会用到)

$$\mu(n)=\sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)}\frac{1}{n^{2k-1}}+\theta_n\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)(2m+1)}\frac{1}{n^{2m+1}},\theta_n\in(0,1).$$

例如，取 $m=1$ 得

$$\mu(n)=\frac{B_2}{2}\frac{1}{n}+\theta_n\frac{B_4}{12}\frac{1}{n^3}=\frac{1}{12n}-\frac{\theta_n}{360n^3},\theta_n\in(0,\ 1).$$

再取 $m=2$ 得

$$\mu(n)=\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^3}+\frac{\theta_n}{1260n^5},\theta_n\in(0,\ 1).$$

故可写为:

$$n!=n^ne^{-n}\sqrt{2\pi\,n}(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}-\frac{139}{51480n^3}-\frac{571}{2488320n^4}+\cdots).$$

此即我们所得到的 **Stirling 公式余项** δ_n **估计**.

2.2 用函数单调性定量估计

由上知 δ_n 可以写为

$$\delta_n=\ln\frac{n!e^n}{\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots).$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n\ =0.$$

有很多定量的形式关于 δ_n 估计. 给出它的上界和下界,为了精确,由于 $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ 故 δ_n 可被一致的写为 (∗ ∗ ∗∗) (后面会用到)

$$\delta_n\ \simeq\ \frac{A}{n}-\frac{B}{n^3}+\frac{C}{n^5}-\frac{D}{n^7}+\cdots,$$

这里的 $\simeq$ 是指 δ_n 在于两个逼近序列之间.事实上由上面的 Euler-Maclaurin 估计可以看出,下面我们通过一个简单的技巧介绍怎么计算固定的常数 $A,B,C,\cdots$.并且证明通过这种方法得到的是最好的.

下面我们引入一个显然的结论,记为**引理2.1**.

引理2.1 假如 $f(x)$ 是严格的递减 (递增) 当 $x>0$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, 那么有 $f(x)>0$ $(f(x)<$

0), $\forall\, x > 0$.

定理2.1: 序列 δ_n 是严格的递减并且趋向于 0 .

证明: 我们有

$$\delta_{n+1} - \delta_n = 1 - (n + \frac{1}{2}) \ln (1 + \frac{1}{n}).$$

欲证 δ_n 递减，只须 $\ln (1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n+\frac{1}{2}} > 0, \forall\, n > 0$.令

$$f(x) = \ln (1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{x + \frac{1}{2}}$$

由于 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ 且 $f'(x) = -\frac{1}{x(x+1)(2x+1)} < 0$,当 $x > 0$ 时，故由 **引理2.1** 可得 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 是严格递减的.当 x 取正整数时可知 $\ln (1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n+\frac{1}{2}} > 0$ 故定理得证.

下面计算 $A, B, C, \cdots$.

第一步: 确定 A ,使得 $0 < \delta_n < \frac{A}{n}, \forall\, n > 0$.

由于 δ_n 趋向于 0 ,$a_n = \delta_n - \frac{A}{n}$也是趋向于 0 的.由 **引理2.1** 可知,任何 $A > 0$ 使 a_n 严格递增的关于 n 的函数都满足我们的要求.于是有

$$a_{n+1} - a_n = 1 - (n + \frac{1}{2}) \ln (1 + \frac{1}{n}) + A(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) > 0, \forall\, n > 0$$

只须

$$g(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{2}} - \ln(1 + \frac{1}{x}) + A\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{x + \frac{1}{2}} > 0, \forall\, x > 0$$

欲使上式成立,由于 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$,由 **引理2.1** 只须

$$g'(x) = \frac{x(1+x) - A(12x^2 + 12x + 2)}{x^2(x+1)^2(2x+1)^2} < 0, \forall\, x > 0 \tag{2.3}$$

只须

$$A > \frac{x(x+1)}{12x^2 + 12x + 2}, \forall\, x > 0 \tag{2.4}$$

由于(2.4)式右边的导数

$$\frac{x+1}{2(6x^2 + 6x + 1)^2} > 0, \forall\, x > 0$$

故(2.4)式右边递增的趋向于 $\frac{1}{12}$.因此 A 的最佳选择为 $\frac{1}{12}$.

定理2.2: $0 < \delta_n < \frac{1}{12n}, \forall\, n > 0$ 中的固定常数 $\frac{1}{12}$ 不能再改进.

证明: 取常数 A' 代替 A 使得 $0 < A' < \frac{1}{12}$.我们知道 (4.4) 式右边的函数递增的趋向于 $\frac{1}{12}$.由于 A' 比右边小,当右边的 x 充分大时.故存在 X ,使得 $g'(x) > 0, \forall\, x > X$.于是由 **引理2.1**

有 $g(x) < 0, \forall x > X$, 且 $a_{n+1} - a_n < 0$ 对于某个 $n = N$.于是 $a_n > 0, \forall n > N$,最终 $\delta_n > A', \forall n > N$.矛盾!即定理得证.

第二步: 确定 B ,使得 $\frac{1}{12n} - \frac{B}{n^3} < \delta_n < \frac{1}{12n}, \forall n > 0$.
由于 δ_n 趋向于 0 ,$b_n = \delta_n - \frac{1}{12n} + \frac{B}{n^3}$也是趋向于 0 的.由 **引理2.1** 可知,任何 $B > 0$ 使 a_n 严格递减的关于 n 的函数都满足我们的要求.于是有

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= 1 - (n + \frac{1}{2}) \ln(1 + \frac{1}{n}) \\ &\quad + \frac{1}{12}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) - B(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3}) < 0, \forall n > 0 \end{aligned}$$

只须

$$h(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{2}} - \ln(1 + \frac{1}{x}) + \frac{1}{12} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{x + \frac{1}{2}} - B \frac{\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3}}{x + \frac{1}{2}} < 0, \forall x > 0$$

欲使上式成立,由于 $\lim_{x \to \infty} h(x) = 0$,由 **引理2.1** 只须

$$h'(x) = -\frac{x^2(1+x)^2 - 12B(30x^4 + 60x^3 + 50x^2 + 20x + 3)}{6x^4(1+x)^4(2x+1)^2} > 0, \forall x > 0 \tag{2.5}$$

只须

$$B > \frac{x^2(1+x)^2}{12(30x^4 + 60x^3 + 50x^2 + 20x + 3)}, \forall x > 0 \tag{2.6}$$

由于(2.6)式右边的导数

$$\frac{x(20x^4 + 50x^3 + 46x^2 + 19x + 3}{6(30x^4 + 60x^3 + 50x^2 + 20x + 3)^2} > 0, \forall x > 0$$

故(2.6)式右边递增的趋向于 $\frac{1}{360}$.因此 B 的最佳选择为 $\frac{1}{360}$.

定理2.3: $\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} < \delta_n < \frac{1}{12n}, \forall n > 0$ 中的固定常数 $\frac{1}{360}$ 不能再改进.
证明过程仿照 **定理2.2:** 的证明.

按照这样继续下去，我们得到常数 $C = \frac{1}{1260}, D = \frac{1}{1680}, \cdots$,并且可以得证 $(***)$ (后面会到)

$$\delta_n \simeq \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} - \frac{1}{1680n^7} + \frac{1}{1188n^9} - \cdots . \tag{2.7}$$

这些只是需要耐心的计算就可以得到.

注:仔细比较两种方法中的 $(**), (***), (****)$ 你会发现 δ_n 中的常数可知

$$A = \frac{B_2}{1 \cdot 2}, B = -\frac{B_4}{3 \cdot 4}, C = \frac{B_6}{5 \cdot 6}, D = -\frac{B_8}{7 \cdot 8}, \cdots$$

其中 $B_i\,(i\ =2,4,6,\cdots)$ 是 **附录A** 中的 Bernoulli 数,详情请看 **附录A** .

参考文献

[1] 梅加强, 数学分析讲义, 2008年

[2] 菲赫金哥尔茨, 微积分教程, 北京大学出版社, 1989年

[3] 张筑生. 数学分析新讲, 北京大学出版社, 1991年

[4] A.J.Maria, A remark on Stirling's formula, American Mathematical Monthly 72(1965) 1096-1098

[5] J.M.Patink, A very short proof of Stirling's formula, American Mathematical Monthly 96(1989) 41-42

[6] Chris Impens, Stirling's Series Made Easy, American Mathematical Monthly (2004) 64-66

致　谢

值在论文完成之际,谨向此多年给我关心和帮助的老师,同学,朋友和家人表示衷心的感谢!尤其是要感谢我的导师梅加强教授.梅老师在我毕业论文的选题,资料收集给予了悉心帮助,在论文的写作过程中提出了许多建设性意见,我的论文得以顺利完成离不开梅老师的精心指导.为此我谨表示衷心的感谢.梅老师渊博的知识, 严谨求实的治学态度, 谦虚低调的处事风格, 诲人不倦的崇高师德使我受益匪浅. 为我在以后的学习工作树立了榜样.

其次,我还要感谢数学系教育和培养过我的其他老师们,感谢那些陪我一路走过来的同学们,他们给予了很多帮助和鼓励, 正是有他们在一起的日子里, 我的本科生学习和生活才是如此的充实而愉快.我想,这段美好的时光会一直伴随着我,永生难忘.最后,我要感谢我的家人一直以来给予的无私的爱和关怀.