TEB问题描述

问题定义

- 二维空间给定起点和目标点姿态

Star_PoseSE2 = [0, 0, -pi]
End_PoseSE2 = [2, 2, pi/3]

- 在[[0.5, 0.75], [1.5, 1.25]]处有两个点障碍,

Obs_Pose=[[0.5, 0.75], [1.5, 1.25]]

- 最大速度限制

$$v \in [-v_{max}, v_{max}]$$
$$\omega \in [-\omega_{max}, \omega_{max}]$$

- 底盘为 car_like模型 tricycle_dynamics

最小转弯半径为r_{min}

求解连接起点和目标点在与障碍保证安全的前提下, 轨迹长度相对短, 轨迹耗时相对少且符合运动学模型的轨迹序列

问题描述

条件

需要在起点和目标点之间生成指定n个轨迹点

变量定义

- 定义轨迹序列 $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^{n+1}$，其中 $\mathbf{x}_i = [x_i, y_i, \theta_i]$ 表示第 i 个轨迹点的位置，满足以下边界条件：

$$\mathbf{x}_0 = [0, 0, -\pi], \quad \mathbf{x}_{n+1} = [2, 2, \pi/3]$$

- 定义相邻轨迹点时间差 $\mathbf{T} = \{\Delta T_i\}_{i=0}^{n}$, 其中 ΔT_i 表示轨迹点 $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}$ 之间的时间差
- 定义障碍序列$\mathbf{O} = \{\mathbf{o}_j\}_{j=0}^{m}$，其中 $\mathbf{o}_j = [x_j, y_j]$ 表示第 j 个障碍点的位置

约束

- **生成的路径点构成的总长度尽量短**

⚠️约束的$\mathbf{x}_i$为仅含有$[x,y]$的二维向量

$$f_{path}(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_{i+1}) = ||\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_{i+1}||_2, \quad i\in[0,1,...,n]$$

- **轨迹耗时相对短**

$$f_T(\Delta T_i)=\Delta T_i, \quad i\in[0,1,..,n]$$

- **生成的路径点障碍物保持安全距离**`Safe_Dis = 0.3m`

⚠️约束的$\mathbf{x}_i$为仅含有$[x,y]$的二维向量

$$f_{safe}(\mathbf{x}_i,\mathbf{o}_j)=max\left(0, Safe\_Dis-||\mathbf{x}_i-\mathbf{o}_j||\right), \quad i\in[1,2,...,n]$$

> 这里指定 $\mathbf{o}_j$ 为距离轨迹点 $\mathbf{x}_i$ 最近的障碍点

- **生成的相邻轨迹点需要满足最大线速度和角速度要求**

⚠️约束的$\mathbf{x}_i$为仅含有$[x,y]$的二维向量

$$\begin{aligned}
v_i &= \frac{||\mathbf{x}_{i+1}-\mathbf{x}_i||}{\Delta T_i} \quad (1)\\
\omega_i &= \frac{Normalize(\theta_{i+1}-\theta_i)}{\Delta T_i} \quad (2)\\
i &\in [0,1,...,n] \quad (3)
\end{aligned}$$

`Normalize()`将角度差值限制在$[-\pi,\pi]$内

$$\begin{aligned}
f_v(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_{i+1},\Delta T_i) &= max\left(0, abs(v_i)-v_{max}\right) \quad (4)\\
f_\omega(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_{i+1},\Delta T_i) &= max\left(0, abs(\omega_i)-\omega_{max}\right) \quad (5)\\
i &\in [0,1,...,n] \quad (6)
\end{aligned}$$

- **加速度约束**

设最大线加速度为va_{max}

$$va_i = \frac{v_{i+1}-v_i}{0.5(\Delta T_i+\Delta T_{I+1})} \quad (7)$$

约束函数为：

$$f_{v_a}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{x}_{i+2}, \Delta T_i, \Delta T_{i+1}) = max\left(0, abs(va_i) - va_{max}\right) \tag{8}$$
$$i \in [0, 1, ..., n-1] \tag{9}$$

- **运动学非完整约束**

⚠️本约束的$\mathbf{x}_i$为仅含有$[x, y, \theta]$的三维向量

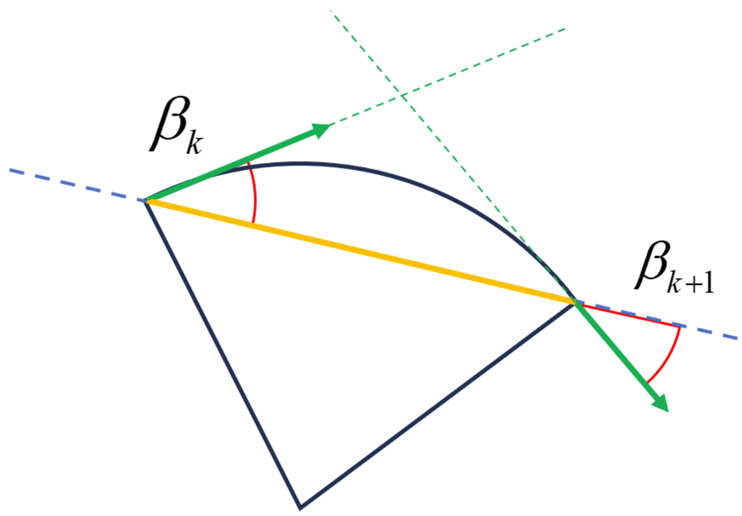
思考(8)李括号, 完整与非完整约束的区别

`carlike`和`diff`被视为非完整约束模型，

理论上仅能运行出车身坐标`x`轴向的线段、或者`x`轴向的圆弧，无法在沿着车身`y`轴行进

(无法侧着走，仅能直行或固定幅度拐弯)

所以对于生成的相邻的轨迹点，由于两个轨迹点的时间差极小，我们希望这两个轨迹点的姿态尽量在一个圆弧上，如下图



绿色箭头为轨迹点方向向量，黄色实线为相邻两轨迹位置的方向向量，

由几何原理不难得出，当$\beta_k = \beta_{k+1}$即可证明相邻两轨迹点位于同一圆弧上

轨迹点 ($[x, y, \theta]$) 的方向向量可由θ计算得到，方向向量即为两轨迹点位置的差值

$$l_k = [cos\theta_k, sin\theta_k, 0]^T \tag{10}$$
$$l_{k+1} = [cos\theta_{k+1}, sin\theta_{k+1}, 0]^T \tag{11}$$
$$d_{k,k+1} = [x_{k+1} - x_k, y_{k+1} - y_k, 0]^T \tag{12}$$

如果$\beta_k = \beta_{k+1}$，则满足以下叉乘

$$l_k \times d_{k,k+1} = d_{k,k+1} \times l_{k+1}$$

当然，进行优化时大概率等式不成立，所用等号左右两项的差值进行约束, 这样满足约束时不会产

生`cost`

所以约束函数定义为(叉乘交换顺序变号)

$$f_{kinematics}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}) = [l_i + l_{i+1}] \times d_{i,i+1}, \quad i \in [0, 1, ..., n]$$

- 转弯半径约束(针对阿克曼模型)

在速度约束中已经计算的到v_i, ω_i,而且我们已经假设相邻轨迹点在同一圆弧上，所以转弯半径可粗略计算为

$$r_i = \frac{v_i}{\omega_i}, \quad i \in [0, 1, ..., n]$$

相应的约束设置为

$$f_{radius}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \Delta T_i) = max\,(0, r_{min} - r_i)$$

最小二乘目标函数

最终的目标函数为

$$\min_{\mathbf{X},\mathbf{T}} \{ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} f_{path}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1})^2 \tag{13}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} f_T(\Delta T_i)^2 \tag{14}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f_{safe}(\mathbf{x}_i, \mathbf{o}_j)^2 \tag{15}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} f_v(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \Delta T_i)^2 \tag{16}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} f_\omega(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \Delta T_i)^2 \tag{17}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f_{v_a}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{x}_{i+2}, \Delta T_i, \Delta T_{i+1}) \tag{18}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} f_{kinematics}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1})^2 \tag{19}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} f_{radius}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \Delta T_i)^2 \} \tag{20}$$

待求解变量

$\mathbf{X}, \mathbf{T}$

要将当前 **TEB 问题** 转化为一个 **标准非线性规划（NLP）问题**，我们需要将其 **重新格式化为 NLP 的标准形式**：

NLP 标准形式

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbf{z}} \quad & f(\mathbf{z}) \\
\text{s.t.} \quad & g(\mathbf{z}) \leq 0 \\
& h(\mathbf{z}) = 0 \\
& \mathbf{z}_{\text{lb}} \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{z}_{\text{ub}}
\end{aligned}$$

定义优化变量 $\mathbf{z}$

将所有变量拉平为一个向量：

$$\mathbf{z} = [\underbrace{x_0, y_0, \theta_0}_{\text{固定}}, \underbrace{x_1, y_1, \theta_1}_{\text{优化变量}}, \ldots, \underbrace{x_n, y_n, \theta_n}_{\text{优化变量}}, \underbrace{x_{n+1}, y_{n+1}, \theta_{n+1}}_{\text{固定}}, \underbrace{\Delta T_0, \ldots, \Delta T_n}_{\text{优化变量}}]$$

> 注意：起点和终点是固定值，不作为优化变量，但保留在向量中便于索引。

将目标函数转化为标量形式

将所有残差项平方和写成单个标量目标函数：

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{z}) = \sum_{i=0}^{n} \{ & w_p \|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i\|^2 + w_t \Delta T_i^2 + \\
& w_{kin} \left[[l_i + l_{i+1}] \times d_{i,i+1} \right]^2 + w_r \max(0, r_{min} - r_i)^2 \}
\end{aligned}$$

将约束分类为等式与不等式

原始约束	NLP 分类	建议处理方式
起点/终点固定	**等式约束**	$h(z) = x_0 - [0, 0, -\pi] = 0$
避障	**不等式约束**	$g(z) = \text{SafeDis} - d_{i,j} \leq 0$
速度限制	**不等式约束**	$\|v_i\| \leq v_{\max}$

原始约束	NLP 分类	建议处理方式
角速度限制	**不等式约束**	$\lvert\omega_i\rvert \leq \omega_{\max}$
加速度限制	**不等式约束**	$\lvert va_i\rvert \leq va_{\max}$
时间间隔非负	**边界约束**	$\Delta T_i \in [\Delta T_{min}, \Delta T_{max}]$

最终 NLP 形式

$$
\begin{aligned}
\min_{\mathbf{z}} \quad & f(\mathbf{z}) \\
\text{s.t.} \quad & \text{SafeDis} - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{o}_j\| \leq 0 \quad \forall i, j \\
& |v_i| \leq v_{\max} \\
& |\omega_i| \leq \omega_{\max} \\
& r_i \geq r_{\min} \\
& |va_i| \leq va_{\max} \\
& f_{\text{kinematics}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}) = 0 \\
& \mathbf{x}_0 = [0, 0, -\pi] \\
& \mathbf{x}_{n+1} = [2, 2, \pi/3] \\
& \Delta T_i \in [\Delta T_{min}, \Delta T_{max}]
\end{aligned}
$$

`code`

完整代码

定义问题参数

```python
n       = 40        # 中间点数
SafeDis  = 0.20      # 安全距离
v_max    = 1.0
omega_max = 1.0
r_min    = 0.5
a_max    = 2.0
epsilon  = 1e-2

w_p = 1.0           # 路径权重
w_t = 0.5           # 时间权重
w_kin = 2.0         # 动力学权重
w_r = 2.0           # 转弯半径约束

# 时间步上下界
T_min = 0.05
T_max = 0.5

# 边界姿态
x0 = [0.0, 0.0, -np.pi]
xf = [2.0, 2.0,  np.pi/3]

# 障碍物
obstacles = np.array([[0.5, 0.75],
                      [1.5, 1.25]])
```

定义待求解变量

```python
x    = ca.SX.sym('x', n+2)     # 0..n+1
y    = ca.SX.sym('y', n+2)
theta = ca.SX.sym('theta', n+2)
dt   = ca.SX.sym('dt', n+1)
z = ca.vertcat(x, y, theta, dt)  # 拉平
```

> 将所有变量拉平为一个向量：
>
> $$\mathbf{z} = [\underbrace{x_0, y_0, \theta_0}_{\text{固定}}, \underbrace{x_1, y_1, \theta_1}_{\text{优化变量}}, \dots, \underbrace{x_n, y_n, \theta_n}_{\text{优化变量}}, \underbrace{x_{n+1}, y_{n+1}, \theta_{n+1}}_{\text{固定}}, \underbrace{\Delta T_0, \dots, \Delta T_n}_{\text{优化变量}}]$$

目标函数及约束

```
f = 0
for i in range(n+1):
    dx = x[i+1] - x[i]
    dy = y[i+1] - y[i]
    f += w_p * (dx**2 + dy**2) + w_t * dt[i]**2

# ---------- 约束 ----------
g_eq   = []   # h(z)=0
g_ineq = []   # g(z)⩽0

# 1) 边界姿态
g_eq.extend([x[0]-x0[0], y[0]-x0[1], theta[0]-x0[2],
             x[-1]-xf[0], y[-1]-xf[1], theta[-1]-xf[2]])

# 2) 避障（不等式）
for i in range(1, n+1):             # 仅中间点
    for ox, oy in obstacles:
        dist = ca.sqrt((x[i]-ox)**2 + (y[i]-oy)**2)
        g_ineq.append(SafeDis - dist)   # ⩽0

# 3) 速度、角速度、转弯半径、加速度
for i in range(n+1):
    dx   = x[i+1] - x[i]
    dy   = y[i+1] - y[i]
    dist = ca.sqrt(dx**2 + dy**2)

    v     = dist / (dt[i] + epsilon)
    dth   = ca.atan2(ca.sin(theta[i+1]-theta[i]),
                     ca.cos(theta[i+1]-theta[i]))
    omega = dth / (dt[i] + epsilon)
    radius = v / (ca.fabs(omega) + epsilon)

    # 转弯半径软约束
    f += w_r * ca.fmax(0, r_min - radius)**2
    g_ineq.extend([v - v_max, -v - v_max,
                   omega - omega_max, -omega - omega_max])

    # 加速度（线）
    if i < n:
        dx2   = x[i+2] - x[i+1]
        dy2   = y[i+2] - y[i+1]
        dist2 = ca.sqrt(dx2**2 + dy2**2)
        v2    = dist2 / (dt[i+1] + epsilon)
        acc   = (v2 - v) / (0.5*(dt[i]+dt[i+1]) + epsilon)
        g_ineq.extend([acc - a_max, -acc - a_max])
```

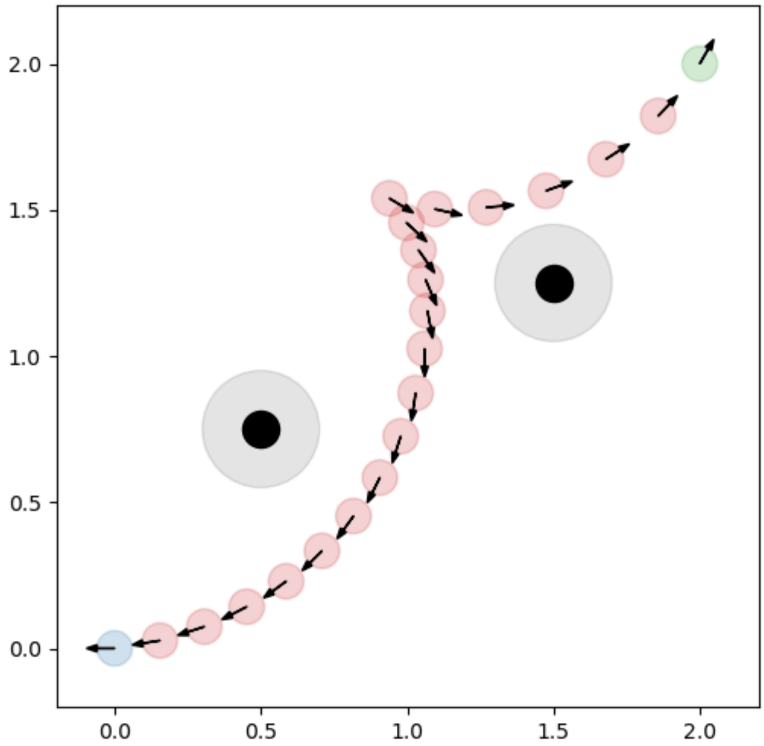
```
# 4) 非完整约束（等式）
for i in range(n+1):
    dx  = x[i+1] - x[i]
    dy  = y[i+1] - y[i]
    li  = ca.vertcat(ca.cos(theta[i]),  ca.sin(theta[i]))
    li1 = ca.vertcat(ca.cos(theta[i+1]), ca.sin(theta[i+1]))
    cross = (li[0]+li1[0])*dy - (li[1]+li1[1])*dx
    # g_eq.append(cross)
    f += w_kin * cross**2      # w_kin 为新的权重
```

求解器配置及初始化

```
g = ca.vertcat(*g_eq, *g_ineq)
lbg = [0]*len(g_eq) + [-ca.inf]*len(g_ineq)
ubg = [0]*len(g_eq) + [0]*len(g_ineq)



# ---------- 变量上下界 ----------
lbx = -np.inf*np.ones(z.shape[0])
ubx =  np.inf*np.ones(z.shape[0])

# 固定起点/终点
fix_idx = [0, n+1, n+2, 2*n+3, 2*n+4, 3*n+5]
lbx[fix_idx] = ubx[fix_idx] = [x0[0], xf[0], x0[1], xf[1], x0[2], xf[2]]

# dt 上下界
dt_start = 3*(n+2)
lbx[dt_start:] = T_min
ubx[dt_start:] = T_max

# 初始猜测
z0 = np.zeros(z.shape[0])
# 位置：线性插值
z0[:n+2]   = np.linspace(x0[0], xf[0], n+2)
z0[n+2:2*n+4] = np.linspace(x0[1], xf[1], n+2)
z0[2*n+4:3*n+6] = np.linspace(x0[2], xf[2], n+2)
z0[3*n+6:] = np.ones(n+1)*0.5     # dt

nlp = {'x': z, 'f': f, 'g': g}
opts = {'ipopt.print_level': 0, 'print_time': True}
solver = ca.nlpsol('solver', 'ipopt', nlp, opts)
res = solver(x0=z0, lbg=lbg, ubg=ubg, lbx=lbx, ubx=ubx)
```

结果

交互拖动演示代码



n=20