TEB问题描述

问题定义

- 二维空间给定起点和目标点姿态

`Star_PoseSE2 = [0, 0, -pi]`
`End_PoseSE2 = [2, 2, pi/3]`

- 在`[[0.5, 0.75], [1.5, 1.25]]`处有两个点障碍,

`Obs_Pose=[[0.5, 0.75], [1.5, 1.25]]`

- 最大速度限制

$$v \in [-v_{max}, v_{max}]$$
$$\omega \in [-\omega_{max}, \omega_{max}]$$

- 底盘为 `car_like` 模型 tricycle_dynamics

最小转弯半径为r_{min}

求解连接起点和目标点在与障碍保证安全的前提下,轨迹长度相对短,轨迹耗时相对少且符合运动学模型的轨迹序列

问题描述

条件

需要在起点和目标点之间生成指定`n`个轨迹点

变量定义

- 定义轨迹序列 $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^{n+1}$ ，其中 $\mathbf{x}_i = [x_i, y_i, \theta_i]$ 表示第 i 个轨迹点的位置，满足以下边界条件：

$$\mathbf{x}_0 = [0, 0, -\pi], \quad \mathbf{x}_{n+1} = [2, 2, \pi/3]$$

- 定义相邻轨迹点时间差 $\mathbf{T} = \{\Delta T_i\}_{i=0}^{n}$, 其中 ΔT_i 表示轨迹点 $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}$ 之间的时间差
- 定义障碍序列$\mathbf{O} = \{\mathbf{o}_j\}_{j=0}^{m}$ ，其中 $\mathbf{o}_j = [x_j, y_j]$ 表示第 j 个障碍点的位置

约束

- 生成的路径点构成的总长度尽量短

⚠️约束的$\mathbf{x}_i$为仅含有$[x,y]$的二维向量

$$f_{path}(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_{i+1}) = ||\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i+1}||_2, \quad i \in [0,1,...,n]$$

- 轨迹耗时相对短

$$f_T(\Delta T_i) = \Delta T_i, \quad i \in [0,1,..,n]$$

- 生成的路径点障碍物保持安全距离 `Safe_Dis = 0.3m`

⚠️约束的$\mathbf{x}_i$为仅含有$[x,y]$的二维向量

$$f_{safe}(\mathbf{x}_i,\mathbf{o}_j) = max\left(0, Safe\_Dis - ||\mathbf{x}_i - \mathbf{o}_j||\right), \quad i \in [1,2,...,n]$$

> 这里指定 $\mathbf{o}_j$ 为距离轨迹点 $\mathbf{x}_i$ 最近的障碍点

- 生成的相邻轨迹点需要满足最大线速度和角速度要求

⚠️约束的$\mathbf{x}_i$为仅含有$[x,y]$的二维向量

$$\begin{aligned} v_i &= \frac{||\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i||}{\Delta T_i} && (1) \\ \omega_i &= \frac{Normalize(\theta_{i+1} - \theta_i)}{\Delta T_i} && (2) \\ i &\in [0,1,...,n] && (3) \end{aligned}$$

`Normalize()` 将角度差值限制在$[-\pi,\pi]$内

$$\begin{aligned} f_v(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_{i+1},\Delta T_i) &= max\left(0, abs(v_i) - v_{max}\right) && (4) \\ f_\omega(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_{i+1},\Delta T_i) &= max\left(0, abs(\omega_i) - \omega_{max}\right) && (5) \\ i &\in [0,1,...,n] && (6) \end{aligned}$$

- 运动学非完整约束

⚠️本约束的$\mathbf{x}_i$为仅含有$[x,y,\theta]$的三维向量

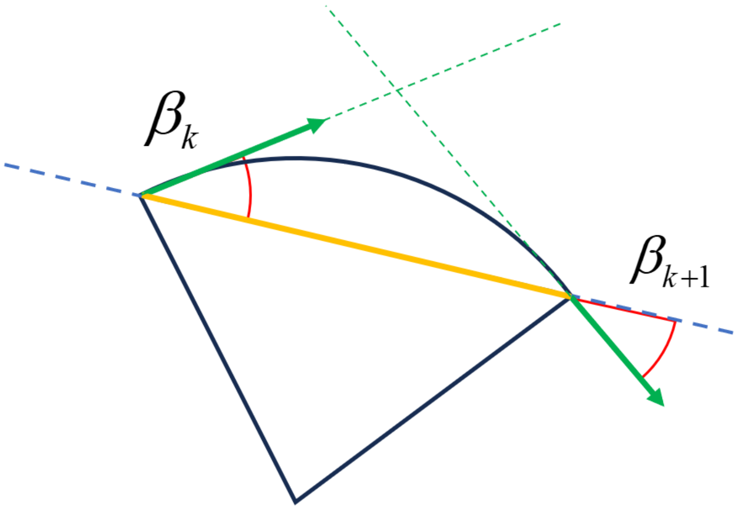
思考(8)李括号, 完整与非完整约束的区别

`carlike` 和 `diff` 被视为非完整约束模型，

理论上仅能运行出车身坐标 `x` 轴向的线段、或者 `x` 轴向的圆弧，无法在沿着车身 `y` 轴行进

(无法侧着走，仅能直行或固定幅度拐弯)

所以对于生成的相邻的轨迹点，由于两个轨迹点的时间差极小，我们希望这两个轨迹点的姿态尽量在一个圆弧上，如下图



绿色箭头为轨迹点方向向量，黄色实线为相邻两轨迹位置的方向向量，

由几何原理不难得出，当$\beta_k = \beta_{k+1}$即可证明相邻两轨迹点位于同一圆弧上

轨迹点 ($[x, y, \theta]$) 的方向向量可由θ计算得到，方向向量即为两轨迹点位置的差值

$$l_k = [cos\theta_k, sin\theta_k, 0]^T \tag{7}$$
$$l_{k+1} = [cos\theta_{k+1}, sin\theta_{k+1}, 0]^T \tag{8}$$
$$d_{k,k+1} = [x_{k+1} - x_k, y_{k+1} - y_k, 0]^T \tag{9}$$

如果$\beta_k = \beta_{k+1}$，则满足以下叉乘

$$l_k \times d_{k,k+1} = d_{k,k+1} \times l_{k+1}$$

当然，进行优化时大概率等式不成立，所用等号左右两项的差值进行约束, 这样满足约束时不会产生 `cost`

所以约束函数定义为(叉乘交换顺序变号)

$$f_{kinematics}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}) = [l_k + l_{k+1}] \times d_{k,k+1}, \quad i \in [0, 1, ..., n]$$

- 转弯半径约束(针对阿克曼模型)

在速度约束中已经计算的到v_i, ω_i,而且我们已经假设相邻轨迹点在同一圆弧上，所以转弯半径可粗略计算为

$$r_i = \frac{v_i}{\omega_i}, \quad i \in [0, 1, ..., n]$$

相应的约束设置为

$$f_{radius}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \Delta T_i) = max\left(0, r_i - r_{min}\right)$$

最小二乘目标函数

最终的目标函数为

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbf{X},\mathbf{T}} \{ & \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} f_{path}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1})^2 && (10)\\
& + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} f_T(\Delta T_i)^2 && (11)\\
& + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f_{safe}(\mathbf{x}_i, \mathbf{o}_j)^2 && (12)\\
& + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} f_v(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \Delta T_i)^2 && (13)\\
& + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} f_\omega(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \Delta T_i)^2 && (14)\\
& + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} f_{kinematics}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1})^2 && (15)\\
& + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} f_{radius}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \Delta T_i)^2 \} && (16)
\end{aligned}$$

待求解变量

$\mathbf{X}, \mathbf{T}$

`code`

完整代码TEB_solve

定义问题参数

```python
start    = np.array([0.0, 0.0, -np.pi])
end      = np.array([2.0, 2.0, np.pi/3])
obs      = np.array([[0.5, 0.75], [1.5, 1.25]])
n        = 15
vmax     = 1.0
wmax     = 1.5
rmin     = 0.5
safe_dis= 0.3
```

定义决策变量

```python
x  = ca.SX.sym('x', n)
y  = ca.SX.sym('y', n)
θ  = ca.SX.sym('θ', n)
ΔT = ca.SX.sym('ΔT', n+1)
# 纵向拼成一维向量
w  = ca.vertcat(x, y, θ, ΔT)
```

构造待求解轨迹点集合

```python
pts = [ca.DM(start)]
for k in range(n):
    pts.append(ca.vertcat(x[k], y[k], θ[k]))
pts.append(ca.DM(end))          # 起点/终点是常量，中间是符号变量
```

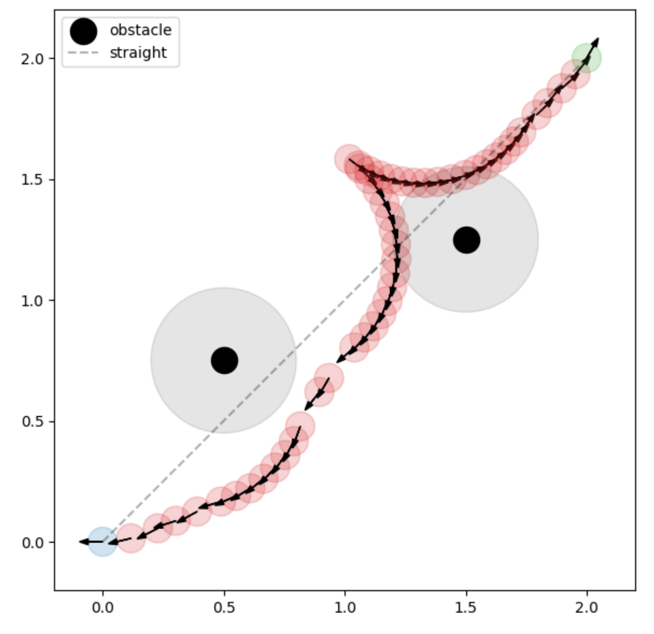
构造目标函数

```python
# ---------- 5. 目标函数 ----------
res = []
for i in range(n+1):
    p0, p1   = pts[i][:2], pts[i+1][:2]
    th0, th1 = pts[i][2], pts[i+1][2]
    seg = ca.norm_2(p1 - p0)
    dt  = ΔT[i]

    # 1. 路径长度
    res.append(seg)
    # 2. 时间
    res.append(dt)
    # 3. 安全距离（仅内部点）
    if 1 <= i <= n:
        dists = [ca.norm_2(pts[i][:2] - o) for o in obs]
        dmin  = ca.mmin(ca.vertcat(*dists))
        res.append(ca.fmax(0, safe_dis - dmin))
    # 4. 速度
    v = seg / (dt + 1e-6)
    res.append(ca.fmax(0, ca.fabs(v) - vmax))
    # 5. 角速度
    dth = norm_angle(th1 - th0)
    ω   = dth / (dt + 1e-6)
    res.append(ca.fmax(0, ca.fabs(ω) - wmax))
    # 6. 非完整运动学
    l0 = ca.vertcat(ca.cos(th0), ca.sin(th0))
    l1 = ca.vertcat(ca.cos(th1), ca.sin(th1))
    d  = p1 - p0
    cross = (l0[0]+l1[0])*d[1] - (l0[1]+l1[1])*d[0]
    res.append(cross)
    # 7. 转弯半径
    r = v / (ca.fabs(ω) + 1e-6)
    res.append(ca.fmax(0, r - rmin))

# *res 是 星号解包（unpacking） 语法
residuals = ca.vertcat(*res)
```

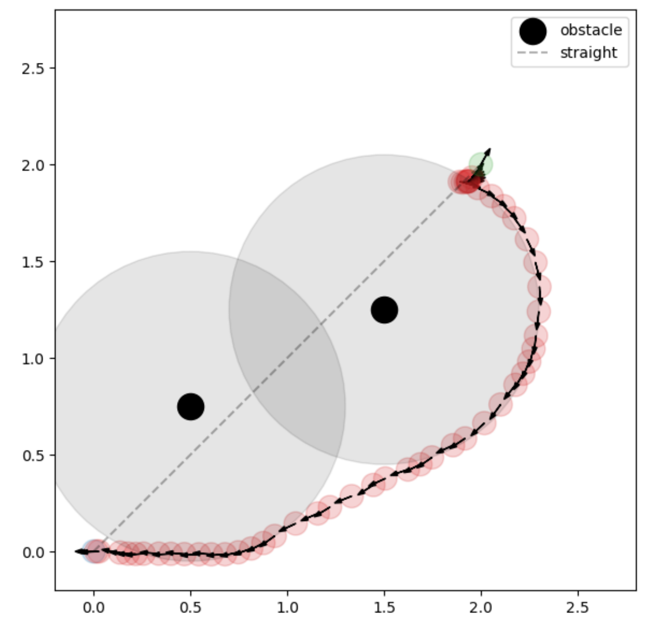
求解

```python
res = solver(x0=x0, lbx=-10, ubx=10)
w_opt = np.array(res['x']).flatten()
print('Cost =', float(res['f']))
```

结果



`safe_dis=0.3`

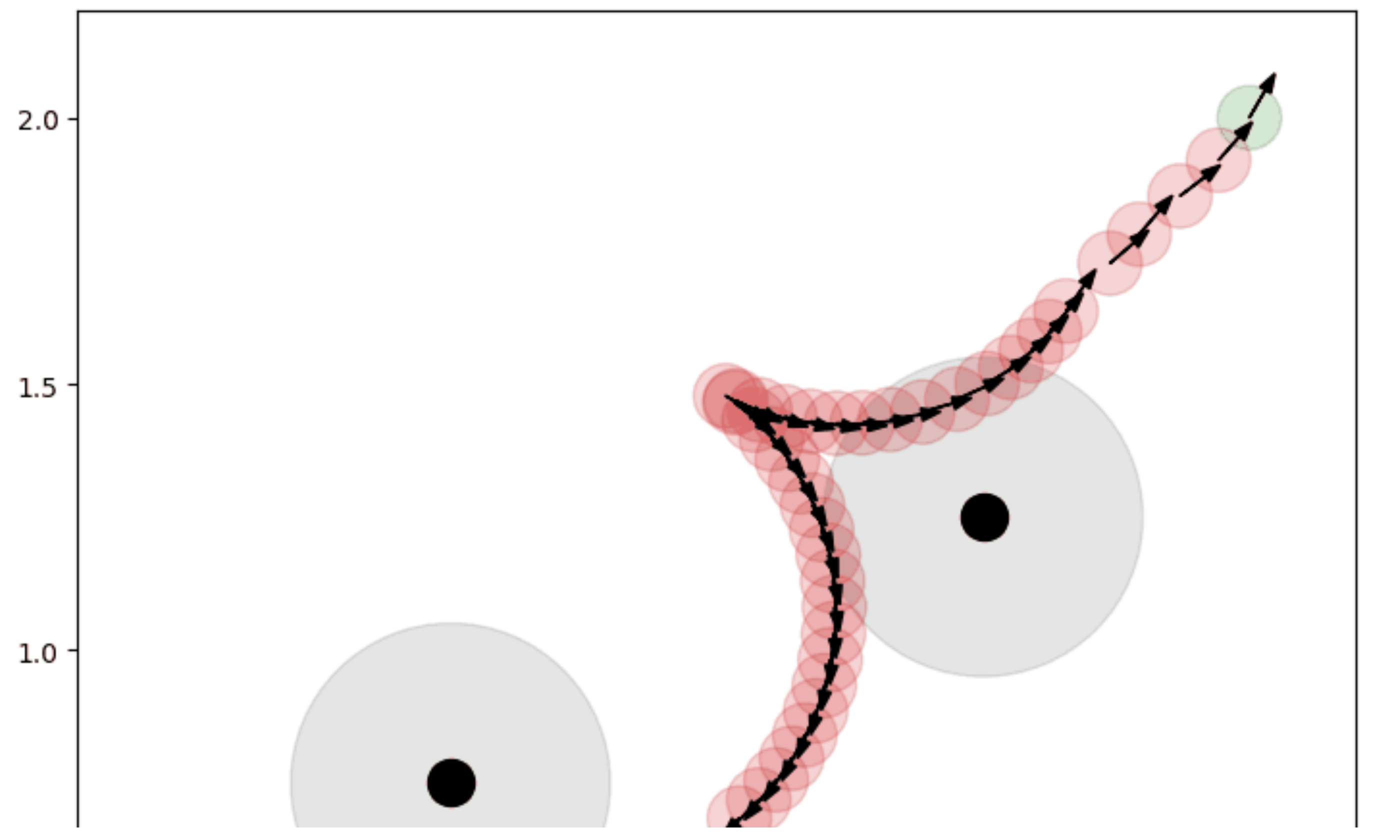


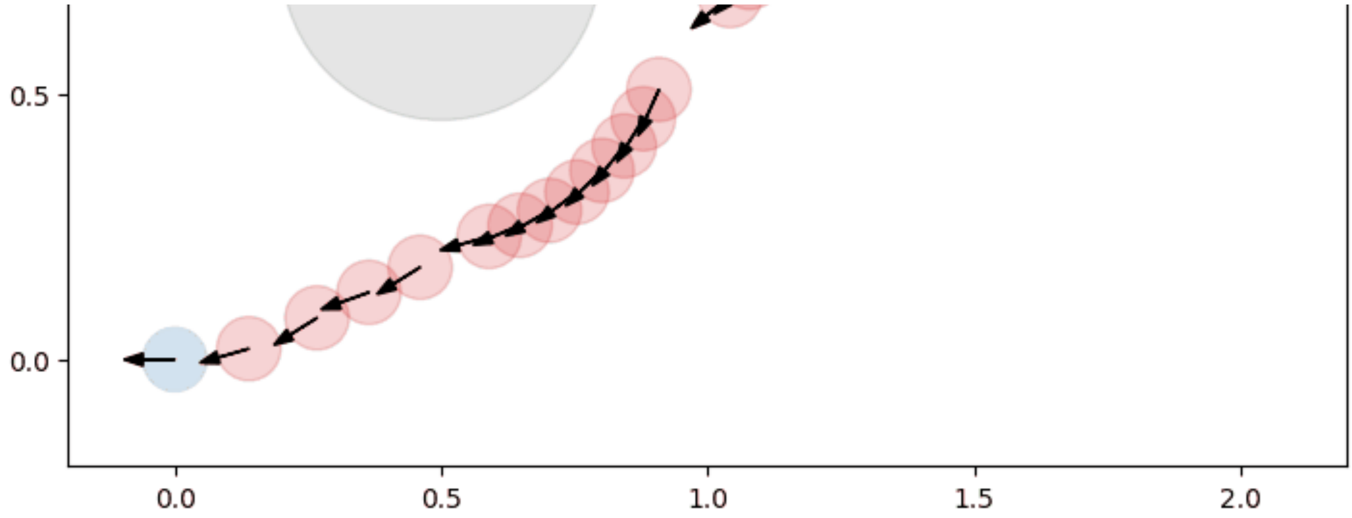
`safe_dis=0.8`

在运动学约束下，求解出的轨迹实际上考虑到了方位角和转弯半径。

动态DEMO

[TEB_solve_dynamic]





0.5
0.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0