

Задание №2 по курсу Численное моделирование реагирующих потоков

Чернов Алексей, 335

Структура детонационной волны Зельдовича–Неймана–Деринга

Описание численного метода

В качестве численного метода интегрирования предложенной системы используется метод Гира второго порядка аппроксимации. Вводятся следующие обозначения:

$$\begin{cases} f_1(x, \rho, u, p, Z) = -\frac{\rho}{u} f_2(x, \rho, u, p, Z), \\ f_2(x, \rho, u, p, Z) = -\frac{Qu(\gamma-1)}{c^2(1-u^2/c^2)} f_4(x, \rho, u, p, Z), \\ f_3(x, \rho, u, p, Z) = -\rho u \cdot f_2(x, \rho, u, p, Z), \\ f_4(x, \rho, u, p, Z) = -\frac{A\rho Z}{u} e^{-\frac{\rho E_a}{\rho\mu}}. \end{cases}$$

Конечно-разностные уравнения записываются в виде

$$\frac{3\bar{\varphi}^{i+1} - 4\bar{\varphi}^i + \bar{\varphi}^{i-1}}{\delta x} = (\bar{f})^{i+1}$$

Получившаяся система нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных на следующем $(i + 1)$ -м слое:

$$\begin{cases} \varphi_1(\rho^{i+1}, u^{i+1}, p^{i+1}, Z^{i+1}) = 0, \\ \varphi_2(\rho^{i+1}, u^{i+1}, p^{i+1}, Z^{i+1}) = 0, \\ \varphi_3(\rho^{i+1}, u^{i+1}, p^{i+1}, Z^{i+1}) = 0, \\ \varphi_4(\rho^{i+1}, u^{i+1}, p^{i+1}, Z^{i+1}) = 0, \end{cases}$$

где $\bar{\varphi} = (\bar{f})^{i+1} - \bar{f}$

Итерационный процесс осуществляется с помощью метода Ньютона.

$$\begin{cases} \rho^{i+1,k+1} = \rho^{i+1,k} + \delta\rho^{i+1,k}, \\ u^{i+1,k+1} = u^{i+1,k} + \delta u^{i+1,k}, \\ p^{i+1,k+1} = p^{i+1,k} + \delta p^{i+1,k}, \\ Z^{i+1,k+1} = Z^{i+1,k} + \delta Z^{i+1,k}, \end{cases}$$

Невязки определяются как решения системы уравнений

$$\bar{\delta\varphi} = -J^{-1}\bar{\varphi}$$

Якобиан рассчитывается следующим образом:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1.5}{\delta x} + \alpha_1 \left(\frac{E_a}{p\mu} - \frac{2}{\rho} \right) & \alpha_1 \left(\frac{1}{u} - \frac{2u/c^2}{1-u^2/c^2} \right) & -\alpha_1 \frac{\rho E_a}{p^2 \mu} & -\frac{\alpha_1}{Z} \\ \alpha_2 \left(\frac{E_a}{p\mu} - \frac{1}{\rho} \right) & \frac{1.5}{\delta x} - \alpha_2 \frac{2u}{c^2} & -\alpha_2 \frac{\rho E_a}{p^2 \mu} & -\frac{\alpha_2}{Z} \\ \alpha_3 \left(\frac{E_a}{p\mu} - \frac{2}{\rho} \right) & \alpha_3 \left(\frac{2u}{c^2} - \frac{1}{u} \right) & \frac{1.5}{\delta x} - \alpha_3 \frac{\rho E_a}{p^2 \mu} & -\frac{\alpha_3}{Z} \\ \alpha_4 \left(\frac{E_a}{p\mu} - \frac{1}{\rho} \right) & -\frac{\alpha_4}{u} & -\alpha_4 \frac{\rho E_a}{p^2 \mu} & \frac{1.5}{\delta x} - \frac{\alpha_4}{Z} \end{pmatrix},$$

$$\alpha_1 = -\frac{\rho}{u} \alpha_2, \quad \alpha_2 = -\frac{Qu(\gamma-1)}{c^2(1-u^2/c^2)} \alpha_4, \quad \alpha_3 = -\rho u \alpha_2, \quad \alpha_4 = -\frac{ApZ}{u} e^{-\frac{\rho E_a}{p\mu}}.$$

Итерации производятся до выполнения условия

$$\sqrt{\left(\frac{\delta \rho^{i+1,k}}{\rho^{i+1,k+1}} \right)^2 + \left(\frac{\delta u^{i+1,k}}{u^{i+1,k+1}} \right)^2 + \left(\frac{\delta p^{i+1,k}}{p^{i+1,k+1}} \right)^2 + \left(\frac{\delta Z^{i+1,k}}{Z^{i+1,k+1}} \right)^2} < 10^{-6}$$

В качестве начальных условий задаются параметры фон Неймана

$$\begin{cases} p(0) = \frac{2\rho_0}{\gamma+1} D_{CJ}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} p_0, \\ u(0) = D_{CJ} - \frac{p(0) - p_0}{\sqrt{\rho_0 \left(\frac{\gamma+1}{2} p(0) + \frac{\gamma-1}{2} p_0 \right)}}, \\ \rho(0) = \frac{\rho_0 D_{CJ}}{u(0)}, \\ Z(0) = 1. \end{cases}$$

где D_{CJ} - скорость волны детонации Чепмена-Жуге. Индекс (0) отвечает нормальным условиям. Параметры смеси взяты из условия задачи:

№ смеси	Смесь	γ	μ , $\frac{\text{кг}}{\text{моль}}$	Q , $\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$	E_a , $\frac{\text{Дж}}{\text{моль}}$	A , $\frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}}$
1	Ацетилен – воздух	1.25	0.029	$2.94 \cdot 10^6$	$71 \cdot 10^3$	10^9

Анализ сходимости и результатов

Расчет с помощью программы дал следующие результаты:

Плотность = 2,1 кг/м³

Давление = 19,4 атм

Температура = 3185 К.

Теоретические параметры Чепмена-Жуге:

Плотность = 2,1 кг/м³

Давление = 19,0 атм

Температура = 3175 К.

Практические результаты оказались близки к теоретическим.

Графики профилей плотности, давления, доли вещества и температуры:



