

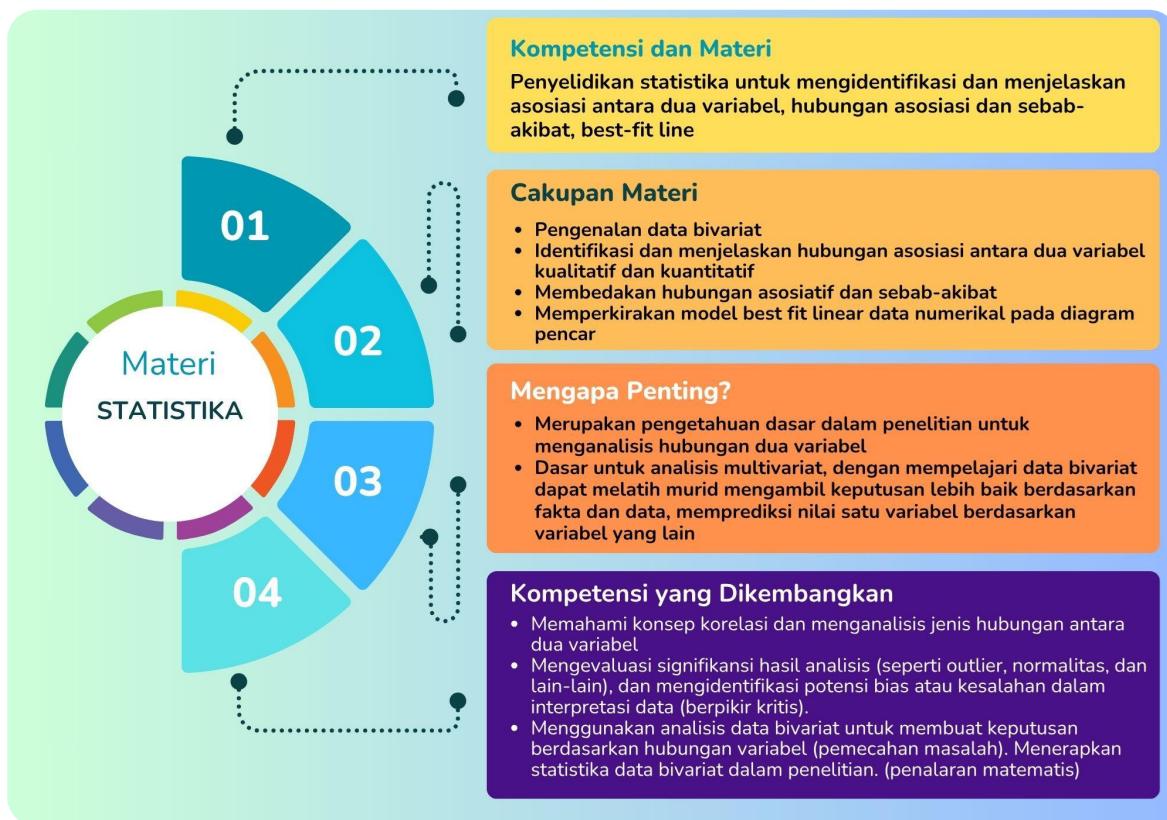
Gambar 52. Ilustrasi hubungan antara sudut pusat dan sudut keliling

Pembelajaran pada materi ini dapat dilakukan dengan berbagai pendekatan, salah satunya dengan menggunakan pendekatan eksploratif berbasis masalah kontekstual. Murid diberikan beberapa model lingkaran dari karton dengan sudut pusat dan sudut keliling yang telah ditandai, kemudian mereka melakukan eksplorasi hubungan unsur-unsur lingkaran tersebut, dengan pertanyaan kunci: "Apa pola yang kalian temukan? Mengapa sudut keliling selalu setengah dari sudut pusat?" Murid juga dapat mensimulasikan menggunakan geogebra untuk melihat hubungan antara sudut tersebut dengan cara "drag and drop" titik pada lingkaran. Pada saat murid melakukan simulasi dengan menggunakan geogebra (menggeser titik pada lingkaran untuk menunjukkan hubungan antara unsur-unsur lingkaran), pendidik sekaligus dapat melakukan asesmen proses (*assessment for learning*) dan memberikan komentar sebagai umpan balik selama simulasi. Pendidik kemudian dapat meminta murid menjelaskan mengapa sudut pada setengah lingkaran pastilah merupakan siku-siku sebagai asesmen formatif.

Materi lain dalam fase ini juga mencakup sudut antara garis singgung dan jari-jari lingkaran merupakan sudut siku-siku, serta sifat-sifat simetri lingkaran berkenaan dengan panjang busur, panjang tali busur, dan garis singgung.

Analisis Data dan Peluang

- **Penyelidikan statistika untuk mengidentifikasi dan menjelaskan asosiasi antara dua variabel, hubungan asosiasi dan sebab-akibat, best-fit line**



Gambar 53. Peta Konsep Materi Statistika

Materi ini relevan pada berbagai bidang berikut.

- Ekonomi dan bisnis: analisis hubungan harga dan permintaan dan prediksi penjualan berdasarkan iklan
- Pendidikan: evaluasi metode pembelajaran (hubungan antara metode pembelajaran tertentu dengan tingkat pemahaman murid)
- Transportasi: prediksi kemacetan lalu lintas (menganalisis hubungan antara jam sibuk dengan tingkat kepadatan jalan untuk meningkatkan sistem lalu lintas yang lebih baik)
- Teknologi dan media sosial: analisis hubungan antara durasi penggunaan media sosial dan produktivitas kerja sehingga hasilnya seseorang dapat mengatur waktu penggunaan media sosial (gawai) agar tidak mengganggu pekerjaan

Pada materi statistika murid diperkenalkan dengan data bivariat dan asosiasi antara dua variabel kualitatif dan dua variabel kuantitatif. Data bivariat ini merupakan hal baru bagi murid. Oleh karena itu pendidik perlu menjelaskan lebih detail kepada mereka. Data bivariat melibatkan dua variabel yang diukur pada setiap individu atau objek dalam suatu kumpulan data. Tujuannya adalah untuk menganalisis hubungan antara kedua variabel tersebut.

Variabel kualitatif (atau kategorikal) adalah variabel yang nilainya tidak berupa bilangan, tetapi berupa kategori atau label. Contohnya: jenis kelamin (laki-laki, perempuan), jenjang studi (SD, SMP, SMA), hobi (olahraga, musik, membaca), dan lain sebagainya.

Tujuan dari analisis asosiasi adalah untuk mengetahui apakah ada hubungan atau keterkaitan antara dua variabel kualitatif. Misalnya, apakah jenis kelamin berpengaruh terhadap hobi. Data dari dua variabel kualitatif biasanya disajikan dalam tabel kontingensi (tabel dua arah). Sebagai contoh, misalnya sebuah survei dilakukan terhadap 100 murid mengenai jenis kelamin dan hobi utama mereka. Hasil survei ditampilkan pada tabel berikut ini.

	Olahraga	Musik	Membaca	Jumlah
Laki-laki	30	10	5	45
Perempuan	15	25	15	55
Jumlah	45	35	20	100

Untuk melihat ada tidaknya asosiasi, kita dapat membandingkan proporsi atau persentase baris. Misalnya, dari 45 laki-laki: $30/45 = 66.7\%$ memilih olahraga. Dari 55 perempuan: $15/55 = 27.3\%$ memilih olahraga. Terlihat bahwa proporsi laki-laki yang menyukai olahraga jauh lebih tinggi daripada perempuan. Ini menunjukkan ada kemungkinan asosiasi antara jenis kelamin dan hobi. Dalam mengambil kesimpulan asosiasi, maka perlu mencermati: (1) Jika proporsi antar kategori berbeda jauh, maka kemungkinan ada asosiasi antara kedua variabel. (2) Jika proporsinya mirip, maka kemungkinan tidak ada asosiasi.

Catatan

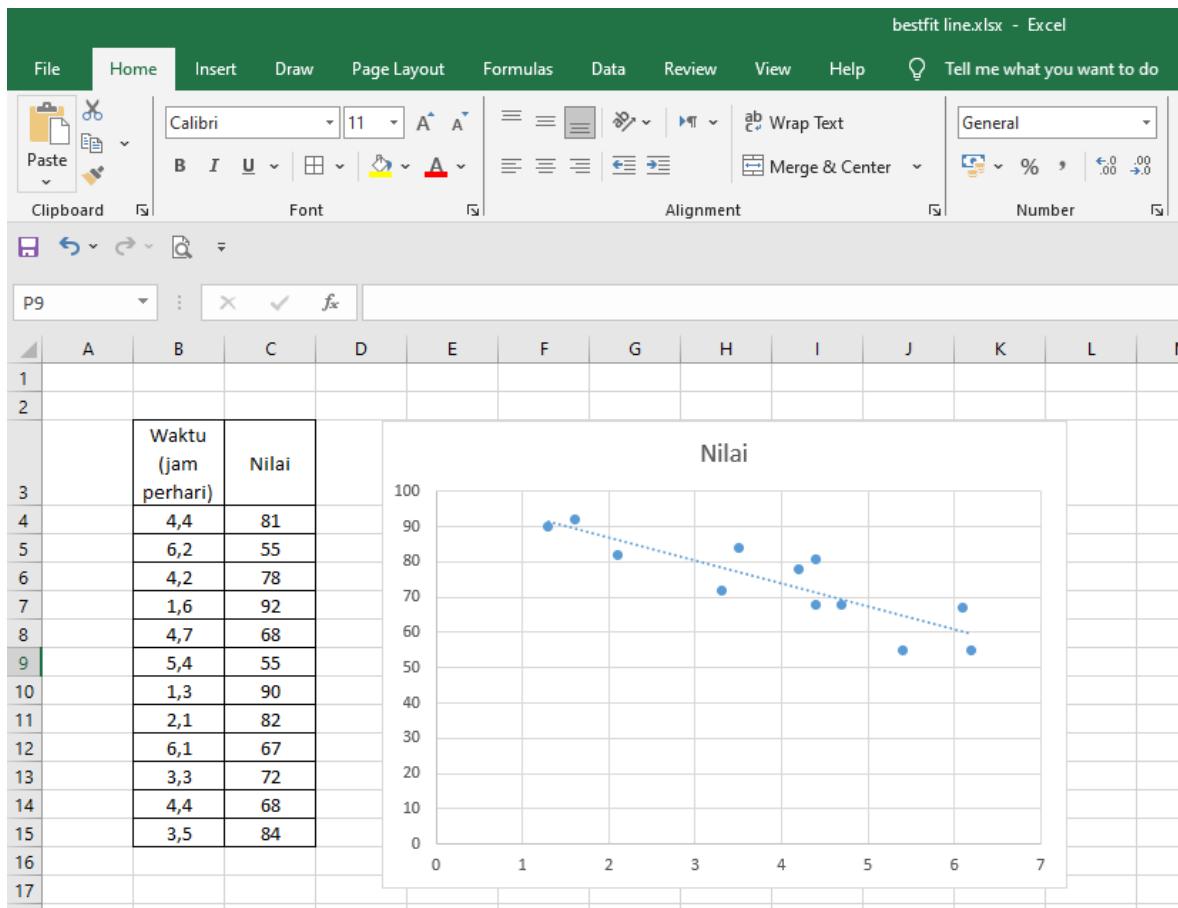
Untuk analisis lebih lanjut (di tingkat lanjutan), dapat digunakan uji statistik seperti uji chi-kuadrat, namun ini tidak wajib di SMA.

Untuk variabel kuantitatif, data bivariat direpresentasikan menggunakan diagram pencar, di mana satu variabel diwakili oleh sumbu x dan variabel lainnya oleh sumbu y , sebagaimana sudah dipelajari di Fase E. Pada fase ini, murid memodelkan data dengan menggunakan *line of best fit* atau garis regresi yang akan dibahas di bawah. Untuk menentukan apakah ada asosiasi serta kekuatan asosiasi, murid dapat memerhatikan secara visual diagram pencar seberapa banyak data yang terletak jauh dari garis regresi. Pada tahap ini murid **tidak wajib** perlu menggunakan metode statistik seperti koefisien korelasi Pearson untuk mengukur kekuatan dan arah hubungan linear antara dua variabel.

Pendidik perlu menjelaskan perbedaan antara asosiasi dan sebab-akibat. **Asosiasi** terjadi ketika dua variabel memiliki hubungan atau pola tertentu, di mana perubahan dalam satu variabel terkait dengan perubahan dalam variabel lainnya. Namun, ini tidak berarti bahwa perubahan pada satu variabel **menyebabkan** perubahan pada yang lain. Sebagai contoh, terdapat hubungan antara tinggi badan dan berat badan seseorang. Orang yang lebih tinggi cenderung memiliki berat badan lebih banyak, tetapi berat badan bertambah tidak menyebabkan tinggi badan bertambah. **Sebab-akibat** terjadi ketika satu variabel secara langsung memengaruhi atau menyebabkan perubahan pada variabel lainnya. Sebagai contoh, merokok dapat menyebabkan meningkatnya risiko kanker paru-paru. Pada tahap ini murid tidak perlu menguji hubungan sebab-akibat.

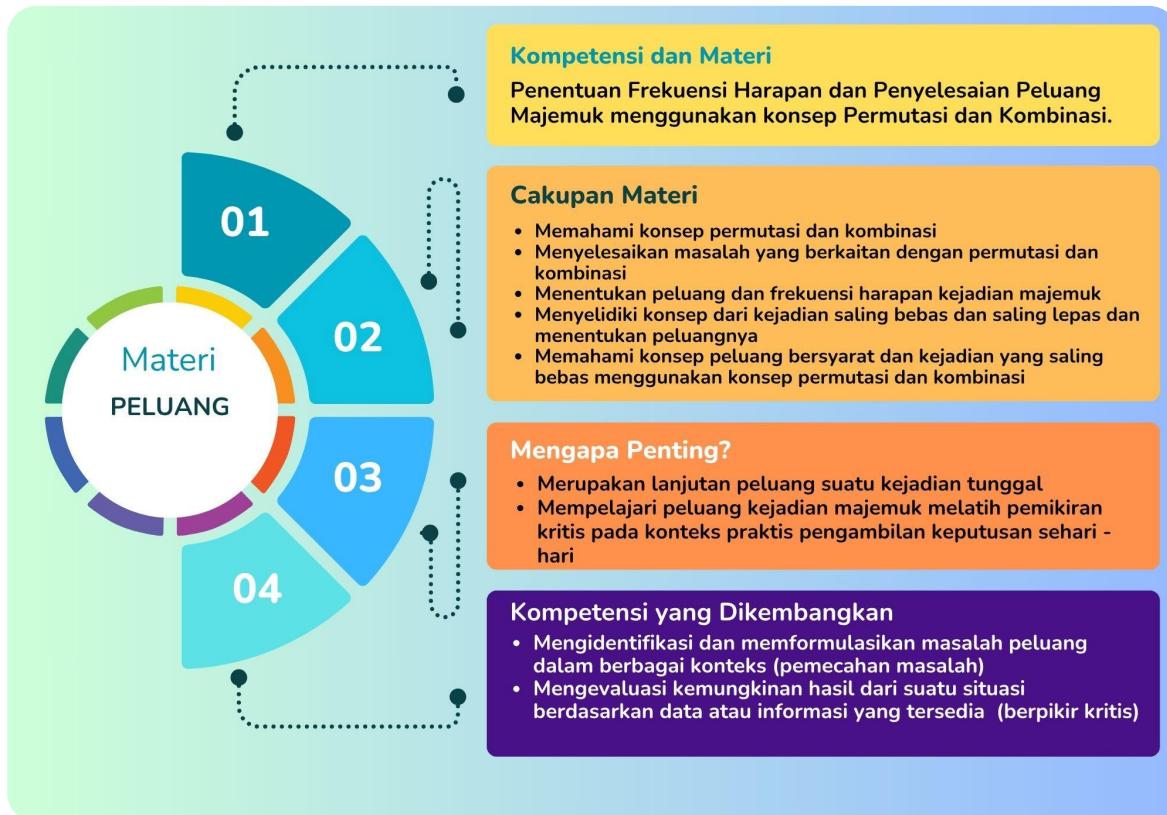
Line of Best Fit atau garis regresi adalah garis lurus yang paling mendekati data dalam *scatter plot*, yang digunakan untuk memperkirakan hubungan antara dua variabel dalam analisis data bivariat. Garis ini memberikan representasi visual dari hubungan atau tren umum antara variabel-variabel tersebut. Pendidik perlu menekankan bahwa garis ini digunakan untuk menunjukkan tren umum dan membuat prediksi berdasarkan data.

Perlu dicermati bahwa di tahap ini, murid memperkirakan garis tersebut dan bukan menentukan garis regresi secara tepat menggunakan metode, misalnya *least square*, yang merupakan materi statistika tingkat lanjut di perguruan tinggi. Namun, jika memungkinkan, pendidik dapat mendorong murid untuk menggunakan aplikasi seperti Google Sheets, Microsoft Excel, atau perangkat lunak statistik lainnya untuk menghasilkan *line of best fit* secara tepat sebagai pembanding terhadap hasil perkiraan yang telah dilakukan. Berikut contoh pemanfaatan Microsoft Excel untuk memvisualisasikan *line of best fit* dari data hubungan antara durasi menggunakan gawai dan nilai Matematika murid.



Dari hasil visualisasi *line of best fit* di atas dapat disimpulkan bahwa durasi menggunakan gawai berkorelasi negatif dengan nilai Matematika murid, karena tren *line of best fit* menunjukkan arah ke bawah.

- Penentuan Frekuensi Harapan dan Penyelesaian Peluang Majemuk menggunakan konsep Permutasi dan Kombinasi.



Gambar 54. Peta Konsep Materi Peluang

Materi peluang dan frekuensi harapan kejadian majemuk, peluang kejadian saling bebas dan saling lepas sebelumnya ada di fase E. Karena konsep dan aplikasinya berkaitan dengan peluang bersyarat permutasi dan kombinasi sehingga materi ini disatukan di fase F agar pembelajaran lebih terpadu dan utuh. Materi ini relevan pada konteks ekonomi dan bisnis seperti analisis risiko untuk menghitung peluang keberhasilan suatu investasi atau kegagalan projek tertentu; pada bidang teknik (simulasi sistem) seperti peluang kegagalan dua komponen mesin secara bersamaan; dalam kehidupan sehari-hari seperti pada perencanaan suatu kegiatan, memprediksi cuaca (peluang hujan dan angin kencang terjadi bersamaan). Contoh kontekstual yang dekat dengan kehidupan murid adalah mengetahui peluang seorang murid lulus seleksi sebuah perguruan tinggi (jalur SNBP) dengan menggunakan informasi data peminat dan kuota yang tersedia dari beberapa tahun terakhir.

Materi peluang kejadian majemuk membantu murid mengembangkan kompetensi berpikir kritis khususnya dalam pengambilan keputusan dalam situasi ketidakpastian yang seringkali muncul dalam kehidupan nyata. Pendidik dapat merancang strategi pembelajaran yang menggunakan pendekatan simulasi pengambilan keputusan dengan konsep peluang majemuk. Sebagai contoh, murid diberikan sebuah kasus dengan skenario mereka terdampar di pulau dan harus memilih 3 dari 5 tas siaga yang berisi obat, makanan, pisau, dan lain lain. Setiap pilihan memiliki peluang keberhasilan berbeda dan diberikan level tantangan yang berbeda. Asesmen formatif dapat dilakukan oleh pendidik dalam diskusi kelompok melalui pertanyaan-pertanyaan yang diajukan langsung ke murid. Misalnya, ketika mendiskusikan mengenai peluang terkena hujan dan macet di pagi hari, pendidik memantau jalannya diskusi dan memberikan pertanyaan seperti, "Apakah kedua kejadian tersebut saling bebas? Bagaimana cara kamu mengeceknya?" Respons yang diberikan murid menjadi dasar bagi pendidik untuk mengetahui pemahaman murid tentang materi yang dipelajari.

7

Fase F Matematika Tingkat Lanjut (Pilihan untuk kelas XI dan XII)

Matematika Tingkat Lanjut merupakan mata pelajaran pilihan yang diperuntukkan bagi murid yang berminat mendalami matematika lebih lanjut. Materi esensi Fase F Matematika Tingkat Lanjut ada di tiap elemen dan subelemen. Setiap bagian subelemen dimulai dengan peta konsep yang menjelaskan tentang cakupan materi, alasan penting materi ini dipelajari, dan kompetensi yang dikembangkan.

Aljabar

- **Operasi Aritmetika Polinomial, Faktor Polinomial dan identitas Polinomial**

**Gambar 55.** Peta Konsep Materi Polinomial

Materi ini relevan pada bidang berikut.

- Fisika: analisis rangkaian listrik (untuk menghitung resistensi, tegangan atau arus dalam komponen elektronik), gerak projektil (untuk menghitung ketinggian maksimum atau waktu jatuhnya projektil).
- Ekonomi dan bisnis: fungsi biaya dan pendapatan (memprediksi keuntungan), prediksi harga saham (analisis tren harga).
- Kedokteran: memodelkan pertumbuhan bakteri atau penyebaran penyakit, hubungan dosis obat dan respon tubuh.
- Arsitektur: desain struktur bangunan (kurva lengkung pada jembatan atau atap suatu bangunan).

Pada fase-fase sebelumnya, murid telah memahami berbagai persamaan, yaitu persamaan identitas, persamaan linear, persamaan kuadrat, dan persamaan pangkat tiga. Pada fase ini mereka menggeneralisasikan sebagai polinomial dan dapat mengidentifikasi karakteristik dari persamaan polinomial yang membedakannya dari persamaan lain dalam matematika. Murid diharapkan memahami bahwa polinomial membentuk sebuah sistem yang tertutup terhadap operasi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian, serta terampil dalam menjumlah, mengurang, dan mengalikan polinomial.

Sebagai contoh, murid dapat diberikan permasalahan untuk menentukan apakah sebuah polinomial adalah non-negatif, yaitu polinomial yang tidak pernah bernilai negatif, $p(x) \geq 0$ untuk semua nilai riil x . Mereka dapat diminta kemudian untuk menunjukkan jika g adalah sebuah polinomial, maka g^2 merupakan polinomial non-negatif, serta menggunakan fakta tersebut untuk membuat beberapa polinomial non-negatif. Pendidik dapat membimbing murid melakukan eksplorasi untuk menjawab beberapa pertanyaan berikut:

- a. Apakah semua koefisien polinomial non-negatif pasti positif?
- b. Apakah ada polinomial non-negatif yang semua koefisiennya negatif?
- c. Temukan polinomial non-negatif yang bukan kuadrat dari polinomial lain.

Pendidik perlu menekankan pemahaman mengenai Teorema Sisa dan Teorema Faktor sebagai alat fundamental dalam aljabar polinomial yang memberikan cara sistematis untuk mengevaluasi polinomial, menemukan akar, dan memfaktorkan polinomial, murid dapat lebih mudah dalam melakukan operasi matematis dan analisis dalam konteks polinomial. Pendidik sebaiknya tidak hanya memberikan rumus saja namun lebih kepada mengapa dan untuk apa penggunaan kedua teorema tersebut sehingga prinsip pembelajaran mendalam dapat dilaksanakan.

Sebagai contoh, untuk Teorema Sisa, murid dapat diminta untuk menyimpulkan faktor linear dari sebuah polinomial kubik, lalu memfaktorkan polinomial tersebut secara lengkap. Memiliki bentuk terfaktor memungkinkan murid untuk menyimpulkan tentang struktur grafik. Selain mendapat perpotongan dengan sumbu- x , murid juga dapat menentukan di mana fungsi tersebut negatif.

Pada materi polinomial, diperlukan penjelasan tentang menggunakan identitas polinomial untuk menyelesaikan masalah karena merupakan materi baru di polinomial. Identitas polinomial merupakan fakta atau persamaan matematis yang membantu menyelesaikan bentuk aljabar yang melibatkan bilangan dan eksponen yang lebih besar. Identitas polinomial adalah persamaan polinomial yang selalu benar untuk semua nilai variabel yang terlibat. Berikut ini beberapa contoh identitas polinomial yang penting:

Kuadrat dari Binomial: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

Selisih Kuadrat: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Pangkat Tiga dari Binomial: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Jumlah Pangkat Tiga: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

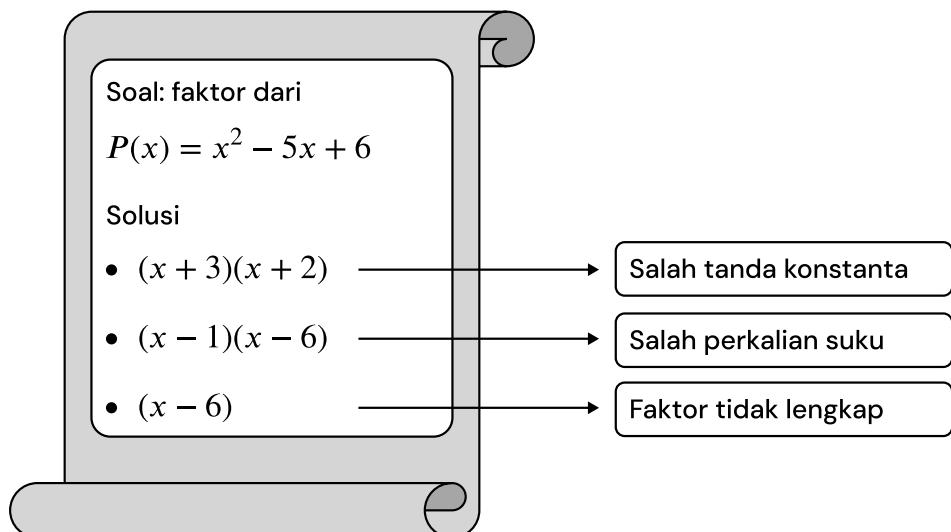
Selisih Pangkat Tiga: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Murid dapat diminta untuk membuktikan identitas polinomial dan menggunakannya untuk menggambarkan hubungan numerik. Sebagai contoh, identitas polinomial $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2) + (2xy)^2$ dapat digunakan untuk menghasilkan tripel Pythagoras.

Sebagai pendalaman, murid dapat mengetahui dan menerapkan Teorema Binomial untuk perluasan $(x + y)^n$ dalam pangkat x dan y untuk bilangan bulat positif n , di mana x dan y adalah angka apa pun, dengan koefisien yang ditentukan misalnya oleh Segitiga Pascal.

Untuk memberikan umpan balik kepada murid dapat menggunakan jurnal reflektif yang diisi oleh murid setelah mempelajari bagian dari materi polinomial, seperti setelah belajar pemfaktoran polinomial murid diminta menuliskan jurnal reflektif dengan panduan beberapa pertanyaan sebagai berikut: "Apa langkah-langkah yang kamu lakukan untuk memfaktorkan polinomial? Apa kesulitan yang kamu temui pada saat memfaktorkan? Bagaimana kamu mengatasi kesulitan tersebut? Apa yang ingin kamu pelajari lebih lanjut tentang polinomial?" Setelah murid menuliskan jurnal reflektif, pendidik dan murid mendiskusikannya di dalam kelompok kecil untuk saling memberi masukan. Asesmen formatif pada proses pembelajaran dapat dilakukan dengan menggunakan teknik *gallery walk*, pendidik memberikan beberapa solusi yang salah (3 sd 5 solusi salah/kesalahan yang sering dilakukan murid) untuk soal yang sama, kemudian murid mengidentifikasi kesalahan dan memperbaikinya.

Ilustrasi *gallery walk*:



- Operasi aljabar pada matriks dan transformasi geometri



Gambar 56. Peta Konsep Materi Matriks dan Transformasi Geometri

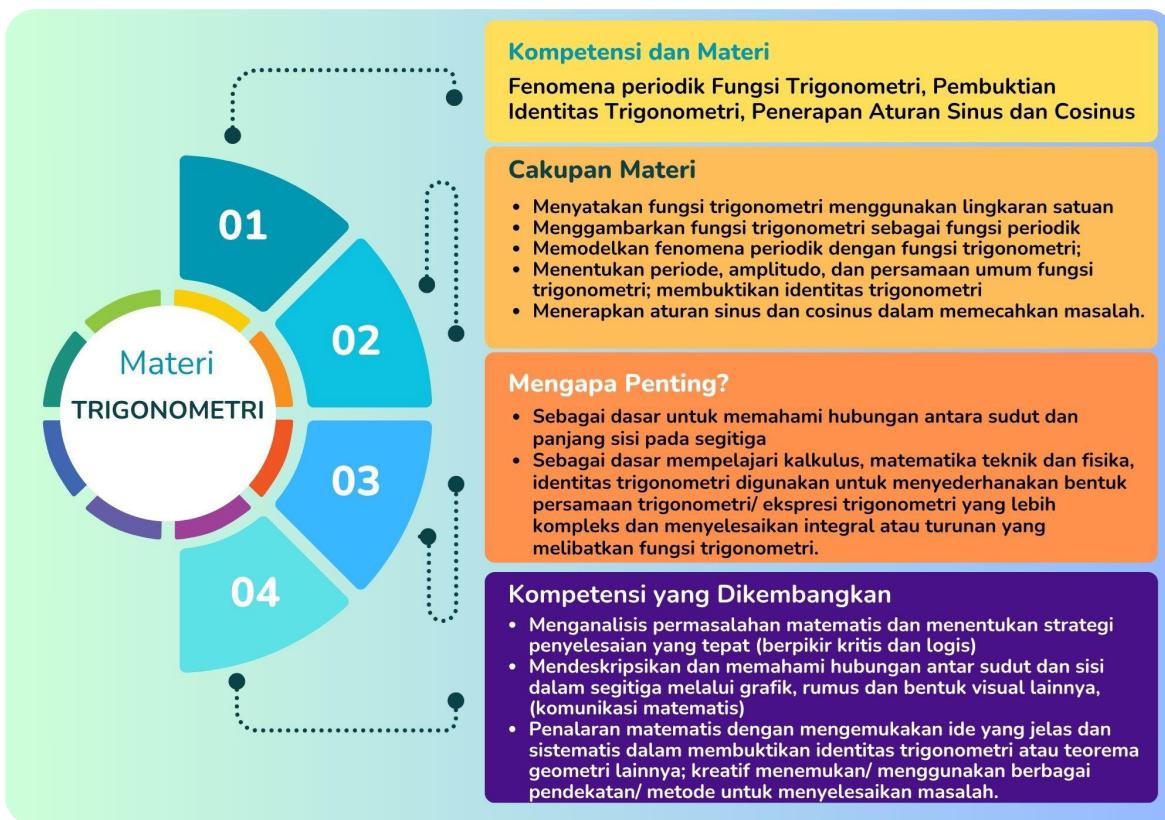
Materi ini relevan seperti pada pemetaan dan navigasi/GPS (transformasi koordinat, pemetaan digital, dan lain-lain), pembuatan animasi dan video game (rotasi, translasi, skala objek dimensi dua ataupun dimensi tiga), penyelesaian sistem persamaan linear dalam dunia nyata seperti manajemen keuangan (menghitung untung rugi multi produk), perencanaan produksi (memperhitungkan banyaknya bahan baku yang dibutuhkan), bidang kriptografi dan keamanan data (enkripsi dan deskripsi data), bidang kesehatan (CT scan dan MRI).

Pada Fase E, murid sudah diperkenalkan dengan matriks untuk merepresentasikan dan menyelesaikan masalah yang melibatkan banyak variabel atau hubungan secara ringkas dan terorganisir. Mereka memahami bagaimana matriks dapat digunakan untuk menyimpan dan mengatur informasi, seperti sistem persamaan, transformasi, atau koneksi dalam jaringan. Sebagai contoh, murid dapat merepresentasikan jadwal kehadiran kelas selama beberapa hari menggunakan matriks.

Di fase ini, murid diperkenalkan pada operasi matriks dasar dan aplikasinya di dunia nyata sebagai fondasi untuk studi lanjutan dalam aljabar linear atau bidang terkait. Mereka dapat mengalikan matriks dengan besaran skalar untuk menghasilkan matriks baru, serta menjumlah, mengurang, dan mengalikan matriks dengan matriks yang berdimensi sesuai. Mereka memahami bahwa, tidak seperti perkalian bilangan, perkalian matriks untuk matriks persegi tidak bersifat komutatif, namun tetap memenuhi sifat asosiatif dan distributif. Mereka memahami bahwa matriks nol dan matriks identitas berperan dalam penjumlahan dan perkalian matriks, serupa dengan peran 0 dan 1 dalam bilangan riil. Determinan suatu matriks persegi bukan nol jika dan hanya jika matriks tersebut memiliki invers perkalian.

Pada materi ini, murid juga mengaplikasikan matriks 2×2 sebagai transformasi bidang, dan menafsirkan nilai absolut determinan dalam bentuk luas. Transformasi geometri seringkali hanya dilihat sebagai teknik untuk mengubah posisi, ukuran, atau orientasi objek dalam ruang. Pendidik diharapkan dapat memahamkan bahwa ketika dilakukan perkalian dengan matriks, yang terjadi adalah seluruh bidang tertransformasi. Murid sudah mempelajari mengenai transformasi pada fase-fase sebelumnya. Pada fase ini, mereka memperdalam dengan melihatnya sebagai transformasi dari bidang.

- **Fenomena periodik Fungsi Trigonometri, Pembuktian Identitas Trigonometri, Penerapan Aturan Sinus dan Cosinus**



Gambar 57. Peta Konsep Materi Trigonometri

Materi ini relevan pada bidang berikut.

- Astronomi: menghitung jarak bintang, memodelkan orbit planet.
- Fisika: memodelkan gerak pegas, gelombang suara, gelombang cahaya, gelombang radio.
- Teknologi digital: rotasi objek 3D berbasis sinus/cosinus, efek *lighting/ shading* dalam game.
- Ekonomi: memodelkan fluktuasi harga komoditas, prediksi harga saham.
- Kedokteran gigi: menggunakan aturan sinus untuk merancang implan gigi (menghitung sudut yang presisi terhadap rahang).

Pada Fase E, murid sudah mendefinisi perbandingan trigonometri dan menyelesaikan permasalahan yang melibatkan segitiga siku-siku. Pada fase ini, domain fungsi trigonometri diperluas dengan menggunakan lingkaran satuan untuk diaplikasikan pada segitiga umum. Murid diharapkan dapat memodelkan fenomena periodik, di antaranya,

- mengidentifikasi fenomena periodik dalam kehidupan sehari-hari, seperti gerakan benda, perubahan suhu, dan gelombang;
- menerapkan fungsi trigonometri untuk memodelkan fenomena periodik tersebut, termasuk menentukan persamaan model, amplitude, periode, dan frekuensi;
- menganalisis dan menginterpretasikan grafik model trigonometri untuk memahami perilaku fenomena periodik yang dimodelkan.

Pendidik perlu memastikan murid dapat mengaplikasikan fungsi trigonometri dalam berbagai bidang, misalnya dalam fisika (menghitung gaya dalam sistem osilasi, menentukan kecepatan dan percepatan benda dalam gerak melingkar, dan menganalisis gelombang elektromagnetik), dalam bidang teknik (merancang antena radio, membangun struktur tahan gempa, dan menganalisis data navigasi), dalam bidang seni dan desain (menciptakan pola dekoratif, menghasilkan efek visual dalam animasi dan grafik komputer, dan menganalisis musik).

Murid juga diharapkan dapat membuktikan dan menerapkan identitas trigonometri. Sebagai inspirasi, integrasi pembelajaran mendalam pada materi ini dapat dilakukan dengan pendekatan *scaffolded inquiry-based learning*, yaitu dengan memandu murid untuk menemukan konsep melalui pertanyaan terarah, membangun pemahaman dari dasar hingga kompleks. Contohnya, pada topik Identitas trigonometri pendidik dapat memulai dengan pertanyaan sederhana, "Jika kalian tahu nilai $\sin 30 = 0,5$ maka bagaimana cara menentukan nilai $\cos 30$ tanpa kalkulator? (mengarahkan ke identitas trigonometri $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$). Murid bekerja dalam kelompok kecil (2 - 3 orang) untuk menurunkan identitas trigonometri untuk menyelesaikan masalah. Kemudian, pendidik dapat meningkatkan tingkat kesulitan masalah untuk memberikan tantangan kepada murid agar berpikir kritis. Terakhir, murid diminta untuk membuat presentasi singkat tentang bagaimana mereka menemukan solusi dari masalah yang diberikan. Dari proses pembelajaran tersebut pendidik sekaligus dapat melakukan asesmen dengan cara observasi dan memberikan umpan balik kepada murid ketika mereka berdiskusi.

- Pengenalan fungsi selain fungsi linear dan fungsi kuadrat dan sifatnya



Gambar 58. Peta Konsep Materi Fungsi

Aplikasi dalam kehidupan nyata antara lain:

- fungsi rasional, memodelkan dua besaran seperti kecepatan, efisiensi mesin atau biaya per unit produksi;
- fungsi akar, teori ekonomi seperti menghitung standar deviasi atau simpangan kuadrat;
- fungsi eksponensial, pertumbuhan populasi, bunga majemuk, penyebaran virus atau radiasi;
- fungsi logaritma, kompleksitas algoritma pada ilmu komputer, skala Richter untuk gempa;
- fungsi nilai mutlak, menghitung selisih waktu kedatangan kereta api, toleransi kesalahan atau deviasi dari nilai tertentu;
- fungsi tangga, sistem pembayaran (seperti tarif parkir yang membulatkan waktu per jam), tarif listrik, biaya pengiriman, yang berubah sesuai tingkatan tertentu; dan
- fungsi *piecewise*, memodelkan situasi dunia nyata yang berubah-ubah tergantung kondisi tertentu seperti pajak progresif, diskon, dan lain-lain.

Konsep dan ide fungsi sudah dipelajari oleh murid dari Fase D. Pendidik perlu menekankan murid memahami bagaimana menginterpretasi fungsi yang muncul dalam aplikasi berbagai konteks, serta menganalisis fungsi dalam berbagai representasi. Murid juga diharapkan dapat membangun fungsi yang memodelkan hubungan antara dua besaran, serta membangun fungsi baru dari fungsi yang ada.

Dalam memperkenalkan fungsi rasional, fungsi akar, fungsi eksponensial, fungsi logaritma, fungsi nilai mutlak, fungsi tangga dan fungsi *piecewise* pada fase ini, sebagai visualisasi dapat menggunakan bantuan aplikasi geogebra, desmos, kalkulator saintifik atau aplikasi grafik lainnya. Namun apabila tidak terdapat sarana dan prasarana yang memadai, pendidik dapat memanfaatkan berbagai sumber daya yang tersedia disesuaikan dengan kondisi satuan pendidikan. Pada materi fungsi di fase ini diperlukan penjelasan lebih rinci tentang pengenalan fungsi *piecewise* dan menggunakan untuk memodelkan berbagai fenomena. Fungsi *piecewise* disebut juga fungsi sepotong. Sepotong merupakan fungsi yang terdiri dari dua atau lebih fungsi yang mana masing-masing bagian fungsi berlaku pada interval domain tertentu saja. Fungsi *piecewise* dapat berupa fungsi yang kontinu maupun diskontinu. Fungsi nilai mutlak dan fungsi tangga merupakan contoh yang sudah biasa ditemui dari fungsi *piecewise*.

Penguatan kemampuan penalaran matematis terkait materi fungsi tersebut bisa berupa kegiatan memahami dan mengidentifikasi suatu masalah kontekstual untuk dimodelkan menjadi suatu fungsi. Dalam pengembangan diskusi kelas, pendidik dapat memberikan pertanyaan-pertanyaan metakognisi terkait topik yang dapat melatih strategi pemecahan masalah untuk dikuasai murid. Sebagai contoh adalah penerapan fungsi tangga sebagai berikut:



Catatan

Gambar hanya sebagai contoh dan tidak sesuai dengan konteks permasalahan di bawah ini.

Berdasarkan Peraturan Gubernur No. 120 Tahun 2012, tarif parkir kendaraan di Jakarta untuk wilayah parkir yang terletak di Pusat Perbelanjaan dan Hotel untuk kendaraan jenis Sedan, Jip, dan Pikap adalah sebagai berikut:

- Rp3.000 – Rp5.000 untuk jam pertama dan
- Rp2.000 sampai Rp4.000 untuk jam berikutnya
- Pusat perbelanjaan A menerapkan tarif parkir sebagai berikut:
 - Jika parkir kurang dari 15 menit, gratis
 - Mulai dari 15 menit sampai 2 jam pertama, dikenakan tarif *flat* Rp10.000
 - Untuk tambahan waktu parkir setiap 1 jam berikutnya dikenakan tarif Rp4.000 per jam

Dalam fase memahami masalah, pendidik memberikan murid kesempatan untuk membaca informasi yang ada dan mencoba memahami penggunaan informasi yang tertera. Sebagai bantuan, pendidik dapat membantu murid memahami konteks dari masalah tarif parkir ini melalui pertanyaan-pertanyaan no.1 sampai no.5 sebagai berikut:

1. Berapa biaya parkir apabila kendaraan diparkir selama 14 menit?
 2. Berapa biaya parkir apabila kendaraan diparkir selama 15 menit?
 3. Charlie memparkirkan kendaraan selama 50 menit, berapakah biaya parkir yang perlu dia bayar?
 4. Berapa biaya parkir apabila kendaraan diparkir selama 1 jam 5 menit?
 5. Eko memparkirkan kendaraan selama 2 jam 5 menit, berapakah biaya parkir yang perlu dia bayar?

Setelah murid memahami konteks dari masalah tarif parkir ini, pendidik dapat meminta murid untuk melakukan generalisasi dalam bentuk grafik fungsi dengan instruksi berikut:

6. Buatlah diagram dari tarif parkir pusat perbelanjaan A.

Murid dapat membuat rencana penyelesaian. Salah satu strategi yaitu membuat tabel dengan x sebagai lama parkir dan y sebagai biaya parkir. Pada tahapan menjalankan rencana penyelesaian, pendidik dapat memantau apakah nilai-nilai yang diinput oleh murid pada tabel sudah cukup untuk murid melakukan generalisasi dari masalah ini. pendidik juga memantau strategi lain yang dikerjakan oleh murid.

Pada tahap melakukan reviu, pendidik meminta murid untuk memasukkan besaran lamanya parkir secara acak, apakah memberikan hasil sesuai dengan generalisasi yang telah ditemukan sebelumnya.

Lalu pendidik dapat melatih strategi pemecahan masalah matematika murid melalui pertanyaan no.7 sampai 11 sebagai berikut. Untuk pertanyaan no.7, pendidik dapat mendengarkan berbagai strategi yang dijalankan oleh murid untuk no.7 ini.

7. **Strategi Pemecahan Masalah.** Di antara pilihan di bawah ini, manakah yang mungkin sebagai total biaya parkir yang perlu dibayar saat keluar tempat parkir?

 - a. Rp17.000
 - b. Rp22.000
 - c. Rp46.000
 - d. Rp101.000
 - e. Rp74.000

Jelaskan bagaimana strategi kalian menemukan jawaban nomor 7 ini. Kemungkinan respon murid untuk pertanyaan nomor 7 ini:

- Saya menggunakan gambar fungsi yang telah saya gambar, lalu saya mencari apakah ada titik yang terletak pada fungsi dengan nilai y (total biaya parkir) yang ditanyakan pada bagian 7a sampai 7e.

-
- Saya melihat pola biaya parkir yang muncul: 10 ribu, 14 ribu, 18 ribu, 22 ribu dan seterusnya, lalu saya melihat angka-angka mana saja yang masuk ke dalam pola ini.

Permasalahan kontekstual sehari-hari muncul pada pertanyaan nomor 8 dan 9. Pertanyaan ini sekaligus menguji penalaran bertingkat dari murid. Pendidik dapat memodifikasi jam masuk dengan jam keluar. Pertanyaan nomor 8 memiliki tingkat kesulitan yang lebih mudah dibanding nomor 9 saat mencari lamanya waktu parkir

8. **Penalaran bertingkat.** Jika Fahri memarkirkan kendaraannya dari pukul 08.38 sampai pukul 13.48, berapakah biaya parkir yang harus ia bayar?

9. Jika Gregory memarkirkan kendaraannya dari pukul 08.38 sampai pukul 14.00, berapakah biaya parkir yang harus ia bayar?

Untuk pertanyaan nomor 10, masih merupakan permasalahan kontekstual yang sering dihadapi, hanya saja permasalahan ini memiliki solusi lebih dari 1 jawaban. Ini bertujuan pendidik memberikan kesempatan kepada murid lebih percaya diri dan murid memiliki pola pikir berkembang meyakini bahwa dirinya memiliki kemampuan numerasi. Pertanyaan nomor 11 diperuntukkan untuk menguji kemampuan bernalar murid dalam mengambil kesimpulan dari banyak jawaban dari pertanyaan nomor 10.

10. **Open Ended.** Jika Halim memarkirkan kendaraannya dari pukul 09.37 dan hanya ingin membayar biaya parkir paling banyak sebesar Rp22.000, maka pada jam berapa Halim harus keluar dari tempat parkir?

11. Pertanyaan nomor 10 ini dapat dimodifikasi dengan menjadi: *pada jam berapa paling lambat Halim harus keluar dari tempat parkir?*

Geometri

- **Pembuktian geometris pada vektor bidang datar, dan operasi aljabar pada vektor**



Gambar 59. Peta Konsep Materi Vektor

Materi ini relevan pada bidang berikut.

- Komputasi dan digital: kecerdasan artifisial (KA) data direpresentasikan sebagai vektor, enkripsi informasi pada kriptografi.
- Astronomi: vektor digunakan untuk menghitung lintasan satelit dan pesawat luar angkasa.
- Fisika: elektromagnetik (medan listrik dan magnet direpresentasikan sebagai vektor), arah arus dan gaya Lorentz pada motor listrik.
- Navigasi (GPS): vektor untuk menghitung jarak terpendek; penerbangan/pelayaran, pilot/pelaut (nahkoda) menggunakan konsep vektor untuk menentukan arah perjalanan.

Materi vektor mencakup vektor dalam dua dimensi. Murid diharapkan dapat merepresentasikan dan memodelkan dengan vektor, serta memahami dan menggunakan notasi vektor dalam berbagai bentuk: