

適用高度非線性動力系統之數值積分方法

New Numerical Integration Method for Dynamic Systems with High Nonlinearity

曹文懷¹ 張家銘²

¹ 台灣大學土木工程學系 博士後研究員

² 台灣大學土木工程學系 助理教授 E-mail: changcm@ntu.edu.tw

科技部計畫編號：MOST 106-2221-E-002 -048 -MY2

摘要

非線性結構系統常具有複雜之動力行為，傳統數值方法不見得可滿足數值計算之準確性與收斂性。本文將非線性運動方程式，透過一階泰勒展開之方法，對非線性系統於每一時間步，關於當步反應進行線性化，並將線性化之運動方程式，以離散狀態空間方程式，求解非線性系統下一步之動態反應。由於某些動力系統具高度非線性，計算一階泰勒展開運動方程式較為複雜，因此本研究亦引入有限差分方法，可進一步簡化計算步驟。相較於其他方法，本方法可改善準確性及收斂性，並且提高運算效率。本文以滑軌式諧調質量阻尼器於結構承受瞬間極限荷載的減震應用，探討本方法於幾何非線性系統之適用性。相較於傳統離散狀態空間之積分方法，本方法更為準確且收斂性更佳；相較於龍格-庫塔法(Runge-Kutta method)，本方法可有效提升運算速度。由模擬結果可見，本研究提出之數值積分方法，可快速準確計算高度非線性動力系統之反應。

關鍵字：非線性動力系統、數值積分、一階泰勒線性化、滑軌式質量阻尼器、結構控制

Abstract

Due to the complex dynamic behaviors of nonlinear structural systems, the traditional numerical methods may fail to meet the satisfied accuracy and convergence in numerical analysis. In this paper the first-order Taylor series approximation is used to linearize the nonlinear motion equation at a specific time step, and then the linearized motion equation can be solved by the discrete state-space method to obtain the dynamic response of nonlinear system at the next time step. For some highly nonlinear systems, the first-order Taylor series approximation would be difficult to carry out. Therefore, the finite difference scheme can also be applied in this paper to simplifying the computational algorithms. In contrast to other numerical integration methods, this technique can not only improve the accuracy and convergence, but also enhance the computational efficiency. The benchmark tests of a structure attached with track-mass damper subjected to extreme transient loadings are investigated to verify the effectiveness of present method on the geometric nonlinear system. Compared with the traditional discrete state-space method, this method is more accurate and has better convergence; As compared with the Runge-Kutta method, this method is more efficient. According to the simulation results, the numerical integration method proposed in this study can rapidly and accurately calculate the response of highly nonlinear dynamical systems.

Keywords: Nonlinear dynamical systems, Numerical integration, First-order approximation, Track-mass damper, Structural control

一、前言

結構動力學的計算方法與理論為結構分析與設計中的重要領域。傳統的工程設計與驗證常基於線性假設，而針對非線性系統則以靜態荷重的概念分析。然而非線性結構系統常具有複雜之動力行為，傳統數值方法不見得可滿足數值計算之準確性與收斂性，因此計算結果較不可靠，計算成本也較高。此外，非線性的動態行為很難事先判斷及預估，故也難以成功地應用於實際工程。發展適用於非線性系統的動態分析之數值方法，乃成為近年來結構動力學中的主要目標。一般而言，用於分析非線性系統的數值方法主要分為兩類：顯示(explicit)及隱式(implicit)。顯示方法係以目前時刻的系統狀態與外力條件，估計下一時刻的結構反應，這類方法所需的計算量較少，但通常需要較小的時間積分步長(time step)來提高準確性及穩定性。對於一般線性系統而言十分簡便，但較難準確地計算非線性系統的恢復力。常見的方法有中央差分法、顯示龍格-庫塔法(Runge-Kutta method)[1]、狀態空間向量法[2]等。隱式方法係使用目前時刻的系統狀態與外力條件，估計此時的結構反應使用時間，因此必須在每個時刻迭代以求解運動方程式，這類方法所需的計算量較大，但通常較為準確及穩定，例如紐馬克法、簡諧加速法(harmonic acceleration method)[3]、隱式龍格-庫塔法等。

對於高度非線性系統，傳統顯示的數值方法已無法得到收斂準確的答案，而隱式的數值方法卻又會耗費巨量的計算成本及時間，因此本文將研究可兼顧準確性及效率的數值積分方法。本文將非線性運動方程式，透過一階泰勒展開式，對非線性系統的每一時間步之反應進行線性化，並將線性化的運動方程式，以離散狀態空間向量法，求解非線性系統下一步之動態反應。考慮某些動力系統可能具高度非線性行為，計算一階泰勒展開的運動方程式會較為複雜，因此可使用有限差分方法，計算結構系統矩陣，如此可進一步簡化計算步驟。本文以非線性滑軌式質量阻尼器(track-mass damper)[4]，於結構承受瞬間極限荷載的減震應用，探討本方法於高度幾何非線性系統之適用性。滑軌式諧調質量阻尼器係指將質量塊置於台車，使台車沿著特定曲率的軌道運動。它的消能原理和諧調質量阻尼器相同，都是將能量從結構引導到控制系統，但可將震動能量從結構系統的較低模態轉移到較高模態，更快地消散能量，適合抵抗地震或是脈衝外力，並減輕失諧(mistuned)的影響。根據數值模擬的結果，可知本方法的準確性及收斂性較傳統離散狀態空間向量法更佳。相較於隱式的龍格-庫塔法，本方法亦可有效提升運算速度，可成功地應用於高度非線性系統之動態分析。

二、數值方法

2.1 運動方程式

本文以滑軌式質量阻尼器作為高度非線性作用力之主要來源，因此考慮如圖 1 所示之多自由度線性結構系統，其頂層放置一滑軌式諧調質量阻尼器。結構承受外力時，軌道上的滑車隨之擺盪與主結構互相作用，則整體系統之運動方程式可表示為：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}F_n(u_n, \dot{u}_n, \ddot{u}_n, t) - \mathbf{e}w(t) \quad (1)$$

其中 $\mathbf{x} = [x_1 \quad \dots \quad x_n \quad u_n]^T$ 為個自由度之位移， \mathbf{M} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{K} 分別為結構質量、阻尼及勁度矩陣， \mathbf{b} 、

\mathbf{e} 分別為控制力及外力之位置向量， $w(t)$ 為作用外力， F_n 為滑車在運動過程中對結構產生的非線性恢復力，如下：

$$F_n(u_n, \dot{u}_n, \ddot{u}_n) = m_n \{ [h'(u_n)]^2 \cdot \ddot{u}_n + h'(u_n) h''(u_n) \cdot \dot{u}_n^2 + h'(u_n) g \} \quad (2)$$

其中 u_n 為滑車相對於放置樓層的位移， $h(u_n)$ 為軌道形狀之函數， $h'(u_n)$ 為 $h(u_n)$ 對 u_n 之微分值， g 為重力加速度。將原非線性運動方程式在狀態空間中可表示為：

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}F_n(t) + \mathbf{E}w(t) = \mathbf{G}(\mathbf{z}, F_n, w) \quad (3)$$

其中 $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix}$ 為狀態空間向量， $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}$ 為結構系統矩陣、 $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}$ 為控制力矩陣、 $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{e} \end{bmatrix}$ 為外力矩陣。由於上式中的恢復力為一非線性力，因此必須特別處理運動方程式再行求解。

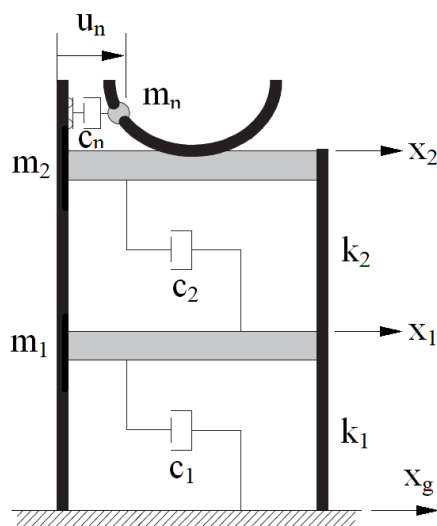


圖 1 多自由度線性結構系統附加滑軌式諧調質量阻尼器示意圖

2.2 一階近似方法

將式(3)所示之非線性運動方程式以泰勒級數表示，對某一時刻 t_0 展開，並省略二次以上的高階項，則線性化之運動方程式推導如下：

$$\begin{aligned} & \mathbf{G}(\mathbf{z}, F_n, w) \\ &= \mathbf{G}(\mathbf{z}_0, F_{n0}, w_0) + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{z}_0, F_{n0}, w_0)}{\partial \mathbf{z}} (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{z}_0, F_{n0}, w_0)}{\partial F_n} (F_n - F_{n0}) + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{z}_0, F_{n0}, w_0)}{\partial w} (w - w_0) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{z}_0 + \mathbf{B}F_{n0} + \mathbf{E}w_0 + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{z}_0, F_{n0}, w_0)}{\partial \mathbf{z}} (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) + \mathbf{B}(F_n - F_{n0}) + \mathbf{E}(w - w_0) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{z}_0 + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{z}_0, F_{n0}, w_0)}{\partial \mathbf{z}} (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) + \mathbf{B}F_n + \mathbf{E}w \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{z}_0, F_{n0}, w_0)}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{z} + \left[\mathbf{A} - \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{z}_0, F_{n0}, w_0)}{\partial \mathbf{z}} \right] \mathbf{z}_0 + \mathbf{B}F_n + \mathbf{E}w \quad (4)$$

令

$$\mathbf{A}_0(t) = \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{z}_0, F_{n0}, w_0)}{\partial \mathbf{z}} \quad (5)$$

$$\mathbf{R}_0(t) = \left[\mathbf{A} - \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{z}_0, F_{n0}, w_0)}{\partial \mathbf{z}} \right] \mathbf{z}_0 \quad (6)$$

則一階近似之狀態空間運動方程式可表示為：

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_0(t)\mathbf{z} + \mathbf{R}_0(t) + \mathbf{B}F_n + \mathbf{E}w \quad (7)$$

若原運動方程式中無非線性作用力，則上式中 \mathbf{R}_0 為零，便回歸於一般線性系統之狀態空間方程式。式(5)及式(6)可使用有限差分法中的前項差分方式計算如下：

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{z}_0, F_{n0}, w_0)}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\mathbf{G}(\mathbf{z}_0 + \Delta, F_{n0}, w_0) - \mathbf{G}(\mathbf{z}_0, F_{n0}, w_0)}{\Delta} \quad (8)$$

其中 Δ 為一微小常數。利用式(8)計算一階近似法中的微分項，稱為一階近似之差分型態。後續可藉由離散之狀態空間方程式求解系統於下一時刻的動態反應，如下所示：

$$\mathbf{z}[k+1] = \mathbf{A}_d \mathbf{z}[k] + \mathbf{R}_d[k] + \mathbf{B}_d F_n[k] + \mathbf{E}_d w[k] \quad (9)$$

其中 $\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}_0 \Delta t}$ 為離散結構系統矩陣， $\mathbf{R}_d = \mathbf{A}_0^{-1}(\mathbf{A}_d - \mathbf{I})\mathbf{R}_0$ 為離散近似殘差矩陣， $\mathbf{B}_d = \mathbf{A}_0^{-1}(\mathbf{A}_d - \mathbf{I})\mathbf{B}$ 為離散控制力矩陣， $\mathbf{E}_d = \mathbf{A}_0^{-1}(\mathbf{A}_d - \mathbf{I})\mathbf{E}$ 為離散外力矩陣， Δt 為時間積分步長。

三、結果與討論

本文使用四種數值積分方法，分別為傳統離散方法、隱式的龍格-庫塔法、一階近似法、以及一階近似法之差分型態。本文中龍格-庫塔法特指其隱示型態，使用 MATLAB[®] 程式中 *ode45* 指令計算[5]。

3.1 數值方法之收斂性

首先探討上述數值方法的收斂性。考慮二樓線性結構系統：每層樓質量為 24.3 kg 及 24.2 kg，每層樓勁度為 6,820 N/m 及 8,220 N/m，每一振態阻尼比皆為 0.1%，因此自然頻率約為 1.69 Hz 及 4.63 Hz。附加於頂層的滑軌式諧調質量阻尼器之質量為 2.425 kg，阻尼係數為 1.6 N-s/m，軌道函數 $h(u_n) = 2000u_n^4$ 。輸入地表震動為之 El Centro 地震(1940)，如圖 2 所示，地震最大地表加速度(PGA)為 2.96 m/s²。

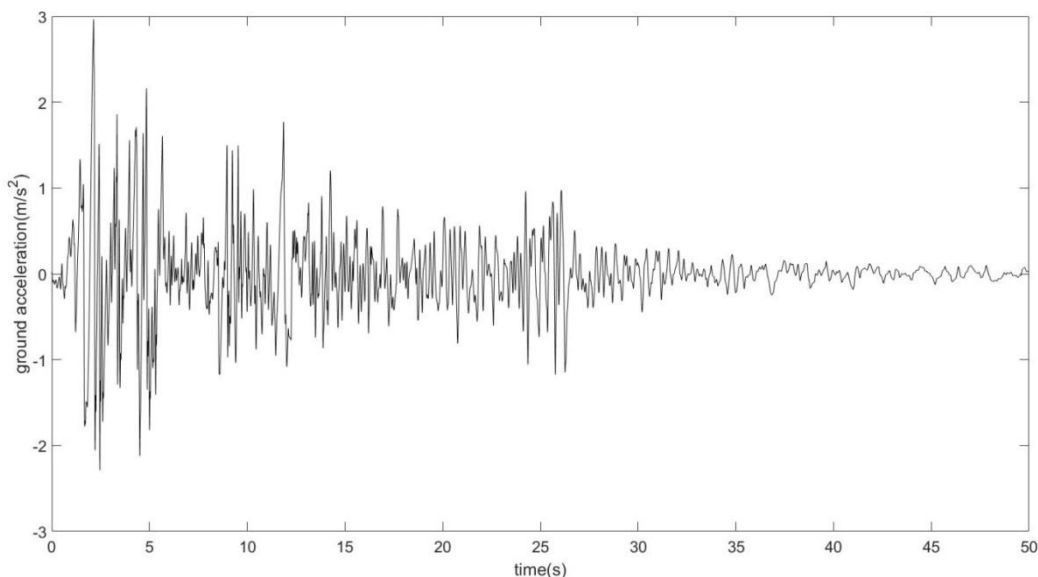


圖 2 El Centro 地震歷時(PGA=2.96 m/s²)

一般而言，只要迭代的容許誤差足夠小，無論時間積分步長大小，龍格-庫塔法的計算結果皆不會有所改變。考慮計算例之有效位數，此處將龍格-庫塔法的相對容許誤差設定為 10^{-10} 。惟選取過大的時間積分步長，將不易反應結構本身的特徵及非線性恢復力的影響，故時間積分步長不宜過小。傳統離散方法、一階近似法及其差分型態皆使用時間積分步長分別為 1/200 秒、1/2000 秒、1/4000 秒，比較三種方法與龍格-庫塔法的計算結果之間的差異，評估數值方法的準確性及收斂性。根據計算經驗，式(8)中之微小常數 Δ 給定 10^{-3} 已足夠準確，本計算例中 10^{-10} 以確保微分結果之一致性。三種數值方法的準確性，可由下式所示之誤差評估：

$$E = \int_0^T |F_{num}(t) - F_{ode}(t)| dt \cong \sum_{i=1}^N |F_{num}(i) - F_{ode}(i)| \Delta t \quad (10)$$

其中 F_{num} 與 F_{ode} 分別為數值積分法與龍格-庫塔法的計算歷時， T 為計算區間， N 為。式(10)代表三種數值方法與龍格-庫塔法於計算區間內之差的面積。結構及滑軌式質量阻尼器的位移反應分別如圖 3 至圖 5 所示，由反應歷時可知，軌道式阻尼器之水平位移振幅約為 0.1 m，垂直高度來到 0.2 m，根據式(2)可知此時阻尼器所貢獻的力量為高度非線性。圖 6 為位移誤差與積分時間步長之關係，傳統離散方法無論使用的時間積分步長大小，皆不能收斂，充分顯示了它應用於非線性動力系統的困難。隨著縮小時間積分步長，一階近似方法與差分型態皆逐漸趨近於龍格-庫塔法之計算結果，且二者的差異極小，顯示給定式(8)中的微小常數為 10^{-10} 對矩陣中微分值的影響並不大。若欲將誤差控制在 1% 以內，則必須選取 $\Delta t=1/4000$ 秒，意味只要時間積分步長足夠小，一階近似方法可以成功地求解非線性系統之動力反應。

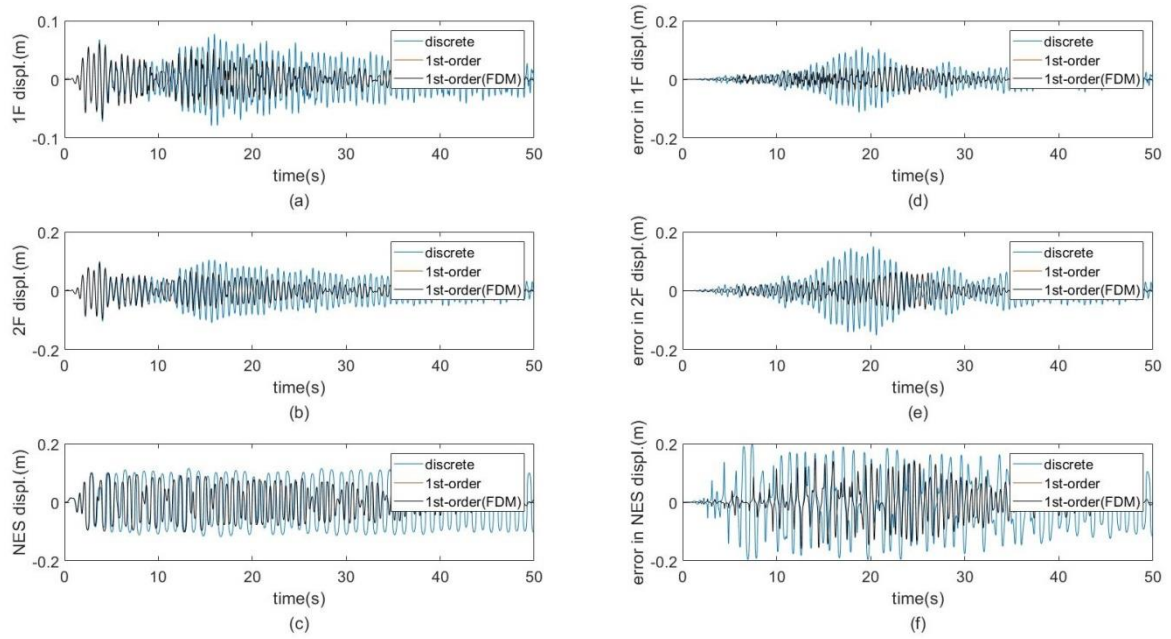


圖 3 傳統離散方法、一階近似法及其差分型態之計算結果($\Delta t=1/200$ 秒): (a)一樓位移; (b)二樓位移; (c)阻尼器位移; (d)一樓位移誤差; (e)二樓位移誤差; (f)阻尼器位移誤差

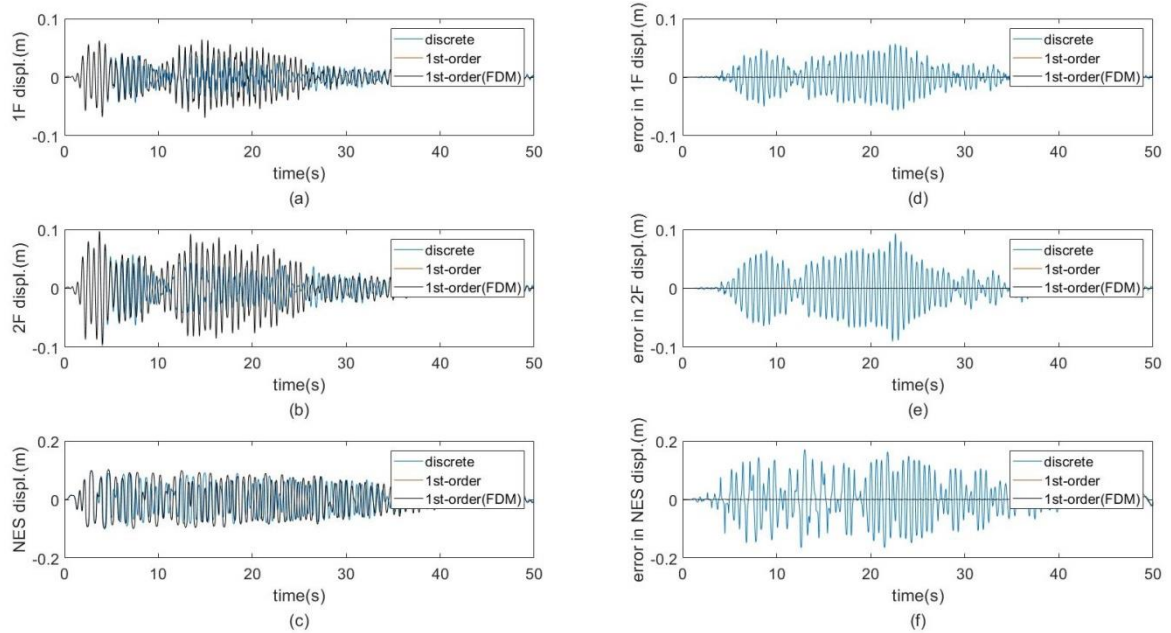


圖 4 傳統離散方法、一階近似法及其差分型態之計算結果($\Delta t=1/2000$ 秒): (a)一樓位移; (b)二樓位移; (c)阻尼器位移; (d)一樓位移誤差; (e)二樓位移誤差; (f)阻尼器位移誤差

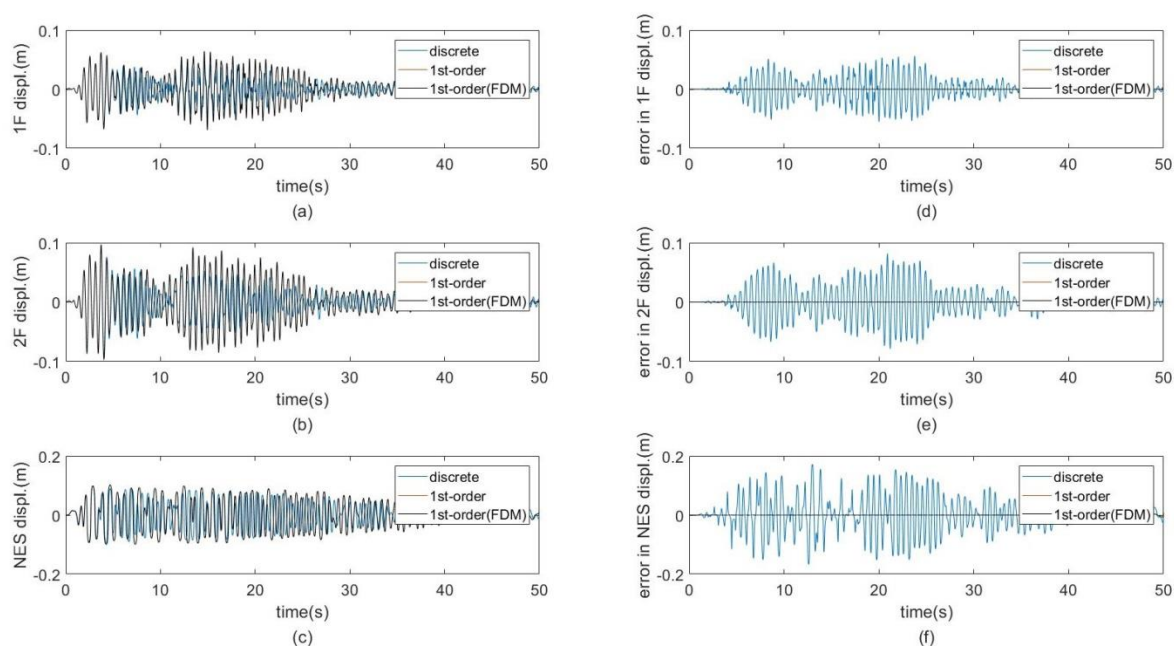


圖 5 傳統離散方法、一階近似法及其差分型態之計算結果($\Delta t=1/4000$ 秒): (a)一樓位移; (b)二樓位移; (c)阻尼器位移; (d)一樓位移誤差; (e)二樓位移誤差; (f)阻尼器位移誤差

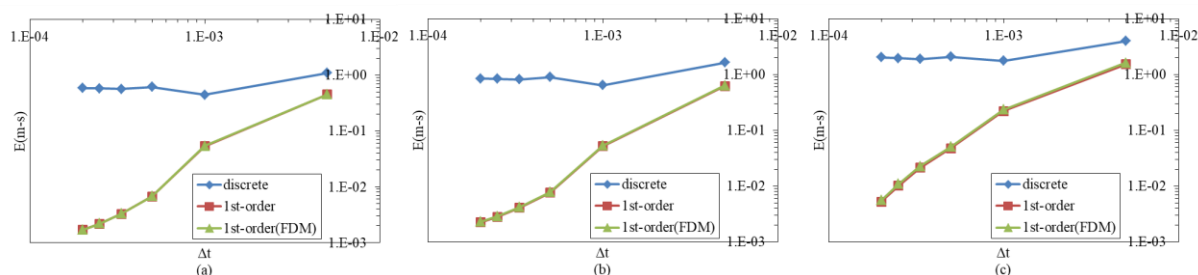


圖 6 傳統離散方法、一階近似法及其差分型態之位移誤差與積分時間步長之關係: (a)一樓位移; (b)二樓位移; (c)阻尼器位移

如果將地震外力調整至原始資料的 $1/3$ ，亦即 $PGA=0.99 \text{ m/s}^2$ ，則結構及滑軌式質量阻尼器於不同時間積分步長的位移反應分別如圖 7 至圖 9 所示。由圖可知，滑車相對於頂樓的位移最大不超過 0.08 m ，而此時滑車之垂直位移高度僅約 0.08 m ，說明滑車只在軌道中間平緩處左右來回運動，故此滑車產生的非線性恢復力較小，使得整體系統的非線性行為並不明顯。圖 10 為小地震作用下，三種數值積分方法與龍格-庫塔法之誤差，圖中一階近似方法的收斂速度要比大地震作用時稍快，因此可使用較大的積分步長即達到準確性的要求，若欲將誤差控制在 1% 以內，則選取 $\Delta t=1/1000$ 秒即可。傳統離散方法的收斂性雖然不佳，但與其他方法之間的差異，已經沒有在高度非線性系統中來得明顯。

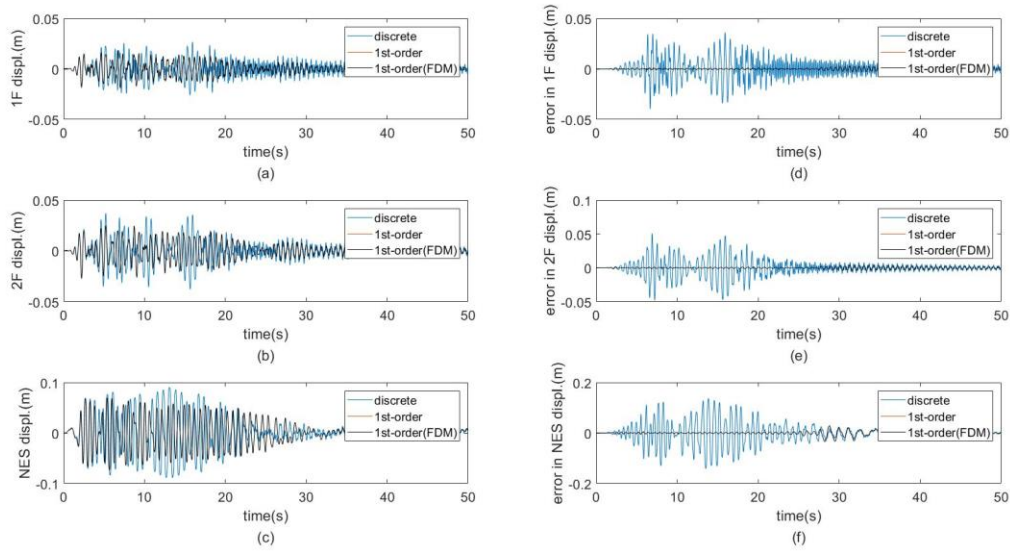


圖 7 小地震作用下傳統離散方法、一階近似法及其差分型態之計算結果($\Delta t=1/200$ 秒): (a)一樓位移; (b)二樓位移; (c)阻尼器位移; (d)一樓位移誤差; (e)二樓位移誤差; (f)阻尼器位移誤差

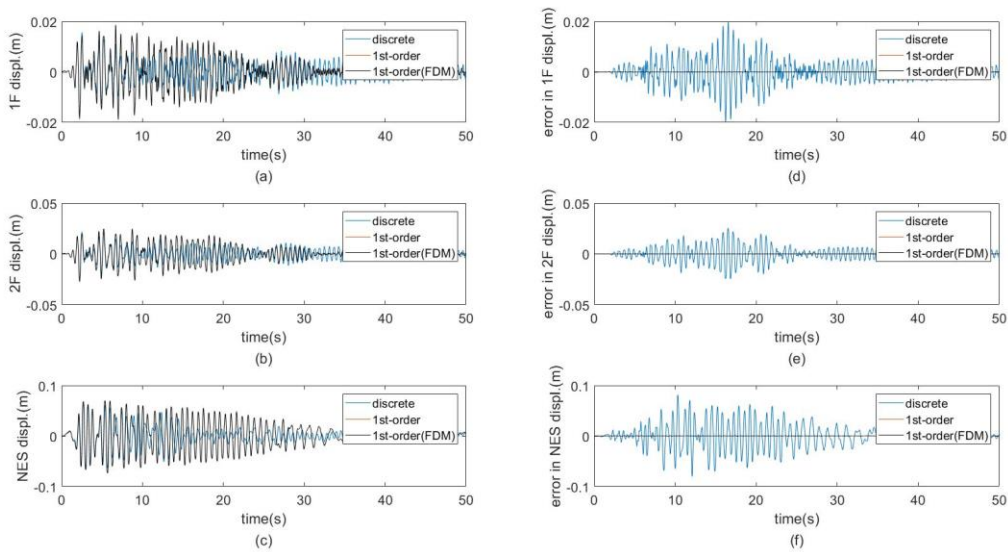


圖 8 小地震作用下傳統離散方法、一階近似法及其差分型態之計算結果($\Delta t=1/2000$ 秒): (a)一樓位移; (b)二樓位移; (c)阻尼器位移; (d)一樓位移誤差; (e)二樓位移誤差; (f)阻尼器位移誤差

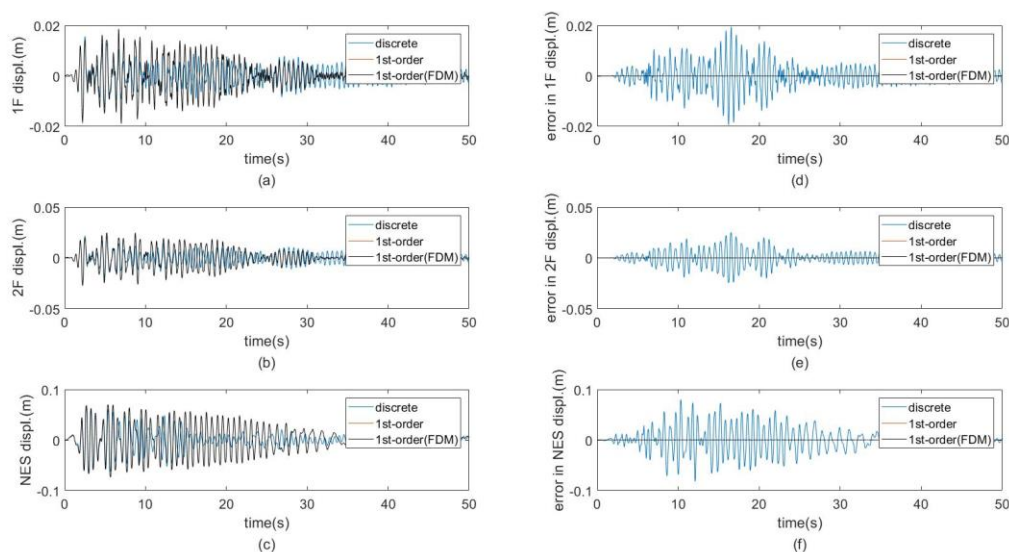


圖 9 小地震作用下傳統離散方法、一階近似法及其差分型態之計算結果($\Delta t=1/4000$ 秒): (a)一樓位移; (b)二樓位移; (c)阻尼器位移; (d)一樓位移誤差; (e)二樓位移誤差; (f)阻尼器位移誤差

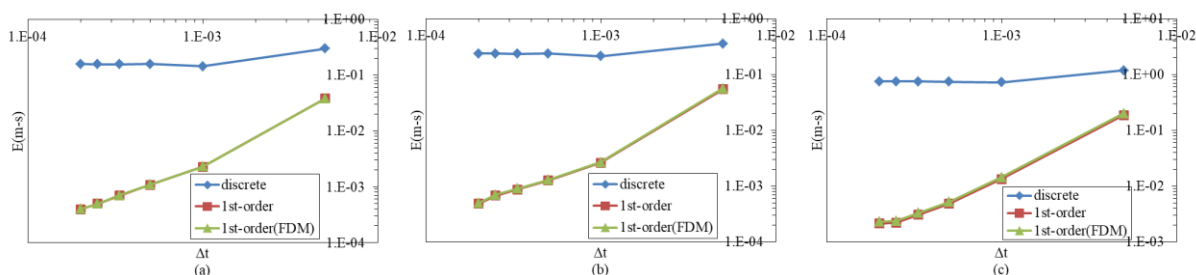


圖 10 小地震作用下傳統離散方法、一階近似法及其差分型態之位移誤差與積分時間步長之關係: (a)一樓位移; (b)二樓位移; (c)阻尼器位移

3.2 數值方法之運算效率

本文以 CPU 運算時間，做為數值方法之運算效率之比較基準。表 1 為四種方法所耗費之 CPU 運算時間。由於各方法於每一時刻所處理之運算步驟皆相同，花費的 CPU 運算時間會隨時間積分步長縮小而等比例成長，因此本文僅測試 $\Delta t=1/200$ 秒之運算效率。雖然龍格-庫塔法具有良好的準確性，但所花費的時間遠高於其他三種方法。一階近似分法較傳統離散方法多出額外的近似殘差矩陣必須計算，因此所花費的運算時間稍多，而一階近似分法之差分型態所需處理的矩陣運算又較一階近似分法稍為複雜，因此差分型態的方法又多耗費了些許計算時間。但此三種方法的運算過程相似，因此所耗費時間皆在同一級距。雖然傳統離散方法所花費的計算時間與一階近似分法處相同級距，但準確性遠不如後者，因此一階近似方法可兼顧準確性及效率，使得它在數值模擬中有著較高的實用性。考慮一階近似法需要先行推導非線性恢復力對狀態空間向量之微分項，故其差分型態的算法在實際使用上更為便利。

表 1 四種數值積分方法的 CPU 運算時間($\Delta t=1/200$ 秒)

數值積分方法	龍格-庫塔	傳統離散	一階近似	一階近似(差分型態)
CPU時間(秒)	118.4	4.4	4.7	5.1
節省比例(%)	NA	96.3	96.0	95.7

四、結論

本文中所討論的滑軌式質量阻尼器，具有高度非線性行為，因此傳統離散方法的結果無法收斂，而一階近似方法可逐漸收斂至與龍格-庫塔法的結果趨於一致。一階近似方法中，根據不同外力大小，數值積分方法的收斂性也不同。在小地震作用下，整體系統反應呈現低度非線性，其收斂速度要比大地震作用時稍快，因此可使用較大的積分步長即可達到準確性的要求。若欲將誤差控制在 1% 以內，大地震作用下必須選取 $\Delta t=1/4000$ 秒，小地震作用下則選取 $\Delta t=1/1000$ 秒即可。相較於龍格-庫塔法，一階近似分法可有效提升數值計算之成本與效率，而傳統離散方法的運算時間與其處相同級距，但準確性遠不如一階近似分法，故一階近似方法可兼顧準確性及運算效率。若進一步將有限差分法應用於求解一階近似方法中的微分矩陣，可避免推導過度複雜的運動方程式，提升數值方法的便利性與實用性。

致謝

本研究由臺灣科技部編號 No. MOST 106-2221-E-002-048-MY2 與臺大高等教育深耕計畫—核心研究群計畫 NTUCC-107L892502 補助。

參考文獻

1. Froberg, C.E., "Introduction to Numerical Analysis", Addison-Wesley, Massachusetts (1981).
2. Brogan, W.L., "Modern control theory", Prentice Hall, New Jersey (1991).
3. Senjanovic, I., "Harmonic acceleration method for dynamic structural analysis", Computers and Structures, 18, 71-80 (1984).
4. Wang, J., Wierschem, N.E., Spencer, B.F., Jr., and Lu, X. "Track nonlinear energy sink for rapid response reduction in building structure", Journal of Engineering Mechanics, 141(1), 04014104 (2015).
5. The MathWorks, Inc. "Matlab function reference", The MathWorks, Inc. (2015).