习题

1.当 $x\to1$ 时，函数 $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的$\boxed{\text{极限}}$

①分析
②化简（……）计算相关因子
③计算

（A）等于2.　　　　（B）等于0.

（C）为∞.　　　　（D）不存在但不为∞. ✓

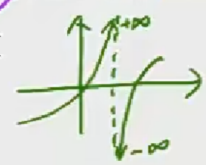
原式 $=\lim_{x\to1}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=2\lim_{x\to1}e^{\frac{1}{x-1}}$ $\begin{cases}\lim_{x\to1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=e^{-\infty}=0\\ \lim_{x\to1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=e^{+\infty}=+\infty\end{cases}$

2.曲线 $y=\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ 渐近线

（A）没有渐近线.　　　　（B）仅有水平渐近线.

（C）仅有铅直渐近线.　　　　（D）既有水平渐近线又有铅直渐近线. ✓

(1) 垂直 $\begin{cases}①\text{间断点，}x=0\\ ②\text{无穷}\quad \lim_{x\to0}y=\infty\ ✓\end{cases}$



(2) 水平：$\lim_{x\to\pm\infty}y=1$ ✓

(3) 斜：✗ 水平与斜在同一方向上不同时存在.

3.设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在 $x=a$ 处

(A) $f(x)$ 的导数存在，且 $f'(a)\neq 0$.　　(B) $f(x)$ 取得极大值.

(C) $f(x)$ 取得极小值.　　(D) $f(x)$ 的导数不存在.

A,D 导数：一个点的导数用定义

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}\cdot(x-a)=-1\cdot 0=0$$

B,C 极值：∧大　∨小

$\because \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1<0$　$\therefore x\to a$，$\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}<0$

$\therefore f(x)-f(a)<0$ 即 $f(x)<f(a)$

5.若 $f(x)$ 的$\boxed{\text{导函数}}$是 $\sin x$，则 $f(x)$ 有一个$\boxed{\text{原函数}}$为

且 $f(0)=-1$

(A) $1+\sin x$.　　(B) $1-\sin x$.

(C) $1+\cos x$.　　(D) $1-\cos x$.

$f'(x)=\sin x$　$\therefore f(x)=-\cos x+C_1$，$\because f(0)=-1$　$\therefore C_1=0$　$\therefore f(x)=-\cos x$

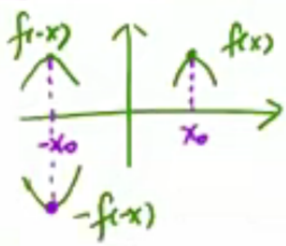
$\int f(x)\,dx=-\sin x+C_2$　$\therefore$

4.设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$x_0\neq 0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点，则

(A) x_0 必是 $f(x)$ 的$\boxed{\text{驻点}}$.　$f'(x_0)=0$　∧　　(B) $-x_0$ 必是 $-f(-x)$ 的极小值点.

(C) $-x_0$ 必是 $-f(x)$ 的极小值点.　　(D) 对$\boxed{\text{一切}x}$都有 $f(x)\le f(x_0)$.　局部

B:

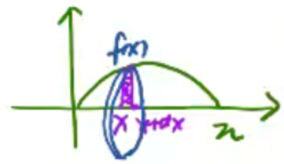


6.由曲线 $y=\sin^{\frac{3}{2}}x$（$0\le x\le\pi$）与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为

(A) $\frac{4}{3}$.　　(B) $\frac{4}{3}\pi$.

(C) $\frac{2}{3}\pi^2$.　　(D) $\frac{2}{3}\pi$.

定积分的几何应用



$dV=\pi f^2(x)\,dx$

$V_x=\int_0^\pi \pi y^2\,dx$

$=\pi\int_0^\pi \sin^3 x\,dx$

$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx$

$=2\pi\cdot\frac{2}{3}$

点火公式

华里士公式（点火公式）

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx(=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数}\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{6}{7}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 1, & n\text{为正齐数}\end{cases}$$

注：当 $n=1$ 时，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=1$。

实际上，对于一些**许多个或者无数个**数相乘的表达式，我们无法完全写出。但是当这些相乘的**数有一定规律**的话，我们只需要写出**首项和末项，中间用省略号**表示！例如题中的表达式：

不妨取**n=6**,

$$I_6=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 xdx=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{15\pi}{96}$$

取**n=7**,

$$I_7=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7 xdx=\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{35}$$

核心基础 > 预备测试

① $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续；　　② $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续；

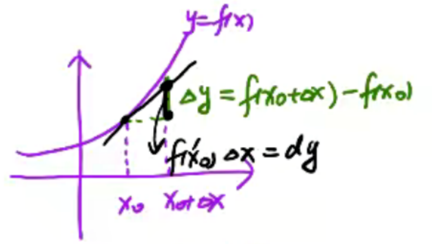
③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微；　　④ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在．

$\sin x$ 　 $x=\frac{\pi}{4} \to x=\frac{\pi}{4}+0.01$

若用"$P \Rightarrow Q$"表示可由性质 P 推出性质 Q，则有

(A) ②⇒③⇒①.　　(B) ③⇒②⇒①.

(C) ③⇒④⇒①.　　(D) ③⇒①⇒④.

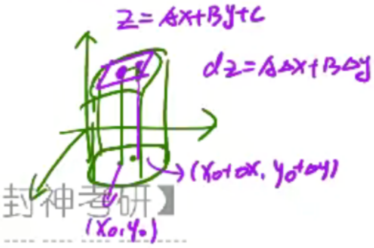


② 一阶偏导连续 ⇒ ③ 可微 ⇒ ④ 偏导存在

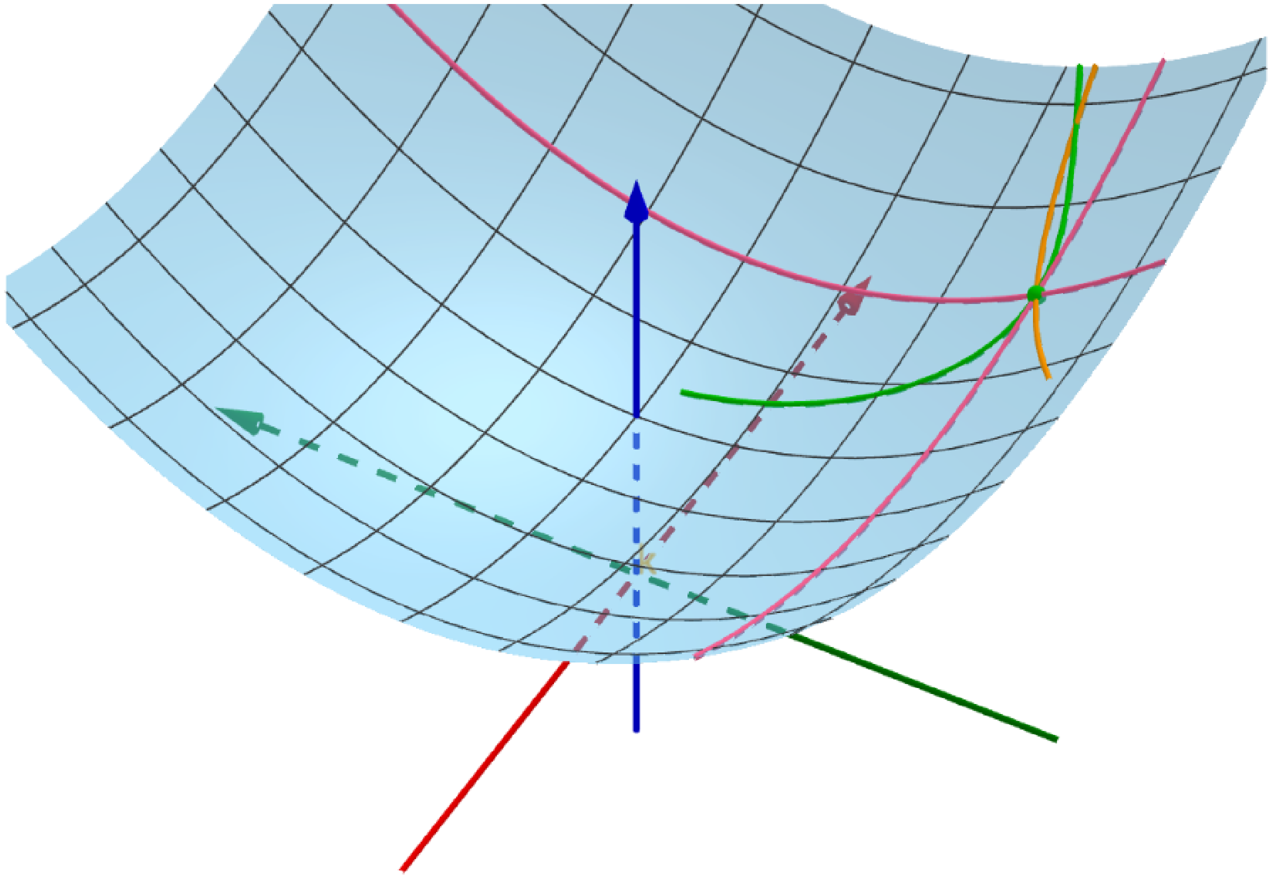
③ 可微 ⇒ ① 连续

可微：切平面

偏导存在：x, y 轴方向 切线



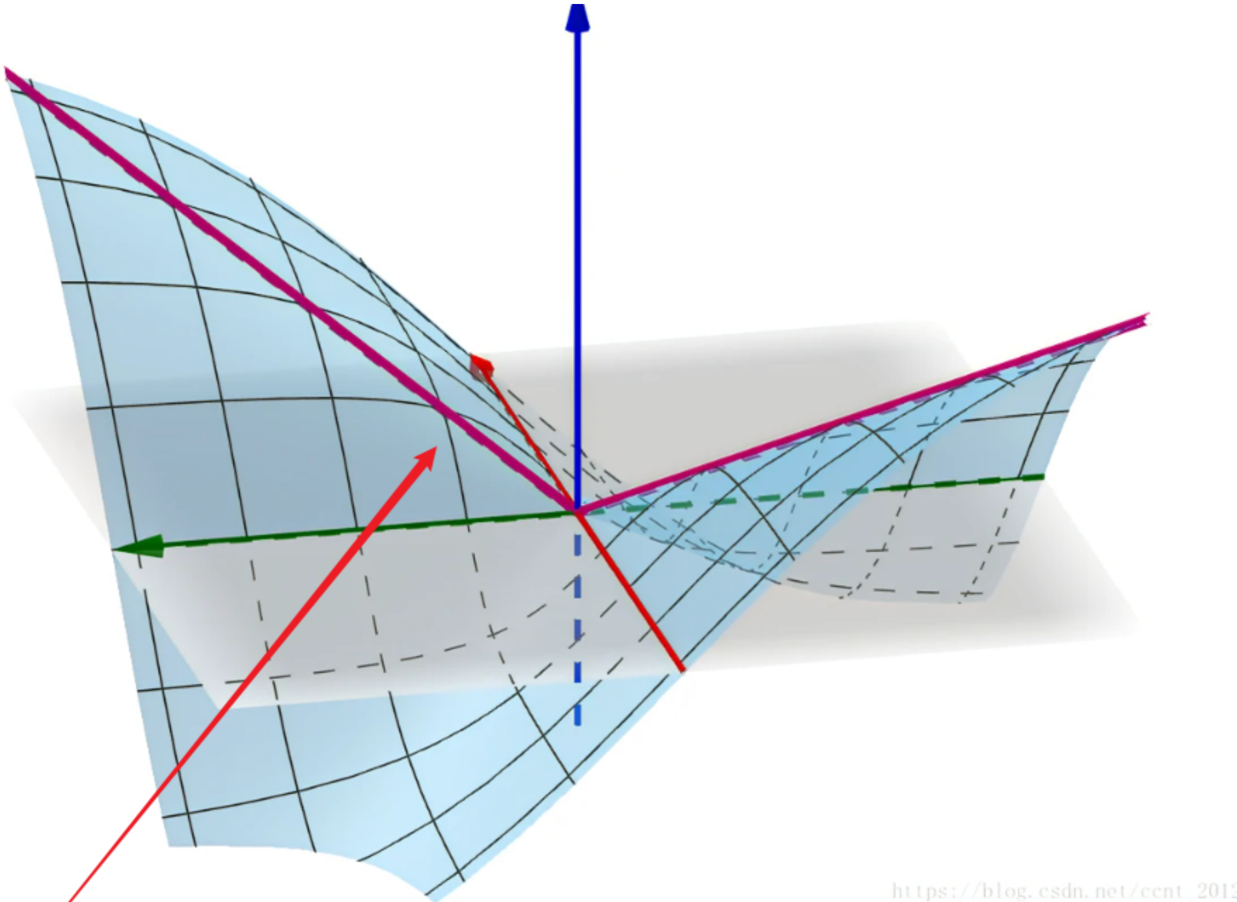
偏导数连续-可微-偏导数存在-连续关系



这些曲线的切线（假如有的话）要在同一个平面，这个平面就是切平面，才叫做可微（详情参考之前给出的参考文章）。

而偏微分只是无数切线中的两条，所以：

$$偏导数存在 \nRightarrow 可微$$



很显然此曲线的切线不存在（此曲线的左右切线由方向导数决定）。因此$f(x,y)$在$(0,0,0)$点不可微（具体细节也请参看参考文章）。

9.设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$.已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点 ⇒ 驻点. ，下列选项正确的是

(A) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.

(B) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

(C) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.

(D) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

令 $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，则

(C) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.

(D) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

令 $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，则

$$\begin{cases} L'_x=f'_x+\lambda\varphi'_x=0 \\ L'_y=f'_y+\lambda\varphi'_y=0 \\ L'_\lambda=\varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

(x_0,y_0) 为驻点.

$$\therefore \begin{cases} f'_x(x_0,y_0)+\lambda\varphi'_x(x_0,y_0)=0 \\ f'_y(x_0,y_0)+\lambda\underbrace{\varphi'_y(x_0,y_0)}_{\neq 0}=0 \end{cases} \Rightarrow \lambda=-\frac{f'_y(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)}$$

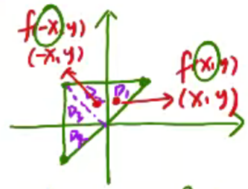
$$\therefore f'_x(x_0,y_0)=\frac{f'_y(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)}\cdot\varphi'_x(x_0,y_0)$$

若 $\neq 0$

10.设 D 是 xOy 平面上以 $(1,1)$，$(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域，D_1 是 D 在第一象限的部分，$\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于　对称性：偶倍奇0.

(A) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.　　(B) $2\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.　　(D) 0 .



将y看成常数，看一个函数奇偶性 偶倍奇0

D_1+D_2 关于 y 轴对称、x 坐标具有对称性

D_3+D_4 关于 x 轴对称、y 坐标具有对称性

将x看做常数，看一个函数的奇偶性 偶倍奇0

原式 $= \iint\limits_{D_1+D_2} + \iint\limits_{D_3+D_4} (y奇)\,dxdy$

$= \iint\limits_{D_1+D_2} xy\,dxdy + \iint\limits_{D_1+D_2} \cos x\sin y\,dxdy + 0$

$= 0 + 2\iint\limits_{D_1} \cos x\sin y\,dxdy$

11.若 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2tx}$，则 $f'(t)=$_______.

$= t\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot 2t}$

$= te^{2t}$

$\therefore f'(t) = e^{2t} + e^{2t}\cdot 2\cdot t = e^{2t}(2t+1)$

12.当 $x=$ $-\frac{1}{\ln 2}$ 时，函数 $y=x2^x$ 取得极小值.　$(a^x)'=a^x\ln a$

解：$y' = 2^x + 2^x\cdot\ln 2\cdot x = 2^x(x\ln 2+1)$

令 $y'=0$ 得：$x=-\frac{1}{\ln 2}$

13.设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)=x+2\boxed{\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t}$，则 $f(x)=$ $\underline{x-1}$.

定积分是一个数.

代入

解：记 $\int_0^1 f(t)dt = A$，则 $f(x)=x+2A$.

$\therefore A=\int_0^1 (t+2A)\,dt = \left(\frac{1}{2}t^2+2At\right)\Big|_0^1$

$= \frac{1}{2}+2A$ $\quad\therefore A=-\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=x-1$.