高等工程數學 (1)

厦門大學
XIAMEN UNIVERSITY

信息学院
（国家示范性软件学院）
School of Informatics
黃 煒
博士，副教授
Dr. Wei Huang

课程简介

厦門大學
XIAMEN UNIVERSITY
信息学院
（国家示范性软件学院）
School of Informatics
黄 炜
博士·副教授
Dr. Wei Huang

课程简介

- 研究生一年级下学期
  - 软件工程专业、数字媒体专业学位课
  - 其它专业选修课
- 学分：3学分
- 授课时间地点
  - 每周一19:00~21:30，海韵406

课程内容

课程内容

- 线性代数
- 数值计算
- 数理统计

课程内容：线性代数

- 线性代数基本知识
- 方阵的相似化简
- 向量范数和矩阵范数
- 方阵函数与函数矩阵
- 矩阵分解
- 线性空间和线性变换

课程内容：数值计算

- 误差分析
- 线性方程组的数值解法
- 方阵特征值和特征向量的数值计算
- 计算函数零点和极值点的迭代法
- 插值与最佳平方逼近
- 数值积分与数值微分
- 常微分方程数值解法

课程内容：数理统计

- 数理统计的基本概念
- 参数估计
- 假设检验
- 线性统计推断

主要参考书目

- 于寅. 高等工程数学（第4版）, 华中科技大学出版社, 2012. (ISBN：9787560982458)

考核方式

厦門大學 XIAMEN UNIVERSITY 信息学院（国家示范性软件学院）School of Informatics 黄 煒 博士·副教授 Dr. Wei Huang

成绩构成

- 期末笔试：60%
  - 统一闭卷
- 平时成绩：40%
  - 平时作业：40%
  - 考勤：倒扣分

平时作业

- 每周课后布置于QQ群
- 书写在A4纸或A4规格的作业纸上
  - 谢绝奇形怪状的纸，请勿装订
- 请勿抄袭
- 下次课前提交

课程QQ群

线性代数基本知识

矩阵论（1）

厦門大學
XIAMEN UNIVERSITY
信息学院
（国家示范性软件学院）
School of Informatics
黄 炜
博士·副教授
Dr. Wei Huang

前言

- 应用矩阵的理论和方法解决工程技术和社会经济领域中的实际问题已越来越普遍，矩阵论已经成为最有实用价值的数学分支之一。就矩阵论的实质来说，它是讨论有限维线性空间的空间形式与数量关系的有力工具，其中许多思想、概念和方法对学习数学的其他分支有重要的作用，
- 例如，无限维线性空间的理论和方法（这是泛函分析研究的主要对象）就是在矩阵论的基础上发展起来的． 而数字计算机的广泛使用和数值计算方法的普及与发展，更为矩阵论的应用开辟了广阔的前景，许多数值计算方法的理论基础是矩阵论，学习本书的第二部分数值计算方法和第三部分数理统计时会有更深的体会。

前言

- 这一部分讲述矩阵论中最主要的一些基本概念、基本理论和方法，其中也涉及一些较深的内容，但从应用的角度来说，它们是重要和有用的。为了便千读者理解和掌握所述的内容，我们力求叙述清楚，论证详细，并多举一些例题，同时，在每节末都附有习题，其中有些是基本的，也有少量是所讲授内容的拓广和延伸，希望读者能多做些习题，这对于深入理解概念、掌握方法、提高运算能力及培养分析问题与解决问题的能力都是极有效的。

第一章　线性代数基本知识

- 本章带有复习性质，其目的是帮助读者整理一下学习矩阵论要用到的线性代数方面的一些基本概念和结果。
- 熟悉这部分内容的读者可浏览或略过这一章，而其他读者应仔细阅读，为后几章学习打下良好基础。

1.1 向量和向量空间

数域 F 中的 n 个数 $x_1,\cdots,x_n$ 组成的有序数组 $[x_1,\cdots,x_n]$，在数学上称为数域 F 上的 n 维(行) **向量**. 数 x_i 称为此 n 维向量的第 i 个分量. 如果 F 是实数域，则称其为 n 维实向量；如果 F 为复数域，称其为 n 维复向量. 我们用 $\mathbf{R}^n$ 记实数域上 n 维向量全体所组成的集合，用 $\mathbf{C}^n$ 记复数域上 n 维向量全体所组成的集合. 为了方便，我们用希腊字母 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\cdots$ 或小写英文黑体字母 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\cdots$(必要时带有下标) 表示向量. 例如记

$$\boldsymbol{x}=[x_1,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}},$$

它表示 $\boldsymbol{x}$ 是一个 n 维列向量，其中 T 表示转置(为了节省空间，常用行向量的转置表示列向量；除非特别声明，向量指的是列向量).

1.1.1 向量的运算

设 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=[b_1,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}$ 都是 n 维向量，当且仅当 $a_i=b_i(i=1,\cdots,n)$ 时，称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 相等，记为 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

若一个向量的每个分量均为 0，则称该向量为零向量，记作 $\mathbf{0}$，即 $\mathbf{0}=[0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$.

给出向量的如下运算：

(1) 加法　设 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=[b_1,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}$，则称向量 $[a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n]^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和，记为 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$.

(2) 数乘　设 k 为一数，$\boldsymbol{\alpha}=[a_1,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$，则称向量 $[ka_1,\cdots,ka_n]^{\mathrm{T}}$ 为 k 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的乘积，简称数乘，记之为 $k\boldsymbol{\alpha}$ 或 $\boldsymbol{\alpha}k$.

特别地，当 $k=-1$ 时，$-\boldsymbol{\alpha}=(-1)\boldsymbol{\alpha}=[-a_1,\cdots,-a_n]^{\mathrm{T}}$，称其为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量.

向量的加法与向量的数乘统称为向量的线性运算. 不难验证，向量的线性运算满足下列八条运算规则：对于任意的 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$ 和数 k、l，有

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$；

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$；

(3) $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$；

(4) $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$；

(5) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$；

(6) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$；

1.1.1 向量的运算

(7) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$;

(8) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.

定义 1.1-1 设 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,\cdots,a_n]$，$\boldsymbol{\beta}=[b_1,\cdots,b_n]$ 都是 n 维复向量，记

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\sum_{i=1}^{n}a_i\bar{b}_i, \tag{1.1-1}$$

其中 $\bar{b}_i$ 表示对 b_i 取共轭. 称 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的**内积**.

容易验证，这里定义的内积满足下列运算规则：

(1) 正定性 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle\geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时才有 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle=0$;

(2) 共轭对称性 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\overline{\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\rangle}$，这里 $\overline{\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\rangle}$ 表示对 $\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\rangle$ 取共轭;

(3) 关于第一个变元的可加性 $\langle\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\rangle=\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}\rangle+\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\rangle$;

(4) 关于第一个变元的齐次性 $\langle k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=k\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$，其中 $k\in\mathbf{C}$(即 k 属于复数域 $\mathbf{C}$，亦即 k 是复数).

根据上述的内积运算规则，有关于第二个变元的可加性. 事实上，

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}\rangle=\overline{\langle\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}\rangle}=\overline{\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\rangle}+\overline{\langle\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}\rangle}=\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle+\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}\rangle.$$

但关于第二个变元没有齐次性，这是因为对于复数 k，

$$\langle\boldsymbol{\alpha},k\boldsymbol{\beta}\rangle=\overline{\langle k\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\rangle}=\overline{k\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\rangle}=\bar{k}\,\overline{\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\rangle}=\bar{k}\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle\neq k\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle.$$

1.1.1 向量的运算

若 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{R}^n$，则 $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle$ 是实数，从而共轭对称性简化为对称性，即有

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \rangle,$$

并且对任意实数 k，有

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, k\boldsymbol{\beta} \rangle = k\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle,$$

因此关于第二个变元也有齐次性.

定义了线性运算和内积的 $\mathbf{R}^n(\mathbf{C}^n)$ 称为**欧氏空间(酉空间)**，今后仍用 $\mathbf{R}^n(\mathbf{C}^n)$ 表示.

利用内积可以引进向量长度及向量正交的概念.

向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**长度**定义为 $\sqrt{\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \rangle}$，记作 $|\boldsymbol{\alpha}|$. 长度为 1 的向量称为**单位向量**.

这样定义的向量长度具有通常的长度性质：

$$|k\boldsymbol{\alpha}| = |k|\,|\boldsymbol{\alpha}|;$$

$$|\boldsymbol{\alpha}| = 0 \text{ 当且仅当 } \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}.$$

对于任一非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$，有

$$\left|\frac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|}\right| = \frac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\,|\boldsymbol{\alpha}| = 1,$$

即 $\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|}$ 是单位向量. 这种对一非零向量除以该向量长度成为单位向量的办法，称为向量的单位化.

1.1.1 向量的运算

定理 1.1-1 向量的内积满足

$$|\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle| \leqslant |\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|. \tag{1.1-2}$$

证 当 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ 时，(1.1-1) 式显然成立. 下设 $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$，令

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\alpha} - \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle}{|\boldsymbol{\beta}|^2}\boldsymbol{\beta},$$

则有

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \left\langle \boldsymbol{\alpha} - \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle}{|\boldsymbol{\beta}|^2}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta} \right\rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle - \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle}{|\boldsymbol{\beta}|^2}\langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle - \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = 0,$$

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle &= \left\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\alpha} - \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle}{|\boldsymbol{\beta}|^2}\boldsymbol{\beta} \right\rangle = \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\alpha} \rangle - \frac{\overline{\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle}}{|\boldsymbol{\beta}|^2}\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\alpha} \rangle \\ &= \left\langle \boldsymbol{\alpha} - \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle}{|\boldsymbol{\beta}|^2}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \right\rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \rangle - \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle}{|\boldsymbol{\beta}|^2}\langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \rangle \\ &= |\boldsymbol{\alpha}|^2 - \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle \overline{\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle}}{|\boldsymbol{\beta}|^2} = |\boldsymbol{\alpha}|^2 - \left| \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle^2}{|\boldsymbol{\beta}|^2} \right|, \end{aligned}$$

即

$$|\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle|^2 \leqslant |\boldsymbol{\alpha}|^2 |\boldsymbol{\beta}|^2.$$

两边开方便得(1.1-2)式. ∎

(1.1-2)式称为 Cauchy-Schwarz 不等式.

1.1.1 向量的运算

定理 1.1-1 的一个推论是三角不等式

$$|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta}|. \tag{1.1-3}$$

事实上，由于

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2 &= \langle\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\rangle = \langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle+\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle+\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\rangle+\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}\rangle \\ &\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|^2+|\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle|+|\overline{\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle}|+|\boldsymbol{\beta}|^2\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|^2+2|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|+|\boldsymbol{\beta}|^2 \\ &= (|\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta}|)^2,\end{aligned}$$

所以两边开方便得(1.1-3)式.

对于向量 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$，若 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=0$，则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交，记作 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$.

由于当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$ 时必有 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=0$，所以零向量与任何向量正交.

容易推出，当 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$ 时有 $|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2=|\boldsymbol{\alpha}|^2+|\boldsymbol{\beta}|^2$.

1.1.2 向量组的线性相关性和秩

给定向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，如果存在不全为零的数 $k_1,\cdots,k_s$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}, \tag{1.1-4}$$

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ **线性相关**. 否则，称这个向量组**线性无关**. 换句话说，如果只有当 $k_1=\cdots=k_s=0$ 时才使(1.1-4)式成立，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ **线性无关**.

例 1 证明 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n=[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$ 线性无关.

证 设有一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$，则有

$$\begin{cases} k_1+k_2+\cdots+k_n=0, \\ \qquad k_2+\cdots+k_n=0, \\ \qquad\qquad\vdots \\ \qquad\qquad\quad k_n=0. \end{cases}$$

于是 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关. ∎

对向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，如果有一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s,$$

则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ **线性表出**，或称 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的**线性组合**.

1.1.2 向量组的线性相关性和秩

线性相关的充要条件是，至少其中有个向量可以由其他向量线性表出。

证　必要性： 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，即有一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使(1.1-4)式成立. 不妨设 $k_1\neq 0$，则有

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\left(-\frac{k_s}{k_1}\right)\boldsymbol{\alpha}_s,$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可用其余 $s-1$ 个向量线性表出.

充分性： 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出，即存在一组数 $k_1,\cdots,k_{s-1}$ 使

$$\boldsymbol{\alpha}_s=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{s-1}\boldsymbol{\alpha}_{s-1},$$

则有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{s-1}\boldsymbol{\alpha}_{s-1}+(-1)\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}.$$

由于 $k_1,\cdots,k_{s-1},-1$ 中至少 -1 不是零，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关. ■

厦門大學 XIAMEN UNIVERSITY
信息学院（国家示范性软件学院） School of Informatics
黄炜 博士/副教授 Dr. Wei Huang

1.1.2 向量组的线性相关性和秩

下面讨论向量组之间的关系.

设有两个向量组：

（Ⅰ） $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$；

（Ⅱ） $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$.

如果向量组（Ⅱ）中每个向量都可用向量组（Ⅰ）线性表出，则称向量组（Ⅱ）能由向量组（Ⅰ）线性表出.如果向量组（Ⅰ）与向量组（Ⅱ）能互相线性表出，则称这两个向量组等价，记作（Ⅰ）$\cong$（Ⅱ）.

向量组的等价具有下列性质：

(1) 自反性　（Ⅰ）$\cong$（Ⅰ）；

(2) 对称性　若（Ⅰ）$\cong$（Ⅱ），则（Ⅱ）$\cong$（Ⅰ）；

(3) 传递性　若（Ⅰ）$\cong$（Ⅱ），（Ⅱ）$\cong$（Ⅲ），则（Ⅰ）$\cong$（Ⅲ）.

上述（Ⅰ）、（Ⅱ）、（Ⅲ）表示三个向量组.

1.1.2 向量组的线性相关性和秩

定理 1.1-3 如果两个线性无关向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 等价，则 $r=s$.

证 设

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_{1r}\boldsymbol{\alpha}_r,\\ \quad\vdots\\ \boldsymbol{\beta}_s=a_{s1}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_{sr}\boldsymbol{\alpha}_r.\end{cases}\tag{1.1-5}$$

考察向量方程

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\beta}_s=\mathbf{0},\tag{1.1-6}$$

将(1.1-5)式代入(1.1-6)式，得到

$$(k_1a_{11}+\cdots+k_sa_{s1})\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(k_1a_{1r}+\cdots+k_sa_{sr})\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，故上式成立的充要条件是

$$\begin{cases}a_{11}k_1+\cdots+a_{s1}k_s=0,\\ \quad\quad\vdots\\ a_{1r}k_1+\cdots+a_{sr}k_s=0.\end{cases}\tag{1.1-7}$$

如果 $s>r$，则齐次线性方程组(1.1-7)必有非零解，从而有一组不全为零的数 $k_1,\cdots,k_s$ 使(1.1-6)式成立，即向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关. 这与题设矛盾，因而只能 $s\leqslant r$. 同理可证 $r\leqslant s$，故得证 $r=s$. ∎

1.1.2 向量组的线性相关性和秩

向量组的一个重要概念，是它的极大线性无关组，其定义如下.

设 S 是一个向量组，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是它的一个子组. 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，且 S 中任一向量都可用这个子组线性表出，则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量组 S 的一个**极大线性无关组**.

一般地说，向量组的极大线性无关组不是唯一的，但它们之间必定是等价的，从而极大线性无关组中所含向量的个数 r 是由原向量组唯一确定的，我们称这个数为该向量组的**秩**.

只含零向量的向量组没有极大线性无关组，我们规定它的秩为 0. 再则，由向量组的秩的定义可知，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充要条件是它的秩等于其所含向量的个数 m.

1.1.3 向量空间

定义 1.1-2 设 V 是数域 F 上的 n 维向量组成的非空集合，如果集合 V 对于加法及数乘两种运算封闭(即，若 $\boldsymbol{\alpha}\in V,\boldsymbol{\beta}\in V$，则$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V$；若 $\boldsymbol{\alpha}\in V,k\in F$，则 $k\boldsymbol{\alpha}\in V$)，则称 V 为 **F 上的向量空间.**

例如，n 维实向量的全体 $\mathbf{R}^n$ 是一个向量空间；n 维复向量的全体 $\mathbf{C}^n$ 是一个向量空间；只含一个 n 维零向量的集合 $\{\mathbf{0}\}$ 也是一个向量空间.

例 2 集合

$$V=\{\boldsymbol{x}=[0,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}\mid x_i\in\mathbf{R},2\leqslant i\leqslant n\}$$

是一个向量空间，因为若 $\boldsymbol{\alpha}=[0,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}\in V,\boldsymbol{\beta}=[0,b_2,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}\in V$，则 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=[0,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n]^{\mathrm{T}}\in V$，且当 $k\in\mathbf{R}$ 时有 $k\boldsymbol{\alpha}=[0,ka_2,\cdots,ka_n]^{\mathrm{T}}\in V$. ■

定义 1.1-3 设 V_1 和 V_2 都是同一数域 F 上的向量空间，若$V_1\subseteq V_2$，则称 V_1 是 V_2 的子空间.

例如，例 2 中的向量空间 V 是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间.

定义 1.1-4 设 V 是向量空间，如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 V 中给定顺序的一个极大线性无关组，则称它为 V 的一个基，记为 $\mathscr{B}=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$，其向量个数 r 称为 V 的**维数**，记作 $\dim V=r$，并称 V 为 r 维向量空间.

1.1.3 向量空间

定理 1.1-4 设 $\mathscr{B}=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 n 维向量空间 V 的一个基，则 V 中任一向量 $\boldsymbol{\beta}$ 都可由 $\mathscr{B}$ 唯一地线性表出.

证 只需证明唯一性. 设有

$$\boldsymbol{\beta}=a_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_n\boldsymbol{\alpha}_n \text{ 和 } \boldsymbol{\beta}=b_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+b_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则得

$$(a_1-b_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(a_n-b_n)\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}.$$

于是由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关推出

$$a_i=b_i,\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$ ∎

这个定理表明，在 V 中取定一个基 $\mathscr{B}$，那么对任一 $\boldsymbol{\beta}\in V$，存在唯一的一组数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，使

$$\boldsymbol{\beta}=a_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_n\boldsymbol{\alpha}_n.$$

我们称有序数组 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\mathscr{B}$ 下的**坐标**，记作 $\boldsymbol{\beta}=[a_1,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$.

例如，在 $\mathbf{R}^3$ 中，$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,3,4]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,2,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[1,0,0]^{\mathrm{T}}$ 构成一个基. 对向量 $\boldsymbol{\beta}=[1,1,4]^{\mathrm{T}}$ 有

$$\boldsymbol{\beta}=1\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+(-1)\boldsymbol{\alpha}_2+1\cdot\boldsymbol{\alpha}_3,$$

故 $\boldsymbol{\beta}$ 关于这个基的坐标是 $[1,-1,1]^{\mathrm{T}}$.

定义了内积的向量空间统称为**内积空间**. 例如欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 是内积空间. 同样，$\mathbf{C}^n$ 也是一个内积空间. 在内积空间中，存在着特殊的基，即标准正交基.

我们称两两正交的非零向量构成的向量组为正交向量组.

1.1.3 向量空间

例 3　证明正交向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 必定线性无关.

证　设有数 $k_1, \cdots, k_m$ 使　　$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}.$

用 $\boldsymbol{\alpha}_i (i=1,2,\cdots,m)$ 对上式的两边作内积，得到

$$k_1\langle\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_i\rangle + \cdots + k_i\langle\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i\rangle + \cdots + k_m\langle\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_i\rangle = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,m).$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 两两正交，所以上式为

$$k_i\langle\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i\rangle = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,m).$$

又因 $\boldsymbol{\alpha}_i \neq \mathbf{0}$，故 $\langle\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i\rangle \neq 0$，从而 $k_i = 0 (i=1,2,\cdots,m)$. 因此向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关. ∎

定义 1.1-5　设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 n 维向量空间 V 的一个基，若它们两两正交，则称该基为 V 的一个**正交基**. 若每个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 还都是单位向量，则称它为 V 的一个**标准正交基**.

容易验证，$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 n 维向量空间 V 的标准正交基的充要条件是，$\boldsymbol{\alpha}_i \in V, i = 1,2\cdots,n$，且

$$\langle\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j\rangle = \delta_{ij} \triangleq \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i,j = 1,2,\cdots,n.$$

1.1.3 向量空间

定理 1. 1-5 内积空间必有标准正交基.

证 设$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$是内积空间 V 的一个基，用如下的作法得出一个标准正交基：

令
$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1, & \boldsymbol{\varepsilon}_1=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1}{|\boldsymbol{\beta}_1|},\\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_1\rangle\boldsymbol{\varepsilon}_1, & \boldsymbol{\varepsilon}_2=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_2}{|\boldsymbol{\beta}_2|},\\ \quad\vdots & \\ \boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_n-\langle\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\varepsilon}_1\rangle\boldsymbol{\varepsilon}_1-\cdots-\langle\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}\rangle\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}, & \boldsymbol{\varepsilon}_n=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_n}{|\boldsymbol{\beta}_n|},\end{cases}\tag{1.1-8}$$

则$\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n\}$是 V 的一个标准正交基. 事实上，对于 $\boldsymbol{\beta}_i(2\leqslant i\leqslant n)$，由 $\boldsymbol{\beta}_i$ 的作法不难证明

$$\boldsymbol{\beta}_i\perp\boldsymbol{\varepsilon}_j\quad(1\leqslant j\leqslant i-1);$$

且 $\boldsymbol{\varepsilon}_i(1\leqslant i\leqslant n)$显然是单位向量. 因此

$$\langle\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j\rangle=\delta_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$ ∎

这种把一个基化为标准正交基的办法称为 Schmidt 正交化方法.

1.1.3 向量空间

例 4 已知$\{\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[2,0,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[2,2,1]^{\mathrm{T}}\}$是三维欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，用这个基求 $\mathbf{R}^3$ 的一个标准正交基.

解 取$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$，单位化后得

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}[1,1,0]^{\mathrm{T}}=\frac{1}{\sqrt{2}}[1,1,0]^{\mathrm{T}}.$$

由于$\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_1\rangle=2\times\frac{1}{\sqrt{2}}+0\times\frac{1}{\sqrt{2}}+1\times 0=\sqrt{2}$，所以

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_1\rangle\boldsymbol{\varepsilon}_1=[2,0,1]^{\mathrm{T}}-\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}[1,1,0]^{\mathrm{T}}$$

$$=[2,0,1]^{\mathrm{T}}-[1,1,0]^{\mathrm{T}}=[1,-1,1]^{\mathrm{T}},$$

单位化得 $$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{|\boldsymbol{\beta}_2|}=\frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}[1,-1,1]^{\mathrm{T}}=\frac{1}{\sqrt{3}}[1,-1,1]^{\mathrm{T}}.$$

1.1.3 向量空间

因为$\langle \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\varepsilon}_1 \rangle = 2\times\frac{1}{\sqrt{2}}+2\times\frac{1}{\sqrt{2}}+1\times\frac{0}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，$\langle \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \rangle = 2\times\frac{1}{\sqrt{3}}+2\times\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+1\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3 - \langle \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\varepsilon}_1 \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_1 - \langle \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ &= [2,2,1]^{\mathrm{T}} - 2\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}[1,1,0]^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}[1,-1,1]^{\mathrm{T}} \\ &= [2,2,1]^{\mathrm{T}} - [2,2,0]^{\mathrm{T}} - \frac{1}{3}[1,-1,1]^{\mathrm{T}} = \left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

单位化得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_3 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_3}{|\boldsymbol{\beta}_3|} = \frac{1}{\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}}\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]^{\mathrm{T}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{6}}\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sqrt{6}}[-1,1,2]^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

于是，用 Schmidt 正交化求得的标准正交基是

$$\left\{\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \left[-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right]^{\mathrm{T}}\right\}.$$ ∎

1.1.3 向量空间

例 5 已知$\{\boldsymbol{\alpha}_1=[\mathrm{i},-1,\mathrm{i}]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,0,\mathrm{i}]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[1,1,1]^{\mathrm{T}}\}$是三维西空间 $\mathbf{C}^3$ 的一个基，用它求 $\mathbf{C}^3$ 的标准正交基.

解 按 Schmidt 正交化方法，有

$$\boldsymbol{\beta}_1=[\mathrm{i},-1,\mathrm{i}]^{\mathrm{T}},\quad |\boldsymbol{\beta}_1|=\sqrt{\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}=\sqrt{3},\quad \boldsymbol{\varepsilon}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}[\mathrm{i},-1,\mathrm{i}]^{\mathrm{T}};$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_2&=\boldsymbol{\alpha}_2-\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_1\rangle\boldsymbol{\varepsilon}_1\\&=[1,0,\mathrm{i}]^{\mathrm{T}}-\left(1\times\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{\mathrm{i}}+0\times\frac{-1}{\sqrt{3}}+\mathrm{i}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{\mathrm{i}}\right)\times\frac{1}{\sqrt{3}}[\mathrm{i},-1,\mathrm{i}]^{\mathrm{T}}\\&=\frac{1}{3}[2-\mathrm{i},1-\mathrm{i},-1+2\mathrm{i}]^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

$$|\boldsymbol{\beta}_2|=\sqrt{\langle\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2\rangle}=\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{|\boldsymbol{\beta}_2|}=\frac{1}{2\sqrt{3}}[2-\mathrm{i},1-\mathrm{i},-1+2\mathrm{i}]^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\langle\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_1\rangle\boldsymbol{\varepsilon}_1-\langle\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_2\rangle\boldsymbol{\varepsilon}_2=\frac{1}{2}[\mathrm{i},1-\mathrm{i},1]^{\mathrm{T}},$$

$$|\boldsymbol{\beta}_3|=\sqrt{\langle\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_3\rangle}=1,\quad \boldsymbol{\varepsilon}_3=\frac{1}{2}[\mathrm{i},1-\mathrm{i},1]^{\mathrm{T}}.$$

厦門大學 XIAMEN UNIVERSITY
信息学院（国家示范性软件学院） School of Informatics
黄炜 博士·副教授 Dr. Wei Huang

1.1.3 向量空间

因此,所求的标准正交基为

$$\left\{\boldsymbol{\varepsilon}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}[\mathrm{i},-1,\mathrm{i}]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=\frac{1}{2\sqrt{3}}[2-\mathrm{i},1-\mathrm{i},-1+2\mathrm{i}]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\varepsilon}_3=\frac{1}{2}[\mathrm{i},1-\mathrm{i},1]^{\mathrm{T}}\right\}. \qquad \blacksquare$$

作业

习题 1.1

1. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[3,1,5,2,]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[10,5,1,10]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[1,-1,1,4]^{\mathrm{T}}$. 若 $3(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta})+2(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\beta})=5(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\beta})$，求 $\boldsymbol{\beta}$.

2. 证明 $\{\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[0,0,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[0,1,2]^{\mathrm{T}}\}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个基；并求 $\boldsymbol{\beta}=[5,7,-2]^{\mathrm{T}}$ 在这个基下的坐标.

4. 已知 $\{\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,0,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[0,0,1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[1,0,0,-1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=[0,1,1,0]^{\mathrm{T}}\}$ 是 $\mathbf{R}^4$ 的一个基，用 Schmidt 正交化方法求 $\mathbf{R}^4$ 的标准正交基.

謝謝觀看！

厦門大學
XIAMEN UNIVERSITY

信息学院
（国家示范性软件学院）
School of Informatics

黃 煒
博士，副教授
Dr. Wei Huang