《工程数学》课程习题集

（2020-2021 年第 2 学期）

供 2020 级研究生使用

2021 年 3 月 5 日

目　录

（1）第 1 次课

1. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[3,1,5,2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[10,5,1,10]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[1,-1,1,4]^{\mathrm{T}}$．若有方程 $3(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta})+2(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\beta})=5(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\beta})$，求 $\boldsymbol{\beta}$．

2. 证明：$\left\{\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[0,0,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[0,1,2]^{\mathrm{T}}\right\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个基；并求 $\boldsymbol{\beta}=[5,7,-2]^{\mathrm{T}}$ 在这个基下的坐标.

3. 已知 $\left\{\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,0,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[0,0,1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[1,0,0,-1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=[0,1,1,0]^{\mathrm{T}}\right\}$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的一个基；用 Schmidt 正交化方法求 $\mathbb{R}^4$ 的标准正交基。

（2）第 2 次课

4. 已知 $\mathbf{AP}=\mathbf{PB}$，求 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}^8$。其中：

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix},\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\0&-1&1\end{bmatrix}。$$

5. 设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\2&6&0&0\\0&0&3&5\\0&0&1&2\end{bmatrix}$，求 $|\mathbf{A}|$ 和 $|\mathbf{A}^{-1}|$。

6. 设 X_1,X_2,X_3 是取自正态总体 X 的样本，就下列总体 X 给出这个样本的概率函数或概率密度：

（1） X 服从参数为 λ 的 Poisson 分布；

（2） X 服从参数为 λ 的指数分布，即概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\0, & x\le 0.\end{cases}$；

（3） X 在区间 (a,b) 上服从均匀分布；

（4） X 服从参数为 a,b 的 β 分布，即概率密度为 $f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$，记 $X\sim B(a,b)$。

（3）第 3 次课

7. 求可逆矩阵 $\mathbf{P}$，使得 $\mathbf{PA}$ 为 Hermite 阶梯型矩阵，其中：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&2&2&3\\2&2&3&1&4\\1&0&1&1&5\\2&3&5&5&4\end{bmatrix}$$

8. 求矩阵 $\mathbf{A}$ 的一个满秩分解，其中：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1&2&0&-1\\1&1&-2&2&3\\3&-1&8&5&1\\1&3&-6&4&7\end{bmatrix}$$

9. 设 x 的相对误差为 1%，求 x^n 的相对误差。

10. 从总体 $N\left(20;\left(\sqrt{3}\right)^2\right)$ 中抽取容量分别为 10 和 15 的两个相互独立的样本，求这两个样本均值之差的绝对值小于 0.3 的概率。这里 $\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$，$\overline{y}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$，$s_x^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2$，$s_y^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2$。

11. 设 $X_1,\cdots,X_5$ 是取自总体 $N(0;1)$ 的样本，

（1） 求常数 c_1,d_1，使 $c_1\left(X_1+X_2\right)^2+d_1\left(X_3+X_4+X_5\right)^2$ 服从 χ^2 分布，并指出其自由度。

（2） 求常数c_2,d_2，使$\dfrac{c_2\left(X_1^2+X_2^2\right)}{d_2\left(X_3+X_4+X_5\right)^2}$服从F分布，并指出其自由度。

（4）第4次课

12. λ取何值时，线性方程组

$$\begin{cases}(2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1,\\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2,\\ -2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1.\end{cases}$$

有唯一解、无解或无穷多解？在有无穷多解时，求其一般解。

13. 取$\sqrt{2}\approx 1.4$，欲计算$\left(\sqrt{2}-1\right)^6$的近似值，有下列四个算式可采用：

（1） $\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^6}$；

（2） $\left(3-2\sqrt{2}\right)^3$；

（3） $\dfrac{1}{\left(3+2\sqrt{2}\right)^3}$；

（4） $99-70\sqrt{2}$。

分析这四个算式哪一个所得的误差最小。

14. 如何计算下列函数值才比较准确：

（1） $\dfrac{1}{1+2x}-\dfrac{1-x}{1+x},|x|\ll 1$；

（2） $\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}-\sqrt{x-\dfrac{1}{x}},|x|\gg 1$；

（3） $\dfrac{1-\cos x}{x},|x|\ll 1$；

（4） $\arctan(x+1)-\arctan(x), |x| \gg 1$。

15. 设总体X服从正态分布$N(12;2^2)$，现随机抽取容量为 5 的样本，问：

（1） 此样本最小值小于 10 的概率是多少？

（2） 此样本最大值大于 15 的概率是多少？

（5）第 5 次课

16. 已知 3 阶方阵$\mathbf{A}$的属于特征值$1,0,-1$的特征向量依次为$\mathbf{x}_1=[1,2,2]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}_2=[2,-2,1]^{\mathrm{T}}, \mathbf{x}_3=[-2,-1,2]^{\mathrm{T}}$，求$\mathbf{A}$和$\mathbf{A}^8$。

17. 求正交矩阵$\mathbf{Q}$使$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}$为对角矩阵，其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}。$$

18. 设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & x & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$与$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 5 & & \\ & y & \\ & & -5 \end{bmatrix}$相似，求$x,y$。

19. 设样本 (1.3, 0.6, 1.7, 2.2, 0.3, 1.1) 是取自具有概率密度

$$f(x;\beta)=\begin{cases} \frac{1}{\beta}, & 0<x<\beta, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

的总体，用矩估计法估计总体均值、总体方差及参数β。

20. 设总体X服从对数正态分布$LN(\mu;\sigma^2)$，其概率函数为

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x-\mu)^2\right], & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$$

其中，μ,σ^2 均未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自这个总体的样本，求 μ 与 σ^2 的极大似然估计量。

21. 设 X_1,X_2,X_3 是取自总体 X 的样本，证明下列统计量都是总体均值 $E(X)$ 的无偏估计量：

$$t_1\left(X_1,X_2,X_3\right)=\frac{2}{5}X_1+\frac{1}{5}X_2+\frac{2}{5}X_3;$$
$$t_2\left(X_1,X_2,X_3\right)=\frac{1}{6}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{2}X_3;$$
$$t_3\left(X_1,X_2,X_3\right)=\frac{1}{7}X_1+\frac{3}{14}X_2+\frac{9}{14}X_3.$$

并问哪一个无偏估计量方差最小？

（6）第 6 次课

22. 用正交线性变换将二次型 $f=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$ 化为标准型，并给出所用的正交线性变换。

23. 问 t 取何值时，对称矩阵 $\mathbf{A}$ 是正定的，其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & t & 1\\ t & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1-t\end{bmatrix}。$$

24. 随机地从一批钉子中抽取 16 只，测得其长度（单位：厘米）为

2.14, 2.10, 2.13, 2.15, 2.13, 2.12, 2.13, 2.10,

2.15, 2.12, 2.14, 2.10, 2.13, 2.11, 2.14, 2.11

假定钉长分布是正态的，求总体均值 μ 的双侧 90%置信区间：

（1）若已知 σ=0.01 厘米；

（2）若 σ 未知。

25. 甲乙两位化验员独立地对一种聚合物的含氯量用相同的方法各做了 10 次测定，得 $s_1^2=0.5419, s_2^2=0.6050$。求他们测定值的方差比的双侧 90%置信区间，假定测定值服从正态分布。

26. 设从某种型号的一大批晶体管中随机抽取 100 只样品，测得其寿命标准差 $s = 45$ 小时，求这批晶体管寿命标准差 σ 的双侧 95%置信区间。

（7） 第 7 次课

27. 求可逆矩阵 $\mathbf{P}$ 使 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ 为 Jordan 矩阵，其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

28. 求 $\mathbf{A}^k$（ k 是正整数），其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

29. 求 $g(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^8 - 9\mathbf{A}^6 + \mathbf{A}^4 - 3\mathbf{A}^3 + 4\mathbf{A}^2 + \mathbf{I}$ ，其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

30. 求下列方阵的最小多项式：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 & 1 \\ & & 2 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

（8） 第 8 次课

31. 从两批电子元件中随机抽取一些样品，测得它们的电阻（单位：欧姆）如下：

甲批：0.140; 0.138; 0.143; 0.142; 0.144; 0.137;

乙批：0.135; 0.140; 0.142; 0.136; 0.138; 0.140;

假定这两批电子元件的电阻都服从正态分布，问在显著性水平 0.05 下，能否认为这两个正态总体的方差相等？

32. 电话交换台每分钟接到呼唤的次数服从 Poisson 分布 $P(\lambda)$，今观测了 100 个时段，每个时段一分钟，共有 585 次呼唤，问在显著性水平 0.10 下，能否认为该电话交换台每分钟接到呼唤的次数服从 $\lambda=6$ 的 Poisson 分布？

33. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是取自正态总体 $N(\mu;1)$ 的样本，其中 μ 未知，要检验假设

$$\mathrm{H}_0 : \mu \geq 0;\ \ \mathrm{H}_1 : \mu < 0.$$

在显著性水平 α 下，采用拒绝域为

$$W_1 = \left\{ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid \sqrt{n} \cdot \overline{x} < -u_{1-\alpha} \right\}$$

的 u 检验。

（1）求这个 u 检验的功效函数 $\beta(\mu)$

（2）当 $\alpha = 0.05$ 时，如果要求 $\mu \leq -0.1$ 时这个 u 检验的 II 类风险不大于 0.05，那么样本容量 n 至少应取多大？

（9）第 9 次课

34. 验证 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}i & -4 \\ 4 & \sqrt{2}i \end{bmatrix}$ 是正规矩阵，并求酉矩阵 $\mathbf{U}$ 使为 $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$ 对角矩阵。

35. 求 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+i & 3 \\ 2 & 1-i \end{bmatrix}$ 的谱半径 $\rho(\mathbf{A})$。

36. 用 Gauss 消去法和列主元消去法求解

$$\begin{cases}4x_1-1.24x_2+0.3x_3=-11.04,\\2x_1+4.5x_2+0.36x_3=0.02,\\0.5x_1+1.1x_2+3.1x_3=6.\end{cases}$$

（准确解是 $x_1=-2.6, x_2=1, x_3=2$ ）

（10） 第 10 次课

37. 求下列方阵 $\mathbf{A}$ 的函数 $e^{\mathbf{A}}$ 和 $e^{\mathbf{A}t}$ ：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&3\\0&-1&0\\2&3&1\end{bmatrix}.$$

38. 证明：$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4&-1&1\\-1&4.25&2.75\\1&2.75&3.5\end{bmatrix}$是正定矩阵，并求它的 $\mathbf{LDL}^{\mathrm{T}}$ 分解和 Cholesky 分解。

39. 设

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&1\\1&1&3\\2&3&3\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\1\end{bmatrix},$$

证明方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有解，并用 QR 分解方法解方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 。

40. 求矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\\1&0\end{bmatrix}$ 的奇异值及奇异值分解。

（11） 第 11 次课

41. 已知 $\mathbf{R}^3$ 的两个基

$$\mathscr{B}_1=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\},\quad \mathscr{B}_2=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

（1）求 $\mathscr{B}_1$ 到 $\mathscr{B}_2$ 的基变换矩阵 $\mathbf{P}$ ；

（2）求在 $\mathscr{B}_1$ 、$\mathscr{B}_2$ 下有相同坐标的所有向量。

42. 已知 $\mathbf{R}^3$ 的线性变换 $\mathscr{T}$ 在基 $\mathscr{B}_1=\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ 下的矩阵是

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix},$$

求 $\mathscr{T}$ 在基 $\mathscr{B}_2=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$ 下的矩阵 $\mathbf{B}$ 。

（12） 第 12 次课

43. 利用 Gerschgorin 定理确定方阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&5&1\\-2&-1&9\end{bmatrix}$$

的特征值范围。判断 $\mathbf{A}$ 的特征值是否都是实数？

44. 已知方程 $x^3-x^2-1=0$ 在 $x^{(0)}=1.5$ 附近有根，将方程改写成：

（1）$x=1+\frac{1}{x^2}$ ，对应的迭代算式为 $x^{(k+1)}=1+\frac{1}{[x^{(k)}]^2}$ ；

（2）$x=\sqrt[3]{1+x^2}$ ，对应的迭代算式为 $x^{(k+1)}=\sqrt[3]{1+[x^{(k)}]^2}$ ；

（3）$x=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$，对应的迭代算式为$x^{(k+1)}=\frac{1}{\sqrt{x^{(k)}-1}}$。

判断上述各种迭代算式在 1.5 附近的收敛性。

（13） 第 13 次课

45. 今有 10 组观测数据如下

x_i	0.5	−0.8	0.9	−2.8	6.5	2.3	1.6	5.1	−1.9	−1.5
y_i	−0.3	−1.2	1.1	−3.5	4.6	1.8	0.5	2.8	−2.8	0.5

应用正态线性模型 $Y_i=\beta_0+\beta_1x_i+\varepsilon_i$，$\varepsilon_i\sim N\left(0,\sigma^2\right)$，$i=1,2,\cdots,10$ 且 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{10}$相互独立，

（1）求β_0,β_1的最小二乘估计；

（2）求β_1的置信水平为 0.95 的区间估计；

（3）在显著性水平$\alpha=0.01$下，假设检验$\mathrm{H}_0:\beta_1=0$；

（4）计算残差方差$\widehat{\sigma_e^2}$；

（5）求$x=1.2$时Y的双侧 95%的预测区间。

46. 养猪场为了估算猪的毛重（单位：公斤）Y与其身长（单位：厘米）x_1，肚围（单位：厘米）x_2之间的关系，测量了 14 头猪，得数据如下：

$x_{i,1}$	41	45	51	52	59	62	69	72	78	80	90	92	98	103
$x_{i,2}$	49	58	62	71	62	74	71	74	79	84	85	94	91	95
y_i	28	39	41	44	43	50	51	57	63	66	70	76	80	84

（1）求经验回归函数；

（2）在显著性水平 1%下，检验$\mathrm{H}_0:\beta_1=\beta_2=0$；

（3）求 $x_1=100, x_2=80$ 时 Y 的预测值；

（4）在显著性水平 5%下，做偏 F 检验，$\mathrm{H}_{0j}:\beta_j=0, j=1,2.$

这里，假定猪的毛重 $Y\sim N\left(\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2,\sigma^2\right)$。

47. 下表给出了某种化工产品在三种不同浓度（单位：%）与四种不同温度（单位：℃）下成品的得率，且每对水平搭配做了两次试验的数据：

浓度 \ 温度	10	24	38	52
2	10, 14	11, 11	13, 9	10, 12
4	9, 7	10, 8	7, 11	6, 10
6	5, 11	13, 14	12, 13	14, 10

假定数据来自方差相等的正态总体。

（1）证明：在显著水平 25%下，浓度与温度之间的交互效应对该种化工产品的得率无显著影响。

（2）问在显著性水平 5%下，浓度与温度分别对该种化工产品的得率有无显著影响？

（14） 第 14 次课

48. 给定数据表

x_i	1.2	3.2	4.5
f_i	101	112	109

求通过这三个数据点的次数不超过 2 的插值多项式。

49. 已知数据表

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$y(x)$	0.70010	0.40160	0.10810	-0.17440	-0.43750

用反插值（即在 $y = y(x)$ 的反函数 $x = x(y)$ 存在的假设下，构造反函数 $x = x(y)$ 的插值多项式）求 $y(x) = 0$ 在 $(0.3, 0.4)$ 内的根的近似值。

50. 已知实验数据表

x_i	19	25	31	38	44
y_i	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

用最小二乘法求形如 $y = a + bx^2$ 的经验公式，并计算均方误差。