3. 信号的统计检测理论

① 贝叶斯准则：

先验概率 $P(H_j)$ 已知，代价因子 C_{ij} 给定，使平均代价 C 最小。

$$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)(C_{10}-C_{00})}{P(H_1)(C_{01}-C_{11})}$$ 对数.

性能分析 → $P(H_1|H_0)$ $P(H_1|H_1)$.

a. 由检验统计量概率分布得出

b. 利用公式：

$$P(H_1|H_0) = Q\left[\ln\eta/d + d/2\right] \quad Q(x)=\int_x^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\left(-\frac{u^2}{2}\right)}du$$

$$P(H_1|H_1) = Q\left[\ln\eta/d - d/2\right]$$

单次：$d^2 = \frac{A^2}{\sigma_n^2}$，N次：$d^2 = \frac{NA^2}{\sigma_n^2}$

② 派生贝叶斯.

a. 最小平均错误概率准则. MAEP

$C_{00}=C_{11}=0$，$C_{10}=C_{01}=1$.

b. 最大似然准则 ML.

$P(H_0)=P(H_1)=1/2$ + $C_{00}=C_{11}=0$，$C_{10}=C_{01}=1$.

c 最大后验概率准则，

$C_{10}-C_{00} = C_{01}-C_{11}$

$$P(H_1|x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} P(H_0|x)$$

d. 极小化极大准则.

给定代价因子 C_{ij}，无法확定先验概率 $P(H_j)$

避免产生过大的代价，使极大可能的代价极小化.

猜测一个先验概率 P_{1g}，确定门限 η，以此判决。

$C_{00}=C_{11}=0$

$$\Rightarrow C_{01}\underbrace{P_M(P_{1g}^*)}_{P(H_0|H_1)\text{ 漏警}}-C_{10}\underbrace{P_F(P_{1g}^*)}_{P(H_1|H_0)\text{ 虚警}}=0$$

e: 奈曼－皮尔逊准则。

不能预知 $P(H_j)$ 和 C_{ij}。

使 $P(H_1|H_0)$ 尽可能小，$P(H_1|H_1)$ 尽可能大 ($\Leftrightarrow P(H_0|H_1)$ 小)。

N-P准则：在 $P(H_1|H_0)=\alpha$ 条件下，使 $P(H_1|H_1)$ 最大。

对观测空间划分。

③ 信号统计检测的性能。

$$d^2=\frac{(E[\bar{e}|H_0]-E[\bar{e}|H_1])^2}{Var[\bar{e}|H_0]}$$

④ M元信号检测。（统计检测）。

a. 贝叶斯：

$$I_i(x)=\sum_{j=0}^{M-1}P(H_j)(C_{ij}-C_{jj})p(x|H_j)$$

$$i=\min_i I_i(x)\rightarrow H_i$$

b. 最小平均错误概率。

$P(H_j)$ 已知，$C_{ii}=0$　$C_{ij}=1$。

$$I_i(x)=\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{M-1}P(H_j)p(x|H_j)$$

$$\min I_i(x)$$

若 $P(H_j)=\frac{1}{M}=P$

$$I_i(x)=\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{M-1}p(x|H_j)P=\left[\sum_{j=0}^{M-1}p(x|H_j)-p(x|H_i)\right]P$$

$$\Rightarrow Max\ p(x|H_i)$$

⑤ 参量信号的统计检测

接收信号的概率密度函数含有未知参量.

a. 广义似然比检验 (相干检测).

$p(x|\theta_0;H_0)$, $p(x|\theta_1;H_1)$

先用最大似然估计 (使 $p(x|\theta_j;H_j)$ 最大的 θ_j) $\to \hat{\theta}_{jml}$

转化为确知信号的统计检测.

b. 贝叶斯方法 (非相干检测)

利用或猜测 θ_j 的统计特性 ~~若有~~

如由 $p(\theta_j) \to p(x|H_j)$,

或采用N-P准则.

⑥ 信号的序列检测.

观测N次后立即判决 → 硬判决.

边观测边判决 → 硬判决.

$\lambda(\vec{x}_k) \underset{}{\overset{H_1}{\geq}} \eta_1 \to H_1$

$\lambda(\vec{x}_k) \underset{H_0}{\leq} \eta_0 \to H_0$

$\eta_0 < \lambda(\vec{x}_k) < \eta_1$ 不判决

$\lambda(\vec{x}_N) = \lambda(x_N)\lambda(\vec{x}_{N-1})$

$\eta_1 = \frac{1-\beta}{\alpha}$ $\eta_0 = \frac{\beta}{1-\alpha}$.

⑦ 一般高斯信号的统计检测 (各次观测之间不独立)

$Cov(x) = E[(x-u_x)(x-u_x)^T] = \vec{C}_x$ $E(\vec{x}) = u_x$

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}|C_x|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-u_x)^T C_x^{-1}(x-u_x)\right]$$

4. 信号波形的检测

① 匹配滤波器：MF

SNR一定，使输出功率信噪比最大。

~~SNR_o~~

实信号：$h(t)=\cancel{k}\,kS(t_0-t)$

$$h(t)=kS^*(t_0-t)$$

$$H(\omega)=S^*(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

$$SNR_o=\frac{2E_s}{N_0}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|S(\omega)|^2}{P_n(\omega)}d\omega$$

$$x(t)\longrightarrow\boxed{线性滤波器}\longrightarrow\boxed{判决器}$$

t=T时刻，与相关器输出相等

对时延具有适应性，对频移信号不具有适应性。

②. 随机过程的正交级数展开。

样本 x_k 之间相关

正交~~函数~~集 $\xrightarrow{完备}$ 完备正交函数集 $\{f_k(t)\}$.

$x_k=\int_0^T x(t)f_k(t)\,dt$　　x_k可能相关（~~[illegible]~~）

a. 卡亨南-洛维展开

根据噪声干扰的特性　选择 $\{f_k(t)\}$

$$E(x_k)=\int_0^T s(t)f_k(t)\,dt=s_k$$

希望，$E[(x_j-s_j)(x_k-s_k)]=\lambda_k\delta_{jk}$

$$\Rightarrow\int_0^T r_n(t-u)f_k(u)\,du=\lambda_k f_k(t)\quad 0\le t\le T$$

$$E[n(t)n(u)]=r_n(t-u)$$

7 独立性 $p(x,y)=p(x)p(y)$. 独立性 ⇒ 不相关

白噪声. ~~$\frac{N_0}{2}$~~ $r_n(t-u)=\frac{N_0}{2}\delta(t-u)$.

$E[(x_j-s_j)(x_k-s_k)]=\frac{N_0}{2}\delta_{jk}$.

对任意正交函数集 $\{f_k(t)\}$ 展开. x_k 都不相关.

高斯分布 ⇒ 独立性.

③ 高斯白噪声中确知信号波形的检测

a. x_k, s_k, n_k.

x_k 独立性.

$\Rightarrow E(x_k|H_j)$ $Var(x_k|H_j)$.

$\Rightarrow p(x_k|H_j)$

$\Rightarrow p(\vec{x}_N|H_j)$

$\Rightarrow \lambda(x_N)=\frac{p(\vec{x}_N|H_1)}{p(\vec{x}_N|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$.

$\Rightarrow N\to\infty$ $\ln[\lambda(t)]=\lim_{N\to\infty}[\ln\lambda[x_N]]$.

⇒ 系统结构. (相关, 匹配)

⇒ 性能分析: $E[l|H_j)$ $Var(l|H_j)$

$\Rightarrow p(l|H_j)$. 或由 d^2.

x_k 无限维.

b. 充分统计量.

x_k 有限维.

构造 $f_1(t)=\frac{1}{\sqrt{E_s}}s(t)$ $0\le t\le T$.

$\Rightarrow H_0$ $x_1=n_1$ $x_k=n_k$ $k\ge2$

H_1 $x_1=\sqrt{E_s}+n_1$. $x_k=n_k$ $k\ge2$ $\{f_k$ 与 $f_1(t)$ 正交

x_1 是一个充分统计量

$\lambda(x_1)=\frac{p(x_1|H_1)}{p(x_1|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$.

c. 一般二元：

正交级数展开

最佳信号波形设计

d^2 增大 $E_{s_0}+E_{s_1}=2E_s$

互反信号 $-s_1(t)=s_0(t)$ 最大 $d^2=\frac{8E_s}{N_0}$

$\rho=1, d^2\to 0$ 正交信号 $d^2=\frac{4E_s}{N_0}$

充分统计量：

$f_1(t)=\frac{1}{\sqrt{E_{s_1}}}s_1(t)$,

$g_2(t)=s_0(t)-\int_0^T s_0(t)f_1(t)dt\, f_1(t)$

$f_2(t)=\frac{g_2(t)}{\sqrt{\int_0^T g_2^2(t)dt}}$

补3. ⑥ 复信号的统计检测

$H_0: \tilde{x}_k=\tilde{n}_k \quad k=1,2,\cdots N. \quad \tilde{n}_k\sim CN(0,\sigma_n^2)$

$H_1: \tilde{x}_k=\tilde{s}_k+\tilde{n}_k \quad \tilde{x}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_N)^T$

$p(\tilde{x}|H_1)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^N\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_n^2}(\tilde{x}-\tilde{s})^H(\tilde{x}-\tilde{s})\right]$

三处不同(无2).

$(\tilde{x}^H\tilde{s})^*=\tilde{s}^H\tilde{x} \qquad \tilde{x}^H\tilde{s}+\tilde{s}^H\tilde{x}=Re(\tilde{s}^H\tilde{x})$

$\sin^2 w_0 t=\frac{1-\cos 2w_0 t}{2}$

5. 信号的统计估计理论.

被估计量 θ 观测矢量 x_N 估计量 $\hat{\theta}$.

估计量

均值 $E[\hat{\theta}(x)]$ 均方误差. $E[\tilde{\theta}^2(x)]$

误差 $\tilde{\theta}(x) = \theta - \hat{\theta}(x)$

① 随机参量的贝叶斯估计. (随机参量.

先验 $p(H_i)$ 已知

a. 最小均方误差估计. (误差平方代价函数)

$$C(\tilde{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2.$$

条件均值. $$\hat{\theta}_{mse} = \int_{-\infty}^{\infty} \theta p(\theta|x) d\theta = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \theta \underbrace{p(x|\theta) p(\theta)}_{=p(\theta|x)} d\theta}{\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} p(x|\theta) p(\theta) d\theta}_{=p(x)}}$$

b. 条件中值估计 (误差绝对值代价函数) med.

$$C(\tilde{\theta}) = |\theta - \hat{\theta}|$$

$$\int_{-\infty}^{\hat{\theta}} p(\theta|x) d\theta = \int_{\hat{\theta}}^{\infty} p(\theta|x) dx$$

c 最大后验估计. (均匀代价函数)

$$C(\tilde{\theta}) = \begin{cases} 1, & |\tilde{\theta}| \geq \frac{\Delta}{2} \\ 0, & |\tilde{\theta}| < \frac{\Delta}{2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial p(\theta|x)}{\partial \theta}\bigg|_{\theta = \hat{\theta}_{map}} = 0$$

~~不变性~~ 最佳估计的不变性:

$p(\theta|x)$ 高斯, → 估计量一样 → 等于最小均方误差估计量.

(1). $C(\tilde{\theta})$ 对称, 下凸. $p(\theta - \hat{\theta}_{mse}|x) = p(\hat{\theta}_{mse} - \theta|x)$ 关于 $\hat{\theta}_{mse}$ 对称

(2). $C(\tilde{\theta})$ 对称 非降(U). 关于 $\hat{\theta}_{mse}$ 对称单峰.

② 最大似然估计.

② 最大似然估计.（非随机参量或 $p(\theta)$ 未知）

取 $p(x|\theta)dx$ 最大的 θ 做为估计量 $\hat{\theta}_{ml}$

$$\frac{\partial p(x|\theta)}{\partial \theta}\Big|_{\theta=\hat{\theta}_{ml}}=0$$

不变性.

$a=g(\theta)$ a 与 θ 一对一变换

$\Rightarrow \hat{a}_{ml}=g(\hat{\theta}_{ml})$.（不一定无偏

③ 估计量的性质.

a. 无偏性.

$E(\hat{\theta})=\theta$ 或 $E(\hat{\theta})=E(\theta)$ 无偏（否则有偏）

$\lim_{N\to\infty} E[\hat{\theta}(x_N)]=\theta$ 或 $E[\theta]$ 渐近无偏（有偏）.

b. 有效性.

均方误差 $E[(\theta-\hat{\theta})^2]$ 最小

c. 一致性. 观测次数个 误差↓

$\lim_{N\to\infty} P[|\theta-\hat{\theta}(x_N)|>\varepsilon]=0$ 或 $\lim_{N\to\infty} E[(\theta-\hat{\theta}(x_N))^2]=0$

d. 充分性.

$p(x|\theta)=g(\hat{\theta}(x)|\theta)h(x)$.

④ 克拉美-罗（界，不等式）

a. 非随机参量.

$$Var(\hat{\theta})=E[(\theta-\hat{\theta})^2]\geq\frac{1}{E[(\frac{\partial \ln p(x|\theta)}{\partial\theta})^2]}=\frac{1}{-E[\frac{\partial^2\ln p(x|\theta)}{\partial\theta^2}]}$$

$$\frac{\partial \ln p(x|\theta)}{\partial\theta}=(\theta-\hat{\theta})k(\theta)\Rightarrow \text{有效}.$$

$\Rightarrow \hat{\theta}=\hat{\theta}_{ml}$ 求

b. 随机参量. $Var=\frac{-1}{k(\theta)}$

~~联合估计~~ ~~线性~~ ~~…~~ ~~12行~~

~~CXMA~~

~~EDCA~~

$$E[(\theta-\hat{\theta})^2] \geq \frac{1}{E[(\frac{\partial \ln p(x,\theta)}{\partial\theta})^2]} \geq \frac{1}{-E[\frac{\partial^2 \ln p(x,\theta)}{\partial\theta^2}]}$$

$\frac{\partial \ln p(x,\theta)}{\partial\theta} = (\theta-\hat{\theta})k$. k：任意非0常数.

$\Rightarrow$ 有效 $\Rightarrow$ $\hat{\theta} = \hat{\theta}_{map}$ $\qquad -\frac{1}{k}$.

c 非随机参量(函数)估计.

无偏 $\Rightarrow$ $E[\hat{\alpha}] = \alpha = g(\theta)$ $\Rightarrow$ $Var(\hat{\alpha}) \geq \frac{(\frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta})^2}{E[(\frac{\partial \ln p(x|\theta)}{\partial\theta})^2]} \geq \frac{\cdots}{\cdots}$

$\frac{\partial \ln p(x|\theta)}{\partial\theta} = (\alpha-\hat{\alpha})k(\theta)$.

⑤ 矢量估计.

a. 最小均方误差. $\qquad$ 克拉美罗.

$\hat{\theta}_{mse} = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\theta} p(\vec{\theta}|\vec{x}) d\theta$ $\qquad$ $J = -E[\frac{\partial \ln p(x|\theta)}{\partial\theta_i \partial\theta_j}]$

b. 最大后验估计. $\qquad$ $E[(\theta-\hat{\theta})^2] \geq J^{-1}$

$\frac{\partial \ln p(\theta|x)}{\partial\theta}\Big|_{\theta=\hat{\theta}_{map}} = 0$ $\qquad$ $\Leftarrow \frac{\partial \ln p(x|\theta)}{\partial\theta} = -J(\theta-\hat{\theta})$ [有效]

c 最大似然估计. $\qquad$ 随机矢量同样

$\frac{\partial \ln p(x|\theta)}{\partial\theta}\Big|_{\theta=\hat{\theta}_{ml}} = 0$ $\qquad$ 均方误差矩阵 $M_\theta = E[(\theta-\hat{\theta})(\theta-\hat{\theta})^T]$

⑥ 线性最小均方误差估计.

无 x, θ 的概率密度函数. 只有 x, θ 的前两阶矩.

$\Rightarrow$ 均方误差最小, $\hat{\theta}$ 是 x 的线性函数.

$x = H\theta + n \qquad \hat{\theta} = a + Bx \qquad$ minimize $E[(\theta-\hat{\theta})^T(\theta-\hat{\theta})]$

$\hat{\theta}_{lmse} = \mu_\theta + C_{\theta x} C_x^{-1}(x-\mu_x)$

$a = \mu_\theta - B\mu_x \qquad B = C_{\theta x} C_x^{-1}$

性质：a. 线性函数，b. 无偏，

c. 均方误差阵最小，

$$M_{\hat\theta_{mse}} = E[(\theta-\hat\theta_{mse})(\theta-\hat\theta_{mse})^T] = C_\theta - C_{\theta x} C_x^{-1} C_{\theta x}^T$$

d. 正交性，

误差矢量与观测矢量正交

$E[(\theta-\hat\theta_{mse})x^T]=0$ 证明：引入 $E[(\theta-\hat\theta_{mse})x^T]=0$

$\hat\theta_{mse}$ 是 θ 在 x^T 上的正交投影

① 最小二乘估计.

无先验知识，只有观测信号模型 → 误差平方和最小

线性：$x = H\theta + n_k$ 误差平方和：$J(\theta) \triangleq (x-H\theta)^T(x-H\theta)$ △

$\hat\theta_{ls} = (H^TH)^{-1}H^Tx$ 最小二乘估计误差

$J_{min}(\hat\theta_{ls}) = x^T[I - H(H^TH)^{-1}H^T]x$ 和均方误差.

加权：$\hat\theta_{lsw} = (H^TWH)^{-1}H^TWx$ $W = C_n^{-1} \to M_{\hat\theta_{lsw}}$ 最小

单参量：

$x_k = h_k\theta + n_k$. $H = (h_1, h_2, \cdots, h_N)^T$

$$\hat\theta_{ls} = \frac{1}{\sum h_k^2}\sum_{k=1}^{N} h_k x_k$$

均方误差 $\varepsilon^2_{\hat\theta_{ls}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{N} h_k^2}\sigma_n^2$

$M_{\theta_{ls}} =$

⑧ 信号波形中参量的估计.

未知参量的最大似然估计：

$$\frac{\partial \ln p(x(t)|\theta)}{\partial\theta_j} = \frac{2}{N_0}\int_0^T [x(t) - s(t;\theta)]\frac{\partial s(t;\theta)}{\partial\theta_j}dt = 0 \Rightarrow \hat\theta_{ml}$$

克拉美-罗界：

$$= \frac{1}{\frac{2}{N_0}\int_0^T\left[\frac{\partial s(t;\theta)}{\partial\theta}\right]^2 dt}$$