0

距离空间 （不等式）

线性空间 } → 只

+ 范数 | 赋范线性空间（→距离空间） 一元映射

↓ ①向量范数（∞, 1, 2）. ②矩阵范数（相容性，算子范数）

$\|x\|_\infty$ $\|x\|_1$ $\|x\|_2$ $\|Ax\| \le \|A\|\|x\|$

max $\sum|x_i|$ $\sqrt{\sum x_i^2}$ 算子范数（∞, 1, 2）

不动点定理：压缩映像 → 唯一不动点.（迭代有解

~~内积空间~~ 线性空间 }

~~线性空间~~ + 内积 } ⇒ 内积空间. （不等式. 二元映射

↳（可导出范数），满足平行四边形公式）.

$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

正交分解（特征值分解，G-S 正交化

1. 插值法：

$S(x_i) = f(x_i)$ $i=0,\cdots n$.

插值多项式存在的唯一性. n+1个插值点 ⇒ n次多项式.

a. 待定系数法. 计算量大

b. 拉格朗日：

$L_1(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1$. $l_0 = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}$ $l_1 = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$

①线性： 插值基函数.

②二次（抛物线） $l_0+l_1=1$.

$L_2(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2$.

$l_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j\ne k}}^{2} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$ eg. $l_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$

n次插值

$$\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) = \prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$$

$$\omega'_{n+1}(x_k) = \prod_{j\neq k}(x_k - x_j)$$

误差分析：

$Rn(x) = f(x) - L_n(x)$ 余项/误差. 有 $n+1$ 阶导

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \qquad \xi\in(a,b)$$

罗尔定理

$$\leq \frac{M}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \qquad f^{(n+1)}(\xi)\leq M$$

C. 牛顿插值法：

插值节点增加时，之前已计算的结果仍能使用

差商：一阶：$f[x_i, x_j] = \dfrac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j - x_i}$

二阶：$f[x_i, x_j, x_k] = \dfrac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i}$

k阶：$f[x_0, x_1, \cdots x_k] = \dfrac{f[x_1, x_2, \cdots x_k] - f[x_0, x_1, \cdots x_{k-1}]}{x_k - x_0}$

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}, \quad \xi\in[a,b]$$

差商表

牛顿插值公式：

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) + \cdots + f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$R_n(x) = f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x]\,\omega_{n+1}(x)$ 与 $L_n(x)$ 的余项相等

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

给定方程组：

$$\begin{bmatrix} 3 & a \\ b & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{3}b + -3x = 0$

其中 a, b, c, d 都是实数.

且 $ab+9 \neq 0$

证明：用Jacobi，G-S迭代同收敛

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$$D+L = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ b & -3 \end{bmatrix} \quad (D+L)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ \frac{1}{9}b & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$B = -D^{-1}(L+U)$$
$$= -\begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -a/3 \\ \frac{b}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = -(D+L)^{-1}U$$
$$= \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ b/9 & -1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -a/3 \\ 0 & -ab/9 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - B| = \begin{vmatrix} \lambda & +a/3 \\ -b/3 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{ab}{9}$$

$$|\lambda I - G| = \begin{vmatrix} \lambda & +a/3 \\ 0 & \lambda + ab/9 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + ab/9)$$

$\lambda = \pm\frac{\sqrt{|ab|}}{3} i$

$\lambda = 0 \quad \lambda = \frac{-ab}{9}$

① $ab \geq 0$

② $ab \leq 0$

$\Rightarrow |ab| < 9.$

$|ab| \leq 9.$

YI SHANG

由 扫描全能王 扫描创建

2. 最佳逼近和最小二乘.

度量误差

2-范数：最佳平方逼近 $\min\limits_{y(x)\in B}\|f(x)-y(x)\|_2$.

∞-范数：最佳一致逼近 $\min\limits_{y(x)\in B}\|f(x)-y(x)\|_\infty$

①内积空间中的最佳逼近.

正交投影： $\|X-X^*\| = \inf\limits_{y\in M}\|x-y\|$ 　X^* 唯一.

~~最佳逼近~~ 元 $X^* = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^* X_i$

$$A a^* = b \qquad A=\begin{bmatrix}(x_1,x_1) & (x_1,x_2) & \cdots \\ (x_2,x_1) & \cdots & \vdots \\ \cdots & & \end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix}(x,x_1)\\(x,x_2)\\ \vdots\end{bmatrix}$$

均方误差 $\|\delta\|^* = \sqrt{\|X\|^2-\|X^*\|^2} = \sqrt{\|X\|}$

平方误差 $= (x,x) - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^*(x_i,x)$

② $L^2[a,b]$ 中的最佳平方逼近.

$x_1, x_2, \cdots \rightarrow \varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots \varphi_n(x)$ 　$n+1$个

$\|f(x)-s^*(x)\|_2 = \min\limits_{s(x)\in M}\|f(x)-s(x)\|_2$. 最佳平方逼近. 唯一.

$\|f(x)\|_2 = \left(\int_a^b \rho(x) f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$ 　$\rho(x)$ 在 (a,b) 中非负

均方误差： $\|\delta\|_2 = \sqrt{(f,f) - \sum\limits_{i=0}^{n} a^*(f,\varphi_i)}$ 　$S^*(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a^*\varphi_i$

最大值误差： $\|\delta\|_\infty = \max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-S^*(x)|$.

若 $M=\mathrm{span}\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$.

法向方程系数 → H矩阵. 　$Hx=b$ 病态.

→ 找正交多项式 → 避免病态：(勒让德多项式, 切比雪夫)

③ 正交多项式： ~~勒让~~

A: 勒让德：

区间 $[-1,1]$.

a. $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$. 　n奇数 → 奇函数 　偶数 → 偶函数

递推公式

$P_0(x)=1 \quad P_1(x)=x$

$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1) \quad P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$

$S_n^*(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j^* P_j(x) \qquad a_j^*=\frac{(f,P_j)}{(P_j,P_j)}=\frac{2j+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_j(x)dx$

均方误差：$\|\delta\|_2=\sqrt{(f,f)-\sum_{j=0}^{n} a_j^*(f,P_j)}$

空差区间.

B：切比雪夫

区间 $[-1,1]$. $\quad \rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$(T_0,T_0)=\pi, \quad (T_n,T_n)=\frac{\pi}{2}$.

$T_0=1 \qquad T_1=x$

$T_2(x)=2x^2-1 \quad T_3(x)=4x^3-3x$.

$S_n^*(x)=\frac{a_0^*}{2}T_0+\sum_{j=1}^{n} a_j^* T_j(x)$

$a_j^*=\frac{(f,T_j)}{(T_j,T_j)}=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad j=0,1,2,\cdots,n,$

③ 曲线拟合. 最小二乘.

3. 数值积分与数值微分.

矩形公式：$R=(b-a)f(\frac{a+b}{2})$

梯形公式：$T=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$

辛普森公式：$S=[\frac{1}{6}f(a)+\frac{4}{6}f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{6}f(b)](b-a)$

在区间 $[a,b]$ 上适当取节点，然后用 $f(x_k)$ 加权平均得到 $f(\xi)$ 近似值。

$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ A_k：求积系数.

代数精度.

数值积分：

①插值型：

拉格朗日插值 $L_n(x)$ $I_n f(x)=\int_a^b L_n(x)dx$ 近似 $I(f)=\int_a^b f(x)dx$

$I_n f(x)=\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ $A_k=\int_a^b l_k(x)dx$

$R_n[f]=\cdots\cdots$

形如 该式至少有n次代数精度 $\Leftrightarrow$ 插值型

② 牛顿—柯特斯公式 (插值)

$[a,b]$ n等分 取 $x_k=a+k\frac{b-a}{n}$.

$n=1$ 梯形公式.

$n=2$ 辛普森公式. $\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)}=1$

n为偶数时，至少有 $n+1$ 次代数精度.

余项：

梯型：$R_T=-\frac{f''(\eta)}{12}(b-a)^3$ $\eta\in[a,b]$

辛普森：$R_S=-\frac{b-a}{180}(\frac{b-a}{2})^4 f^{(4)}(\eta)$

$n\geq 8$时 出现负数 (高阶不稳定)

$\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)}=1.$ $A_k<0$

③ 复化求积公式.

分成若干子区间 再利用求积公式.

复化梯形: $R_n(f) = n \cdot R(f) = -n\frac{h^3}{12}f''(\eta) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta)$

复化辛普森 $R_n(f) = nR(f) = -n\frac{h}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta) = -\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta)$

④ 龙贝格:

复化后再二分一次.

梯型 $T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1/2})$ 递推

龙贝格:

$$I - T_{2n} \approx \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$$

修正 $\overline{T}_{2n} = T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n) = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n$.

验证知: 辛普森 $S_n = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n$

$\frac{I - S_{2n}}{I - S_n} \approx \frac{1}{16}$ $\quad I \approx \frac{16}{15}S_{2n} - \frac{1}{15}S_n$

(复化柯特斯: $C_n = \frac{16}{15}S_{2n} - \frac{1}{15}S_n$)

龙贝格: $R_n = \frac{64}{63}C_{2n} - \frac{1}{63}C_n$

数值微分:

① 插值型求导公式. $\quad \omega_{n+1}'(x_k) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n}(x_k - x_i)$

$f(x) \approx L_n(x) \qquad f'(x) \approx L_n'(x)$

误差: $f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)$

$$f'(x) - L_n'(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}'(x) + \frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!}\frac{d}{dx}f^{(n+1)}(\xi)$$

$\boxed{x = x_k \Rightarrow} \longrightarrow = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}'(x_k) + 0$

节点处导数值，等距.

a. 两点：

$$L_1'(x_0) = \frac{1}{h}[f(x_1) - f(x_0)] = L_1'(x_1)$$

带余项：

$$f'(x_0) = L_1'(x_0) - \frac{h}{2}f''(\xi) = \frac{1}{h}[f(x_1) - f(x_0)] - \frac{h}{2}f''(\xi)$$

$$f'(x_1) = L_1'(x_0) + \frac{h}{2}f''(\xi) = \frac{1}{h}[f(x_1) - f(x_0)] + \frac{h}{2}f''(\xi).$$

b. 三点， 考察节点 x_1 两侧 $\pm h$.

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)] + \frac{h^2}{3}f'''(\xi)$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{2h}[-f(x_0) + f(x_2)] - \frac{h^2}{6}f'''(\xi)$$ 中点公式.

$$f'(x_2) = \frac{1}{2h}[f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)] + \frac{h^2}{3}f'''(\xi).$$

~~c. 五点~~：

c. 五点：

补 ⑤：高斯求积公式

a. $\omega_{n+1}(x)$ 与 (少) n 次多项式正交； b. 时 $\int_a^b \rho(x) f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ $2n+1$ 次精度

c. $A_k = \int_a^b \rho(x) \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega_{n+1}'(x_k)} dx$

取 $\omega_{n+1}(x) =$ 勒让德多项式 $P_{n+1}(x)$ 且 $[a,b] = [-1,1]$. $\rho(x) = 1$

$n=0$. $x_0 = 0$. $A_0 = 2$. $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2f(0)$. $R(f) = \frac{1}{3}f''(\eta)$

$n=1$ $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. $A_0 = A_1 = 1$. $\int_{-1}^{1} f(x)dx = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$

$R(f) = \frac{1}{135}f^{(4)}(\eta)$

取 $\omega_{n+1}(x) =$ 切比雪夫 $[a,b] = [-1,1]$ $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

求积点：$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)$ $k=0,1,2,\cdots n$.

$A_k = \frac{\pi}{n+1}$ $R[f] = \frac{2\pi}{2^{2n+2}(2n+2)!}f^{(2n+2)}(\eta)$

4. 解线性方程组的方法：

① 性态及条件数：

$Ax=b$ A,b 微小变化引起 x 巨大变化 ⇒ 病态。

$(A+\delta A)(x+\delta x)=b+\delta b$

a. 有 δb，无 δA：

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\le\|A^{-1}\|\|A\|\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

b. 有 δA，无 δb：

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\le\frac{\|A^{-1}\|\|A\|\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1-\|A^{-1}\|\|A\|\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\approx\|A^{-1}\|\|A\|\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

c. 有 δA 和 δb：

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\le\frac{\|A^{-1}\|\|A\|}{1-\|A^{-1}\|\|A\|\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}+\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right)$$

A 非奇异矩阵：条件数 $\mathrm{cond}(A)=\|A\|\|A^{-1}\|$.

(1) $\mathrm{cond}(A)_\infty=\|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty$

(2) $\mathrm{cond}(A)_2=\|A\|_2\|A^{-1}\|_2=\sqrt{\frac{\lambda_{max}(A^TA)}{\lambda_{min}(A^TA)}}$ A 对称 $=\frac{|\lambda_1|_{最大}}{|\lambda_n|_{最小}}$.

② 高斯消去法和列主元消去法.

$a_{kk}^{(k)}\ne0$ 消元计算. 回代计算. ⇒ 高斯 ｜对角线下方.

若 $a_{kk}^{(k)}=0$(或小) 选 $|a_{kk}^{(k)}|_{max}$ ---- ⇒ 列主元.

高斯-若尔当 ｜对角线上，下方

③ 矩阵三角分解法.

a. $A=LU$. L单位下三角. (Doolittle分解).

$$Ax=b \Rightarrow LUx=b \Rightarrow \begin{cases} Ly=b \\ Ux=y \end{cases}$$

b. 平方根法:

A对称: 顺序主子式非0 $A=LDL^T$

A对称正定 $A=LL^T$ (cholesky) L主对角元素为正

$$Ax=b \Rightarrow \begin{cases} Ly=b \\ L^Tx=y \end{cases} \Rightarrow x$$

c. 追赶法:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & \\ & a_3 & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} |b_1|>|c_1|>0 \\ |b_i|\geq|a_i|+|c_i| \\ |b_n|>|a_n|>0 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ l_2 & 1 & \\ & l_3 & \ddots \\ & & \ddots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 & c_1 & \\ & u_2 & c_2 \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$Ax=f \Rightarrow \begin{cases} Ly=f \\ Ux=y \end{cases} \Rightarrow x$$

④ 雅可比方法和高斯-赛德尔. 迭代法.

雅可比: $x=\underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{B}x+\underbrace{D^{-1}b}_{d} \Rightarrow x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+d$.

高斯-赛德尔: $x^{(k+1)}=\underbrace{-(D+L)^{-1}U}_{G}x^{(k)}+\underbrace{(D+L)^{-1}b}_{d_1}$

$$x^{(k+1)}=Gx^{(k)}+d_1.$$

收敛性. $x^{(k+1)}=Hx^{(k)}+g$

① $\|H\|<1 \Rightarrow$ 收敛. $\Leftrightarrow$ ② $\rho(H)<1$

且: (1) $\|x^{(k)}-x^*\| \leq \frac{\|H\|}{1-\|H\|}\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|$.

(2) $\|x^{(k)}-x^*\| \leq \frac{\|H\|^k}{1-\|H\|}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|$

$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ 对角大于同行之和（对角占优）

$\Rightarrow$ 非奇异矩阵 $\Rightarrow$ 收敛. ③

⑤ 超松驰迭代法.（加速收敛）

$Ax = b \quad A = I - B$

$\Rightarrow x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + d \quad \Rightarrow x^{(k+1)} = x^{(k)} + \underbrace{b - Ax^{(k)}}_{r^{(k)}\text{剩余向量}}$

加个因子（松驰因子），$x^{(k+1)} = x^{(k)} + w(b - Ax^{(k)})$

加上高斯-塞德尔 $\rightarrow$ 逐次超松驰迭代法 SOR.

$$x^{(k+1)} = \underbrace{(D+wL)^{-1}[(1-w)D - wU]}_{\rightarrow L_w} x^{(k)} + (D+wL)^{-1} wb$$

~~[illegible]~~ $w = 1$. $\Rightarrow$ 高斯-塞德尔

$w < 1 \Rightarrow$ 低松弛 $\quad w > 1$ 超松弛

收敛 $\Leftrightarrow \rho(L_w) < 1$. 必要 $\Rightarrow 0 < w < 2$.

充分 $0 < w < 2$ A 对称正定.

5. 非线性方程(组)求根.

①迭代法.

将方程 $f(x)=0$ 变形 $x=\varphi(x) \Rightarrow$ 迭代得 $\{x_k\}$ 收敛于 x^*，且 $x^*=\varphi(x^*)$

$x=\varphi(x) \Leftrightarrow$ ~~点的~~ 确定 $y=x$ 与 $y=\varphi(x)$ 的交点.

收敛条件 $\begin{cases} |\varphi'(x)| \le L < 1. & x\in[a,b] \\ a \le \varphi(x) \le b \end{cases}$

$e_k = x_k - x^*$ $k\to\infty$ 时 $\frac{e_{k+1}}{e_k^p} \to c$ $c\neq 0$

$\frac{e_{k+1}}{e_k^p}$ $p=1$ 线性收敛

$p>1$ 超线性收敛 $p=2$ 平方收敛.

②牛顿法:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$x\in\Delta$ Δ: 根充分小领域，则 有 $f'(x)\neq 0 \Rightarrow$ 有二阶收敛速度