# 补充知识点

一、二重积分换元法

二、数项级数收敛的积分判别法

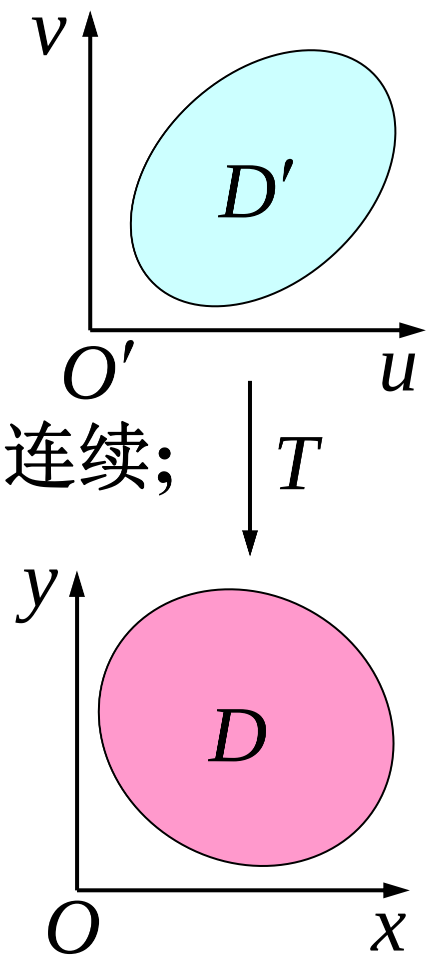
三、反常积分审敛法

四、含参变量的积分

# 一、二重积分换元法

**定理:** 设 $f(x,y)$ 在闭域 $D$ 上连续, **变换:**

$$T:\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \quad (u,v)\in D' \to D$$




满足 (1) $x(u,v),\ y(u,v)$ 在 $D'$ 上一阶偏导数连续;

(2) 在 $D'$ 上 雅可比行列式

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0;$$

**(3)** 变换 $T: D' \to D$ 是一一对应的 ,

则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|J(u,v)\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

例如, 直角坐标转化为极坐标时,

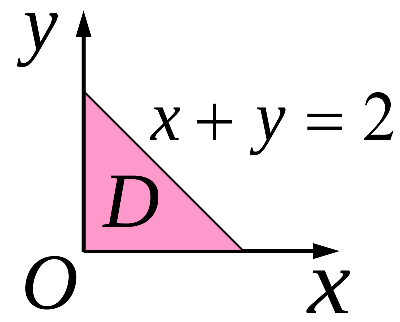
$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$$\therefore \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

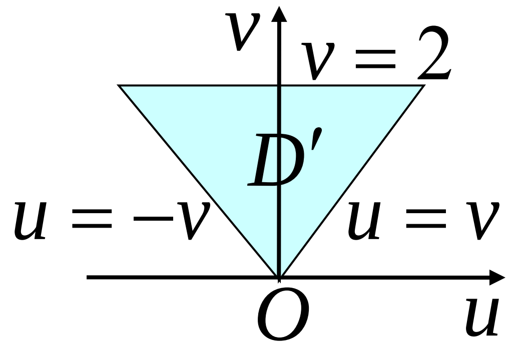
$$= \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

例1. 计算 $\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$ 是 $x$ 轴 $y$ 轴和直线 $x+y=2$ 所围成的闭域.




解: 令 $u=y-x, v=y+x$,则

$$x=\frac{v-u}{2}, y=\frac{v+u}{2} \quad (D' \to D)$$

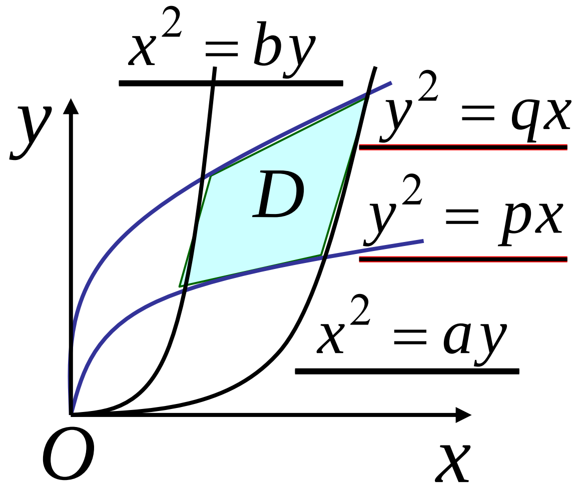



$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=\frac{-1}{2}$$

$$\therefore \iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'} e^{\frac{u}{v}} \left|\frac{-1}{2}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_0^2 \mathrm{d}v\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 (e-e^{-1})v\,\mathrm{d}v=e-e^{-1}$$

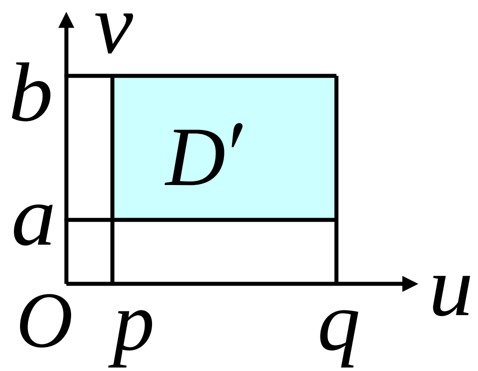
**例2.** 计算由 $y^2 = px,\ y^2 = qx,\ x^2 = ay,\ x^2 = by$ $(0 < p < q,\ 0 < a < b)$ 所围成的闭区域 $\boldsymbol{D}$ 的面积 $\boldsymbol{S}$.




解: 令 $u = \dfrac{y^2}{x},\ v = \dfrac{x^2}{y}$, 则

$$D' : \begin{cases} p \le u \le q \\ a \le v \le b \end{cases} \longrightarrow D$$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = -\frac{1}{3}$$




$$\therefore S = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D'} |J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{3}\int_p^q \mathrm{d}u \int_a^b \mathrm{d}v = \frac{1}{3}(q-p)(b-a)$$

**例3.** 试计算椭球体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积$\boldsymbol{V}$.

解: 取 $D:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$, 由对称性

$$V=2\iint_D z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2c\iint_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

令 $x=a\,r\cos\theta$, $y=b\,r\sin\theta$, 则$\boldsymbol{D}$ 的原象为

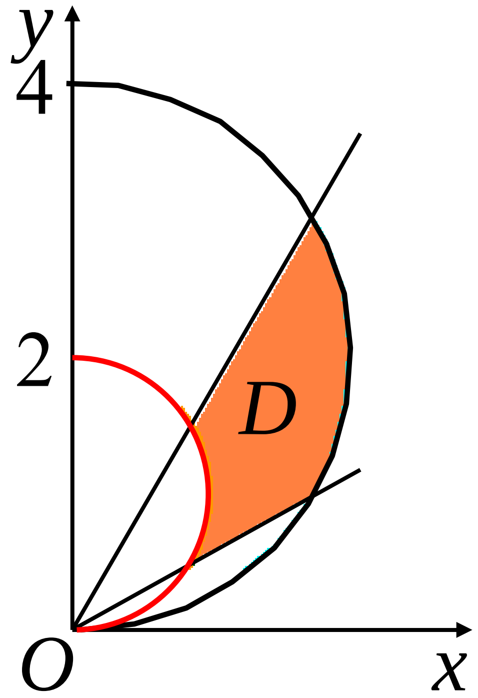
$$D':r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi$$

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\,r\sin\theta \\ b\sin\theta & b\,r\cos\theta \end{vmatrix}=a\,b\,r$$

$$\therefore\quad V=2c\iint_{D'}\sqrt{1-r^2}\,a\,b\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=2abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,r\,\mathrm{d}r=\frac{4}{3}\pi abc$$

例4. 计算$\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$D$为由圆$x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=4y$及直线 $x-\sqrt{3}y=0$, $y-\sqrt{3}x=0$所围成的平面闭区域.




解: $x^2+y^2=2y \Rightarrow r=2\sin\theta$

$x^2+y^2=4y \Rightarrow r=4\sin\theta$

$y-\sqrt{3}x=0 \quad \Rightarrow \theta_2=\dfrac{\pi}{3}$

$x-\sqrt{3}y=0 \quad \Rightarrow \theta_1=\dfrac{\pi}{6}$

$$\therefore \iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} r^2\cdot r\,\mathrm{d}r=15\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}\right)$$

三重积分也有类似二重积分的换元积分公式:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega^*} F(u,v,w)\left| J \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

对应雅可比行列式为

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

作业：

同济6版《高等数学》下册 **P156-156   19--22**

# 二、正项级数的柯西积分判别法

**柯西积分判别法：**

对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，设 $\{u_n\}$ 为单调减少的数列，作一个连续的单调减少的正值函数 $f(x)$ $(x>0)$，使得当$x$等于自然数$n$时，其函数值恰为 $u_n$，即 $f(n)=u_n$，令 $A_n=\int_1^n f(x)dx$，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与数列 $\{A_n\}$ 同时收敛或同时发散。

（证明略）

例1：考察 $p$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的敛散性 $(p>0)$.

作 $f(x)=\frac{1}{x^p}$， 考虑积分 $(p\neq 1)$.

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{1-p}\lim_{n\to\infty}(n^{1-p}-1)=\begin{cases}\frac{1}{p-1}, & p>1\\ \infty, & p<1\end{cases}$$

而当$p$=1时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的。

因此，对$p$级数来说，当 $0<p\leq 1$ 时发散，

当 $p>1$ 时收敛。

例2：证明级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散，级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ 收敛。

作 $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_2^n \frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{n\to\infty}[\ln\ln n-\ln\ln 2]=\infty$$

所以级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 是发散的。

例2：证明级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散，级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ 收敛。

作 $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_2^n\frac{1}{x(\ln x)^2}dx=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln n}\right)=\frac{1}{\ln 2},$$

所以级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ 是收敛的。

# 三、反常积分审敛法

## （一）无穷限反常积分的审敛法

**定理1.** 设 $f(x)\in C[a,+\infty)$，且 $f(x)\geq 0$，若函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

在 $[a,+\infty)$ 上有上界，则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x$ 收敛.

**定理2 . (比较审敛原理)** 设 $f(x)\in C[a,+\infty)$,且对充分大的 $x$ 有 $0\le f(x)\le g(x)$ , 则

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \text{ 收敛} \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ 收敛}$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ 发散} \Longrightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \text{ 发散}$$

**说明:** 已知 $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \text{收敛}, & p>1 \\ \text{发散}, & p\le 1 \end{cases} \quad (a>0)$

故常取 $g(x)=\frac{A}{x^p}\ (A>0)$ 作比较函数 ,得下列比较审敛法.

**定理3.** **(比较审敛法 1)** 设非负函数 $f(x) \in C[a,+\infty)$ $(a>0)$.

1) 若存在常数 $M>0$, $p>1$, 使对充分大的 $x$ 有

$$f(x) \le \frac{M}{x^p}$$

则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

2) 若存在常数 $N>0$, $p\le 1$, 使对充分大的 $x$ 有

$$f(x) \ge \frac{N}{x^p}$$

则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

例1. 判别反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{x^4+1}} \mathrm{d}x$ 的收敛性.

解: $\because \quad 0 \le \frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{x^4+1}} < \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$

由比较审敛法 1 可知原积分收敛.

思考题: 讨论反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} \mathrm{d}x$ 的收敛性.

提示: 当 $x \ge 1$ 时, 利用

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} \ge \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^3}} = \frac{1}{x+1}$$

可知原积分发散.

**定理4. (极限审敛法1)** 若 $f(x)\in C[a,+\infty)$, 且 $f(x)\geq 0$,

满足 $$\lim_{x\to+\infty} x^p f(x)=l$$

则有: **1)** 当 $p>1, 0\leq l<+\infty$ 时 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

**2)** 当 $p\leq 1, 0<l\leq+\infty$ 时 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

**注意:** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{x^p}}$ 此极限的大小刻画了

$x\to+\infty$ 时 $f(x)$ 趋于 0 的快慢程度.

例**2.** 判别反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$ 的收敛性 .

解: $\because \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=1$

根据极限审敛法 **1** , 该积分收敛 .

例**3.** 判别反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 的收敛性 .

解: $\because \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1$

根据极限审敛法 **1** , 该积分发散 .

**定理5.** 若 $f(x)\in C[a,+\infty)$, 且 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 则反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

## （二）无界函数反常积分的审敛法

无界函数的反常积分可转化为无穷限的反常积分.例如

设 $f(x)\in C(a,b]$, $a$ 为 $f(x)$ 的瑕点, 由定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

令 $x=a+\frac{1}{t}$, 则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\varepsilon}} f(a+\frac{1}{t})\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f(a+\frac{1}{t})\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

因此无穷限反常积分的审敛法完全可平移到无界函数的反常积分中来.

利用 $$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^q}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \text{收敛}, & q<1 \\ \text{发散}, & q\ge 1 \end{cases}$$

**有类似定理 3 与定理 4 的如下审敛法.**

**定理6. (比较审敛法 2)** 设非负函数 $f(x)\in C[a,b]$, $a$ 为瑕点, 使对一切充分接近 $a$ 的 $x$ ( $x>a$ ) .

1) 若存在常数 $M>0, q<1$, 有 $f(x)\le \dfrac{M}{(x-a)^q}$

则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

2) 若存在常数 $N>0$, 有 $f(x)\ge \dfrac{N}{x-a}$

则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

**定理7. (极限审敛法2)** 若 $f(x)\in C(a,b]$, 且 $f(x)\ge 0$,

$$\lim_{x\to+\infty}(x-a)^q f(x)=l$$

则有: 1) 当 $0<q<1,\ 0\le l<+\infty$ 时, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

2) 当 $q\ge 1,\ 0<l\le+\infty$ 时, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

例4. 判别反常积分 $\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 的敛散性.

解: 此处 $x=1$ 为瑕点, 利用洛必达法则得

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)\frac{1}{\ln x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\frac{1}{x}}=1$$

根据极限审敛法2, 所给积分发散.

例5. 判定椭圆积分$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ $(k^2<1)$ 的收敛性 .

解: 此处 $x=1$ 为瑕点, 由于

$$\lim_{x\to 1^-}(x-1)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-k^2x^2)}}=\frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}}$$

根据极限审敛法 2 , 椭圆积分收敛 .

# 四、含参变量的积分

## （一）被积函数含参变量的积分

设 $f(x,y)$ 是矩形域 $R=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上的连续函数,

则积分 $\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 确定了一个定义在 **[*a*, *b*]** 上的函数,

记作
$$\varphi(x)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\,\mathrm{d}y \qquad ①$$

***x*** 称为参变量, 上式称为含参变量的积分.

含参积分的性质 — 连续性, 可积性, 可微性 :

**定理1.(连续性)** 若 $f(x,y)$ 在矩形域 $R=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 则由 ① 确定的含参积分在 **[*a*, *b*]** 上连续.

**定理2. (可积性)** 若 $f(x,y)$ 在矩形域 $R=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 则 $\varphi(x)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$ 在$[a,b]$上可积, 且

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_a^b\left[\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\right]\mathrm{d}\,x=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

同样, $\psi(y)=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$ 在$[\alpha,\beta]$上可积, 且

$$\int_{\alpha}^{\beta} \psi(y)\,\mathrm{d}\,y=\int_{\alpha}^{\beta}\left[\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\right]\mathrm{d}\,y=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

**推论:** 在定理2 的条件下, 累次积分可交换求积顺序,

即
$$\int_a^b \mathrm{d}\,x\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y=\int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{d}\,y\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$$

**定理3. (可微性)** 若 $f(x,y)$ 及其偏导数 $f_x(x,y)$ 都在矩形域 $R=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 则 $\varphi(x)=\int_\alpha^\beta f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上可微, 且

$$\varphi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_\alpha^\beta f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta f_x(x,y)\,\mathrm{d}y$$

此定理说明, 被积函数及其偏导数在闭矩形域上连续时, 求导与求积运算是可以交换顺序的 .

例**1.** 求 $I=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}\,x\ (0<a<b)$.

解：由被积函数的特点想到积分:

$$\int_a^b x^y\,\mathrm{d}\,y=\left[\frac{x^y}{\ln x}\right]_a^b=\frac{x^b-x^a}{\ln x}$$

$$\therefore\ I=\int_0^1\mathrm{d}\,x\int_a^b x^y\,\mathrm{d}\,y\quad (x^y\text{在}[0,1]\times[a,b]\text{上连续})$$

$$=\int_a^b\mathrm{d}\,y\int_0^1 x^y\,\mathrm{d}\,x=\int_a^b\left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1\mathrm{d}\,y$$

$$=\int_a^b\frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}\,y=\ln\frac{b+1}{a+1}$$

例**2.** 求 $I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x.$

**解:** 考虑含参变量 $t$ 的积分所确定的函数

$$\varphi(t)=\int_0^1 \frac{\ln(1+t\,x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x.$$

显然, $\frac{\ln(1+t\,x)}{1+x^2}$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上连续, $\varphi(0)=0,\ \varphi(1)=I,$

由于 $$\varphi'(t)=\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+t\,x)}\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{1}{1+t^2}\int_0^1 \left[\,\frac{x}{1+x^2}+\frac{t}{1+x^2}-\frac{t}{1+t\,x}\,\right]\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{1}{1+t^2}\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+t\arctan x-\ln(1+tx)\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{1+t^2}\left[\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}t-\ln(1+t)\right]$$

故 $$I=\varphi(1)-\varphi(0)=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\left[\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}t-\ln(1+t)\right]\mathrm{d}t$$

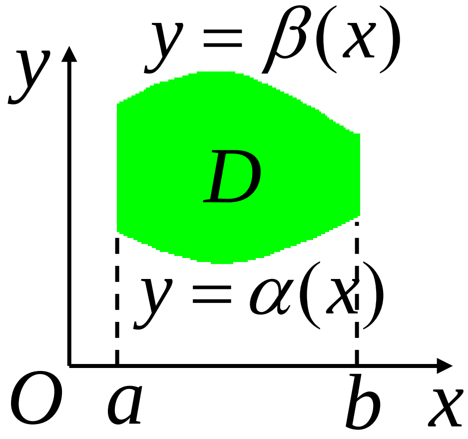
$$=\frac{1}{2}\ln 2\arctan t\Big|_0^1+\frac{\pi}{8}\ln(1+t^2)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{4}\ln 2-I$$

因此得 $$I=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

## 二、积分限含参变量的积分

在实际问题中, 常遇到积分限含参变量的情形, 例如, 设 $f(x,y)$ 为定义在区域




$$D:\begin{cases}\alpha(x)\le y\le\beta(x)\\ a\le x\le b\end{cases}$$

上的连续函数, 则

$$\varphi(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

也是参变量 $x$ 的函数 ,其定义域为 $[\,a\,,b\,]$ .

利用前面的定理可推出这种含参积分的性质.

**定理4.(连续性)** 若 $f(x,y)$ 在区域

$$D:\{(x,y)\,|\,\alpha(x)\le y\le \beta(x),\ a\le x\le b\}$$

上连续, 其中 $\alpha(x)$, $\beta(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数, **则函数**

$$\varphi(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

在 $[a,b]$ 上连续.

**定理5. (可微性)** 若 $f(x,y)$ 及其偏导数 $f_x(x,y)$ 都在矩形域 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上连续, $\alpha(x),\beta(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上 其值域含于 $[c,d]$ 中的可微函数, 则

$$\varphi(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

在 $[a,b]$ 上可微, 且

$$\varphi'(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x,y)\,\mathrm{d}\,y+f(x,\beta(x))\beta'(x)-f(x,\alpha(x))\alpha'(x)$$

例**3.** 设 $\varphi(x)=\int_x^{x^2}\frac{\sin xy}{y}\,\mathrm{d}\,y$，求 $\varphi'(x)$.

解: $\varphi'(x)=\int_x^{x^2}\cos xy\,\mathrm{d}\,y+\frac{\sin x^3}{x^2}\cdot 2x-\frac{\sin x^2}{x}\cdot 1$

$$=\left[\frac{\sin xy}{x}\right]_x^{x^2}+\frac{2\sin x^3}{x}-\frac{\sin x^2}{x}$$

$$=\frac{3\sin x^3-2\sin x^2}{x}$$