第四章　微分方程

重点、热点

1、求一阶微分方程的解；

2、求常系数二阶线性非齐次方程的解；

3、微分方程的应用.

常考题型

1. 求典型类型的一阶微分方程的通解或特解：

这类问题首先是判别方程类型，当然，

有些方程不直接属于我们学过的类型，

此时常用的方法是将x与y对调或作适当

的变量代换，把原方程化为我们学过的类型；

2. 求解可降阶方程；

3. 求线性常系数齐次和非齐次方程的特解或通解；

4. 根据实际问题或给定的条件建立微分方程并求解；

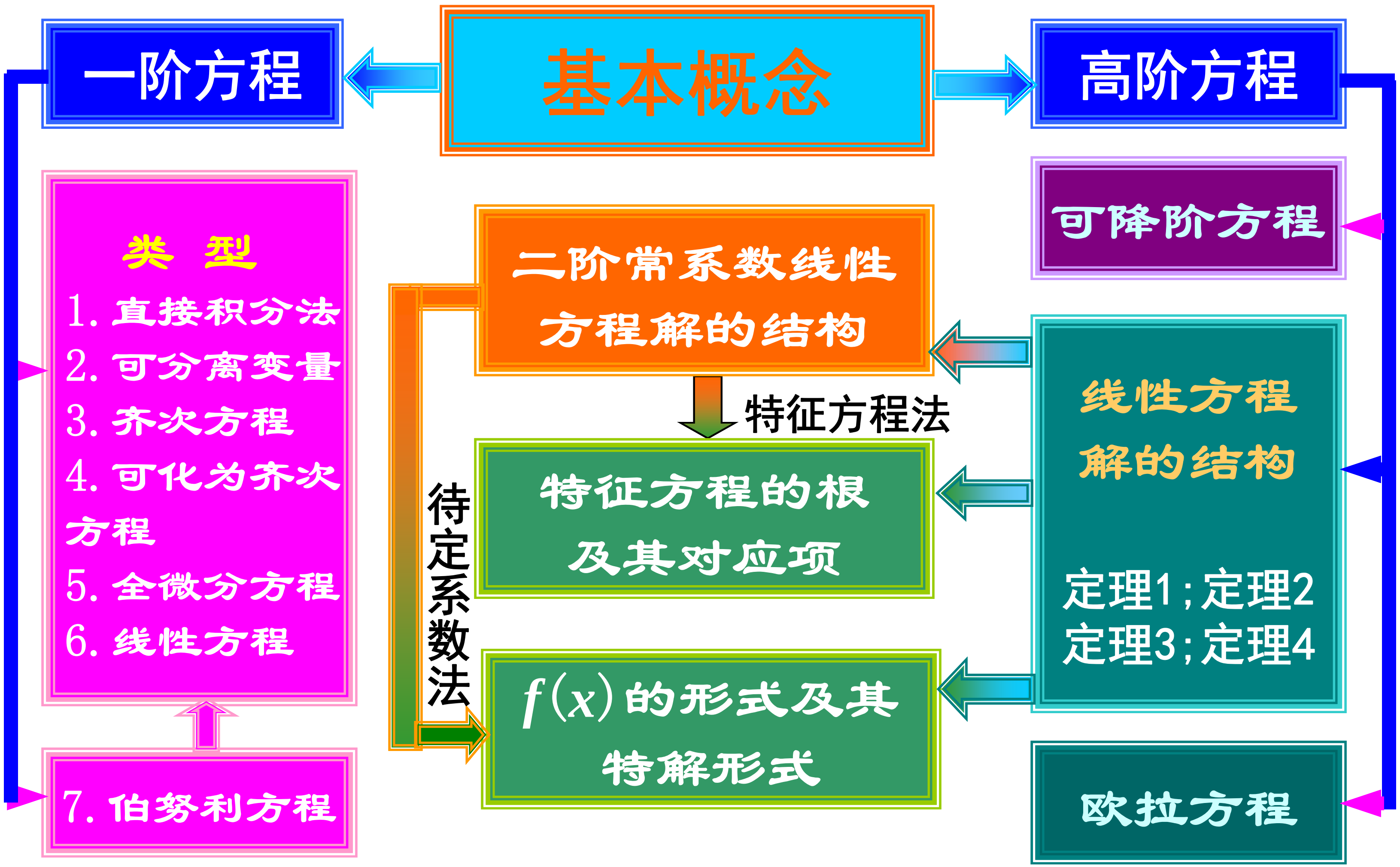
5. 综合题，常见的是以下内容的综合：

变上限定积分，变积分域的重积分，

线积分与路径无关，全微分的充要条件，

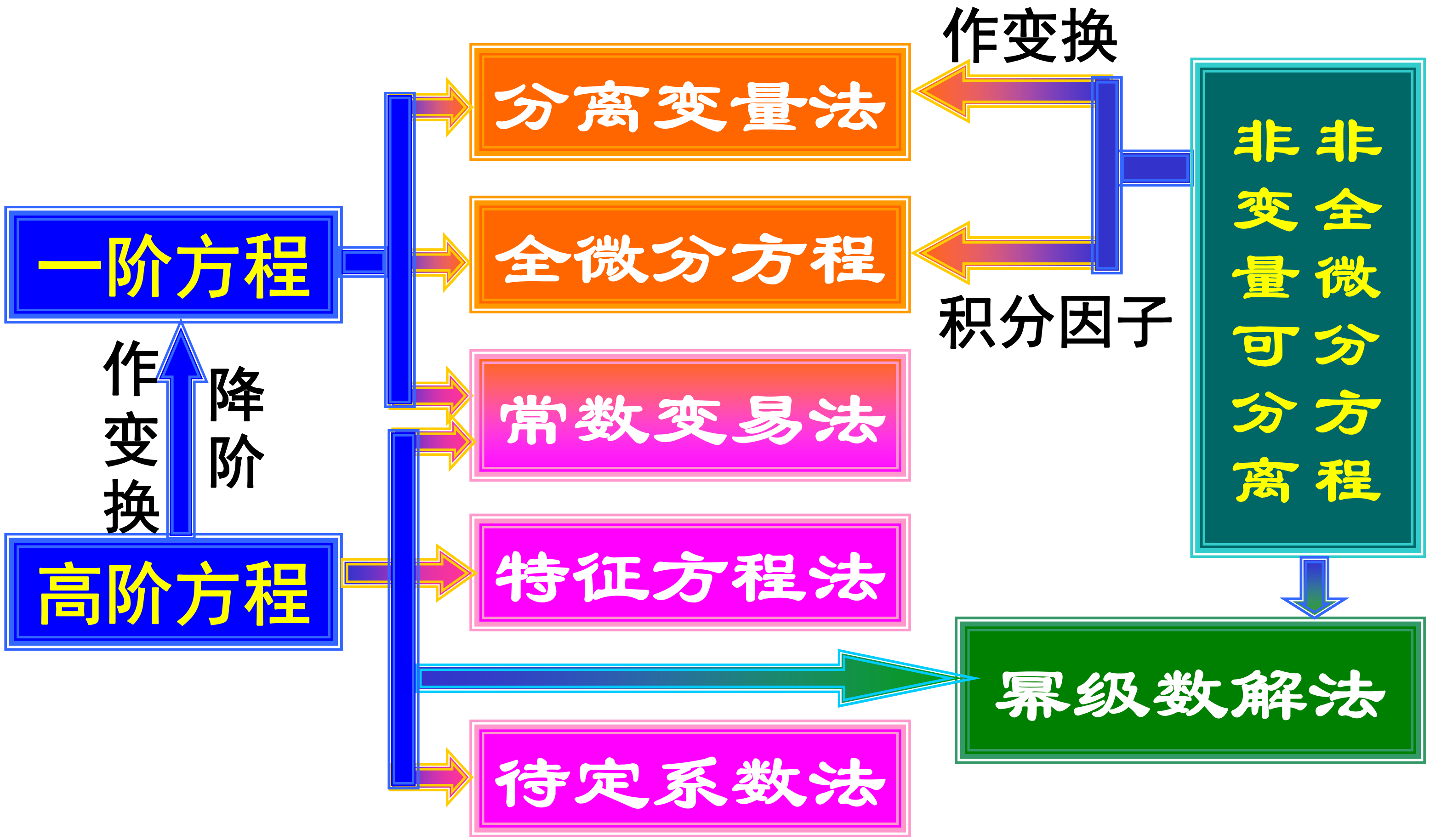
偏导数等。

一、主要内容



一阶方程
基本概念
高阶方程
类 型
1. 直接积分法
2. 可分离变量
3. 齐次方程
4. 可化为齐次方程
5. 全微分方程
6. 线性方程
7. 伯努利方程
二阶常系数线性方程解的结构
特征方程法
特征方程的根及其对应项
待定系数法
$f(x)$的形式及其特解形式
可降阶方程
线性方程解的结构
定理1；定理2
定理3；定理4
欧拉方程

微分方程解题思路



作变换
分离变量法
一阶方程
全微分方程
积分因子
非变量可分离
非全微分方程
作变换
降阶
常数变易法
高阶方程
特征方程法
幂级数解法
待定系数法

二、关注的要点

1、一阶微分方程的解法

(1) 可分离变量的微分方程

形如 $g(y)dy = f(x)dx$

解法 $\int g(y)dy = \int f(x)dx$ 分离变量法

(2) 齐次方程 形如 $\dfrac{dy}{dx} = f(\dfrac{y}{x})$

解法 作变量代换 $u = \dfrac{y}{x}$

(3) 可化为齐次的方程

形如 $$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$$

当$c=c_1=0$时，齐次方程．否则为非齐次方程．

解法　令　$x=X+h,$

$y=Y+k,$　　化为齐次方程．

（其中h和k是待定的常数）

(4) 一阶线性微分方程

形如 $$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

当$Q(x)\equiv 0$, 上方程称为齐次的.

当$Q(x)\not\equiv 0$, 上方程称为非齐次的.

解法 齐次方程的通解为 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$.

（使用分离变量法）

非齐次微分方程的通解为

$$y=[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]e^{-\int P(x)dx}$$

（常数变易法）

(5) 伯努利(Bernoulli)方程

形如 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{n}\qquad (n\neq 0,1)$

当$n=0,1$时， 方程为线性微分方程.

当$n\neq 0,1$时， 方程为非线性微分方程.

解法　需经过变量代换化为线性微分方程.

令$z = y^{1-n}$,

$$y^{1-n} = z$$
$$= e^{-\int (1-n)P(x)dx}\left(\int Q(x)(1-n)e^{\int (1-n)P(x)dx}dx + C\right).$$

(6) 全微分方程

形如　$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

其中 $du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

注意： 全微分方程 $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

解法 应用曲线积分与路径无关.

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy$$

$$=\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx,$$

通解为 $u(x,y)=C$.

用直接凑全微分的方法.

(7) 可化为全微分方程

形如 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

非全微分方程 $(\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x})$.

若$\mu(x,y)\neq 0$连续可微函数，且可使方程

$$\mu(x,y)P(x,y)dx+\mu(x,y)Q(x,y)dy=0$$

成为全微分方程. 则称$\mu(x,y)$为方程的积分因子.

公式法:

若 $\frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}) = f(x)$ 则 $\mu(x)=e^{\int f(x)dx}$;

若 $\frac{1}{P}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}) = g(y)$ 则 $\mu(y)=e^{\int g(y)dy}$.

观察法:

熟记常见函数的全微分表达式，通过观察直接找出积分因子.

常见的全微分表达式

$xdx+ydy=d\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)$	$\dfrac{xdy-ydx}{x^2}=d\left(\dfrac{y}{x}\right)$
$\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=d\left(\arctan\dfrac{y}{x}\right)$	$\dfrac{xdy+ydx}{xy}=d(\ln xy)$
$\dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=d\left(\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)$	
$\dfrac{xdy-ydx}{x^2-y^2}=d\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+y}{x-y}\right)$	

可选用积分因子 $\dfrac{1}{x+y},\dfrac{1}{x^2},\dfrac{1}{x^2y^2},\dfrac{1}{x^2+y^2},\dfrac{x}{y^2},\dfrac{y}{x^2}$ 等.

2、可降阶的高阶微分方程的解法

(1) $y^{(n)} = f(x)$ 型

解法 接连积分n次，得通解.

(2) $y'' = f(x, y')$ 型

特点 不显含未知函数y.

解法 令 $y' = P(x)$, $y'' = P'$,

代入原方程, 得 $P' = f(x, P(x))$.

(3) $y'' = f(y, y')$ 型

特点 不显含自变量 x.

解法 令 $y' = P(x)$, $y'' = P\dfrac{dp}{dy}$,

代入原方程, 得

$$P\frac{dp}{dy} = f(y, P).$$

3、线性微分方程解的结构

(1)　二阶齐次方程解的结构:

形如　$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$　　(1)

定理 1 如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程(1)的两个解，那末 $y = C_1y_1 + C_2y_2$ 也是(1)的解．（C_1, C_2 是常数）

定理 2 如果 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程(1)的两个线性无关的特解，那么 $y = C_1y_1 + C_2y_2$ 就是方程(1)的通解.

(2) 二阶非齐次线性方程的解的结构:

形如 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ (2)

定理3 设y^*是(2)的一个特解, Y是与(2)对应的齐次方程(1)的通解, 那么$y = Y + y^*$是二阶非齐次线性微分方程(2)的通解.

(2) 二阶非齐次线性方程的解的结构:

形如 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ (2)

定理 4 设非齐次方程(2)的右端 $f(x)$是几个函数之和，如 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$ 而 y_1^*与 y_2^*分别是方程,

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$$

的特解，那么 $y_1^* + y_2^*$就是原方程的特解.

4、二阶常系数齐次线性方程解法

形如 $y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1} y' + P_n y = f(x)$

n阶常系数线性微分方程

$y'' + py' + qy = 0$　　二阶常系数齐次线性方程

$y'' + py' + qy = f(x)$ 二阶常系数非齐次线性方程

解法　由常系数齐次线性方程的特征方程的根确定其通解的方法称为**特征方程法**.

$$y'' + py' + qy = 0$$

特征方程为 $r^2 + pr + q = 0$

特征根的情况	通解的表达式
实根 $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
实根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_2 x}$
复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

推广： n阶常系数齐次线性方程解法

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1} y' + P_n y = 0$$

特征方程为 $r^n + P_1 r^{n-1} + \cdots + P_{n-1} r + P_n = 0$

特征方程的根	通解中的对应项
若是k重根r	$(C_0 + C_1 x + \cdots + C_{k-1} x^{k-1}) e^{rx}$
若是k重共轭复根$\alpha \pm i\beta$	$[(C_0 + C_1 x + \cdots + C_{k-1} x^{k-1}) \cos \beta x$ $+ (D_0 + D_1 x + \cdots + D_{k-1} x^{k-1}) \sin \beta x] e^{\alpha x}$

5、二阶常系数非齐次线性微分方程解法

$y'' + py' + qy = f(x)$　二阶常系数非齐次线性方程

解法　待定系数法.

(1)　$f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型

设 $\bar{y} = x^k e^{\lambda x} Q_m(x)$，　$k = \begin{cases} 0 & \lambda\text{不是根} \\ 1 & \lambda\text{是单根} \\ 2 & \lambda\text{是重根} \end{cases}$，

(2) $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$型

设 $\bar{y}=x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$,

其中 $R_m^{(1)}(x), R_m^{(2)}(x)$是$m$次多项式, $m=\max\{l,n\}$

$$k=\begin{cases}0 & \lambda\pm i\omega\text{不是特征方程的根时;}\\ 1 & \lambda\pm i\omega\text{是特征方程的单根时.}\end{cases}$$

6、欧拉方程

形如

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$$

的方程(其中 $p_1, p_2 \cdots p_n$ 为常数)，叫欧拉方程.

欧拉方程是特殊的变系数方程，通过变量代换

$x = e^t$ 或 $t = \ln x$ 可化为常系数微分方程.

4.1 微分方程

一、一阶微分方程

例1 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2y$ 的通解.

解 分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=3x^2\,\mathrm{d}x$

说明: 在求解过程中每一步不一定是同解变形, 因此可能增、减解.

两边积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 3x^2\,\mathrm{d}x$

得 $\ln|y|=x^3+C_1$

或 $\ln|y|=x^3+\ln|C|$

即 $y=\pm e^{x^3+C_1}=\pm e^{C_1}e^{x^3}$

$$y=Ce^{x^3}$$

(此式含分离变量时丢失的解 $y=0$)

例2 求通解

$$y\left(x\cos\frac{y}{x}+y\sin\frac{y}{x}\right)dx=x\left(y\sin\frac{y}{x}-x\cos\frac{y}{x}\right)dy.$$

解 原方程可化为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\left(\frac{\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x}-\cos\frac{y}{x}}\right),$$

令 $u=\frac{y}{x}$, $y=ux,\ y'=u+xu'$. 代入原方程得

$$u+xu'=u\left(\frac{\cos u+u\sin u}{u\sin u-\cos u}\right),$$

分离变量

令 $u=\dfrac{y}{x}$, $y=ux$, $y'=u+xu'$. 代入原方程得

$$u+xu'=u\left(\frac{\cos u+u\sin u}{u\sin u-\cos u}\right),$$

分离变量

$$\frac{u\sin u-\cos u}{2u\cos u}du=\frac{dx}{x},$$

两边积分

$$\ln(u\cos u)=\ln x^{-2}+\ln C,\qquad \therefore u\cos u=\frac{C}{x^2},$$

$\therefore \dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}=\dfrac{C}{x^2}$, 所求通解为 $xy\cos\dfrac{y}{x}=C.$

例3 求 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y+1}{x+y-3}$ 的通解.

解 $\because \Delta=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0,$

方程组 $\begin{cases} h-k+1=0 \\ h+k-3=0, \end{cases} \Rightarrow h=1, k=2,$

令 $x=X+1, y=Y+2.$ 代入原方程得

$\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{X-Y}{X+Y},$ 令 $u=\dfrac{Y}{X},$

方程变为 $u+X\dfrac{du}{dX}=\dfrac{1-u}{1+u}$, 分离变量法得

$X^2(u^2+2u-1)=C$, 即 $Y^2+2XY-X^2=C$,

将 $X=x-1, Y=y-2$ 代回,

得原方程的通解

$$(y-2)^2+2(x-1)(y-2)-(x-1)^2=C,$$

或 $x^2+2xy-y^2+2x+6y=C_1$.

例4 求通解 $xy' + 2y = 3x^3 y^{\frac{4}{3}}.$

解 原式可化为 $y' + \dfrac{2}{x} y = 3x^2 y^{\frac{4}{3}}$，伯努利方程

即 $y^{-\frac{4}{3}} y' + \dfrac{2}{x} y^{-\frac{1}{3}} = 3x^2,$

令 $z = y^{-\frac{1}{3}},$ 原式变为 $-3z' + \dfrac{2}{x} z = 3x^2,$

即 $z' - \dfrac{2}{3x} z = -x^2,$ 一阶线性非齐方程

对应齐方通解为 $z = Cx^{\frac{2}{3}},$

利用常数变易法　令

$$z = C(x)x^{\frac{2}{3}},$$ 代入非齐方程得

$$C'(x)x^{\frac{2}{3}} = -x^2, \quad \therefore C(x) = -\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} + C',$$

原方程的通解为

$$y^{-\frac{1}{3}} = -\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} + C'x^{\frac{2}{3}}.$$

例5 求通解 $\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0.$

解 $\because \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{2x}{y^3})=-\frac{6x}{y^4},$

$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{y^2-3x^2}{y^4})=-\frac{6x}{y^4}, \quad (y\neq 0)$

$\therefore \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$ 方程为全微分方程.

例5 求通解 $\dfrac{2x}{y^3}dx+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0.$

(1) 利用原函数法求解:

设原函数为 $u(x,y)$, 则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{2x}{y^3}$,

$\therefore u(x,y)=\dfrac{x^2}{y^3}+\varphi(y)$, 两边对 y 求导,

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{3x^2}{y^4}=-\dfrac{3x^2}{y^4}+\varphi'(y)$, 解得 $\varphi'(y)=\dfrac{1}{y^2}$,

$\therefore \varphi(y)=-\dfrac{1}{y}$,

故方程的通解为 $\dfrac{x^2}{y^3}-\dfrac{1}{y^2}=C.$

例5　求通解 $\dfrac{2x}{y^3}dx+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0.$

(2)　利用分项组合法求解:

原方程重新组合为

$$\left(\frac{2x}{y^3}dx-\frac{3x^2}{y^4}dy\right)+\frac{1}{y^2}dy=0,$$

即得　$d\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right)+d\left(-\dfrac{1}{y}\right)=0,$

故方程的通解为　$\dfrac{x^2}{y^3}-\dfrac{1}{y^2}=C.$

例5 求通解 $$\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0.$$

(3) 利用曲线积分求解:

$$\because \quad \int_{(0,1)}^{(x,y)}\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=C,$$

即 $$\int_0^x\frac{2x}{1^3}dx+\int_1^y\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=C,$$

$$\therefore \quad x^2-\frac{1}{y}\Big|_1^y+\frac{x^2}{y^3}\Big|_1^y=C.$$

故方程的通解为 $$\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y^2}=C.$$

例6 求通解

$$(x^2-y^2-2y)dx+(x^2-y^2+2x)dy=0.$$

解 $\because \dfrac{\partial P}{\partial y}=-2y-2, \quad \dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x+2,$

$$\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x},$$ 非全微分方程.

利用积分因子法:

原方程重新组合为

$$(x^2-y^2)(dx+dy)=2(ydx-xdy),$$

$$dx + dy = 2\frac{ydx - xdy}{x^2 - y^2} = 2\frac{d(\frac{y}{x})}{1-(\frac{y}{x})^2},$$

$$\therefore\ x + y = \ln\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}} + \ln C,$$

故方程的通解为 $e^{x+y} = C\dfrac{x-y}{x+y}.$

利用变量代换求微分方程的解

例7 求$\dfrac{dy}{dx}=(x+y)^2$的通解.

解 令 $x+y=u$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}-1$ 代入原方程

$\dfrac{du}{dx}=1+u^2$ 解得 $\arctan u=x+C$,

代回 $u=x+y$,得 $\arctan(x+y)=x+C$,

原方程的通解为 $y=\tan(x+C)-x$.

例8 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x\sin^2(xy)}-\dfrac{y}{x}$;

解 令 $z=xy$, 则 $\dfrac{dz}{dx}=y+x\dfrac{dy}{dx}$,

$$\frac{dz}{dx}=y+x\left(\frac{1}{x\sin^2(xy)}-\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{\sin^2 z},$$

分离变量法得 $2z-\sin 2z=4x+C$,

将 $z=xy$ 代回,

所求通解为 $2xy-\sin(2xy)=4x+C$.

应用题

例9 求一连续可导函数$f(x)$使其满足下列方程:

$$f(x)=\sin x-\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t$$

令$u=x-t$

提示: $f(x)=\sin x-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$

则有 $\begin{cases} f'(x)+f(x)=\cos x \\ f(0)=0 \end{cases}$

利用公式可求出

$$f(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x-e^{-x})$$

二、特殊的高阶微分方程

例 1 求方程 $yy'' + y'^2 = 0$ 的通解.

解 将方程写成 $\dfrac{d}{dx}(yy') = 0,$

故有 $yy' = C_1,$ 即 $ydy = C_1dx,$

积分后得通解 $y^2 = C_1x + C_2.$

注意: 这一方法技巧性较高，左端恰为一个函数对 x 的导数，关键是配导数的方程.

解法 通过代换将其化成较低阶的方程来求解.

例2 求方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

解 两端同乘不为零因子 $\dfrac{1}{y^2}$,

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y}\right) = 0,$$

故 $y' = C_1 y$,

从而通解为

$$y = C_2 e^{C_1 x}.$$

例2 求方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

解法二 原方程变为

$$\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y},$$

两边积分, 得 $\ln y' = \ln y + \ln C_1$,

即 $y' = C_1 y$,

原方程通解为 $y = C_2 e^{C_1 x}$.

例3 求通解 $y'' = \dfrac{1+y'^2}{2y}$.

解 方程不显含 x.

令 $y' = P$, $y'' = P\dfrac{dP}{dy}$, 代入方程，得

$$P\frac{dP}{dy} = \frac{1+P^2}{2y},$$ 解得，$1+P^2 = C_1 y$,

$\therefore$ $P = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$, 即 $\dfrac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$,

故方程的通解为 $\dfrac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1} = \pm x + C_2$.

例4　求特解

$$y'' - 2y' + y = xe^x - e^x, y(1) = y'(1) = 1.$$

解　特征方程 $r^2 - 2r + 1 = 0,$

特征根 $r_1 = r_2 = 1,$

对应的齐次方程的通解为 $Y = (C_1 + C_2 x)e^x.$

设原方程的特解为 $y^* = x^2(ax + b)e^x,$

则 $(y^*)' = [ax^3 + (3a + b)x^2 + 2bx]e^x,$

$$(y^*)'' = [ax^3 + (6a + b)x^2 + (6a + 4b)x + 2b]e^x,$$

将 $y^*, (y^*)', (y^*)''$ 代入原方程比较系数得

$$a = \frac{1}{6}, \quad b = -\frac{1}{2},$$

原方程的一个特解为 $y^* = \frac{x^3}{6}e^x - \frac{x^2}{2}e^x,$

故原方程的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^x + \frac{x^3}{6}e^x - \frac{x^2}{2}e^x.$

$$\because y(1) = 1, \qquad \therefore (C_1 + C_2 - \frac{1}{3})e = 1,$$

$$y' = [\,(C_1 + C_2) + (C_2 - 1)x + \frac{x^3}{6}]e^x,$$

$$\because y'(1)=1, \qquad \therefore (C_1+2C_2-\frac{5}{6})e=1,$$

由 $\begin{cases} C_1+C_2=\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{3}, \\ C_1+2C_2=\dfrac{1}{e}+\dfrac{5}{6}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} C_1=\dfrac{2}{e}-\dfrac{1}{6}, \\ C_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{e}, \end{cases}$

所以原方程满足初始条件的特解为

$$y=[\frac{2}{e}-\frac{1}{6}+(\frac{1}{2}-\frac{1}{e})x]e^x+\frac{x^3}{6}e^x-\frac{x^2}{2}e^x.$$

例5 求解方程 $y'' + 4y = \frac{1}{2}(x + \cos 2x).$

解 特征方程 $r^2 + 4 = 0,$

特征根 $r_{1,2} = \pm 2i,$

对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

设原方程的特解为 $y^* = y_1^* + y_2^*.$

(1) 设 $y_1^* = ax + b$, 则 $(y_1^*)' = a$, $(y_1^*)'' = 0,$

代入 $y'' + 4y = \frac{1}{2}x$, 得 $4ax + 4b = \frac{1}{2}x,$

由 $\begin{cases} 4a = \dfrac{1}{2}, \\ 4b = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = \dfrac{1}{8}, \\ b = 0, \end{cases}$ $\therefore y_1^* = \dfrac{1}{8}x;$

(2) 设 $y_2^* = x(c\cos 2x + d\sin 2x),$

则 $(y_2^*)' = (c + 2dx)\cos 2x + (d - 2cx)\sin 2x,$

$$(y_2^*)'' = (4d - 4cx)\cos 2x - (4c + 4dx)\sin 2x,$$

代入 $y'' + 4y = \dfrac{1}{2}\cos 2x,$ 得

$$4d\cos 2x - 4c\sin 2x = \frac{1}{2}\cos 2x,$$

由 $\begin{cases} 4d = \frac{1}{2}, \\ -4c = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} c = 0, \\ d = \frac{1}{8}, \end{cases}$ $\therefore y_2^* = \frac{1}{8}x\sin 2x;$

故原方程的通解为

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}x\sin 2x.$$

例6 设 $y''+p(x)y'=f(x)$ 有一特解为 $\frac{1}{x}$，对应的齐次方程有一特解为 x^2，试求：

(1) $p(x), f(x)$ 的表达式；

(2) 此方程的通解.

解 (1) 由题设可得：

$$\begin{cases} 2+p(x)2x=0, \\ \dfrac{2}{x^3}+p(x)(-\dfrac{1}{x^2})=f(x), \end{cases}$$

解此方程组，得

$$p(x)=-\frac{1}{x},\quad f(x)=\frac{3}{x^3}.$$

(2) 原方程为

$$y'' - \frac{1}{x}y' = \frac{3}{x^3}.$$

显见 $y_1 = 1,\ y_2 = x^2$ 是原方程对应的齐次方程的两个线性无关的特解,

又 $y^* = \dfrac{1}{x}$ 是原方程的一个特解,

由解的结构定理得方程的通解为

$$y = C_1 + C_2x^2 + \frac{1}{x}.$$

三、欧拉方程

形如

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$$

的方程(其中 $p_1, p_2 \cdots p_n$ 为常数) 叫欧拉方程.

特点：各项未知函数导数的阶数与乘积因子自变量的方次数相同.

解法：欧拉方程是特殊的变系数方程，通过变量代换可化为常系数微分方程.

例1 求方程 $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}$ 的通解.

解 将方程化为 $x^2 y'' - x y' + y = 2x$ (欧拉方程)

令 $x = e^t$, 记 $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 则方程化为

$$[D(D-1) - D + 1]\, y = 2e^t$$

即 $$(D^2 - 2D + 1)\, y = 2e^t \qquad ②$$

特征根: $r_1 = r_2 = 1$,

设特解: $y = At^2 e^t$, 代入 ② 解得 $A = 1$, 所求通解为

$$y = (C_1 + C_2 t)e^t + t^2 e^t = (C_1 + C_2 \ln x)x + x\ln^2 x.$$

例2 求解方程 $x^2y'' - 3xy' - 5y = x^2 \ln x.$

解 这是一个欧拉方程.

令 $t = \ln x$, $\quad x = e^t$,

则 $y' = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x} y'_t$,

$$y'' = \frac{1}{x^2} y'_t + \frac{1}{x} y''_t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2}(y''_t - y'_t),$$

代入原方程得 $\quad y''_t - 4y'_t - 5y = te^{2t}, \qquad (1)$

$$y_t'' - 4y_t' - 5y = te^{2t}, \qquad (1)$$

和(1)对应的齐次方程为

$$y_t'' - 4y_t' - 5y = 0, \qquad (2)$$

(2)的特征方程为 $r^2 - 4r - 5 = 0,$

特征根为 $r_1 = 5,\quad r_2 = -1,$

(2)的通解为 $Y = C_1e^{5t} + C_2e^{-t}.$

设(1)的特解为 $y^* = (at + b)e^{2t},$

则 $(y_1^*)' = e^{2t}(2at + a + 2b),$

$$(y^*)'' = e^{2t}(4at + 4a + 4b),$$

将 $y^*, (y^*)', (y^*)''$ 代入原方程比较系数得

$$-9at-9b=t, \quad \therefore \quad a=-\frac{1}{9}, \quad b=0,$$

$$y^*=-\frac{1}{9}te^{2t},$$

得(1)的通解为 $y=C_1e^{5t}+C_2e^{-t}-\frac{1}{9}te^{2t}.$

故原方程的通解为

$$y=C_1x^5+\frac{C_2}{x}-\frac{1}{9}x^2\ln x.$$

4.2 特殊的高阶微分方程

一、可求解的高阶微分方程类型

1、 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程　　变量代换

令 $z=y^{(n-1)}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=y^{(n)}=f(x)$，因此

$$z=\int f(x)\mathrm{d}x+C_1,$$

即 $$y^{(n-1)}=\int f(x)\mathrm{d}x+C_1.$$

同理可得 $$y^{(n-2)}=\int\left[\int f(x)\mathrm{d}x+C_1\right]\mathrm{d}x+C_2$$

$$=\int\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x+C_1x+C_2.$$

依次通过 n 次积分，可得含 n 个任意常数的通解 .

2、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程　　变量代换

设 $y' = p(x)$，则 $y'' = p'$，原方程化为一阶方程

$$p' = f(x, p).$$

设其通解为 $p = \varphi(x, C_1)$，则得

$$y' = \varphi(x, C_1).$$

再一次积分，得原方程的通解

$$y = \int \varphi(x, C_1)\,\mathrm{d}x + C_2.$$

3、 $y''=f(y,y')$ 型的微分方程 变量代换

令 $y'=p(y)$, 则 $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$.

故方程化为 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$.

设其通解为 $p=\varphi(y,C_1)$, 即得

$$y'=\varphi(y,C_1).$$

分离变量后积分，得原方程的通解

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2.$$

4、二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x),$$ 其中 p, q 为常数.

$$y'' + py' + qy = 0,$$ 对应齐次方程

通解结构 $y = Y + y^*$,

难点：如何求特解？

方法：待定系数法.

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \quad (p, q\text{为常数})$$

特征方程: $r^2 + pr + q = 0$, 特征根: r_1, r_2.

特征根的情况	通解的表达式
$\Delta > 0$: $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$\Delta = 0$: $r_1 = r_2 = -\dfrac{p}{2}$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
$\Delta = 0$: $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x),$$ 其中 p, q 为常数.

$f(x)$的常见类型：

1)、$f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型

λ 为实数，$P_m(x)$ 为 m 次多项式 .

2)、$f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x]$ 型

1)、$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$

λ 为特征方程的 k 重根($k=0, 1, 2$)，则可设特解:

$$y^*=x^k e^{\lambda x} Q_m(x),$$

2)、$f(x)=e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x\right]$

$\lambda+i\omega$ 为特征方程的 k 重根($k=0, 1$), 则可设特解:

$$y^*=x^k e^{\lambda x}\left[R_m\cos\omega x+\tilde{R}_m\sin\omega x\right] \quad m=\max\{n, l\}$$

小 结:

对非齐次方程

$$f(x)=e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x\right]$$

$\lambda+i\omega$为特征方程的 k 重根($k=0, 1$), 则可设特解:

$$y^*=x^k e^{\lambda x}\left[R_m\cos\omega x+\tilde{R}_m\sin\omega x\right]\quad m=\max\{n,l\}$$

二、典型例题

例 1 求方程 $yy'' + y'^2 = 0$ 的通解.

解　将方程写成 $\dfrac{d}{dx}(yy') = 0,$

故有 $yy' = C_1,$　　即 $y\,dy = C_1 dx,$

积分后得通解 $y^2 = C_1 x + C_2.$

注意: 这一方法技巧性较高，左端恰为一个函数对 x 的导数，关键是配导数的方程.

解法 通过代换将其化成较低阶的方程来求解.

解法 通过代换将其化成较低阶的方程来求解.

例2 求方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

解 两端同乘不为零因子 $\frac{1}{y^2}$,

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y}\right) = 0,$$

故 $y' = C_1 y$,

从而通解为

$$y = C_2 e^{C_1 x}.$$

例2　求方程 $yy''-y'^2=0$ 的通解.

解法二　原方程变为

$$\frac{y''}{y'}=\frac{y'}{y},$$

两边积分, 得 $\ln y'=\ln y+\ln C_1$,

即 $y'=C_1y$,

原方程通解为 $y=C_2e^{C_1x}$.

例3 求通解 $y'' = \dfrac{1+y'^2}{2y}$.

解 方程不显含 x.

令 $y' = P$, $y'' = P\dfrac{dP}{dy}$, 代入方程，得

$$P\frac{dP}{dy} = \frac{1+P^2}{2y},$$ 解得， $1+P^2 = C_1 y$,

$\therefore$ $P = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$, 即 $\dfrac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$,

故方程的通解为 $\dfrac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1} = \pm x + C_2$.

例4 求特解

$$y'' - 2y' + y = xe^x - e^x, y(1) = y'(1) = 1.$$

解 特征方程 $r^2 - 2r + 1 = 0$,

特征根 $r_1 = r_2 = 1$,

对应的齐次方程的通解为 $Y = (C_1 + C_2 x)e^x$.

设原方程的特解为 $y^* = x^2(ax + b)e^x$,

则 $(y^*)' = [ax^3 + (3a + b)x^2 + 2bx]e^x$,

$$(y^*)'' = [ax^3 + (6a + b)x^2 + (6a + 4b)x + 2b]e^x,$$

将 $y^*, (y^*)', (y^*)''$ 代入原方程比较系数得

$$a = \frac{1}{6}, \quad b = -\frac{1}{2},$$

原方程的一个特解为 $y^* = \dfrac{x^3}{6}e^x - \dfrac{x^2}{2}e^x,$

故原方程的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^x + \dfrac{x^3}{6}e^x - \dfrac{x^2}{2}e^x.$

$$\because y(1) = 1, \qquad \therefore (C_1 + C_2 - \frac{1}{3})e = 1,$$

$$y' = [\,(C_1 + C_2) + (C_2 - 1)x + \frac{x^3}{6}]e^x,$$

$$\because y'(1)=1, \qquad \therefore (C_1+2C_2-\frac{5}{6})e=1,$$

由 $\begin{cases} C_1+C_2=\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{3}, \\ C_1+2C_2=\dfrac{1}{e}+\dfrac{5}{6}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} C_1=\dfrac{2}{e}-\dfrac{1}{6}, \\ C_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{e}, \end{cases}$

所以原方程满足初始条件的特解为

$$y=[\frac{2}{e}-\frac{1}{6}+(\frac{1}{2}-\frac{1}{e})x]e^x+\frac{x^3}{6}e^x-\frac{x^2}{2}e^x.$$

例5　求解方程　$y''+4y=\frac{1}{2}(x+\cos 2x)$.

解　特征方程　$r^2+4=0$,

特征根　$r_{1,2}=\pm 2i$,

对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

设原方程的特解为　$y^*=y_1^*+y_2^*$.

(1)　设 $y_1^*=ax+b$, 则 $(y_1^*)'=a$, $(y_1^*)''=0$,

代入 $y''+4y=\frac{1}{2}x$, 得　$4ax+4b=\frac{1}{2}x$,

由 $\begin{cases} 4a = \dfrac{1}{2}, \\ 4b = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = \dfrac{1}{8}, \\ b = 0, \end{cases}$ $\therefore\ y_1^* = \dfrac{1}{8}x;$

(2) 设 $y_2^* = x(c\cos 2x + d\sin 2x),$

则 $(y_2^*)' = (c + 2dx)\cos 2x + (d - 2cx)\sin 2x,$

$$(y_2^*)'' = (4d - 4cx)\cos 2x - (4c + 4dx)\sin 2x,$$

代入 $y'' + 4y = \dfrac{1}{2}\cos 2x,$ 得

$$4d\cos 2x - 4c\sin 2x = \frac{1}{2}\cos 2x,$$

由 $\begin{cases} 4d = \dfrac{1}{2}, \\ -4c = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} c = 0, \\ d = \dfrac{1}{8}, \end{cases}$ $\therefore\ y_2^* = \dfrac{1}{8}x\sin 2x;$

故原方程的通解为

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}x\sin 2x.$$

例6 设 $y'' + p(x)y' = f(x)$ 有一特解为 $\dfrac{1}{x}$，对应的齐次方程有一特解为 x^2，试求：

(1) $p(x), f(x)$ 的表达式；

(2) 此方程的通解.

解 (1) 由题设可得：

$$\begin{cases} 2 + p(x)2x = 0, \\ \dfrac{2}{x^3} + p(x)(-\dfrac{1}{x^2}) = f(x), \end{cases}$$

解此方程组，得

$$p(x) = -\frac{1}{x}, \quad f(x) = \frac{3}{x^3}.$$

(2) 原方程为

$$y'' - \frac{1}{x}y' = \frac{3}{x^3}.$$

显见 $y_1 = 1,\ y_2 = x^2$ 是原方程对应的齐次方程的两个线性无关的特解，

又 $y^* = \dfrac{1}{x}$ 是原方程的一个特解，

由解的结构定理得方程的通解为

$$y = C_1 + C_2x^2 + \frac{1}{x}.$$

三、欧拉方程

形如

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$$

的方程(其中 $p_1, p_2 \cdots p_n$ 为常数）叫欧拉方程.

特点：各项未知函数导数的阶数与乘积因子自变量的方次数相同.

解法：欧拉方程是特殊的变系数方程，通过变量代换可化为常系数微分方程.

例1 求方程 $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}$ 的通解.

解 将方程化为 $x^2 y'' - x y' + y = 2x$ (欧拉方程)

令 $x = e^t$, 记 $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 则方程化为

$$[D(D-1) - D + 1]\, y = 2e^t$$

即 $$(D^2 - 2D + 1) y = 2e^t \qquad ②$$

特征根: $r_1 = r_2 = 1$,

设特解: $y = At^2 e^t$, 代入 ② 解得 $A = 1$, 所求通解为

$$y = (C_1 + C_2 t)e^t + t^2 e^t = (C_1 + C_2 \ln x)x + x\ln^2 x.$$

例2　求解方程　$x^2y''-3xy'-5y=x^2\ln x.$

解　这是一个欧拉方程.

令 $t=\ln x$,　　$x=e^t$,

则 $y'=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}y'_t$,

$$y''=\frac{1}{x^2}y'_t+\frac{1}{x}y''_t\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x^2}(y''_t-y'_t),$$

代入原方程得　$y''_t-4y'_t-5y=te^{2t}$,　　(1)

$$y_t'' - 4y_t' - 5y = te^{2t}, \qquad (1)$$

和(1)对应的齐次方程为

$$y_t'' - 4y_t' - 5y = 0, \qquad (2)$$

(2)的特征方程为 $r^2 - 4r - 5 = 0,$

特征根为 $r_1 = 5, \quad r_2 = -1,$

(2)的通解为 $Y = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t}.$

设(1)的特解为 $y^* = (at + b)e^{2t},$

则 $(y_1^*)' = e^{2t}(2at + a + 2b),$

$$(y^*)'' = e^{2t}(4at + 4a + 4b),$$

将 $y^*, (y^*)', (y^*)''$ 代入原方程比较系数得

$$-9at - 9b = t, \quad \therefore \quad a = -\frac{1}{9}, \quad b = 0,$$

$$y^* = -\frac{1}{9}te^{2t},$$

得(1)的通解为 $\quad y = C_1e^{5t} + C_2e^{-t} - \frac{1}{9}te^{2t}.$

故原方程的通解为

$$y = C_1x^5 + \frac{C_2}{x} - \frac{1}{9}x^2\ln x.$$

4.3　综合习题讲解

一、竞赛真题选讲(含部分省市)

1. 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足初始条件 $y(1) = 2$ 的特解为 $\underline{\quad xy=2 \quad}$.

分析 直接积分即可.

解 原方程可化为 $(xy)' = 0$, 积分得 $xy = C$,

代入初始条件得$C=2$, 故所求特解为 $xy=2$.

注 本题属基本题型, 也可先变量分离再积分求解.

2. (1) 求解微分方程 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - xy = xe^{x^2}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

(2) 如 $y = f(x)$ 为上述方程的解，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

2012决赛

分析 先求一阶线性非齐次微分方程的解，套用公式即可；第二问具有难度.

2. (1) 求解微分方程 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - xy = xe^{x^2}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

解 (1) $y = e^{\int x\mathrm{d}x}\left(\int xe^{x^2} e^{\int -x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)$

$$= e^{\frac{1}{2}x^2}\left(\int xe^{\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x + C\right) = e^{x^2} + Ce^{\frac{1}{2}x^2}.$$

代入初始条件得 $C = 0$. 因此微分方程的解为

$$y = e^{x^2}.$$

(2) 证明: $$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

证 因为 $$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\arctan n = \frac{\pi}{2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1} e^{x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}(e^{x^2}-1)\mathrm{d}x + \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}\mathrm{d}x$$

$=\frac{\pi}{2}$

$0=?$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}(e^{x^2}-1)=0$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0,$ 当 $0<x<\delta$ 时, 恒有 $|e^{x^2}-1|<\frac{1}{\pi}\varepsilon.$

因此 $\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}(e^{x^2}-1)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\delta} \frac{n}{n^2x^2+1}(e^{x^2}-1)\mathrm{d}x+\int_{\delta}^1 \frac{n}{n^2x^2+1}(e^{x^2}-1)\mathrm{d}x$$

$$\le \frac{1}{\pi}\varepsilon\int_0^{\delta} \frac{n}{n^2x^2+1}\mathrm{d}x+(e-1)\int_{\delta}^1 \frac{n}{n^2x^2+1}\mathrm{d}x$$

$$\le \frac{1}{2}\varepsilon+(e-1)\frac{n}{n^2\delta^2+1}(1-\delta)\le \frac{1}{2}\varepsilon+(e-1)\frac{n}{n^2\delta^2+1}$$

由于 $\lim\limits_{n\to 0}\frac{n}{n^2\delta^2+1}=0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathrm{N}$, 当 $n>N$ 时, 恒有

$$\therefore \int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}(e^{x^2}-1)\mathrm{d}x<\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon.$$

3. 微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{2}(\dfrac{y}{x})^3$满足 $y\big|_{x=1}=1$

的特解为________________.

分析 齐次方程，先变量替换，再直接积分即可.

解 作变量代换 $\dfrac{y}{x}=u$, 则 $\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$,

代入原方程得

$$u+x\frac{du}{dx}=u-\frac{1}{2}u^3. \Rightarrow \frac{du}{u^3}=-\frac{1}{2x}dx$$

积分并代入初始条件得 $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+\ln x}}$.

4. 微分方程$xy' + y = 0$满足$y(1) = 1$的解为$\underline{\quad y = \dfrac{1}{x} \quad}$.

分析 直接套用可变量分离方程即可.

解 由

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-y}{x}, \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{-y} = \frac{\mathrm{d}x}{x}, \Rightarrow -\ln|y| = \ln|x| + C$$

又 $y(1) = 1$, 所以

$$y = \frac{1}{x}.$$

5. 设曲线$y=f(x)$，其中$f(x)$是可导函数，且$f(x)>0$，已知曲线$y=f(x)$与直线$y=0$，$x=1$及$x=t$ $(t>1)$所围成的曲边梯形绕x轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的πt倍,求该曲线的方程.

分析 定积分几何应用，变限积分与一阶微分方程问题

解 依题意知

$$\pi\int_1^t f^2(x)\,\mathrm{d}x=\pi t\int_1^t f(x)\,\mathrm{d}x,$$

两边对t求导数可得 $f^2(t)=\int_1^t f(x)\,\mathrm{d}x+tf(t),$

$$f^2(t)=\int_1^t f(x)\mathrm{d}x+tf(t),$$

令t=1得f(1)=1或f(1)=0(舍去). 再求导得到

$$2f(t)f'(t)=2f(t)+tf'(t),$$

令$f(t)=y$,则

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}+\frac{1}{2y}t=1,$$

因此 $t=\dfrac{C}{\sqrt{y}}+\dfrac{2}{3}y$. 代入$t$=1, y=1得C =1/3.

故所求的曲线方程为 $t=\dfrac{1}{3\sqrt{y}}+\dfrac{2}{3}y.\Rightarrow x=\dfrac{1}{3\sqrt{y}}+\dfrac{2}{3}y.$

6. 设y_1,y_2是非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的两个特解，若常数λ,μ使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解 $\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，则 (A)

(A) $\lambda=\frac{1}{2},\mu=\frac{1}{2}$. (B) $\lambda=-\frac{1}{2},\mu=-\frac{1}{2}$.

(C) $\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{1}{3}$. (D) $\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{2}{3}$.

分析 利用一阶线性微分方程解的结构即可.

7. 微分方程 $y''-(y')^3=0$的通解是____ ______。 2016决赛

分析 考查可降阶微分方程的求解方法.

解 令 $y'=p(x)$，则 $y''=p'$，代入方程，得

$$p'-p^3=0 \xrightarrow{\text{分离变量}} \frac{\mathrm{d}p}{p^3}=\mathrm{d}x.$$

积分得 $-\frac{1}{2}p^{-2}=(C_1-x)$即 $p=y'=\pm\frac{1}{\sqrt{2(C_1-x)}}$.

两端积分,得

$$y=\frac{C_1}{2}x^2+C_2\text{,即 } p=y'=\pm\frac{1}{\sqrt{2(C_1-x)}}.$$

二、考研真题选讲 (数学一)

04 (4分) 欧拉方程 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+4x\dfrac{dy}{dx}+2y=0(x>0)$

的通解为 $\underline{\quad y=\dfrac{c_1}{x}+\dfrac{c_2}{x^2}\quad}$.

分析 欧拉方程的求解有固定方法，作变量代换

$$x=e^t,$$

化为常系数线性齐次微分方程即可。

04 (11分) 某种飞机在机场降落时，为了减少滑行距离，在触地的瞬间，飞机尾部张开减速伞，以增大阻力，使飞机迅速减速并停下.现有一质量为9000kg的飞机，着陆时的水平速度为700km/h. 经测试，减速伞打开后，飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比（比例系数为 $k=6.0\times10^{6}$). 问从着陆点算起，飞机滑行的最长距离是多少？ 注kg表示千克，km/h表示千米/小时.

分析 本题是标准的牛顿第二定理的应用，

列出关系式后再解微分方程即可。

解 根据牛顿第二定律，得 $m\dfrac{dv}{dt}=-kv,$

所以 $\dfrac{dv}{v}=-\dfrac{k}{m}dt.$ 两端积分得通解 $v=Ce^{-\frac{k}{m}t},$

代入初始条件 $v\big|_{t=0}=v_0.$ 故 $v(t)=v_0e^{-\frac{k}{m}t}.$

飞机滑行的最长距离为

$$x=\int_0^{+\infty}v(t)dt=-\frac{mv_0}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\bigg|_0^{+\infty}=\frac{mv_0}{k}=1.05(km).$$

注 本题求飞机滑行的最长距离，可理解为$t\to+\infty$或

$v(t)\to 0$的极限值，这种条件应引起注意.

05 (4 分)微分方程$xy' + 2y = x\ln x$满足$y(1) = -\frac{1}{9}$的解为$\underline{y = \frac{1}{3}x\ln x - \frac{1}{9}x}$.

分析 直接套用一阶线性微分方程

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

的通解公式

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right],$$

再由初始条件确定任意常数即可.

06 (4分)微分方程$y' = \dfrac{y(1-x)}{x}$的通解为$\underline{y = Cx\mathrm{e}^{-x}(x \neq 0)}$.

分析 本方程为可分离变量型.

先分离变量，然后两边积分即可.

07 (4分) 二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$$

的通解为 $\underline{\quad y = C_1e^{x} + C_2e^{3x} - 2e^{2x} \quad}$.

解 特征方程为 $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$，解得 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3.$

则对应齐次线性微分方程的通解为 $y = C_1e^{x} + C_2e^{3x}.$

设非齐次线性微分方程的特解为 $y^* = ke^{2x},$

代入非齐次方程可得 $k = -2.$

08 (4 分) 在下列微分方程中，以

$$y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$$

$(C_1, C_2, C_3$ 为任意常数$)$为通解的是 (D)

(A) $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0.$ (B) $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0.$

(C) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0.$ (D) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0.$

分析 由题设可知方程的特征根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm 2i.$

故特征方程为 $(\lambda - 1)(\lambda + 2i)(\lambda - 2i) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 4) = 0$

$$= \lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0.$$

08 (4 分)微分方程$xy' + y = 0$满足$y(1) = 1$的解为$\underline{\quad y=\dfrac{1}{x}\quad}$.

分析 直接套用可变量分离方程即可.

解 由

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}, \quad \Rightarrow \frac{dy}{-y} = \frac{dx}{x}, \Rightarrow -\ln|y| = \ln|x| + C$$

又 $y(1) = 1$, 所以

$$y = \frac{1}{x}.$$

09 (4 分) 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$,则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2,y'(0)=0$ 的解为________.

解 由题设知二阶常系数线性齐次微分方程的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=1,$$

故要求解的微分方程为 $y''-2y'+y=x$，设特解为

$y^*=Ax+B$, 代入微分方程得 $A=1,B=2,$

代入初始条件得要求的解为 $y=x(1-e^x)+2.$

10 (10分) 求微分方程 $y'' - 3y' + 3y = 2xe^x$ 的通解.

解　特征方程 $r^2 - 3r + 2 = 0$,　特征根 $r_1 = 1, r_2 = 2$,

对应的齐次方程的通解为 $Y = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

设原方程的特解为 $y^* = x(ax + b)e^x$,　则

$$(y^*)' = [ax^2 + (2a + b)x + b]e^x,$$

$$(y^*)'' = [ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b]e^x,$$

代入原方程得 $a = -1$,　$b = -2$,

故原方程的通解为 $y = C_1e^x + C_2e^{2x} - x(x + 2)e^x$.