第一章　函数与极限

主要内容

重点、热点　　求极限。

求函数的极限是竞赛中没法逃避的坎。

本章的另一块内容判断函数是否连续，其实质仍是求

函数极限。

所以本章只要抓住了极限就基本上把握了全章的

核心内容，

求极限的方法很多但在考试中常用的主要有:

1、利用极限的四则运算法则求极限；

（这是求极限的最基本知识）

2、利用两个重要极限求极限；

3、利用罗必达法则求极限；

（求关于函数的未定式的极限）

4、利用无穷小替换；

（它往往在求极限的过程中使用能使问题简化）

5、利用夹逼定理

6、利用单调有界准则；

（主要求通项由递推公式给出的极限）

7、利用定积分定义；

（主要求通项是n项和的数列的极限）

8、利用导数定义求极限；

（主要用于已知条件中给出函数在一点可导

求关于该函数的某个极限）

9、利用连续函数的性质；

（这一条不会单独命题，但它常用在求极限的过程中，是求极限的基础知识）

10、利用极限与无穷小的关系.

（主要用于已知极限，求另一形式的极限）

常考题型

1. 求分段函数的复合函数；

2. 求极限或已知极限确定原式中的常数；

3. 讨论函数的连续性，判断间断点的类型；

4. 无穷小阶的比较；

5. 讨论连续函数在给定区间上零点的个数，

或确定方程在给定区间上有无实根。

特别需要强调的知识点：

1、两个重要极限

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1$$

(2) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \qquad \lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \qquad \lim_{\square\to 0}[1+\square]^{\frac{1}{\square}}=e.$$

注 $\square$代表相同的表达式

2、等价无穷小的性质

定理 (等价无穷小替换定理)

若 $\alpha \sim \gamma$, $\beta \sim \lambda$, 且 $\lim \frac{\beta}{\alpha}$ 存在，则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\lambda}{\gamma}.$$

3、极限与无穷小的关系

$$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x) \quad \alpha(x) \to 0.$$

4、几个常用的基本等式　(在保障有意义的前提下)

$$y \equiv e^{\ln y}$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

$$o(x) = o(ax) \quad (a \neq 0).$$

$$o(x^{k+m}) + \cdots + o(x^{k+1}) + o(x^k) = o(x^k).$$

1.1 函数

一、有关函数的四种性质

(奇偶性、单调性、周期性、有界性)

例1 求 $I=\int_{-1}^{1} x[x^5+(e^x-e^{-x})\ln(x+\sqrt{x^2+1})]dx.$

解 $f_1(x)=e^x-e^{-x}$ 是奇函数，

$$\because \quad f_1(-x)=e^{-x}-e^x=-f_1(x),$$

$f_2(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数，

$$\because \quad f_2(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2-1})=\ln\frac{(x^2+1)-x^2}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$\because \quad f_2(-x) = \ln(-x+\sqrt{x^2-1}) = \ln\frac{(x^2+1)-x^2}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \ln 1 - \ln(x+\sqrt{x^2+1}) = -f_2(x).$$

因此 $x(e^x - e^{-x})\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数。

于是

$$I = \int_{-1}^{1} x[x^5 + (e^x - e^{-x})\ln(x+\sqrt{x^2+1})]dx.$$

$$= \int_{-1}^{1} x^6 dx + 0 = 2\int_0^1 x^6 dx = \frac{2}{7}.$$

例 2 设$F'(x) = f(x)$，则下列结论正确的是(**A**)

(A)若$f(x)$为奇函数，则$F(x)$为偶函数。

(B)若$f(x)$为偶函数，则$F(x)$为奇函数。

(C)若$f(x)$为周期函数，则$F(x)$为周期函数。

(D)若$f(x)$为单调函数，则$F(x)$为单调函数。

解 (B)不成立，反例 $f(x) = x^2, F(x) = \dfrac{x^3}{3} + 1$

(C)不成立，反例 $f(x) = \cos x + 1, F(x) = \sin x + x$

(D)不成立，反例 $f(x) = 2x, F(x) = x^2$在$(-\infty, +\infty)$内

(A)成立。

证明 $F(x)=F(0)+\int_0^x f(t)dt$, f 为奇函数,

$$F(-x)=F(0)+\int_0^{-x} f(t)dt$$

$$=F(0)+\int_0^{x} f(-u)d(-u)$$

$$=F(0)+\int_0^{x} f(u)du=F(x).$$

所以,$F(x)$为偶函数。

二、有关复合函数

1. 已知 $f(x)$，$g(x)$求 $f[g(x)]$

2. 已知 $f[g(x)]$和$g(x)$，求 $f(x)$

例 1 已知

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & x \le a \\ f_2(x) & x > a \end{cases} \text{ 和 } g(x)=\begin{cases} g_1(x) & x \le b \\ g_2(x) & x > b \end{cases},$$

求 $f[g(x)]$

例 1 已知

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & x\le a \\ f_2(x) & x>a \end{cases} \text{ 和 } g(x)=\begin{cases} g_1(x) & x\le b \\ g_2(x) & x>b \end{cases},$$

求 $f[g(x)]$

解 当$x\le b$，$g_1(x)\le a$时，$f[g(x)]=f_1[g_1(x)]$,

当$x>b$，$g_2(x)\le a$时，$f[g(x)]=f_1[g_2(x)]$,

当$x\le b$，$g_1(x)>a$时，$f[g(x)]=f_2[g_1(x)]$,

当$x>b$，$g_2(x)>a$时，$f[g(x)]=f_2[g_2(x)]$,

即

$$f[g(x)]=\begin{cases} f_1[g_1(x)] & \text{当}x\le b,\ g_1(x)\le a\text{时},\\ f_1[g_2(x)] & \text{当}x> b,\ g_2(x)\le a\text{时},\\ f_2[g_1(x)] & \text{当}x\le b,\ g_1(x)> a\text{时},\\ f_2[g_2(x)] & \text{当}x> b,\ g_2(x)> a\text{时}.\end{cases}$$

例 3 设函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ 0, & 0\text{为无理数}\end{cases}$，则 $D[D(x)]=$ ___1___ .

分析 函数$D(x)$的函数值是有理数1或0，所以$D[D(x)]\equiv 1$.

例 2 已知 $f'(e^x)=xe^{-x}$，且 $f(1)=0$，求 $f(x)$.

解 令 $e^x=t$，则 $x=\ln t$. 因此

$$f'(e^x)=f'(t)=\frac{\ln t}{t}.$$

于是

$$f(x)-f(1)=\int_1^x \frac{\ln t}{t}dt=\frac{1}{2}\ln^2 t\Big|_1^x=\frac{1}{2}\ln^2 x.$$

所以

$$f(x)=\frac{1}{2}\ln^2 x.$$

三、求函数表达式

例1 已知 $f(x)$ 是周期为π的奇函数，且当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$时，$f(x)=\sin x-\cos x+2$，则当 $x\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$时，$f(x)=$ ______.

解 当$x\in(-\dfrac{\pi}{2},0)$时，有

$$f(x)=-f(-x)=-(\sin(-x)-\cos(-x)+2)=\sin x+\cos x-2.$$

且$f(0)=0$. 当 $x\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$时，有

$$f(x)=f(x-\pi)=\sin(x-\pi)+\cos(x-\pi)-2$$

$$=-\sin x-\cos x-2.$$

1.2 极限

一、数列与函数极限的存在准则

(1)夹逼准则；　(2)单调有界收敛准则

例 1　设

$$x_1 = 2, x_2 = 2 + \frac{1}{x_1}, \cdots, x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}, \cdots.$$

求证 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求其值.

分析 给定数列的奇数项子列单调增加有上界，偶数项子列单调减少有下界，因此两子列均收敛．对于这种数列仍可应用单调有界准则.

$$x_1 = 2, x_2 = 2 + \frac{1}{x_1}, \cdots, x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}, \cdots.$$

解 首先易见 $2 \le x_n < 3$， 又计算可得

$$x_{n+2} - x_n = \frac{1}{x_{n-1}x_{n+1}}(x_{n-1} - x_{n+1}), n = 2,3,\cdots,$$

$$x_3 - x_1 > 0, \qquad x_4 - x_2 < 0,$$

因此 $x_{n+2} - x_n$ 与 $x_{n+1} - x_{n-1}$ 异号，子列 $\{x_{2n}\}$ 单调减少有下界 2，子列 $\{x_{2n-1}\}$ 单调增加有上界 3，所以两子列均收敛，然后由递推式

$$x_{2n+1}=2+\frac{1}{x_{2n}}=2+\frac{x_{2n-1}}{1+2x_{2n-1}},$$

两端取极限得

$$\lim_{n\to\infty}x_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}x_{2n}=1+\sqrt{2},$$

由此得到

$$\lim_{n\to\infty}x_n=1+\sqrt{2}\ .$$

注：此题还可利用极限的定义来证.

命题 1.1 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = a$.

命题 1.2 设$0 \le r < 1$,对$\forall n \in \mathrm{N}$有$|x_{n+1} - a| \le r|x_n - a|$,$a$为常数，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

例 2 设$x_0 > 0, x_{n+1} = \dfrac{2(1 + x_n)}{2 + x_n}, n \in \mathrm{N}$,求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 因为 $x_n > 0, n \in \mathrm{N}$. 又因

$$|x_{n+1} - \sqrt{2}| = \left|\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + x_n}\right| |x_n - \sqrt{2}| < \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{2}|,$$

据命题1.2得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$.

二、幂指函数 $f(x)=u(x)^{v(x)}$ 的极限

命题 1.3 在某变化过程中,函数 $f(x)$为无穷小量, $g(x)$为无穷大量， $\lim f(x)g(x)=b$, 则

$$\lim[1+f(x)]^{g(x)}=\mathrm{e}^{b}.$$

命题 1.4 在某变化过程中， $f(x)$与 $g(x)$， $F(x)$与 $G(x)$均为等价无穷小(大),且 $f(x)>0, g(x)>0$,

$$\lim g(x)^{G(x)}=A(0<A\leq+\infty),$$

则 $\lim f(x)^{F(x)}=A.$

例 1 计算极限$\lim\limits_{x\to1-}(1-x)^{\ln x}$.

解 令 $y=\dfrac{1}{1-x}$, 则

$$\ln x=\ln\left(1-\frac{1}{y}\right)\sim-\frac{1}{y},$$

因此根据命题1.4可得

$$\lim_{x\to1-}\ln(1-x)^{\ln x}=-[\lim_{y\to+\infty}(-\frac{1}{y})\cdot\ln y]=0,$$

故原式=1.

三、用洛必达法则与泰勒展开式计算极限

应用洛必达法则之前应注意:

(1)先判断极限是否$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型;

(2)通过分解、变量的等价替换、析出可成为

常数的变量等整理和化简,以便于计算导数;

(3)可重复上述步骤.

应用泰勒展开式时需注意分子与分母展开的阶数

为各自主部的阶数.

例1 设函数$f(x)$有连续的二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$,

$f''(0)=4$,求$\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

解 因

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{f(x)}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=2\ ,$$

因此利用命题1.3的结论有

$$\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^2.$$

例 2 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$为（ C ）

(A) 0． (B) 6． (C) 36． (D) ∞.

解 用$\sin 6x$的泰勒展开式， 知应选： C．

$$\sin 6x = 6x - \frac{1}{3!}(6x)^3 + o\left(x^4\right),$$
$$\sin 6x + xf(x) = o\left(x^3\right),$$
$$\Rightarrow f(x) = -6 + 36x^2 + o\left(x^3\right).$$

注 由于$f(x)$无可微条件, 此题不能用洛必达法则．

例3 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

解 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln x^x}$

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}}} = e^0 = 1$$

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\frac{1}{4}\sin^2 2x}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\frac{4}{4}\sin 2x\cos 2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{4}\sin 4x}{2x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{12x}=\frac{4}{3}.$$

例 5　设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$, 求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t}.$$

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}$　(分母令 $x-t=u$)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u+xf(x)}$$ (应用洛必达法则)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + xf(x) - xf(x)}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u + xf(x)}$$ (应用洛必达法则)

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\(\xi\to 0)}}\frac{xf(\xi)}{xf(\xi)+xf(x)}$$

(用积分中值定理:

ξ在0和x之间)

$$=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\frac{1}{2}.$$

四、无穷小、无穷大量阶的比较

(1) 当正整数$n\to\infty$时,以下各无穷大数列的阶由低到高排列为:

$$\log_a n, n^{\alpha}, n^{\beta}(0<\alpha<\beta), a^{n}(a>1), n!, n^{n}.$$

(2) 当实数$x\to+\infty$时，以下各无穷大量的阶由低到高排列为：

$$\log_a x, x^{\alpha}, x^{\beta}(0<\alpha<\beta), a^{x}(a>1), x^{x}.$$

(3) 当$x\to 0$时，下列各无穷小量

$$\sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \ln(1+x) \sim e^{x}-1 \sim x,$$

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^{2},$$

$$a_0x^k + a_1x^{k+1} + \cdots + a_kx^{k+n} \sim a_0x^k (a_0 \neq 0, k>0).$$

例1 设当$x\to 0$时$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是比$x\sin x^n$高阶的无穷小，而$x\sin x^n$是比$\left(e^{x^2}-1\right)$高阶的无穷小，则正整数n等于(B)

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

例2 设 $\alpha(x)=\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t, \beta(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t$

则当$x\to 0$时，$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 (C).

(A) 高阶无穷小　　(B) 低阶无穷小

(C)同阶但不等价的无穷小　　(D) 等价无穷小

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5}{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\cdot\cos x}=\frac{5}{e}.$$

五、有关两个重要公式

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1$$

(2) $$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e \qquad \lim_{\square\to\infty}(1+\frac{1}{\square})^{\square}=e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \qquad \lim_{\square\to 0}[1+\square]^{\frac{1}{\square}}=e.$$

注　□代表相同的表达式

例1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$

$$\because\ \left(\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=1\right)$$

解 当x=0时，原式=1. 当x≠0时，

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\cdots$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$

例 2 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=e$，

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$，求 c 的值。

解
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{c}{x}\right)^x}{\left(1-\dfrac{c}{x}\right)^x}=\frac{e^c}{e^{-c}}=e^{2c}.$$

则拉格朗日中值定理，有

$$f(x)-f(x-1)=f'(\xi)[x-(x-1)]=f'(\xi).$$

其中 ξ 介于 $(x-1)$ 与 x 之间，那么

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)] = \lim_{\substack{x\to\infty \\ (\xi\to\infty)}} f'(\xi) = e.$$

于是 $e^{2c}=e$, 则$2c=1$, 即

$$c = \frac{1}{2}.$$

例3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,b>0,c>0)$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}\cdot\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}}$$

$$\because \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}}=e,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1+b^x-1+c^x-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1+b^x-1+c^x-1}{x}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{c^x-1}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)=\frac{1}{3}\ln(abc).$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{3}\ln(abc)}=\sqrt[3]{abc}.$$

注：首届全国大学生数学竞赛决赛试题如下：

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^{n}\quad(a>0,b>0,c>0)$.

同理 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^{n}=\sqrt[3]{abc}$.

六、求分段函数的极限

例1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1.$

解 $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{-x}\right)=2-1=1,$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1.$$

七、用导数定义求极限

例 1 设曲线 $y = f(x)$ 与 $y = \sin x$ 在原点相切，

求 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\dfrac{2}{n}\right)$.

解 由题设可知

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = (\sin x)'|_{x=0} = 1.$$

于是

$$\lim_{x\to\infty} nf\left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 2\cdot\frac{f\left(\dfrac{2}{n}\right) - f(0)}{\dfrac{2}{n} - 0} = 2f'(0) = 2.$$

例 2 设函数 $f(x)$ 在点 a 可导，$\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 为趋于 0 的正数数列，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(a+\alpha_n)-f(a-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}$.

解 原式

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(a+\alpha_n)-f(a)}{\alpha_n}\cdot\frac{\alpha_n}{\alpha_n+\beta_n}+\frac{f(a-\beta_n)-f(a)}{-\beta_n}\cdot\frac{\beta_n}{\alpha_n+\beta_n}\right]$$

令

$$\frac{f(a+\alpha_n)-f(a)}{\alpha_n}=f'(a)+t_n,$$

$$\frac{f(a-\beta_n)-f(a)}{-\beta_n}=f'(a)+s_n,$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\lim\limits_{n\to\infty}s_n=0$,

于是

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left[f'(a)+\frac{\alpha_n t_n+\beta_n s_n}{\alpha_n+\beta_n}\right],$$

且

$$0\le\left|\frac{\alpha_n t_n+\beta_n s_n}{\alpha_n+\beta_n}\right|\le\frac{\alpha_n|t_n|}{\alpha_n+\beta_n}+\frac{\beta_n|s_n|}{\alpha_n+\beta_n}\le|t_n|+|s_n|\to 0(n\to\infty)$$

所以原式$=f'(a)$.

八、用定积分定义求极限

公式：$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$ （函数$f(x)$连续）

例1 求 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$

分析 如果还想用夹逼定理中方法来考虑

$$\frac{n^2}{n^2+n^2}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}\le\frac{n^2}{n^2+1}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n^2}=\frac{1}{2}\qquad\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1^2}=1$$

由此可见，无法再用夹逼定理，

因此我们改用定积分定义来考虑。

解 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\,\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

例2 求 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}=\frac{2}{\pi}$.

夹逼定理

2015年预赛

解 因为

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x dx=\frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n})=\frac{2}{\pi}$$

例3 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{e^{\frac{k}{n}}}{n+ne^{\frac{2k}{n}}}=$ ________.

解 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{e^{\frac{k}{n}}}{1+e^{\frac{2k}{n}}}\right)=\int_0^1\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

$$=\arctan e^x\Big|_0^1=\arctan e-\frac{\pi}{4}.$$

数列极限普通方法难有成效时，可考虑转化为定积分

九、求极限的反问题

例1 设 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{\sin(x^2-1)}=3$，求$a$和$b$.

解 由题设可知 $\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax+b)=0\Rightarrow$ $1+a+b=0$

再对极限用洛必达法则

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{\sin(x^2-1)}=\lim_{x\to1}\frac{2x+a}{2x\cos(x^2-1)}=\frac{2+a}{2}=3$$

因此

$$a=4,b=-5.$$

例 2 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可导，$f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

且满足 $\lim\limits_{h\to 0}[\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}]^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{x}}$，求 $f(x)$.

解 先用幂指函数处理方法

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}} = e^{\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}[\ln f(x+hx)-\ln f(x)]}$$

再用导数定义

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

取 $F(x)=\ln f(x)$, $\Delta x = hx$

于是

$$\lim_{h\to 0}\frac{x}{hx}[\ln f(x+hx)-\ln f(x)]=x[\ln f(x)]'$$

因此

$$e^{x[\ln f(x)]'}=e^{\frac{1}{x}}$$

所以 $x[\ln f(x)]'=\dfrac{1}{x}\quad\Rightarrow[\ln f(x)]'=\dfrac{1}{x^2}$

$$\Rightarrow\ln f(x)=-\frac{1}{x}+C_1\quad\Rightarrow f(x)=Ce^{-\frac{1}{x}}.$$

再由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1,\Rightarrow C=1.$ 则 $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}.$

例3 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}, & x<0\\ \dfrac{1}{x}[\ln x-\ln(x+x^2)], & x>0\end{cases}$

当$x\to0$时的极限存在,求a的值 .

解 $f(0-)=-\sqrt{2}a,\qquad f(0+)=-1,\qquad$ 故$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\frac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}\to\frac{ax}{\sqrt{\frac{1}{2}x^2}}\to-\sqrt{2}a$$

$$\frac{1}{x}[\ln x-\ln(x+x^2)]=-\frac{1}{x}\ln\left(1+x\right)\to-1$$

例4 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1, \\ ax+b, & x>1. \end{cases}$$

为了使函数$f(x)$在x=1处连续且可导, a, b应取什么值?

解 因为 $f(1^-)=1,\quad f(1^+)=a+b,\quad f(1)=1,$

所以要使函数在x=1处连续, 必须$a+b=1$.

又因为当$a+b=1$时 $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2,$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax+b-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{a(x-1)+a+b-1}{x-1}=a,$$

所以要使函数在x=1处可导, 必须$a=2$, 此时$b=-1$.

十、补充两个的定理

Heine 定理(归结原则) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$的充要条件为：

对于任何$x_n\to a(n\to\infty)$,都有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A.$$

Stolz 定理　设数列$\{b_n\}$单调增加且$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=+\infty$,如果

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$存在或为$\pm\infty$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}.$$

注：Stolz定理也称为数列极限的罗必达法则.

例1 设 $x_n > 0(n=1,2,\cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=a$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$.

解 恒等变形可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln\sqrt[n]{x_n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln x_n}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln x_n}{n}},$$

利用Stolz定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x_n-\ln x_{n-1}}{n-(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{x_n}{x_{n-1}}=\ln a,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln a}=a.$$

例2 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(n!)^{\frac{1}{n}}$

解 设 $x_n=\dfrac{n!}{n^n}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\mathrm{e}^{-1}.$$

因此由上例的结论可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(n!)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\mathrm{e}^{-1}.$$

1.3　连续

一、函数的连续性, 函数的间断点及其分类

例 1 设 $f(x)$，$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，$f(x)$为连续，且$f(x)\neq 0$, $g(x)$有间断点，则下列函数中必有间断点为

(A) $g[f(x)]$;　　(B) $[g(x)]^2$;

(C) $f[g(x)]$;　　(D) $\dfrac{g(x)}{f(x)}$.

解 (A)，(B)，(C)不成立可用反例

$$f(x)\equiv 1,\qquad g(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

(D)成立. 可用反证法：假若不然

$$\frac{g(x)}{f(x)} = h(x)$$

没有间断点，那么

$$g(x) = f(x) \cdot h(x)$$

为两个连续函数乘积，一定连续. 故矛盾，

所以$\dfrac{g(x)}{f(x)}$一定有间断点.

例 2　求 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$ 的间断点，并判别其类型。

解　$x\neq k\pi$，考虑 $\ln f(x)=\lim\limits_{t\to x}\dfrac{x}{\sin t-\sin x}\ln\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)$

$$=\lim_{t\to x}\frac{x}{\cos t}\cdot\frac{\sin x}{\dfrac{\sin t}{\sin x}}=\frac{x}{\sin x}.$$

所以 $f(x)=e^{\frac{x}{\sin x}}(x\neq k\pi)$

可见 $x=k\pi$ 为间断点，$x=0$ 是可去间断点，

其它皆为第二类间断点。

例 3 求函数 $f(x)=(1+x)^{x/\tan(x-\frac{\pi}{4})}$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内的间断点,并判断其类型. **(1998 研招二)**

解 $f(x)$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内的间断点是使 $\tan(x-\dfrac{\pi}{4})$ 为0或∞的点,即 $x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4},\ \dfrac{7\pi}{4}.$ 因为

$$f(\frac{\pi}{4}+)=+\infty,\quad f(\frac{5\pi}{4}+)=+\infty,\quad \lim_{x\to\frac{3\pi}{4}} f(x)=\lim_{x\to\frac{7\pi}{4}} f(x)=1$$

故 $\dfrac{\pi}{4}$ 与 $\dfrac{5\pi}{4}$ 是第二 类(无穷)间断点,

$\dfrac{3\pi}{4}$ 与 $\dfrac{7\pi}{4}$ 是第一类(可去)间断点.

例4 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\ge 0, \\ x-2, & x<0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x+2) = 2 = f(0),$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x-2) = -2 \ne f(0),$

右连续但不左连续，

故函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续.

例5 当a取何值时,

函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ a+x, & x\geq 0,\end{cases}$ 在$x=0$处连续.

解 $\because f(0)=a,$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\cos x=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(a+x)=a,$$

要使 $f(0-0)=f(0+0)=f(0),\quad\Rightarrow a=1,$

故当且仅当 $a=1$时, 函数 $f(x)$在$x=0$处连续.

二、闭区间上连续函数的性质

重点为介值定理及其推论

关于根的存在性证明问题,一般考虑三种方法:

(1) 直接运用最大值最小值定理与介值定理;

(2) 先将结论(或满足条件的等式)中的ξ(或根)换成变量x,再移项使一边为0,令另一边的函数为辅助函数$F(x)$,然后运用零点定理导出结论;

(3) 用反证法证明.

注　零点定理是介值定理的特殊情况,

换言之,

能用介值定理证明的命题也能用零点定理证明,

而后者具有某种规范性,比较容易掌握.

例 1 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,且$f\left[f(x)\right]=x$,证明在$(-\infty,+\infty)$内至少有一个x_0满足$f(x_0)=x_0$.

证 任取一点a,若$f(a)=a$, 则已满足要求. 现设

$$f\left(a\right)=b\neq a,$$

我们有$f(b)=a$. 则函数$g\left(x\right)=f\left(x\right)-x$连续, 且

$g\left(a\right)=b-a$与$g\left(b\right)=a-b$异号, 根据介值定理,

在a与b之间至少有一点x_0, 使得

$$g\left(x_0\right)=0.$$

即 $f(x_0)=x_0$.

例 2 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$，求证：存在 $\xi\in[0,2]$，使 $f(\xi)=1$。

证 因为 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，故有最大值 M 和最小值 m，

于是

$$m\le\frac{1}{3}[f(0)+f(1)+f(2)]\le M$$

根据介值定理，存在 $\xi\in[0,2]$ 使

$$f(\xi)=\frac{1}{3}[f(0)+f(1)+f(2)],$$

所以

$$f(\xi)=1.$$

例3 证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一根.

证 令 $f(x)=x^3-4x^2+1$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,

又 $f(0)=1>0$, $f(1)=-2<0$, 由零点定理,

$\exists\,\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=0$, 即 $\xi^3-4\xi^2+1=0$,

$\therefore$ 方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一根 ξ.

例4 设$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续,且$f(0)=f(1)$,

证明必有一点$\xi\in[0,1]$使得$f(\xi+\frac{1}{2})=f(\xi)$.

证明 令 $F(x)=f(x+\frac{1}{2})-f(x)$,

则 $F(x)$在$[0,\frac{1}{2}]$上连续.

$\because F(0)=f(\frac{1}{2})-f(0)$, $\quad F(\frac{1}{2})=f(1)-f(\frac{1}{2})$,

讨论: 若$F(0)=0$, 则 $\xi=0$, $\quad f(0+\frac{1}{2})=f(0)$;

若$F(\frac{1}{2})=0$, 则 $\xi=\frac{1}{2}$, $\quad f(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})$;

若$F(0)\neq 0, F(\frac{1}{2})\neq 0,$ 则

$$F(0)\cdot F(\frac{1}{2}) = -[f(\frac{1}{2})-f(0)]^2 < 0.$$

由零点定理知，$\exists \xi \in (0,\frac{1}{2}),$ 使$F(\xi)=0.$

即 $f(\xi+\frac{1}{2}) = f(\xi)$成立.

综上，必有一点$\xi \in [0,\frac{1}{2}] \subset [0,1],$

使 $f(\xi+\frac{1}{2}) = f(\xi)$ 成立.

例5 设$f(x)$在闭区间[0,1]上连续, $f(0)=f(1)$, 证明: 对于任意给定的整数$n>1$,必存在 $\xi\in[0,1)$使得

$$f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{n}).$$

此例是上例的推广

证明 令 $F(x)=f(x+\frac{1}{n})-f(x)$, 则 $F(x)$在$[0,1-\frac{1}{n}]$上连续.

反证 假定$F(x)$在$[0,1-\frac{1}{n}]$上不变号, 则

$$F(\frac{k}{n})=f(\frac{k+1}{n})-f(\frac{k}{n}),k=0,1,\cdots,n-1,\text{同号},$$

各式相加得$f(1)-f(0)\neq 0$, 此矛盾说明$F(x)$在$[0,1-\frac{1}{n}]$上变号.

例6. 设$n>1$为整数，　　　　**2010年决赛**

$$F(x)=\int_0^x e^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)\mathrm{d}t.$$

证明：方程 $F(x)=\frac{n}{2}$ 在 $(\frac{n}{2},n)$ 内至少有一个根.

分析 零点存在定理成立的条件.

证 因为

$$e^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)<e^{-t}e^{t}=1. \Rightarrow F\left(\frac{n}{2}\right)<\int_0^{\frac{n}{2}}\mathrm{d}t=\frac{n}{2}.$$

$$F(x)=\int_0^x e^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)\mathrm{d}t.$$

下面只需证明 $F(n)>\frac{n}{2}$ 即可。　设

$$I_k=\int_0^n \frac{t^k}{k!}e^{-t}\mathrm{d}t \quad (k=0,1,2,\cdots,n).$$

则

$$I_k=\int_0^n \frac{t^k}{k!}e^{-t}\mathrm{d}t=-\frac{n^k}{k!}e^{-n}+I_{k-1},$$

$$I_0=1-e^{-n}, \qquad (k=1,2,\cdots,n).$$

$$F(n)=\int_0^n e^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n} I_k .$$

因为 $I_0=1-e^{-n}$, $\quad I_k=1-\left(1+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^k}{k!}\right)e^{-n}$,

$$1<\frac{n^2}{2!}<\cdots<\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}=\frac{n^n}{n!} \qquad (k=1,2,\cdots,n).$$

$$I_k+I_{n-k}>2-\left(1+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}\right)e^{-n}, \quad (k=0,1,\cdots,n-1).$$

$$F(n)>n+1-\frac{n+2}{2}\left(1+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}\right)e^{-n}>n+1-\frac{n+2}{2}=\frac{n}{2}.$$

1.4　综合习题讲解

一、填空题

1. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{ax}=\int_{-\infty}^{a} te^{t}dt$，则 $a=$ ______.

解 可得

$$e^{a}=\int_{-\infty}^{a} te^{t}dt=(te^{t}-e^{t})\Big|_{-\infty}^{a}=ae^{a}-e^{a}$$

所以 $a=2$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$________.

解 $\frac{1}{n^2+n+n}+\frac{2}{n^2+n+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}<$

$$I_n=\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}<$$

$$\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+1}$$

所以 $$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}<I_n<\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$$

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\frac{\frac{n(1+n)}{2}}{n^2+n+n}\to\frac{1}{2}, (\mathrm{n}\to\infty)$$

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\frac{\frac{n(1+n)}{2}}{n^2+n+1}\to\frac{1}{2}, (\mathrm{n}\to\infty)$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}.$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})$________.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3\sqrt{n}-n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=2$$

3. 已知 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$______.

解 $f[f(x)]=1.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})$_________.

解 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3\sqrt{n}-n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=2$$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$ ________.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{\sin x}\cdot\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}$$

$$=\frac{1}{6}$$

6. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1990}}{n^k-(n-1)^k}=A(\neq 0\neq\infty)$, 则 $A=$ ____, $k=$ ____.

解 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1990}}{n^k-(n-1)^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1990}}{kn^{k-1}+\cdots}=A$$

所以$k-1=1990$, 即 $k=1991$;

$$\frac{1}{k}=A,\quad A=\frac{1}{k}=\frac{1}{1991}$$

二、计算题

1. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$ $\qquad\infty^0$

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(x+e^x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+e^x)}{x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{x+e^x}}=e^1=e$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})^{x}$ 1^{∞}

解1 令 $y=\frac{1}{x}$,

$$\lim_{x\to\infty}(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})^{x}=\lim_{y\to 0}(\sin 2y+\cos y)^{\frac{1}{y}}$$

$$=e^{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(\sin 2y+\cos y)}{y}}$$

$$=e^{\lim\limits_{y\to 0}\frac{2\cos 2y-\sin y}{\sin 2y+\cos y}}=e^{2}$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})^x$ 1^∞

解2 令 $y=\frac{1}{x}$,

$$\lim_{x\to\infty}(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})^x=\lim_{y\to 0}(1+\sin 2y+\cos y-1)^{\frac{1}{y}}$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}(\sin 2y+\cos y-1)=\lim_{y\to 0}(2\cos 2y-\sin y)=2.$$

因此利用命题1.3的结论有

$$\lim_{x\to\infty}(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})^x=e^2.$$

(3) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$ 1^{∞}

解 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1+\sin x}{\tan x-\sin x}}\right]^{\frac{\tan x-\sin x}{(1+\sin x)x^3}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3}} = e^{\frac{1}{2}}$$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$. 1^{∞}

解1 $\because \left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}} = \left(1+\dfrac{-3}{6+x}\right)^{\frac{6+x}{-3}\cdot\frac{-3}{6+x}\cdot\frac{x-1}{2}}$. 又因为

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{6+x}\right)^{\frac{6+x}{-3}} = e, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{-3}{6+x}\frac{x-1}{2} = \frac{-3}{2},$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}} = e^{\frac{-3}{2}}.$$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$. 1^{∞}

解2 令 $u=\dfrac{1}{x}$,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\lim_{u\to0}\left(\frac{1+3u}{1+6u}\right)^{\frac{1-u}{2u}}=e^{\lim\limits_{u\to0}\ln\left(\frac{1+3u}{1+6u}\right)^{\frac{1-u}{2u}}}=e^{-\frac{3}{2}}.$$

$$\lim_{u\to0}\ln\left(\frac{1+3u}{1+6u}\right)^{\frac{1-u}{2u}}=\lim_{u\to0}\frac{1-u}{2u}(\ln(1+3u)-\ln(1+6u))$$

$$=\lim_{u\to0}\frac{1-u}{2u}(3u-6u)=-\frac{3}{2}.$$

2. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1}}$.

解 当 $x\to1$ 时,

$$\ln(1+\sqrt[3]{x-1})\sim\sqrt[3]{x-1},\quad \arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1}\sim 2\sqrt[3]{x^2-1}.$$

按照等价无穷小代换

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1}}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x^2-1}}=\lim_{x\to1}\frac{1}{2\sqrt[3]{x+1}}=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$

解 **方法1：** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-(x^2+1)\cos^2 x}{x^4}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-2x\cos^2 x+2(x^2+1)\cos x\sin x}{4x^3}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2x\cos^2 x+\sin 2x}{4x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{2x^2\cos x\sin x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2x\cos^2 x+\sin 2x}{4x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{2x^2\cos x\sin x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos^2 x+4x\cos x\sin x+2\cos 2x}{12x^2}+\frac{1}{2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos^2 x+2\cos 2x}{12x^2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\cos x\sin x-4\sin 2x}{24x}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x}{24x}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$

方法2： Taylor展开

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-(x^2+1)\cos^2 x}{x^4}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\frac{1}{2}(x^2+1)(\cos 2x+1)}{x^4}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\frac{1}{2}(x^2+1)(1+1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}+0(x^4))}{x^4}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\frac{1}{2}(x^2+1)(1+1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}+0(x^4))}{x^4}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\frac{1}{2}(2x^2-2x^4+2-2x^2+\frac{16}{24}x^4+0(x^4))}{x^4}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}x^4}{x^4}=\frac{2}{3}$$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$;

解 1

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}$$

$$=\cos\frac{a+a}{2}\cdot 1=\cos a.$$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$;

解 2 根据导数的定义可知

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

因此

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=(\sin x)'\Big|_{x=a}=\cos a.$$

解3 应用洛必达法则.

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$.

解

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=1.$$

(5) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}.$$

解 $\because \left(\frac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}} = \left(1+\frac{-3}{6+x}\right)^{\frac{6+x}{-3}\cdot\frac{-3}{6+x}\cdot\frac{x-1}{2}}$. 又因为

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{6+x}\right)^{\frac{6+x}{-3}} = e,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{-3}{6+x}\cdot\frac{x-1}{2} = \frac{-3}{2},$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}} = e^{\frac{-3}{2}}.$$

三、证明题

例1 设$f(x)$, $g(x)$在$[a, b]$上连续, 且$f(a) < g(a)$, $f(b) > g(b)$, 试证在(a, b)内至少存在一个ξ, 使$f(\xi) = g(\xi)$.

证 假设

$$F(x) = f(x) - g(x),$$

则

$$F(a) = f(a) - g(a) < 0, \quad F(b) = f(b) - g(b) > 0$$

于是由介值定理在(a, b)内至少存在一个ξ, 使$f(\xi) = g(\xi)$.

例2 设$f(x)$在$[a, b]$上连续,且$a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$, c_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$)为任意正数, 则在(a, b)内至少存在一个ξ, 使

$$f(\xi) = \frac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \cdots + c_n f(x_n)}{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}.$$

证 令 $M = \max\limits_{1 \le i \le n}\{f(x_i)\}$, $m = \min\limits_{1 \le i \le n}\{f(x_i)\}$, 所以

$$m \le c = \frac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \cdots + c_n f(x_n)}{c_1 + c_2 + \cdots + c_n} \le M,$$

所以存在ξ($a < x_1 < \xi < x_n < b$), 使得 $f(\xi) = c$.

四、竞赛真题选讲

1. 计算 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$，$n$ 为正整数. 2009年预赛

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\exp\{\dfrac{e}{x}\ln\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)\}=\exp\left(\dfrac{1+n}{2}e\right).$

因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e}{x}\ln\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)$

$$=e\lim_{x\to0}\frac{\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n}{x}$$

$$=e\lim_{x\to0}\frac{e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx}}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}=e\frac{1+2+\cdots+n}{n}=\frac{1+n}{2}e.$$

2. 计算 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}(1+\frac{k}{n})\sin\frac{k\pi}{n^2}.$ **2010年决赛**

分析 等价无穷小之间的关系

解 记

$$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}(1+\frac{k}{n})\sin\frac{k\pi}{n^2},$$

则

$$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}(1+\frac{k}{n})(\frac{k\pi}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}))=\frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}k+\frac{\pi}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2+o(\frac{1}{n})$$

$$\to\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}.$$

3. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} n[(1+\frac{1}{n})^n - e]$. 2010年决赛

分析 恒等变形和等价无穷小可以化简问题

解 因为

$$\lim_{n\to\infty} n[(1+\frac{1}{n})^n - e] = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}-e}{\frac{1}{n}} = e\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}-1}-1}{\frac{1}{n}}$$

令 $u=\frac{1}{n}\to 0,\ (n\to\infty)$

$$= e\lim_{u\to 0}\frac{e^{\frac{\ln(1+u)}{u}-1}-1}{u} = e\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)-u}{u^2} = -\frac{e}{2}.$$

4.设 $x_n=(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$，其中 $|a|<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

分析 利用平方差公式恒等变形可以化简问题 2010年预赛

解 将一般项恒等变形得

$$x_n=\frac{(1-a)(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})}{1-a}$$

$$=\frac{(1-a^2)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})}{1-a}=\frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}$$

因 $|a|<1$，所以 $a^{2^{n+1}}\to 0$，$(n\to\infty)$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{1-a}$.

5. 求 $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} = e^{-\frac{1}{2}}$. 2010年预赛

分析 恒等变形可以化简问题

解 恒等变形得

$$e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \left(e^{-1}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{x} \to 1^{\infty}$$

取对数，应用L'Hospital法则即可求

$$\lim_{x\to\infty} x\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right) \overset{u=\frac{1}{x}}{=\!=\!=} \lim_{u\to 0}\frac{1}{u}\left(\frac{\ln(1+u)}{u}-1\right) = -\frac{1}{2}.$$

6. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$. 2011年决赛

分析 重要极限的应用

解
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\cdot\frac{\sin x-x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{\frac{1}{2}x^3}=-\frac{1}{3}.$$

所以原式$=e^{-\frac{1}{3}}$.

$$\boxed{\sin x-x=-\frac{1}{6}x^3+o(x^3).}$$

7. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$.   2011年决赛

分析 定积分的定义

解 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}+\dfrac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\dfrac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$

$$=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2.$$

8. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}$. **2011年预赛**

解 因为

$$\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}=\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-e^2}{x}+\frac{e^2\ln(1+x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^2\ln(1+x)}{x}=e^2.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-e^2}{x}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}-1}{x}$$

8. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}=0.$ **2011年预赛**

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-e^2}{x}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}-1}{x}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}{x}$$

$$=2e^2\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=2e^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}$$

$$=2e^2\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x(1+x)}=-e^2.$$

9. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$.

2012年决赛

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)\sin^2 x - x^2}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(1+x^2)(1-\cos 2x)-x^2}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(1+x^2)(1-(1-\frac{1}{2}(2x)^2+\frac{1}{4!}(2x)^4+o(x^4)))-x^2}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{2}{3}.$$

10. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3+\frac{x}{2}-\tan\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$. **2012年决赛**

解 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\tan\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}=0$,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$$

$$=\lim_{u\to0+}\left[\left(\frac{1}{u^3}+\frac{1}{2u}\right)e^{u}-\frac{\sqrt{1+u^6}}{u^3}\right]$$

$$=\lim_{u\to0+}\frac{(2+u^2)e^{u}-2\sqrt{1+u^6}}{2u^3}$$

10. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3+\frac{x}{2}-\tan\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$. 2012年决赛

$$=\lim_{u\to0+}\frac{(2+u^2)e^u-2\sqrt{1+u^6}}{2u^3}$$

$$=\lim_{u\to0+}\frac{(2+u^2)(1+u+\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{6}u^3+o(u^3))-2(1+\frac{1}{2}u^6+o(u^6))}{2u^3}$$

$$=\lim_{u\to0+}\frac{2u^2+\frac{1}{2}u^3+o(u^3)}{2u^3}=+\infty.$$

11. 求极限 $\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$. 2012年预赛

解1 因为 $(n!)^{\frac{1}{n^2}} = e^{\frac{1}{n^2}\ln(n!)}$, 而

$$\frac{1}{n^2}\ln(n!) \le \frac{1}{n}(\frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \cdots + \frac{\ln n}{n}),$$

且 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \cdots + \frac{\ln n}{n}) = 0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln(n!) = 0, \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

11. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$. **2012年预赛**

解2 因为 $(n!)^{\frac{1}{n^2}} = e^{\frac{1}{n^2}\ln(n!)}$， 而由Stolz定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n!)}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n!)-\ln((n-1)!)}{n^2-(n-1)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{2n-1} = 0,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

12. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t.$ 2012年预赛

解 因为当$x>1$时，有

$$\left|\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t\right|\le\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{1}{\sqrt{t-1}}\mathrm{d}t$$

$$=2\sqrt[3]{x}(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})$$

$$=\frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\to 0\quad(x\to\infty),$$

所以 $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t=0.$$

13. 求极限 $\lim\limits_{x\to0+}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\left(\dfrac{\ln ax}{\ln\dfrac{x}{a}}\right)\right],(a>1)$. 2013年决赛

解 原式$=\lim\limits_{x\to0+}\ln\left(\dfrac{\ln x+\ln a}{\ln x-\ln a}\right)^{\ln(x\ln a)}=\lim\limits_{x\to0+}\ln\left(1+\dfrac{2\ln a}{\ln x-\ln a}\right)^{\ln(x\ln a)}$

又因为

$$\lim_{x\to0+}\frac{2\ln a}{\ln x-\ln a}\cdot\ln(x\ln a)=\lim_{x\to0+}2\ln a\cdot\frac{\ln x+\ln\ln a}{\ln x-\ln a}=2\ln a.$$

所以 原式$=2\ln a$.

2014年预赛

14. 设 $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$, 则 $\lim_{n\to\infty}x_n=$ ________.

解 因为

$$\frac{k}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!},$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=1.$$

2014年预赛

15. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=$ ________.

解 由题设知

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(x+\frac{f(x)}{x}\right)=3,$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=2.$$

2014年预赛

16. 设$A_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$，求$\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{\pi}{4}-A_n)$.

解 因为 $A_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(k/n\right)^2}$，因此由定积分的定义知

$$\lim_{n\to\infty} A_n=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

令 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}, x_k=\frac{k}{n}$，则 $A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)\mathrm{d}x$

所以

$$n(\frac{\pi}{4}-A_n)=n\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x)-f(x_k))\mathrm{d}x$$

所以 $J_n = n(\frac{\pi}{4} - A_n) = n\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x) - f(x_k))\mathrm{d}x$

由拉格朗日中值定理知 $J_n = n\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(\xi_k)(x - x_k)\mathrm{d}x$

令 $m_k = \min\limits_{x_{k-1}\le x\le x_k} f'(x),\quad M_k = \max\limits_{x_{k-1}\le x\le x_k} f'(x),$

则

$$m_k\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x - x_k)\mathrm{d}x \ge \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(\xi_k)(x - x_k)\mathrm{d}x \ge M_k\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x - x_k)\mathrm{d}x,$$

即

$$-m_k(x_k - x_{k-1})^2/2 \ge \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(\xi_k)(x - x_k)\mathrm{d}x \ge -M_k(x_k - x_{k-1})^2/2,$$

即

$$-m_k(x_k-x_{k-1})^2/2 \ge \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(\xi_k)(x-x_k)\mathrm{d}x \ge -M_k(x_k-x_{k-1})^2/2,$$

故

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(\xi_k)(x-x_k)\mathrm{d}x = -f'(\eta_k)(x_k-x_{k-1})^2/2,$$

所以

$$J_n = n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k) = -\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

2016年决赛

17. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n\sin(\pi n!e)) =$ <u>不存在</u>.

解 因为

$$\pi n!e = \pi n![1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+o(\frac{1}{(n+1)!})]$$

$$= \pi a_n + \frac{\pi}{n+1} + o(\frac{1}{n+1}),$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}(n\sin(\pi n!e)) = \lim_{n\to\infty}(n\sin(\frac{\pi}{n+1}+o(\frac{1}{n+1}))) = \pi.$$

五、考研真题选讲

1. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$______， $b=$______.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5,$ 且

$$\lim_{x\to 0}\sin x\cdot(\cos x-b)=0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-a)=0,$ 得$a=1.$ 极限化为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}(\cos x-b)=1-b=5,$$

得$b=-4.$ 因此，$a=1$， $b=-4.$

2、极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2x}{x^2+1} =$ ________.

分析 本题属基本题型，

直接用无穷小量的等价代换进行计算即可.

解

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{2x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} x\frac{2x}{x^2+1} = 2.$$

3、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$ ________.

分析 本题为未定式极限的求解，

利用等价无穷小代换即可.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{\frac{1}{2}x^2}=2$$

4、 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$ ________.

解 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}=0,$$

而$\sin x+\cos x$有界，故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=0.$$

5、 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[\sin x-\sin\left(\sin x\right)\right]\sin x}{x^4}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-\sin\sin x)\sin x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)\cdot\cos x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(1-\cos(\sin x))}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)\cdot\cos x}{6x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

6 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x=$ $\underline{\quad e^{a-b}\quad}$.

分析 重要极限的应用

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}\right)^x$

因为

$$\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}=a-b.$$

所以原式$=e^{a-b}$.

7. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(n^3-n^2+\dfrac{n}{2}\right)e^{\frac{1}{n}}-\sqrt{1+n^6}\right]$.

解 先求 $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$,

$$I=\lim_{t\to0^+}\frac{\left(1-t+\frac{1}{2}t^2\right)e^t-\sqrt{1+t^6}}{t^3}=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{2}t^2e^t-\frac{3t^5}{\sqrt{1+t^6}}}{3t^2}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{2}e^t-\frac{3t^3}{\sqrt{1+t^6}}}{3}=\frac{1}{6}.$$

8. 设$a_1 \ge -12, a_{n+1} = \sqrt{a_n + 12}$， $n = 1,2,3,\cdots$，证明：

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在并求其值.

证 因为 $a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n + 12} - \sqrt{a_{n-1} + 12}$

$$= \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{a_n + 12} + \sqrt{a_{n-1} + 12}}$$

所以$a_{n+1} - a_n$与$a_n - a_{n-1}$的符号相同，且类似可得与$a_2 - a_1$同号. 而

$$a_2 - a_1 = \sqrt{a_1 + 12} - a_1 = \frac{a_1 + 12 - a_1^{\ 2}}{\sqrt{a_1 + 12} + a_1} = -\frac{(a_1 - 4)(a_1 + 3)}{\sqrt{a_1 + 12} + a_1}.$$

$$a_2 - a_1 = \sqrt{a_1 + 12} - a_1 = \frac{a_1 + 12 - a_1^{\ 2}}{\sqrt{a_1 + 12} + a_1} = -\frac{(a_1 - 4)(a_1 + 3)}{\sqrt{a_1 + 12} + a_1}.$$

分下列情况讨论数列的单调性， 可得到数列单调有界：

$(1)\ \ a_1 < 0;\ \ (2)\ \ 0 < a_1 < 4;\ \ (3)\ \ a_1 = 4;\ \ (4)\ \ a_1 > 4.$

求极限：

$$A = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n + 12} = \sqrt{A + 12}.$$

得$A = 4$ ($A = -3$舍去).

9 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

分析 等价无穷小替换和罗必达法则

解 令$y=\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$,

当$x>0$时，则$\ln y=\dfrac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}=\dfrac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)}{\ln x}$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{\frac{\ln x}{x}}}{e^{\frac{\ln x}{x}}-1}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{\frac{\ln x}{x}}}{e^{\frac{\ln x}{x}}-1}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2},$$

而当$x\to+\infty$时，$\dfrac{\ln x}{x}\to 0$，故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln x}{x}}}{\frac{\ln x}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{\ln x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{\ln x}=-1.\qquad\therefore\quad\lim_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\frac{1}{e}.$$

10 极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$.

分析 等价无穷小替换和罗必达法则

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}}-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{2x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+2\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x-\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}}}{2}=-\frac{1}{2}.$$

11 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c\neq 0.$ 求$k,c.$

(A) $k=2, c=-\dfrac{1}{2}$ (B) $k=2, c=\dfrac{1}{2}$

(C) $k=3, c=-\dfrac{1}{3}$ (D) $k=3, c=\dfrac{1}{3}$

解 法1 因为 $c\neq 0$, 所以利用罗必达法则得

$$c=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{kx^{k-1}}$$

$$c = \lim_{x \to 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \dfrac{1}{1+x^2}}{kx^{k-1}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{kx^{k-1}(1+x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{kx^{k-1}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{k} x^{3-k}$$

因此 $3 - k = 0$, 则有

$$k = 3, c = \frac{1}{3}.$$

所以答案为D.

11 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c\neq 0$. 求$k,c$.

(A) $k=2,c=-\dfrac{1}{2}$ (B) $k=2,c=\dfrac{1}{2}$

(C) $k=3,c=-\dfrac{1}{3}$ (D) $k=3,c=\dfrac{1}{3}$

解 法2 利用Taylor展开式得

$$c=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{x-(x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3))}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x^k}$$

所以答案为D.

12 当$x\to 0$时,$o(x)$表示x的高阶无穷小，下列式子中不正确的是(　　　　)

(A) $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$　　(B) $o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$

(C) $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$　　(D) $o(x)+o(x^2)=o(x^2)$

解 利用高阶无穷小的定义知

$$\frac{x\cdot o(x^2)}{x^3}=\frac{o(x^2)}{x^2}\to 0;$$　因此(A)正确;

$$\frac{o(x)\cdot o(x^2)}{x^3}=\frac{o(x)}{x}\cdot\frac{o(x^2)}{x^2}\to 0,$$ 因此(B)正确；

$$\frac{o(x^2)+o(x^2)}{x^2}=\frac{o(x^2)}{x^2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\to 0,$$ 因此(C)正确；

$$\frac{o(x)+o(x^2)}{x^2}=\frac{o(x)}{x^2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\not\to 0$$ 因此(D)不正确.

事实上，若 $o(x)=x^2$，则

$$\frac{o(x)+o(x^2)}{x^2}=\frac{o(x)}{x^2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\to 1.$$

所以答案为D.

13设$\cos x-1=x\sin\alpha(x)$, 其中 $|\alpha(x)|<\pi/2$则当$x\to 0$时,$\alpha(x)$ 是

(A)比x高阶的无穷小　　(B) 比x低阶的无穷小

(C)与x同阶但不等价的无穷小　　(D)与x等价的无穷小

解 利用等价无穷小的代换得

$$\because \cos x-1\sim -\frac{1}{2}x^2,\qquad x\sin\alpha(x)\sim x\alpha(x),$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\alpha(x)}{x^2}=-\frac{1}{2},$$

所以答案为C.

14 函数的$f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln x}$可去间断点的个数为(　　)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

解 根据间断点的定义知，$f(x)$的间断点为$-1,0,1$.

$$\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{(-x)^x-1}{x(x+1)\ln(-x)}=\lim_{x\to-1}\frac{e^{x\ln(-x)}-1}{x(x+1)\ln(-x)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x\ln(-x)}{x(x+1)\ln(-x)}=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}=\infty.$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^x - 1}{x(x+1)\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{e^{x\ln x} - 1}{x(x+1)\ln x}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x(x+1)\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^x - 1}{x(x+1)\ln x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x\ln x} - 1}{x(x+1)\ln x} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^x - 1}{x(x+1)\ln(-x)} = \lim_{x\to 0^-}\frac{e^{x\ln(-x)} - 1}{x(x+1)\ln(-x)} = 1.$$

所以答案为C.

15 $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=$ $\underline{\qquad e^{\frac{1}{2}}\qquad}$.

解 利用两个重要极限或恒等变形后利用罗必达法则

法1 利用两个重要极限

$$原式=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\left(1-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)\right)^{\frac{1}{1-\frac{\ln(1+x)}{x}}}\right]^{\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}}$$

因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2}.$$

15 $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} =$ $\underline{\quad e^{\frac{1}{2}} \quad}$.

法2 恒等变形后利用罗必达法则

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(1-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2}.$$

16 当$x\to 0$时, $1-\cos x\cos 2x\cos 3x$与ax^n为等价无穷小, 求n与a的值.

解 利用 $\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha,\ (\alpha\to 0).$

$1-\cos x\cos 2x\cos 3x$

$$=1-\cos x+\cos x(1-\cos 2x)+\cos x\cos 2x(1-\cos 3x)$$

$$\because 1-\cos x=\frac{1}{2}x^2+o(x^2),\ \cos x(1-\cos 2x)=2x^2+o(x^2),$$

$$\cos x\cos 2x(1-\cos 3x)=\frac{9}{2}x^2+o(x^2),$$

因此

$$1 = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{ax^n}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\frac{1}{2}+2+\frac{9}{2})x^2 + o(x^2)}{ax^n} = \lim_{x\to 0}\frac{7x^2}{ax^n}$$

所以

$$a = 7, n = 2.$$