第三章　一元函数积分学

重点、热点

1．定积分的概念；

2．定积分与不定积分的换元积分法和分部积分法；

3．积分等式与积分不等式的证明，

在此应注意中值定理的理解和应用。

4．运用定积分求弧长、求面积、求旋转体的体积，

求变力沿直线做功、求静液侧压力、求引力。

对于用定积分求面积、弧长、体积等的公式，

大家应当要在理解的基础上熟记。

（请大家特别注意此部分知识与切线，

最大最小值结合的综合性的题）

常考题型

1. 计算题：计算不定积分、定积分及广义积分；

2. 关于变上限积分的题：如求导、求极限等；

3. 有关积分中值定理和积分性质的证明题；

4. 定积分应用题：计算面积，旋转体体积，

   平面曲线弧长，旋转面面积，压力，

   引力，变力作功等；

5. 综合性试题。

特别需要强调的知识点：

1. 微分运算与求不定积分的运算是互逆的.

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]=f(x) \qquad d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx$$

$$\int F'(x)dx=F(x)+C \qquad \int dF(x)=F(x)+C$$

2.换元积分法中的常用代换:

1.$x=(at+b)^{\alpha},\alpha\in R.$

2.三角函数代换

如$f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$, 令$x=a\sin t.$

3.双曲函数代换

如$f(x)=\sqrt{a^2+x^2}$, 令$x=a\,\mathrm{sh}\,t.$

4.倒置代换　　令$x=\dfrac{1}{t}.$

3. 分部积分法

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$ 分部积分公式

选择u的有效方法：LIATE选择法

L----对数函数；　　I----反三角函数；

A----代数函数；　　T----三角函数；

E----指数函数；　　哪个在前哪个选作u.

4. 定积分的性质

1) 积分区间的可加性

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

2) 若在$[a, b]$上 $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

推论1 若在 $[a, b]$ 上 $f(x) \leq g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

推论2 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \quad (a < b).$

3) 设 M 和 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间$[a, b]$上的最大值和最小值，则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a) \quad (a<b).$$

4) 积分中值定理

若 $f(x) \in C[a,b]$,则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

5. 变限积分求导

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = -f(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{\psi(x)}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

$$= f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x)$$

6. 牛顿 – 莱布尼兹公式

设 $F(x)$为 $f(x)$在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

7、定积分的计算法

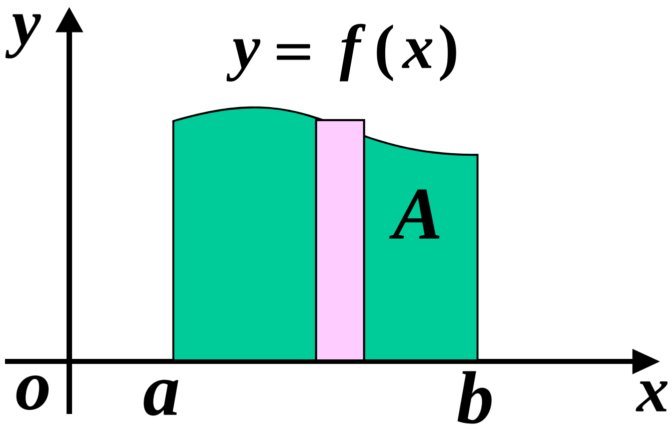
1) 换元法 $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)dt$

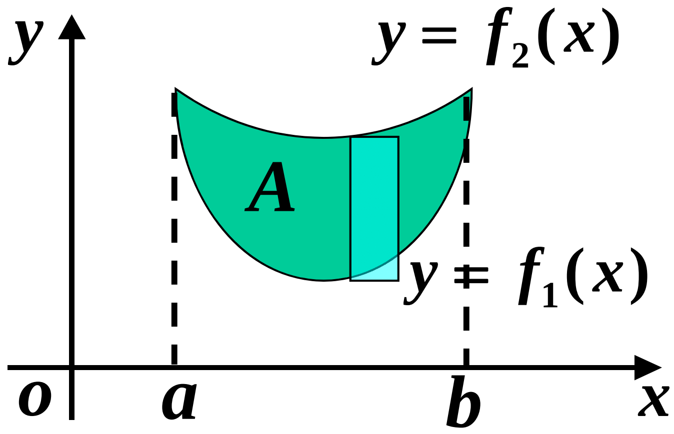
2) 分部积分法 $\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$

8. 定积分应用的常用公式

(1) 平面图形的面积

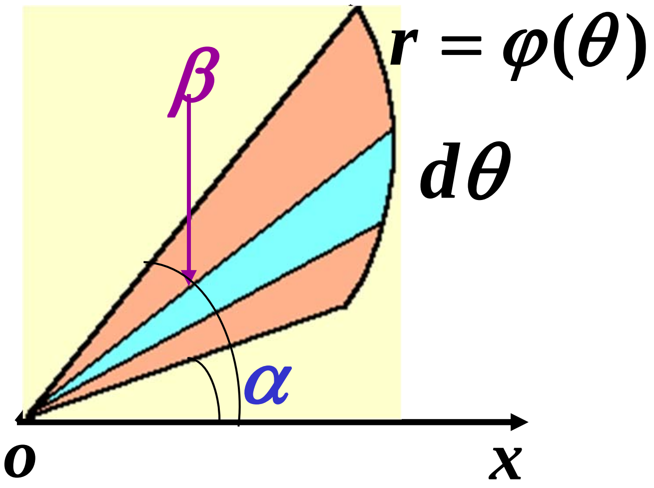
直角坐标情形

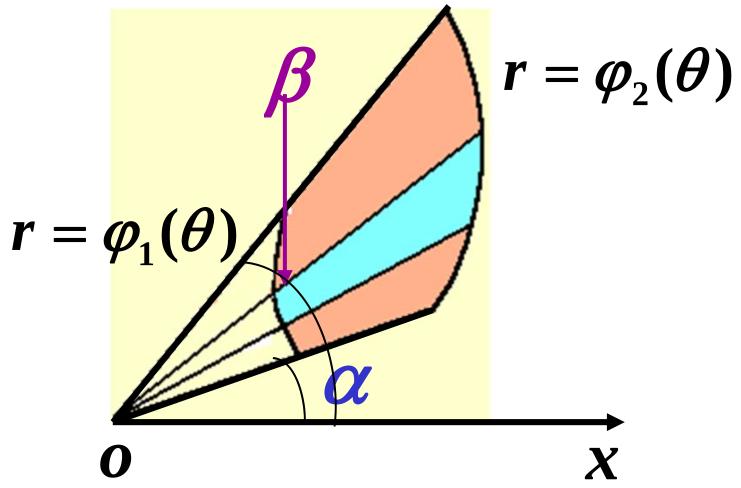




$$A = \int_a^b f(x)dx \qquad A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

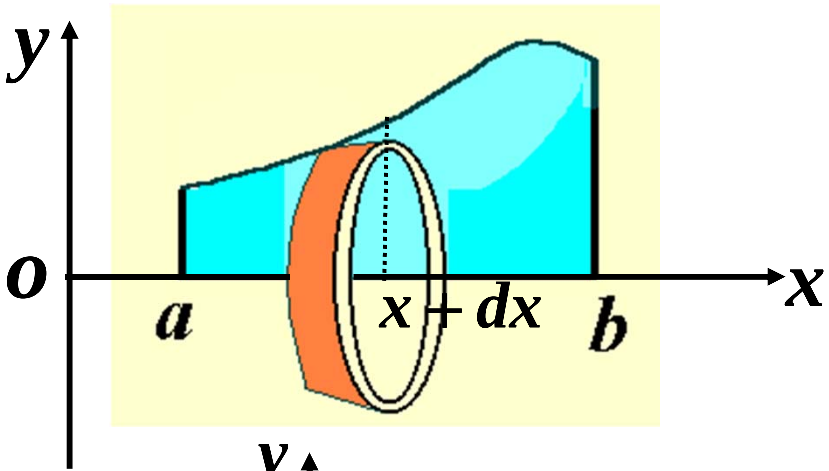
极坐标情形



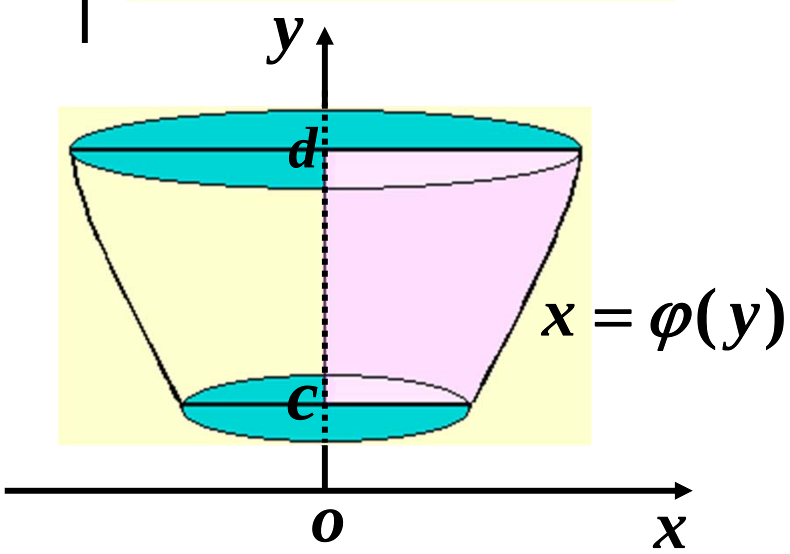


$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[\varphi(\theta)]^2 d\theta \qquad A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[\varphi_2^2(\theta)-\varphi_1^2(\theta)]d\theta$$

(2) 体积

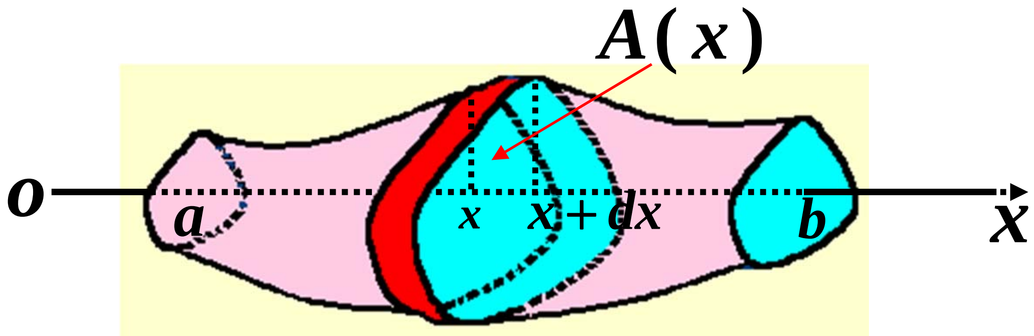


$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$



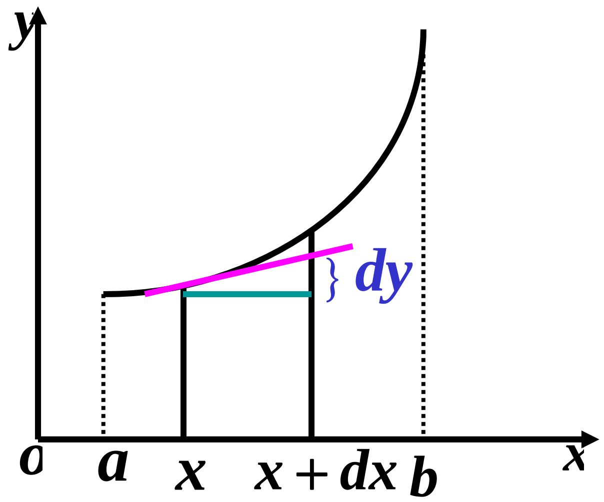
$$V = \int_c^d \pi [\varphi(y)]^2 dy$$

平行截面面积为已知的立体的体积



$$V = \int_a^b A(x)dx$$

(3) 平面曲线的弧长



A. 曲线弧为 $y = f(x)$

弧长 $s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx$

B. 曲线弧为 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$

其中$\varphi(t), \psi(t)$在$[\alpha, \beta]$上具有连续导数

弧长 $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt$

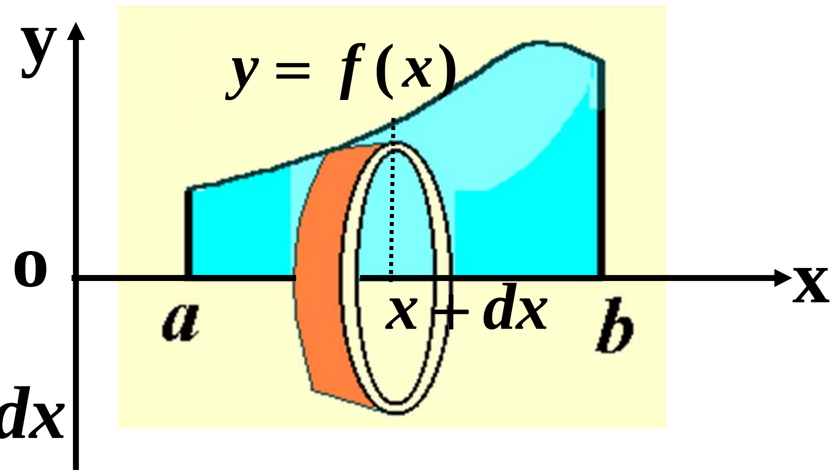
C．曲线弧为 $r = r(\theta) \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$

弧长 $s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\, d\theta$

(4) 旋转体的侧面积

$y = f(x) \ge 0, \quad a \le x \le b$

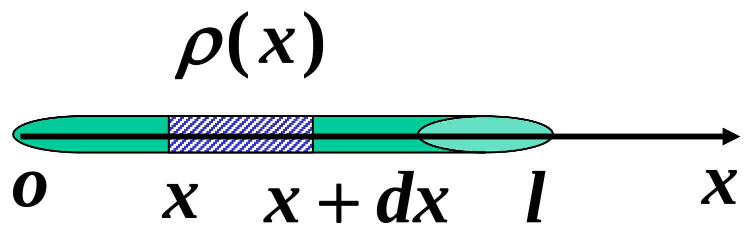
$$S_{侧} = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$



(5) 细棒的质量　($\rho(x)$为线密度)

$$m=\int_0^l dm$$

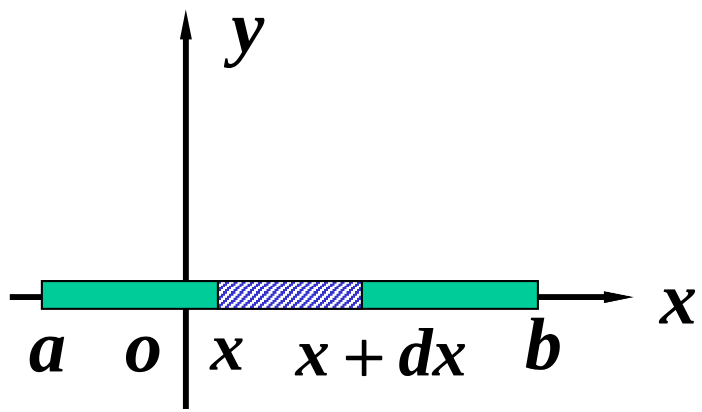
$$=\int_0^l \rho(x)dx$$



(6) 转动惯量

$$I_y=\int_a^b dI_y$$

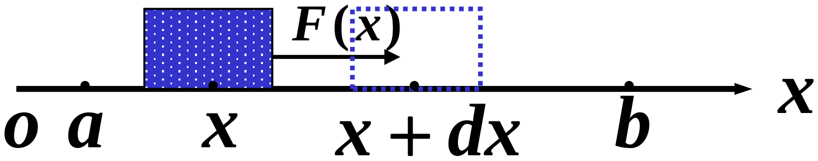
$$=\int_a^b x^2\rho(x)dx$$



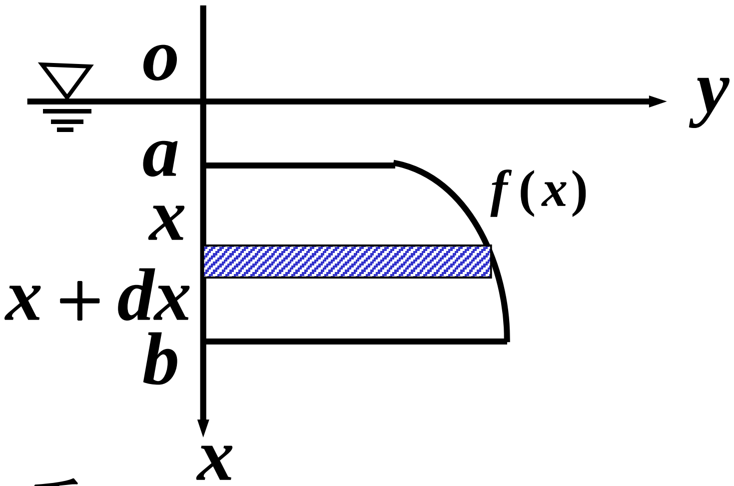
(7) 变力所作的功

$$W = \int_a^b dW$$

$$= \int_a^b F(x)dx$$



(8) 水压力



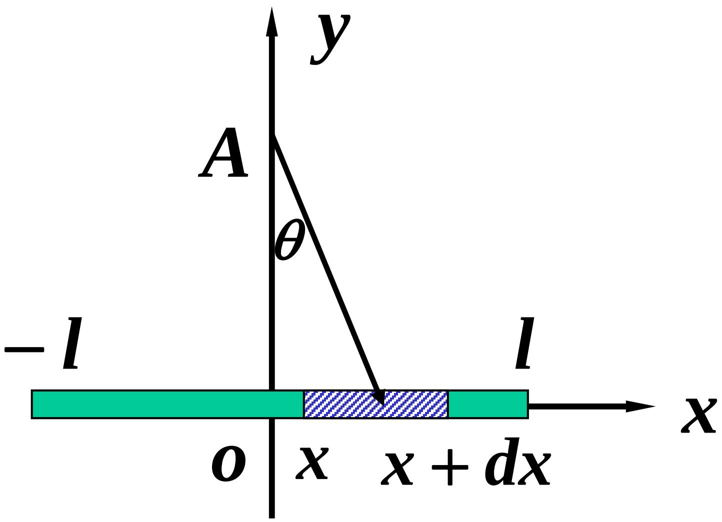
$$P = \int_a^b dP$$

$$= \int_a^b \mu x f(x)dx$$

(μ 为比重)

(9) 引力

$$F_y=\int_{-l}^{l}dF_y=\int_{-l}^{l}\frac{Ga\rho dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$



$F_x=0.$ (G 为引力系数)

(10) 函数的平均值 $\bar{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

(11) 均方根 $\bar{y}=\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx}$

3.1　不定积分

一、换元积分法

设 $F'(u) = f(u)$, $u = \varphi(x)$ 可导，则有

$$\mathrm{d}F[\varphi(x)] = f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

$$\therefore \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = F[\varphi(x)] + C = F(u) + C\Big|_{u=\varphi(x)}$$

$$= \int f(u)\mathrm{d}u\Big|_{u=\varphi(x)}$$

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x \underset{\text{第二类换元法}}{\overset{\text{第一类换元法}}{\rightleftarrows}} \int f(u)\mathrm{d}u$$

例1 求 $\int \frac{2^x 3^x}{9^x - 4^x} dx.$

解 原式 $= \int \frac{(\frac{3}{2})^x}{(\frac{3}{2})^{2x} - 1} dx = \frac{1}{\ln\frac{3}{2}} \int \frac{d(\frac{3}{2})^x}{(\frac{3}{2})^{2x} - 1} \overset{令(\frac{3}{2})^x = t}{=\!=\!=\!=} \frac{1}{\ln\frac{3}{2}} \int \frac{dt}{t^2 - 1}$

$$= \frac{1}{2\ln\frac{3}{2}} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)} \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)} \ln\left|\frac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x}\right| + C.$$

常用的几种配元形式:

$$(1)\ \int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\,\mathrm{d}(ax+b)$$

$$(2)\ \int f(x^n)x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int f(x^n)\,\mathrm{d}x^n$$

$$(3)\ \int f(x^n)\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int f(x^n)\frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x^n$$

万能凑幂法

$$(4)\ \int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=\int f(\sin x)\mathrm{d}\sin x$$

(5) $\int f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x = -\int f(\cos x)\,\mathrm{d}\cos x$

(6) $\int f(\tan x)\sec^2 x\mathrm{d}x = \int f(\tan x)\,\mathrm{d}\tan x$

(7) $\int f(e^x)e^x\mathrm{d}x = \int f(e^x)\,\mathrm{d}e^x$

(8) $\int f(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int f(\ln x)\,\mathrm{d}\ln x$

例2 求$\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}dx.$

解 $\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}dx = \int \frac{1}{1+2\ln x}d(\ln x)$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+2\ln x}d(1+2\ln x)$$

$$u = 1+2\ln x$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u|+C = \frac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+C.$$

例3　求 $\int \frac{dx}{x(2+x^{10})}$.

解　原式 $= \int \frac{x^9 dx}{x^{10}(2+x^{10})} = \frac{1}{10}\int \frac{d(x^{10})}{x^{10}(2+x^{10})}$

$$= \frac{1}{20}[\ln x^{10} - \ln(x^{10}+2)] + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{20}\ln(x^{10}+2) + C.$$

例4 求$\int \frac{x}{(1+x)^3}dx.$

解一 $\int \frac{x}{(1+x)^3}dx = \int \frac{x+1-1}{(1+x)^3}dx$

$$= \int [\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^3}]d(1+x)$$

$$= -\frac{1}{1+x} + C_1 + \frac{1}{2(1+x)^2} + C_2$$

$$= -\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2(1+x)^2} + C.$$

例4　求$\int \frac{x}{(1+x)^3}dx.$

解二

$$\int \frac{x}{(1+x)^3}dx = \int \frac{x}{1+x}d\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

$$= \frac{x^2}{2(1+x)^2} + C_1$$

$$= -\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2(1+x)^2} + C.$$

例5 求$\int \frac{1}{x^2-8x+25}dx$.

解 $\int \frac{1}{x^2-8x+25}dx = \int \frac{1}{(x-4)^2+9}dx$

$$= \frac{1}{3^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x-4}{3}\right)^2+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x-4}{3}\right)^2+1}d\left(\frac{x-4}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\arctan\frac{x-4}{3}+C.$$

例6 求$\int \frac{1}{1+e^x}dx.$

解一 $\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx$

$= \int \left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx = \int dx - \int \frac{e^x}{1+e^x}dx$

$= \int dx - \int \frac{1}{1+e^x}d(1+e^x)$

$= x - \ln(1+e^x) + C.$

例6 求$\int \frac{1}{1+e^x}dx.$

解二 $\int \frac{1}{1+e^x}dx \overset{u=e^x}{=\!=\!=} \int \frac{1}{1+u}d\ln u$

$$= \int \frac{1}{1+u}\cdot\frac{1}{u}du = \int \frac{1}{u}du - \int \frac{1}{1+u}du$$

$$= \ln u - \ln(1+u) + C$$

$$= x - \ln(1+e^x) + C.$$

例7　求$\int(1-\frac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}dx.$

解　$\because\ \left(x+\frac{1}{x}\right)'=1-\frac{1}{x^2},$

$$\therefore\ \int(1-\frac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}dx$$

$$=\int e^{x+\frac{1}{x}}d(x+\frac{1}{x})=e^{x+\frac{1}{x}}+C.$$

例8 求 $\int \frac{1}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}}dx.$

$$\text{原式}=\int \frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-1}}{\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}\right)\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-1}\right)}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int \sqrt{2x+3}dx-\frac{1}{4}\int \sqrt{2x-1}dx$$

$$=\frac{1}{8}\int \sqrt{2x+3}d(2x+3)-\frac{1}{8}\int \sqrt{2x-1}d(2x-1)$$

$$=\frac{1}{12}\left(\sqrt{2x+3}\right)^3-\frac{1}{12}\left(\sqrt{2x-1}\right)^3+C.$$

例9 求 $\int \frac{1}{1+\cos x}dx.$

解一 $\int \frac{1}{1+\cos x}dx = \int \frac{1-\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)}dx$

$$= \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}dx$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 x}dx - \int \frac{1}{\sin^2 x}d(\sin x)$$

$$= -\cot x + \frac{1}{\sin x} + C.$$

例9 求 $\int \frac{1}{1+\cos x}dx.$

解二 $\int \frac{1}{1+\cos x}dx \quad = \int \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}}dx$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} d\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \tan \frac{x}{2} + C.$$

例10 求 $\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x dx$.

解 $\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x d(\sin x)$

$= \int \sin^2 x \cdot (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)$

$= \int (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x) d(\sin x)$

$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$

说明 当被积函数是三角函数相乘时，拆开奇次项去凑微分.

例11 求 $\int \cos 3x \cos 2x dx.$

解 $\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B)+\cos(A+B)],$

$$\cos 3x \cos 2x = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 5x),$$

$$\int \cos 3x \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int (\cos x + \cos 5x) dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\sin 5x + C.$$

例12 求 $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}\arcsin\frac{x}{2}}dx.$

解 $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}\arcsin\frac{x}{2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\arcsin\frac{x}{2}}d\frac{x}{2}$

$$= \int \frac{1}{\arcsin\frac{x}{2}}d(\arcsin\frac{x}{2}) = \ln\arcsin\frac{x}{2} + C.$$

例13 求 $\int x^3\sqrt{4-x^2}dx.$

解 令 $x=2\sin t \quad dx=2\cos t dt \quad t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

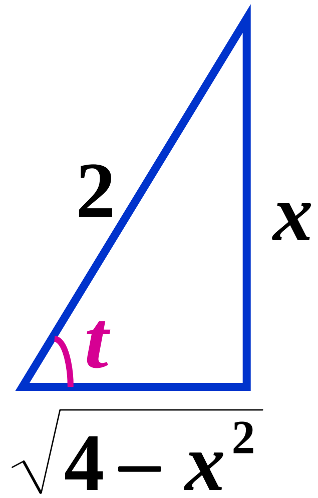
$$\int x^3\sqrt{4-x^2}dx=\int(2\sin t)^3\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt$$

$$=32\int\sin^3 t\cos^2 t dt=32\int\sin t(1-\cos^2 t)\cos^2 t dt$$

$$=-32\int(\cos^2 t-\cos^4 t)d\cos t$$

$$=-32\left(\frac{1}{3}\cos^3 t-\frac{1}{5}\cos^5 t\right)+C$$

$$=-\frac{4}{3}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^5+C.$$



说明(1) 此例所使用的是三角代换.

三角代换的目的是化掉根式.

一般规律如下：当被积函数中含有

(1) $\sqrt{a^2 - x^2}$ 可令 $x = a\sin t$;

(2) $\sqrt{a^2 + x^2}$ 可令 $x = a\tan t$;

(3) $\sqrt{x^2 - a^2}$ 可令 $x = a\sec t$.

说明(2) 积分中为了化掉根式是否一定采用三角代换并不是绝对的，需根据被积函数的情况来定.

例14 求$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}dx$ （三角代换很繁琐）

解 令 $t=\sqrt{1+x^2} \Rightarrow x^2=t^2-1, \quad xdx=tdt,$

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int \frac{\left(t^2-1\right)^2}{t}tdt=\int\left(t^4-2t^2+1\right)dt$$

$$=\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t+C=\frac{1}{15}(8-4x^2+3x^4)\sqrt{1+x^2}+C.$$

例15 求 $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx.$

解 令 $t=\sqrt{1+e^x} \Rightarrow e^x = t^2-1,$

$$x=\ln(t^2-1), \quad dx=\frac{2t}{t^2-1}dt,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx = \int \frac{2}{t^2-1}dt = \int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C = 2\ln\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)-x+C.$$

说明(3) 当分母的阶较高时，可采用倒代换 $x=\frac{1}{t}$.

例16 求 $\int \frac{1}{x(x^7+2)}dx$

解 令 $x=\frac{1}{t} \Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt$,

$$\int \frac{1}{x(x^7+2)}dx=\int \frac{t}{\left(\frac{1}{t}\right)^7+2}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int \frac{t^6}{1+2t^7}dt$$

$$=-\frac{1}{14}\ln|1+2t^7|+C=-\frac{1}{14}\ln|2+x^7|+\frac{1}{2}\ln|x|+C.$$

例17 求 $\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}dx.$ （分母的阶较高）

解 令 $x=\frac{1}{t} \Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt,$

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}dx=\int \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^4\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dx$$

$$=-\int \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}dt=-\frac{1}{2}\int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt^2 \qquad u=t^2$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{u}{\sqrt{1+u}}du = \frac{1}{2}\int \frac{1-1-u}{\sqrt{1+u}}du$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{\sqrt{1+u}} - \sqrt{1+u} \right) d(1+u)$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+u}\right)^3 + \sqrt{1+u} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \right)^3 + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$$

说明(4) 当被积函数含有两种或两种以上的根式 $\sqrt[k]{x},\cdots,\sqrt[l]{x}$ 时，可采用令 $x=t^n$（其中 n 为各根指数的最小公倍数）

例18 求 $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx.$

解 令 $x=t^6 \Rightarrow dx=6t^5dt,$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx=\int \frac{6t^5}{t^3(1+t^2)}dt=\int \frac{6t^2}{1+t^2}dt$$

$$= 6\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt$$

$$= 6\int \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$= 6[t-\arctan t]+C$$

$$= 6[\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x}]+C.$$

例19 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$.

解 令 $x=\frac{1}{t}$,得

$$\text{原式}=-\int \frac{t}{\sqrt{a^2t^2+1}}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{2a^2}\int \frac{\mathrm{d}(a^2t^2+1)}{\sqrt{a^2t^2+1}}=-\frac{1}{a^2}\sqrt{a^2t^2+1}+C$$

$$=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C$$

例20 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$.

解 原式 $\displaystyle = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^3\sqrt{(x+1)^2-1}}$

$$\boxed{令\ x+1=\frac{1}{t}}$$

$$= \int \frac{t^3}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = -\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{(1-t^2)-1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \boxed{\int \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}\,t} - \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2}\arcsin t - \arcsin t + C$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{(x+1)^2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{x+1} + C$$

例21 求 $\int \frac{\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5}}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

解 $\because [\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5]'$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}})=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

原式 $=\int\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5}\cdot d[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5]$

$$=\frac{2}{3}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5]^{\frac{3}{2}}+C.$$

例22 求 $\int \frac{x+1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx.$

解 令 $x=\frac{1}{t}$, (倒代换)

$$\text{原式}=\int \frac{\frac{1}{t}+1}{\frac{1}{t^2}\sqrt{(\frac{1}{t})^2-1}}(-\frac{1}{t^2})dt \quad =-\int \frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=-\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt+\int \frac{d(1-t^2)}{2\sqrt{1-t^2}}=-\arcsin t+\sqrt{1-t^2}+C$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\arcsin\frac{1}{x}+C.$$

二、分部积分法

由导数公式 $(uv)' = u'v + uv'$

积分得: $uv = \int u'v\,\mathrm{d}x + \int uv'\,\mathrm{d}x$

$$\left.\begin{aligned} &\Longrightarrow \int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x \\ &\text{或} \quad \int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u \end{aligned}\right\} \text{分部积分公式}$$

选取 u 及 v' (或 $\mathrm{d}v$) 的原则:

1) v 容易求得 ;

2) $\int u'v\,\mathrm{d}x$ 比 $\int uv'\,\mathrm{d}x$ 容易计算 .

分部积分法的解题技巧

选取 u 及 v' 的一般方法：

1、把被积函数视为两个函数之积，

2、一般按 “反对幂指三” 的顺序，前者为 u 后者为 v'.

反: 反三角函数；　　对: 对数函数；

幂: 幂函数；　　指: 指数函数

三: 三角函数

例1 求 $\int x\arctan x dx.$

解 令 $u=\arctan x$, $xdx = d\dfrac{x^2}{2} = dv$

$$\int x\arctan x dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{x^2}{2} d(\arctan x)$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}(x-\arctan x)+C.$$

例2 求 $\int x^3 \ln x dx.$

解 $u = \ln x, \quad x^3 dx = d\dfrac{x^4}{4} = dv,$

$$\int x^3 \ln x dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C.$$

总结 若被积函数是幂函数和对数函数或幂函数和反三角函数的乘积，就考虑设对数函数或反三角函数为 u.

例3 求 $\int \sin(\ln x)dx.$

解 $\boxed{\int \sin(\ln x)dx} = x\sin(\ln x) - \int xd[\sin(\ln x)]$

$$= x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) + \int xd[\cos(\ln x)]$$

$$= x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] - \boxed{\int \sin(\ln x)dx}$$

$$\therefore \int \sin(\ln x)dx = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C.$$

例4 求 $\int e^x \sin x dx.$

解 $\boxed{\int e^x \sin x dx} = \int \sin x de^x$

$= e^x \sin x - \int e^x d(\sin x)$

$= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int \cos x de^x$

$= e^x \sin x - (e^x \cos x - \int e^x d \cos x)$

$= e^x(\sin x - \cos x) - \boxed{\int e^x \sin x dx}$ 注意循环形式

$\therefore \int e^x \sin x dx = \dfrac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$

例5 求 $\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

解 $\because \quad \left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$

$$\therefore \quad \int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \arctan x d\sqrt{1+x^2}$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int \sqrt{1+x^2}d(\arctan x)$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int \sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\sqrt{1+x^2}\arctan x-\boxed{\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx}$$

令 $x=\tan t$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}}\sec^2 t\,dt=\int\sec t\,dt$$

$$=\ln|\sec t+\tan t|+C\quad=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$$

$$\therefore\quad\int\frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$=\sqrt{1+x^2}\arctan x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

例 6 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-x^2}，求 $\int xf'(x)dx$.

解 $\int xf'(x)dx = \int xdf(x) = xf(x) - \int f(x)dx,$

$\because \left(\int f(x)dx\right)' = f(x),\quad \therefore \int f(x)dx = e^{-x^2} + C,$

两边同时对 x 求导, 得 $f(x) = -2xe^{-x^2},$

$\therefore \int xf'(x)dx = xf(x) - \int f(x)dx$

$= -2x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + C.$

例8″. 已知$f(x)$ 的一个原函数是 $\dfrac{\cos x}{x}$, 求$\int x f'(x)\mathrm{d}x$.

解: $\int x f'(x)\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}f(x)$

$$= x\,f(x) - \int f(x)\mathrm{d}x$$

$$= x\left(\frac{\cos x}{x}\right)' - \frac{\cos x}{x} + C$$

$$= -\sin x - 2\frac{\cos x}{x} + C$$

说明: 此题若先求出 $f'(x)$ 再求积分反而复杂.

$$\int x\,f'(x)\mathrm{d}x = \int\left(-\cos x + \frac{2\sin x}{x} + \frac{2\cos x}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

例7 求$\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\ \ (a>0)$.

解 令 $u=\sqrt{x^2+a^2},\ v'=1$, 则 $u'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $v=x$

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x+a^2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\dfrac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

说明:

分部积分题目的类型:

1) 直接分部化简积分 ;

2) 分部产生循环式 , 由此解出积分式 ;

(注意: 两次分部选择的 u , v 函数类型不变 , 解出积分后加 C)

3) 对含自然数 n 的积分, 通过分部积分建立递推公式 .

例8 求 $I=\int\frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x.$

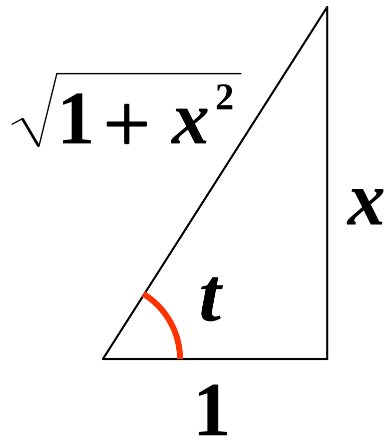
解法1 先换元后分部

令 $t=\arctan x$，即 $x=\tan t$，则

$$I=\int\frac{e^t}{\sec^3 t}\cdot\sec^2 t\,\mathrm{d}t=\int e^t\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$=e^t\sin t-\int e^t\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$=e^t\sin t+e^t\cos t-\int e^t\cos t\,\mathrm{d}t$$



故 $$I=\frac{1}{2}(\sin t+\cos t)e^t+C$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right]e^{\arctan x}+C$$

解法2　用分部积分法

$$I = \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}e^{\arctan x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x} + \int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x} + \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}e^{\arctan x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}(1+x) - I$$

$$\therefore \quad I = \frac{1+x}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x} + C$$

例9 求 $\int x\arctan x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x.$ **2013决赛**

解 $\because \int x\ln(1+x^2)dx = \frac{1}{2}\int \ln(1+x^2)d(1+x^2)$

$$= \frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2 + C.$$

原式 $= \int \arctan x d[\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2]$

$$= \frac{1}{2}[(1+x^2)\ln(1+x^2) - x^2]\arctan x$$

$$-\frac{1}{2}\int [\ln(1+x^2) - \frac{x^2}{1+x^2}]dx$$

$$=\frac{1}{2}[(`1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2]\arctan x$$

$$-\frac{1}{2}\int[\ln(1+x^2)-\frac{x^2}{1+x^2}]dx$$

$$=\frac{1}{2}\arctan x[(`1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2-3]$$

$$-\frac{x}{2}\ln(1+x^2)+\frac{x}{2}+C.$$

三、其他积分法

例1 求 $\int \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}dx.$

解 原式 $=\int \frac{e^x(1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2})}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx$

$$=\int (e^x \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} + e^x\tan\frac{x}{2})dx$$

$$=\int [(e^x d(\tan\frac{x}{2}) + \tan\frac{x}{2}de^x] = \int d(e^x\tan\frac{x}{2})$$

$$= e^x\tan\frac{x}{2} + C.$$

例2　求 $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx.$

解　原式 $=\int \frac{x+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx$

$$=\int \frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx+\int \tan\frac{x}{2}dx$$

$$=x\tan\frac{x}{2}-\int \tan\frac{x}{2}dx+\int \tan\frac{x}{2}dx$$

$$=x\tan\frac{x}{2}+C.$$

例3 求 $\int [\frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}]dx.$

解 $$原式 = \int \frac{f(x)f'^2(x) - f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}dx$$

$$= \int \frac{f(x)}{f'(x)} \cdot \frac{f'^2(x) - f(x)f''(x)}{f'^2(x)}dx$$

$$= \int \frac{f(x)}{f'(x)} d[\frac{f(x)}{f'(x)}]$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{f(x)}{f'(x)}]^2 + C.$$

例4 求 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

解 $\because \sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4} = \sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4} \cdot (x+1)^2$.

令 $t = \frac{x-1}{x+1}$, 则有 $dt = \frac{2}{(x+1)^2}dx$,

$$\text{原式} = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4} \cdot (x+1)^2} = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{4}{3}}dt$$

$$= -\frac{3}{2}t^{-\frac{1}{3}} + C = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C.$$

例5 求 $\int \max\{1,|x|\}dx.$

解 设 $f(x)=\max\{1,|x|\},$

则 $f(x)=\begin{cases} -x, & x<-1 \\ 1, & -1\le x\le 1, \\ x, & x>1 \end{cases}$

$\because f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，则必存在原函数 $F(x).$

$$F(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2+C_1, & x<-1 \\ x+C_2, & -1\le x\le 1. \\ \frac{1}{2}x^2+C_3, & x>1 \end{cases}$$

又 $\because F(x)$须处处连续，有

$$\lim_{x\to -1^+}(x+C_2)=\lim_{x\to -1^-}(-\frac{1}{2}x^2+C_1)$$

即 $-1+C_2=-\frac{1}{2}+C_1$,

$$\lim_{x\to 1^+}(\frac{1}{2}x^2+C_3)=\lim_{x\to 1^-}(x+C_2)$$

即 $\frac{1}{2}+C_3=1+C_2$,

联立并令 $C_1 = C,$

可得 $C_2 = \frac{1}{2} + C,\quad C_3 = 1 + C.$

故 $$\int \max\{1,|x|\}dx = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + C, & x < -1 \\ x + \frac{1}{2} + C, & -1 \le x \le 1. \\ \frac{1}{2}x^2 + 1 + C, & x > 1 \end{cases}$$

四、有理函数的积分

1、有理函数化为部分分式之和的一般规律

（1）分母中若有因式 $(x-a)^k$，则分解后为

$$\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x-a},$$

其中 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 都是常数.

特殊地：$k=1$, 分解后为 $\dfrac{A}{x-a}$;

（2）分母中若有因式 $(x^2+px+q)^k$，其中 $p^2-4q<0$ 则分解后为

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}$$

其中 M_i, N_i 都是常数 $(i=1,2,\cdots,k)$.

特殊地：$k=1$，分解后为 $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$；

例1 求 $\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx.$

解 $$\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx = \int \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}\right]dx$$

$$= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx - \int \frac{1}{x-1}dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{x-1} - \ln|x-1| + C.$$

例2 求 $\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}dx.$

解 $\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}dx = \int \frac{\frac{4}{5}}{1+2x}dx + \int \frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}dx$

$$= \frac{2}{5}\ln|1+2x| - \frac{1}{5}\int \frac{2x}{1+x^2}dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{2}{5}\ln|1+2x| - \frac{1}{5}\ln(1+x^2) + \frac{1}{5}\arctan x + C.$$

例3 求 $\int \frac{1}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}dx.$

解 令 $t=e^{\frac{x}{6}} \Rightarrow x=6\ln t,\qquad dx=\frac{6}{t}dt,$

$$\int \frac{1}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}dx=\int \frac{1}{1+t^3+t^2+t}\cdot\frac{6}{t}dt$$

$$=6\int \frac{1}{t(1+t)(1+t^2)}dt=\int\left(\frac{6}{t}-\frac{3}{1+t}-\frac{3t+3}{1+t^2}\right)dt$$

$$=\int\left(\frac{6}{t}-\frac{3}{1+t}-\frac{3t+3}{1+t^2}\right)dt$$

$$=6\ln t-3\ln(1+t)-\frac{3}{2}\int\frac{d(1+t^2)}{1+t^2}-3\int\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$=6\ln t-3\ln(1+t)-\frac{3}{2}\ln(1+t^2)-3\arctan t+C$$

$$=x-3\ln(1+e^{\frac{x}{6}})-\frac{3}{2}\ln(1+e^{\frac{x}{3}})-3\arctan(e^{\frac{x}{6}})+C.$$

说明 将有理函数化为部分分式之和后，只出现三类情况：

(1) 多项式；

(2) $\dfrac{A}{(x-a)^n}$；

(3) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$；

四种典型部分分式的积分:

$$1.\ \int \frac{A}{x-a}\mathrm{d}x = A\ln|x-a| + C$$

$$2.\ \int \frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x = \frac{A}{1-n}(x-a)^{1-n} + C \quad (n \neq 1)$$

$$3.\ \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$$

$$4.\ \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$$

$$(p^2-4q<0,\ n\neq 1)$$

变分子为

$$\frac{M}{2}(2x+p)+N-\frac{Mp}{2}$$

再分项积分

例4 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$

解 原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4+1}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x$$

注意本题技巧

按常规方法较繁

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right| + C \ (x \neq 0)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$$

按常规方法解:

第一步 令 $x^4+1=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$

比较系数定 a, b, c, d. 得

$$x^4+1=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

第二步 化为部分分式. 即令

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}$$

$$=\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

比较系数定 A, B, C, D.

第三步 分项积分.

此解法较繁！

2、三角函数有理式的积分

由三角函数和常数经过有限次四则运算构成的函数称为三角有理式．一般记为

$$R(\sin x, \cos x)$$

$$\because \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2},$$

$$\cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

令$u=\tan\frac{x}{2}$ $\quad x=2\arctan u$（万能置换公式）

$$\boxed{\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\quad \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\quad dx=\frac{2}{1+u^2}du}$$

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2u}{1+u^2},\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}du.$$

例5 求 $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx.$

解 由万能置换公式 $\sin x=\dfrac{2u}{1+u^2},$

$$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2} \qquad dx=\frac{2}{1+u^2}du,$$

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx=\int \frac{2u}{(1+u)(1+u^2)}du$$

$$=\int \frac{2u+1+u^2-1-u^2}{(1+u)(1+u^2)}du$$

$$= \int \frac{(1+u)^2 - (1+u^2)}{(1+u)(1+u^2)} du = \int \frac{1+u}{1+u^2} du - \int \frac{1}{1+u} du$$

$$= \arctan u + \frac{1}{2}\ln(1+u^2) - \ln|1+u| + C$$

$$\because \quad u = \tan\frac{x}{2}$$

$$= \frac{x}{2} + \ln\left|\sec\frac{x}{2}\right| - \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

例6 求 $\int \frac{1}{\sin^4 x} dx.$

解（一） $u = \tan\frac{x}{2}$, $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, $dx = \frac{2}{1+u^2}du$,

$$\int \frac{1}{\sin^4 x} dx = \int \frac{1+3u^2+3u^4+u^6}{8u^4} du$$

$$= \frac{1}{8}\left[-\frac{1}{3u^3} - \frac{3}{u} + 3u + \frac{u^3}{3}\right] + C$$

$$= -\frac{1}{24\left(\tan\frac{x}{2}\right)^3} - \frac{3}{8\tan\frac{x}{2}} + \frac{3}{8}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{24}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^3 + C.$$

解（二）修改万能置换公式，令 $u = \tan x$

$$\sin x = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}, \quad dx = \frac{1}{1+u^2}du,$$

$$\int \frac{1}{\sin^4 x}dx = \int \frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^4} \cdot \frac{1}{1+u^2}du = \int \frac{1+u^2}{u^4}du$$

$$= -\frac{1}{3u^3} - \frac{1}{u} + C = -\frac{1}{3}\cot^3 x - \cot x + C.$$

解（三）可以不用万能置换公式.

$$\int \frac{1}{\sin^4 x} dx = \int \csc^2 x(1+\cot^2 x)dx$$

$$= \int \csc^2 x dx + \int \cot^2 x \boxed{\csc^2 x dx} = d(\cot x)$$

$$= -\cot x - \frac{1}{3}\cot^3 x + C.$$

结论 比较以上三种解法，便知万能置换不一定是最佳方法，故三角有理式的计算中先考虑其它手段，不得已才用万能置换.

例7 求 $\int \frac{1+\sin x}{\sin 3x+\sin x}dx.$

解 $\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin 3x+\sin x}dx=\int \frac{1+\sin x}{2\sin 2x\cos x}dx$$

$$=\int \frac{1+\sin x}{4\sin x\cos^2 x}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int \frac{1}{\sin x\cos^2 x}dx+\frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^2 x}dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\sin x}dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{1}{\cos^2 x}d(\cos x)+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\sin x}dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$=\frac{1}{4\cos x}+\frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{4}\tan x+C.$$

3、简单无理函数的积分

讨论类型 $R(x,\sqrt[n]{ax+b})$, $R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}})$,

解决方法 作根式代换去掉根号.

例8 求 $$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$$

解 令 $\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t \Rightarrow \frac{1+x}{x}=t^2$,

$$x=\frac{1}{t^2-1},\qquad dx=-\frac{2tdt}{\left(t^2-1\right)^2},$$

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx=-\int\left(t^2-1\right)t\frac{2t}{\left(t^2-1\right)^2}dt=-2\int\frac{t^2dt}{t^2-1}$$

$$=-2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=-2t-\ln\frac{t-1}{t+1}+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\ln\left[x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)^2\right]+C.$$

例9 求 $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx.$

解 令 $t^6 = x+1 \Rightarrow 6t^5dt = dx,$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx = \int \frac{1}{t^3+t^2}\cdot 6t^5dt$$

$$= 6\int \frac{t^3}{t+1}dt \quad = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C$$

$$= 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3\sqrt[6]{x+1} - 6\ln(\sqrt[6]{x+1}+1) + C.$$

说明 无理函数去根号时, 取根指数的最小公倍数.

例10 求 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+1}}dx.$

解 先对分母进行有理化

$$原式=\int \frac{x(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+1})}{(\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+1})(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+1})}dx$$

$$=\int(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+1})dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\sqrt{3x+1}d(3x+1)-\frac{1}{2}\int\sqrt{2x+1}d(2x+1)$$

$$=\frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

3.2 定积分

$$\text{不定积分}\begin{cases}\text{换元积分法}\\[2em]\text{分部积分法}\end{cases}\longrightarrow\text{定积分}\begin{cases}\text{换元积分法}\\[2em]\text{分部积分法}\end{cases}$$

一、换元积分法

定理 假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 满足条件：

（1）$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$；

（2）$\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）上具有连续导数，且其值域 $R_{\varphi}\subset[a,\ b]$；

则 有 $\int_a^b f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

说明:

1) 当 $\beta < \alpha$，即区间换为 $[\beta, \alpha]$ 时， 定理 1 仍成立 .

2) 必需**注意换元必换限**，原函数中的变量不必代回 .

3) 换元公式也可反过来使用，即

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (\text{令 } x = \varphi(t))$$

或配元 $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\underline{\varphi'(t)\mathrm{d}t} = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\mathrm{d}\varphi(t)$

$\boxed{\text{配元不换限}}$

命题 3.1 当 $f(x)$在$[-a,a]$上连续，且有

① $f(x)$为偶函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx;$$

② $f(x)$为奇函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

命题 3.2 若 $f(x)$在$[0,1]$上连续，则

① $$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx;$$

② $$\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx.$$

例1 计算$\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx.$

解 原式$=\int_{-1}^{1}\boxed{\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}}dx+\int_{-1}^{1}\boxed{\frac{x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}}dx$

偶函数　　奇函数

$$=4\int_{0}^{1}\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=4\int_{0}^{1}\frac{x^2(1-\sqrt{1-x^2})}{1-(1-x^2)}dx$$

$$=4\int_{0}^{1}(1-\sqrt{1-x^2})dx=4-\boxed{4\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}dx}$$

单位圆的面积

$$=4-\pi.$$

例 2 计算$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

解

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}d(\cos x)=-\frac{\pi}{2}\left[\arctan(\cos x)\right]_0^{\pi}$$

$$=-\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{4}.$$

例3 求 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}dx.$

x	0	$\ln 2$
t	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$

解 令 $e^{-x}=\sin t,$

则 $x=-\ln\sin t, dx=-\dfrac{\cos t}{\sin t}dt.$

$$原式=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\cos t\left(-\frac{\cos t}{\sin t}\right)dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{\sin t}dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin t}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin t dt=\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

二、分部积分法

设函数$u(x)$、$v(x)$在区间 $[a,b]$ 上具有连续导数，则有

$$\int_a^b u dv = \left[uv\right]_a^b - \int_a^b v du$$

例1 计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx.$

解 令 $u = \arcsin x, \quad dv = dx,$

则 $du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = x,$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx = \left[x \arcsin x\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2)$$

$$= \frac{\pi}{12} + \left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

例2 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{1+\cos 2x}$.

解 $\because 1+\cos 2x = 2\cos^2 x,$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{1+\cos 2x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{2\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2} d(\tan x)$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[\ln\sec x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}.$$

例3 计算 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}dx.$

解
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}dx = -\int_0^1 \ln(1+x)d\frac{1}{2+x}$$

$$= -\left[\frac{\ln(1+x)}{2+x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2+x}d\ln(1+x)$$

$$= -\frac{\ln 2}{3} + \int_0^1 \boxed{\frac{1}{2+x}\cdot\frac{1}{1+x}}dx \longrightarrow \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x}$$

$$= -\frac{\ln 2}{3} + [\ln(1+x) - \ln(2+x)]_0^1 = \frac{5}{3}\ln 2 - \ln 3.$$

例4　设 $f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt$，求 $\int_0^1 xf(x)dx$.

解　因为$\frac{\sin t}{t}$没有初等形式的原函数，

无法直接求出 $f(x)$，所以采用**分部积分法**

$$\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)d(x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\left[x^2 f(x)\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 df(x)$$

$$=\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)dx$$

$$\because\ f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt,\qquad f(1)=\int_1^1\frac{\sin t}{t}dt=0,$$

$$f'(x)=\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2x=\frac{2\sin x^2}{x},$$

$$\therefore \int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 2x\sin x^2 dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 \sin x^2 dx^2$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}(\cos 1-1).$$

例5 证明 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin x|\,\mathrm{d}x$ 是以 π 为周期的函数.

证 $f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\pi+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\,\mathrm{d}u$

令 $u=t+\pi$

$$=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(t+\pi)|\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin x|\,\mathrm{d}x$$

$$=f(x)$$

$\therefore f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数.

例6 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$，试证 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,\mathrm{d}x$

解：右端 $=\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,\mathrm{d}f'(x)$ 分部积分积分

$$=\frac{1}{2}\Big[(x-a)(x-b)f'(x)\Big]\Big|_a^b-\frac{1}{2}\int_a^b f'(x)(2x-a-b)\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\int_a^b (2x-a-b)\,\mathrm{d}f(x)$$ 再次分部积分

$$=-\frac{1}{2}\Big[(2x-a-b)f(x)\Big]\Big|_a^b+\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\text{左端}$$

例7 设 $f(t)\in C_1$, $f(1)=0$, $\int_1^{x^3} f'(t)\,\mathrm{d}t=\ln x$, 求 $f(e)$.

解法1

$$\ln x=\int_1^{x^3} f'(t)\,\mathrm{d}t=f(x^3)-f(1)=f(x^3)$$

令 $u=x^3$, 得

$$f(u)=\ln\sqrt[3]{u}=\frac{1}{3}\ln u \Longrightarrow f(e)=\frac{1}{3}.$$

例7 设 $f(t)\in C_1$, $f(1)=0$, $\int_1^{x^3} f'(t)\,\mathrm{d}t=\ln x$, 求 $f(e)$.

解法2 对已知等式两边求导，得 $3x^2 f'(x^3)=\dfrac{1}{x}$

令 $u=x^3$, 得

$$f'(u)=\frac{1}{3u}$$

$$\therefore\quad f(e)=\int_1^e f'(u)\,\mathrm{d}u+f(1)=\frac{1}{3}\int_1^e\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{3}$$

思考: 若改题为 $\int_1^{x^3} f'(\sqrt[3]{t})\,\mathrm{d}t=\ln x$, $f(e)=?$

提示：两边求导，得

$$f'(x)=\frac{1}{3x^3},\quad f(e)=\int_1^e f'(x)\,\mathrm{d}x=\cdots$$

例8 设 $f''(x)$在 $[0,1]$ 连续，且

$$f(0)=1,\ f(2)=3,\quad f'(2)=5,$$

求$\int_0^1 x f''(2x)\mathrm{d}x$.

解: $\int_0^1 x \underline{f''(2x)\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,\mathrm{d}f'(2x)$ （分部积分）

$$=\frac{1}{2}\left[\left. x f'(2x)\right|_0^1 - \int_0^1 f'(2x)\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{5}{2}-\frac{1}{4}\left. f(2x)\right|_0^1 = 2$$

三、杂题

1、分段积分

例1 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin 2x}\,dx.$

解 原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x|\,dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)dx$$

$$= 2\sqrt{2} - 2.$$

例2　求 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}[\frac{\sin x}{x^8+1}+\sqrt{\ln^2(1-x)}]dx.$

解　$$原式=0+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left|\ln(1-x)\right|dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\ln(1-x)dx-\int_{0}^{\frac{1}{2}}\ln(1-x)dx$$

$$=\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{1}{2}.$$

例3 求 $\int_{-2}^{2}\min\{\frac{1}{|x|},x^2\}dx.$

解 $\because \min\{\frac{1}{|x|},x^2\}=\begin{cases} x^2, & |x|\le 1 \\ \frac{1}{|x|}, & |x|>1 \end{cases}$ 是偶函数,

$$原式=2\int_0^2\min\{\frac{1}{|x|},x^2\}dx$$

$$=2\int_0^1 x^2dx+2\int_1^2\frac{1}{x}dx=\frac{2}{3}+2\ln 2.$$

2、“凑”积分

例4 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx.$

解 由 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx,$ 设 $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx,$

则 $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx=\frac{\pi}{2},$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos x+\sin x)}{\sin x+\cos x}=0.$$

故得 $2I=\frac{\pi}{2},$ 即 $I=\frac{\pi}{4}.$

3、循环利用公式，代数求解

例5 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin 2x dx.$

解 令 $2x = t$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin 2x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t dt.$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2\sin x\cos x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 + \ln\sin x + \ln\cos x) dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx = \frac{\pi}{4}\ln 2 + 2I \qquad \therefore I = -\frac{\pi}{4}\ln 2.$$

例6 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续,证明:

$$\int_0^\pi \frac{xf(\sin x)}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{f(\sin x)}{1+\cos^2 x}dx.$$

证 令 $x=\pi-t,\quad dx=-dt,$

$$左边 = \int_\pi^0 \frac{(\pi-t)f(\sin t)}{1+\cos^2 t}(-dt)$$

$$= \int_0^\pi \frac{(\pi-x)f(\sin x)}{1+\cos^2 x}dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{f(\sin x)}{1+\cos^2 x} dx - \int_0^{\pi} \frac{xf(\sin x)}{1+\cos^2 x} dx$$

即 $$2\int_0^{\pi} \frac{xf(\sin x)}{1+\cos^2 x} dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{f(\sin x)}{1+\cos^2 x} dx$$

$$\therefore \quad \int_0^{\pi} \frac{xf(\sin x)}{1+\cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{f(\sin x)}{1+\cos^2 x} dx.$$

4、难得糊涂，顺势而上

例7 设 $f(x)=\int_0^x e^{-y^2+2y}dy$，求 $\int_0^1 (x-1)^2 f(x)dx$.

解 原式 $=\int_0^1 (x-1)^2[\int_0^x e^{-y^2+2y}dy]dx$

$$=[\frac{1}{3}(x-1)^3\int_0^x e^{-y^2+2y}dy]_0^1-\int_0^1\frac{1}{3}(x-1)^3 e^{-x^2+2x}dx$$

$$=-\frac{1}{6}\int_0^1 (x-1)^2 e^{-(x-1)^2+1}d[(x-1)^2]$$

$$\overset{\text{令}(x-1)^2=u}{=\!=\!=}-\frac{e}{6}\int_1^0 ue^{-u}du=-\frac{1}{6}(e-2).$$

四、反常积分

例1 计算反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

解 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{1}{1+x^2}dx+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left[\arctan x\right]_a^0+\lim_{b\to+\infty}\left[\arctan x\right]_0^b$$

$$=-\lim_{a\to-\infty}\arctan a+\lim_{b\to+\infty}\arctan b=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

例2 计算反常积分 $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx.$

解

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = -\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \sin \frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= -\lim_{b \to +\infty} \int_{\frac{2}{\pi}}^{b} \sin \frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{b \to +\infty} \left[\cos \frac{1}{x}\right]_{\frac{2}{\pi}}^{b}$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left[\cos \frac{1}{b} - \cos \frac{\pi}{2}\right] = 1.$$

例 3 证明反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 当 $p>1$ 时收敛，

当 $p\le 1$ 时发散.

证 (1) $p=1$, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx=[\ln x]_1^{+\infty}=+\infty$,

(2) $p\ne 1$, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & p<1\\ \frac{1}{p-1}, & p>1\end{cases}$

因此当 $p>1$ 时反常积分收敛，其值为 $\frac{1}{p-1}$;

当 $p\le 1$ 时反常积分发散.

例 4 证明反常积分$\int_a^{+\infty} e^{-px}dx$当$p>0$时收敛，当$p<0$时发散.

证 $$\int_a^{+\infty} e^{-px}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b e^{-px}dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{e^{-px}}{p}\right]_a^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{e^{-pa}}{p}-\frac{e^{-pb}}{p}\right) = \begin{cases} \dfrac{e^{-ap}}{p}, & p>0 \\ \infty, & p<0 \end{cases}$$

即当$p>0$时收敛，当$p<0$时发散.

例5 计算反常积分 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a>0).$

解 $\because \lim\limits_{x\to a-0} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = +\infty,$

$\therefore x=a$ 为被积函数的无穷间断点.

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{a-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^{a-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0} \left[\arcsin\frac{a-\varepsilon}{a} - 0\right] = \frac{\pi}{2}.$$

例 6 证明反常积分$\int_0^1 \frac{1}{x^q}dx$当$q<1$时收敛，当$q\geq 1$时发散.

证 (1) $q=1$, $\int_0^1 \frac{1}{x^q}dx = \int_0^1 \frac{1}{x}dx = [\ln x]_0^1 = +\infty$,

(2) $q\neq 1$, $\int_0^1 \frac{1}{x^q}dx = \left[\frac{x^{1-q}}{1-q}\right]_0^1 = \begin{cases} +\infty, & q>1 \\ \frac{1}{1-q}, & q<1 \end{cases}$

因此当$q<1$时反常积分收敛，其值为$\frac{1}{1-q}$；当$q\geq 1$时反常积分发散.

例7 计算反常积分 $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$.

解 $$\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\varepsilon\to0+}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x\ln x}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0+}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{\varepsilon\to0+}\left[\ln(\ln x)\right]_{1+\varepsilon}^2$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0+}\left[\ln(\ln 2) - \ln(\ln(1+\varepsilon))\right]$$

$= \infty$. 故原反常积分发散.

例8 计算反常积分 $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$. $x=1$瑕点

解 $$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \left(\int_0^1 + \int_1^3\right)\frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = 3$$

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{1+\varepsilon}^{3} \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = 3\cdot\sqrt[3]{2},$$

$$\therefore \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = 3(1+\sqrt[3]{2}).$$

例9 求下列反常积分：

$$(1)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9};\quad (2)\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}.$$

解 (1) 原式 $=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+4x+9}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{(x+2)^2+5}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{(x+2)^2+5}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Big|_a^0+\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Big|_0^b$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

(2) $\because \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x\sqrt{3x^2-2x-1}} = \infty,$

$\therefore x = 1$ 为 $f(x)$ 的瑕点.

原式 $= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[-\int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{d(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{2^2-(1+\frac{1}{x})^2}}\right]$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0^+} \arcsin\frac{1+\frac{1}{x}}{2}\Bigg|_{1+\varepsilon}^{2} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{3}{4}.$$

例7 设$f(x)$在$[a,b]$上二次可微，且$f''(x)$在$[a,b]$上可积，记

$$B_n=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n}\right),$$

试证：$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 B_n=\dfrac{(b-a)^2}{24}[f'(b)-f'(a)].$

证 在$[a,b]$上作n等份，则

$$x_i=a+\frac{b-a}{n}i \quad (i=0,1,2,\cdots,n),$$

$$B_n=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x-\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f\left(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n}\right)\mathrm{d}x$$

$$B_n=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x-\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f\left(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[f(x)-f\left(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n}\right)\right]\mathrm{d}x$$

对$f(x)$在$[x_{i-1},x_i]$的中点$\xi_i=a+\dfrac{2i-1}{2}\cdot\dfrac{b-a}{n}$处作Taylor展开，则有

$$f(x)=f(\xi_i)+f'(\xi_i)(x-\xi_i)+\frac{f''(\eta_i)}{2}(x-\xi_i)^2$$

(η_i介于x与ξ_i之间)

$$\therefore B_n=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[f'(\xi_i)(x-\xi_i)+\frac{f''(\eta_i)}{2}(x-\xi_i)^2\right]\mathrm{d}x$$

$$\therefore B_n=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f'(\xi_i)(x-\xi_i)+\frac{f''(\eta_i)}{2}(x-\xi_i)^2]\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{f''(\eta_i)}{2}(x-\xi_i)^2\mathrm{d}x \quad (\because \int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-\xi_i)\mathrm{d}x=0.)$$

设$m_i=\min\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f''(x)$，$M_i=\max\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f''(x)$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-\xi_i)^2\mathrm{d}x\le B_n\le\sum_{i=1}^{n}\frac{M_i}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-\xi_i)^2\mathrm{d}x$$

化简整理可得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{24n^3}(b-a)^3\le B_n\le\sum_{i=1}^{n}\frac{M_i}{24n^3}(b-a)^3,$$

因此

$$\frac{(b-a)^2}{24}\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}m_i \le n^2 B_n \le \frac{(b-a)^2}{24}\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}M_i,$$

因为$f''(x)$在$[a,b]$上可积，所以根据定积分定义知

$$\int_a^b f''(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}m_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}M_i$$

$$= f'(b)-f'(a).$$

所以由夹逼定理可知

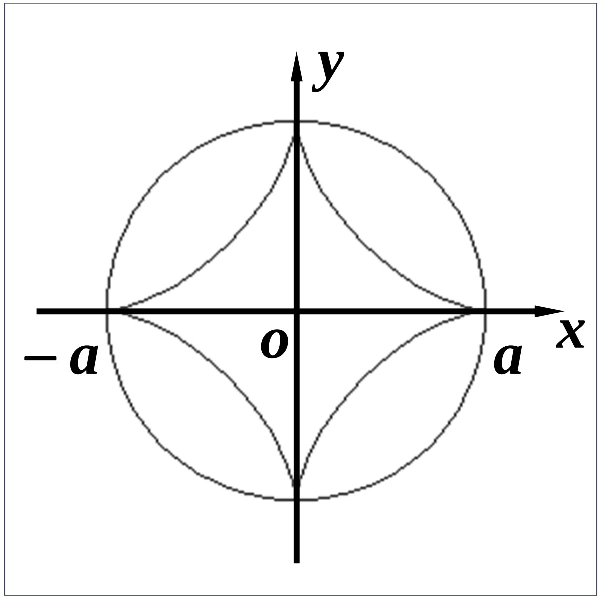
$$\lim_{n\to\infty} n^2 B_n = \frac{(b-a)^2}{24}[f'(b)-f'(a)].$$

3.3 定积分在几何与物理上的应用

一、几何方面的应用

例1 已知

星形线 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ $(a > 0)$



求 1、它所围成的面积;

2、它的弧长;

3、它绕轴旋转而成的旋转体体积及表面积.

解 1、设面积为 A. 由对称性, 有

$$A = 4\int_0^a y\,dx$$

$$= 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)dt$$

$$= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2[\sin^4 t - \sin^6 t]dt = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

2、设弧长为 L. 由对称性, 有

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\cos t\sin t\,dt = 6a.$$

3、设旋转体的表面积为 S, 体积为 V.

由对称性, 有

$$S=2\int_0^a 2\pi y\sqrt{1+y_x'^2}dx$$

$$=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\cdot 3a\cos t\sin t dt=\frac{12}{5}\pi a^2.$$

$$V=2\int_0^a \pi y^2 dx=2\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \pi a^2\sin^6 t\cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)dt$$

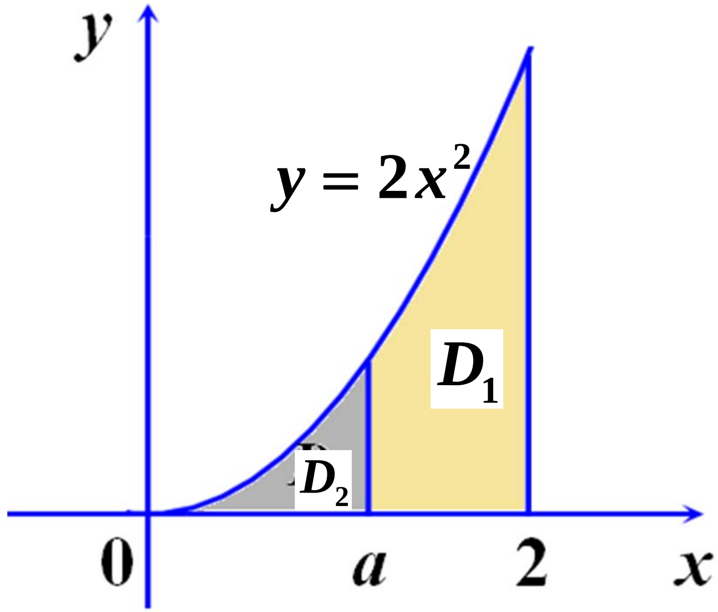
$$=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t(1-\sin^2 t)dt=\frac{32}{105}\pi a^3.$$

例 3 D_1是由抛物线$y=2x^2$和直线$x=a, x=2$及$y=0$所围成的平面区域；D_2是由抛物线$y=2x^2$和直线$x=a, y=0$所围成的平面区域，其中$0<a<2$.(1)试求D_1绕x轴旋转而成的旋转体体积V_1;(2)D_2绕y轴而成的旋转体体积V_2(如图)。问a当为何值时，V_1+V_2取得最大值?

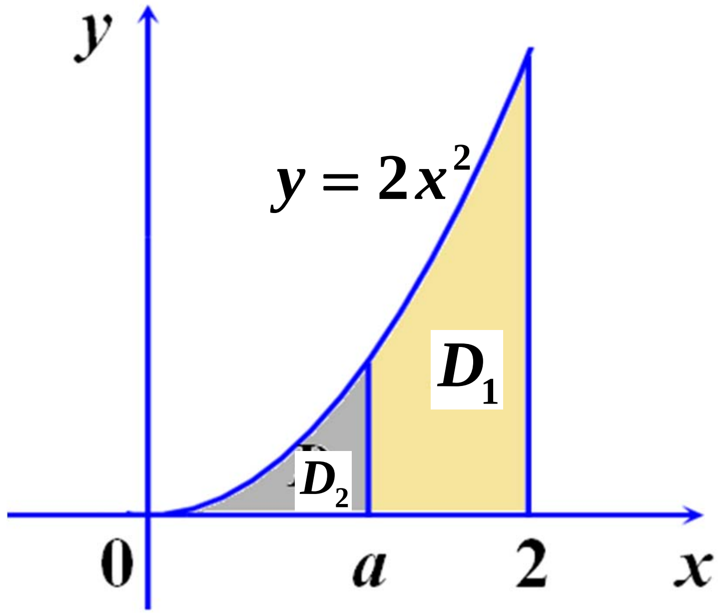
解 $$V_1=\pi\int_a^2 (2x^2)^2 dx$$

$$=\frac{4\pi}{5}(32-a^5)$$

$$V_2=\pi a^2\cdot 2a^2-\pi\int_0^{2a^2}\frac{y}{2}dy=\pi a^4$$



$$V = V_1 + V_2 = \frac{4}{5}\pi(32 - a^5) + \pi a^4$$



因为

$$V' = 4\pi a^3(1 - a) = 0.$$

得区间(0,2)内的唯一驻点a=1. 又

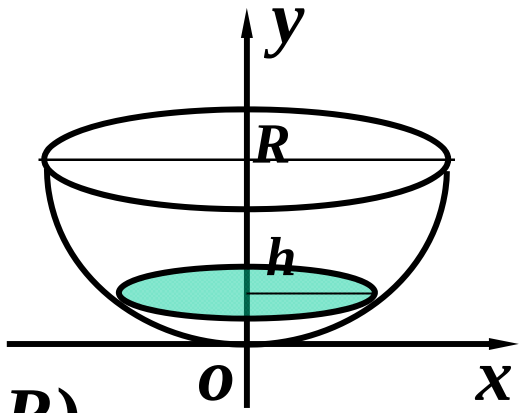
$$V''\Big|_{a=1} = -4\pi < 0,$$

因此a=1是极大值点，也是最大值点.

此时$V_1 + V_2$的最大值为$\dfrac{129}{5}\pi.$

二、物理方面的应用

例1 以每秒 a 的流量往半径为 R 的半球形水池内注水. (1) 求在池中水深 $h\ (0<h<R)$时水面上升的速度; (2) 若再将满池水全部抽出, 至少需作功多少?



解 如图所示建立坐标系.

半圆的方程为

$$x^2+(y-R)^2=R^2 \quad (0\le y\le R).$$

于是对半圆上任一点, 有

$$x^2=R^2-(y-R)^2=2Ry-y^2\ (0\le y\le R).$$

(1) 因已知半球可看作此半圆绕 y 轴旋转而成的立体,故半球内高为 h 的球缺的体积即水深为 h 时水池内水的体积为

$$V(h) = \int_0^h \pi x^2 dy = \int_0^h \pi(2Ry - y^2)dy$$

又设水深 h 时已注水的时间为 t , 则有 $V(h) = at$,

$$即 \int_0^h \pi(2Ry - y^2)dy = at$$

两边对 t 求导,得 $\pi(2Rh - h^2)\dfrac{dh}{dt} = a,$

故所求速度为 $\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{a}{\pi(2Rh-h^2)}$.

(2) 将满池的水全部抽出所需的最小功即将池内水全部提升到池沿高度所需的功.

抽水时使水位从 $y\ (0\le y\le R)$降到 $y-dy$ 所需的功约为 $\rho\pi x^2 dy(R-y)$, $(\rho=1$ 水的比重)

又 $x^2=2Ry-y^2$,

即功元素 $dW=\rho\pi(2Ry-y^2)(R-y)dy$.

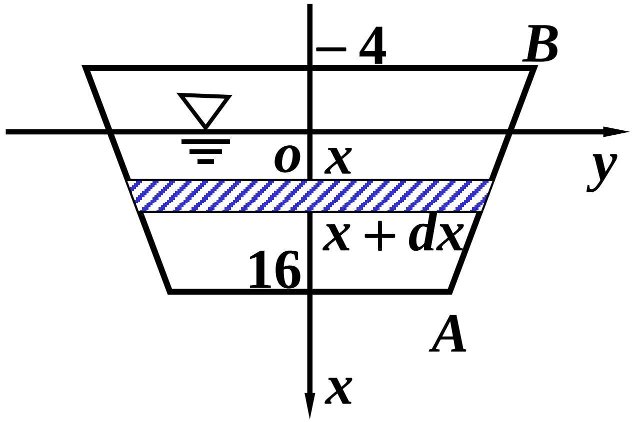
故将满池水全部提升到池沿高度所需功为

$$W = \int_0^R \rho\pi(2Ry - y^2)(R - y)dy$$

$$= \pi\int_0^R (2R^2 y - 3Ry^2 + y^3)dy$$

$$= \frac{\pi}{4}R^4.$$

例2 一等腰梯形闸门,如图所示,梯形的上下底分别为 50 米和 30 米,高为 20 米,如果闸门顶部高出水面 4 米,求闸门一侧所受的水的静压力.



解 如图建立坐标系,

则梯形的腰 AB 的方程为

$$y=-\frac{1}{2}x+23.$$

此闸门一侧受到静水压力为

$$P = 2\int_0^{16} \rho g x\left(-\frac{1}{2}x + 23\right)dx$$

$$= \rho g\left(-\frac{x^3}{3} + 23x^2\right)\Big|_0^{16}$$

$$= \rho g\left(-\frac{1}{3}\times 4096 + 23\times 256\right)$$

$$= 4522.67\rho g$$

$$\approx 4.43\times 10^7\ (牛).$$

3.4　综合习题讲解

一、 填空题

1. $\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x =$ ________.

分析

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= x - \arctan x + C.$$

2. $\int x\sqrt{3-2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{10}(3-2x)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}(3-2x)^{\frac{3}{2}} + C.$

分析 $\int x\sqrt{3-2x}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{-2}\int\left[(3-2x)\sqrt{3-2x} - 3\sqrt{3-2x}\right]\mathrm{d}x$$ 恒等变换

$$= -\frac{1}{2}\int(3-2x)\sqrt{3-2x}\,\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int\sqrt{3-2x}\,\mathrm{d}x$$ 分项积分

$$= -\frac{1}{2}\int(3-2x)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int(3-2x)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$ 凑微分

$$= \frac{1}{4}\int(3-2x)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}(3-2x) - \frac{3}{4}\int(3-2x)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(3-2x) = \cdots$$

3. $\displaystyle\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x =$ ______________.

分析 $\displaystyle\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

$$= 2\int \arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}(\sqrt{x})$$ 凑微分

$$= 2\left(\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} - \int \sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right)$$ 分部积分

$$= 2\left(\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x\right)$$

$$= 2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + C.$$

4.设 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$，则 $\int f(x)\mathrm{d}x=$ ________.

分析 需要先求出 $f(x)$.为此，在 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ 中用 e^x 替换其中的 x，则得

$$f(x)=\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}.$$

因此

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=-\int\ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})$$ 凑微分

$$=-\left(\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)-\int\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x\right)$$ 分部积分

$$= -\left(e^{-x}\ln(1+e^{x}) - \int \frac{1}{1+e^{x}}dx\right)$$

$$= -\left(e^{-x}\ln(1+e^{x}) - \int \frac{(1+e^{x})-e^{x}}{1+e^{x}}dx\right)$$

$$= -\left[e^{-x}\ln(1+e^{x}) - \int \left(1-\frac{e^{x}}{1+e^{x}}\right)dx\right]$$

$$= -\left[e^{-x}\ln(1+e^{x}) - x + \int \frac{e^{x}}{1+e^{x}}dx\right]$$

$$= -\left[(e^{-x}+1)\ln(1+e^{x}) - x\right] + C.$$

二、 计算题

1. 注意下面几个类似题的做法

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{(1+e^x)-e^x}{1+e^x}dx = \int \left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx$$

$$= x - \int \frac{d(e^x)}{1+e^x} = x - \ln(1+e^x) + C.$$

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx$$

$$= -\ln(e^{-x}+1) + C.$$

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{e^x}{(e^x)^2 + 1} dx = \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2 + 1}$$

$$= \arctan e^x + C.$$

$$\int \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx = \int \frac{e^x}{(e^x)^2 - 1} dx = \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2 - 1}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1} + C.$$

2.求$\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$.

解 按常规做法是令 $t=\arctan x$. 用**凑微分**积分法，即

$$\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x=\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{1/2}(1+x^2)}\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}\cdot e^{\arctan x}\mathrm{d}(\arctan x)=\int \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}\mathrm{d}(e^{\arctan x})$$

$$=\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{1/2}}-\int e^{\arctan x}\cdot \mathrm{d}\left(\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}\right)$$

$$=\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{1/2}}-\int e^{\arctan x}\cdot d\left(\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}\right)$$

$$=\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{1/2}}-\int e^{\arctan x}\cdot\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$=\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{1/2}}-\int\frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}d(\arctan x)$$

$$=\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{1/2}}-\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}d(e^{\arctan x})$$

$$=\frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\left[\frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int e^{\arctan x}d\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right]$$

$$= \frac{x e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \left[\frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int e^{\arctan x} d\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) \right]$$

$$= \frac{x e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} + \int e^{\arctan x} \left(-\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} \right) dx$$

$$= \frac{x e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx.$$

把右端最后一项移到左端合并，则得

$$\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \frac{(x-1)}{2} \frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

3. 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，且当 $x\geq 0$ 时，$f(x)F(x)=\dfrac{xe^{x}}{2(1+x)^{2}}$.已知$F(0)=1, F(x)>0$，求$f(x)$.

解 因为$F(x)$为$f(x)$的原函数，即$F'(x)=f(x)$，所以

$$F'(x)F(x)=\frac{xe^{x}}{2(1+x)^{2}},$$

即

$$2F'(x)F(x)=\frac{xe^{x}}{(1+x)^{2}}.$$

在两端积分，即

$$\int 2F'(x)F(x)\mathrm{d}x=\int\frac{xe^{x}}{(1+x)^{2}}\mathrm{d}x.$$

$$\int 2F'(x)F(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

因此

$$F^2(x) = \int \frac{x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{(1+x)^2} = \int \frac{[(1+x)\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x]\mathrm{d}x}{(1+x)^2}$$

$$= \int \frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{1+x} - \int \frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{(1+x)^2} = \int \frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{1+x} + \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

$$= \int \frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{1+x} + \left(\frac{\mathrm{e}^x}{1+x} - \int \frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{1+x}\right) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x} + C.$$

由$F(0)=1$,得$C=0$,因此

$$F^2(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{1+x},$$

而$F(x)>0$,所以

$$F(x)=\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}},$$

于是

$$f(x)=F'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}}}\frac{\mathrm{e}^x(1+x)-\mathrm{e}^x\cdot 1}{(1+x)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{\mathrm{e}^x}}\frac{\mathrm{e}^x x}{(1+x)^2}=\frac{x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}.$$

有关变上（下）限积分的基本公式：设

$$F(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt,$$

f连续，则

$$F'(x)=f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x).$$

4 设$f(x)$在$(0,+\infty)$内可导，$f(0)=0$,反函数为$g(x)$,且

$\int_0^{f(x)} g(t)dt = x^2e^x$,求$f(x)$.

解 方程两边对x求导，得

$$g[f(x)]f'(x) = 2xe^x + x^2e^x,$$

于是

$$xf'(x) = x(2+x)e^x,$$

故

$$f'(x) = (x+2)e^x,$$

$$f'(x) = (x+2)e^x,$$

于是

$$f(x) = (x+1)e^x + C,$$

由 $f(0) = 0$,得

$$C = -1.$$

则

$$f(x) = (x+1)e^x - 1.$$

三、证明题

1. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)\neq 0, x\in[a,b]$, 试证：存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $g(\xi)\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$

证一　令　$F(x)=\int_a^x f(t)dt,\quad G(x)=\int_a^x g(t)dt.$

$F(x),G(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足柯西中值定理有关条件，故存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}.$$

下面略.

1. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)\neq 0, x\in[a,b]$，试证：存在 $\xi\in(a,b)$，使 $g(\xi)\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

证二 令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt,\quad G(x)=\int_a^x g(t)dt.$

$$W(x)=F(b)\cdot\int_a^x g(t)dt - G(b)\int_a^x f(t)dt.$$

$W(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且

$$W(a)=W(b)=0.$$

根据罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $W'(\xi)=0.$

下面略.

2. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的导数连续，且 $f(0)=0, f'(x)\geq 0, g'(x)\geq 0$.证明对任何 $a\in[0,1]$ 有

$$\int_0^a g(x)f'(x)dx+\int_0^1 f(x)g'(x)dx\geq f(a)g(1).$$

证 设

$$F(x)=\int_0^x g(t)f'(t)dt+\int_0^1 f(t)g'(t)dt-f(x)g(1),\ x\in[0,1].$$

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上的导数连续，并且

$$F'(x)=g(x)f'(x)-f'(x)g(1)=f'(x)[g(x)-g(1)].$$

由于 $x\in[0,1]$ 时，$f'(x)\geq 0, g'(x)\geq 0$，因此 $F(x)\leq 0$,

即$F(x)$在[0,1]上单调递减。 注意到

$$F(1)=\int_0^1 g(t)f'(t)dt+\int_0^1 f(t)g'(t)dt-f(1)g(1)$$

其中

$$\int_0^1 g(t)f'(t)dt=\int_0^1 g(t)df(t)=g(t)f(t)\Big|_0^1-\int_0^1 f(t)g'(t)dt,$$

故

$$F(1)=0.$$

下面略. 此题为05年考研真题.

$$F(x)=\int_0^x g(t)f'(t)dt+\int_0^1 f(t)g'(t)dt-f(x)g(1),\ x\in[0,1].$$

四、竞赛真题选讲

1. 设抛物线 $y = ax^2 + bx + 2\ln c$ 过原点，当 $0 \le x \le 1$ 时，$y \ge 0$，又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为1/3 . 试确定 a, b, c, 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小. 2009预赛

解 因抛物线过原点，故 $c=1$, 由题设有

$$\frac{1}{3} = \int_0^1 (ax^2 + bx)\mathrm{d}x = \frac{a}{3} + \frac{b}{2}, \Rightarrow b = \frac{2}{3}(1-a),$$

又因

$$V = \pi \int_0^1 (ax^2 + bx)^2 \mathrm{d}x$$

$$V=\pi\int_0^1 (ax^2+bx)^2\mathrm{d}x=\pi[\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{3}b^2]$$

$$=\pi[\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{3}a(1-a)+\frac{4}{27}(1-a)^2]$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}=\pi[\frac{2}{5}a+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}a-\frac{8}{27}(1-a)]=0,\Rightarrow a=-\frac{5}{4},$

$$\Rightarrow b=\frac{2}{3}(1-a)=\frac{3}{2}.$$

又因

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}a^2}=\pi[\frac{2}{5}-\frac{2}{3}+\frac{8}{27}]=\frac{4}{135}\pi>0,$$

所以当$a=-5/4$,$b=3/2$,$c=1$时，体积最小.

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，并且无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.求 $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{1}{y}\int_0^y xf(x)\mathrm{d}x$.

2010年决赛

解 设 $I=\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$,

$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, $\Rightarrow F'(x)=f(x), F(+\infty)=I$.

对于任意的 $y>0$，则有

$$\frac{1}{y}\int_0^y xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{y}\int_0^y x\mathrm{d}F(x)=F(y)-\frac{1}{y}\int_0^y F(x)\mathrm{d}x$$

根据洛比达法则和变上限积分的求导公式可得

$$\frac{1}{y}\int_0^y xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{y}\int_0^y x\mathrm{d}F(x)=F(y)-\frac{1}{y}\int_0^y F(x)\mathrm{d}x$$

根据洛比达法则和变上限积分的求导公式可得

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\int_0^y F(x)\mathrm{d}x=\lim_{y\to+\infty}F(y)=I.$$

因此

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\int_0^y xf(x)\mathrm{d}x=I-I=0.$$

3. 求不定积分 $I=\int(1+x-\frac{1}{x})\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x.$ 2012年决赛

分析 凑微分可以将问题化繁为简，注意到

$$\mathrm{d}(x+\frac{1}{x})=(1-\frac{1}{x^2})\mathrm{d}x$$

解 $I=\int\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x+\int(x-\frac{1}{x})\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$

$=\int\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x+\int x(1-\frac{1}{x^2})\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$

$=\int\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x+\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}=x\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}+C.$

4. 讨论 $$\int_0^{+\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^\alpha\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

的敛散性，其中α是一个实常数.　　　　2012年决赛

解 令 $f(x)=\dfrac{x}{\cos^2 x+x^\alpha\sin^2 x}$, 当$n\pi\le x\le(n+1)\pi$时,有

$$\frac{n\pi}{\cos^2 x+((n+1)\pi)^\alpha\sin^2 x}\le f(x)\le\frac{(n+1)\pi}{\cos^2 x+(n\pi)^\alpha\sin^2 x},$$

因为

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{A\cos^2 x+B\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{1}{A\cos^2 x+B\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{A\cos^2 x+B\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{1}{A\cos^2 x+B\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^2 x(A+B\tan^2 x)}\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{A+Bt^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{\sqrt{AB}}.$$

使得

$$\frac{n\pi^2}{((n+1)\pi)^{\alpha/2}}\le\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}f(x)\mathrm{d}x\le\frac{(n+1)\pi^2}{(n\pi)^{\alpha/2}},$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\pi^2}{((n+1)\pi)^{\alpha/2}}\le\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\le\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\pi^2}{(n\pi)^{\alpha/2}},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\pi^2}{((n+1)\pi)^{\alpha/2}}\le\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\le\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\pi^2}{(n\pi)^{\alpha/2}},$$

因为两端的级数与 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{1-\alpha/2}$ 具有相同的敛散性，

所以当α>4时，广义积分收敛；

当$\alpha\le 4$时，广义积分发散.

5. 计算 $\int_0^{+\infty} e^{-2x}|\sin x|\,\mathrm{d}x.$ **2012预赛**

解 由于 $$\int_0^{n\pi} e^{-2x}|\sin x|\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-2x}|\sin x|\,\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}(-1)^{k-1}e^{-2x}\sin x\mathrm{d}x$$

应用分部积分法

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}(-1)^{k-1}e^{-2x}\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{5}e^{-2k\pi}(1+e^{2\pi}).$$

所以 $$\int_0^{n\pi} e^{-2x}|\sin x|\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}(1+e^{2\pi})\sum_{k=1}^{n}e^{-2k\pi}$$

$$=\frac{1}{5}(1+e^{2\pi})\frac{e^{-2\pi}-e^{-2(n+1)\pi}}{1-e^{-2\pi}},$$

当$n\pi \le x < (n+1)\pi$时,

$$\int_0^{n\pi} e^{-2x}|\sin x|\,\mathrm{d}x \le \int_0^{x} e^{-2x}|\sin x|\,\mathrm{d}x \le \int_0^{(n+1)\pi} e^{-2x}|\sin x|\,\mathrm{d}x$$

令$n\to\infty$，由两边夹法则，得

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x}|\sin x|\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty}\int_0^{x} e^{-2x}|\sin x|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\frac{1+e^{2\pi}}{1-e^{-2\pi}}.$$

注：如果最后不用夹逼法则，而用

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x}|\sin x|\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-2x}|\sin x|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\frac{1+e^{2\pi}}{1-e^{-2\pi}}.$$

需先说明广义积分收敛.

6.求最小实数C，使得满足$\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x=1$的连续的函数$f(x)$都有

$$\int_0^1|f(\sqrt{x})|\mathrm{d}x\le C.$$

2012预赛

解 由于$\int_0^1|f(\sqrt{x})|dx=\int_0^1 2t|f(t)|dt\le 2\int_0^1|f(t)|dt=2.$

另一方面, 取$f_n(x)=(n+1)x^n$，则 $\int_0^1|f_n(x)|\mathrm{d}x=1.$

而 $\int_0^1|f_n(\sqrt{x})|dx=\int_0^1 2t|f_n(t)|dt=2\dfrac{n+1}{n+2}\to 2.$

因此最小的实数$C=2$.

7. 计算不定积分 $\int x\arctan x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x.$ 2013决赛

解 由于 $\int x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \ln(1+x^2)\mathrm{d}(1+x^2)$

$$= \frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2 + C.$$

则原式 $= \int \arctan x\mathrm{d}[\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2]$

$$= \frac{1}{2}[(`1+x^2)\ln(1+x^2) - x^2]\arctan x$$

$$-\frac{1}{2}\int [\ln(1+x^2) - \frac{x^2}{1+x^2}]dx$$

$$=\frac{1}{2}[(`1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2]\arctan x$$

$$-\frac{1}{2}\int[\ln(1+x^2)-\frac{x^2}{1+x^2}]dx$$

$$=\frac{1}{2}\arctan x[(`1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2-3]$$

$$-\frac{x}{2}\ln(1+x^2)+\frac{x}{2}+C.$$

8. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，证明： **2016决赛**

$$2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_x^b f(t)\mathrm{d}t=\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

证 方法1 令 $\varphi(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$，则

$$\varphi'(x)=-f(x),\quad \varphi(b)=0.$$

因此 $2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_x^b f(t)\mathrm{d}t=-2\int_a^b \varphi'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$

$$=-2\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}\varphi(x)=-\varphi^2(x)\Big|_a^b=\varphi^2(a)$$

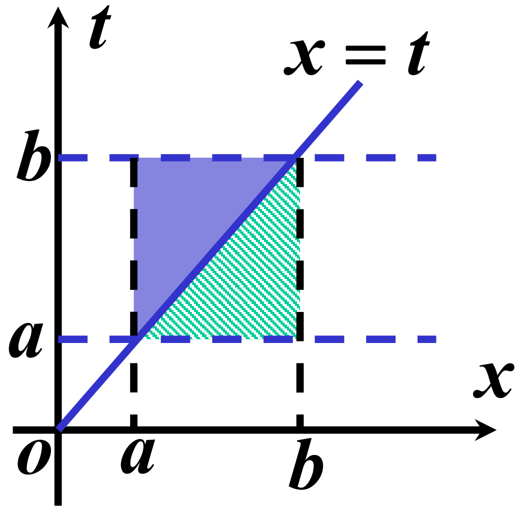
$$=\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

证毕.

8. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，证明： **2016决赛**

$$2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_x^b f(t)\mathrm{d}t=\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

证 方法2 交换积分次序，得



$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_x^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

因此

$$2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_x^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_x^b f(t)\mathrm{d}t+\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

五、考研真题选讲

1. $\int_{-1}^{1}(|x|+x)e^{-|x|}dx=$ ____________.

分析 对称区间上的积分应注意利用被积函数的对称性.

这里有

$$\int_{-1}^{1}xe^{-|x|}dx=0.$$

解

$$\int_{-1}^{1}(|x|+x)e^{-|x|}dx=\int_{-1}^{1}|x|e^{-|x|}dx+\int_{-1}^{1}xe^{-|x|}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}|x|e^{-|x|}dx=2\int_{0}^{1}xe^{-x}dx=-2\int_{0}^{1}xde^{-x}$$

$$=-2[xe^{-x}\Big|_0^1-\int_{0}^{1}e^{-x}dx]=2(1-2e^{-1}).$$

2. 设 $f(x)=\begin{cases} xe^{x^2}, & -\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}, \\ -1, & x\ge\frac{1}{2}. \end{cases}$ 则 $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)dx=$ ____.

分析 本题属于求分段函数的定积分，先换元：

$$x-1=t,$$

再利用对称区间上奇偶函数的积分性质即可.

2. 设 $f(x)=\begin{cases} xe^{x^2}, & -\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}, \\ -1, & x\ge\frac{1}{2}. \end{cases}$ 则 $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)dx=$ ___.

解 令 $x-1=t$,

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(t)dt=\int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} xe^{x^2}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)dx=0+(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$$

3. 设$f(x)=\begin{cases}1\,, x>0\\ 0\,, x=0\\ -1\,, x<0\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则

(A) $F(x)$在 $x=0$ 点不连续.

(B) $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，但在 $x=0$ 点不可导.

(C) $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，且满足$F'(x)=f(x)$.

(D) $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，但不一定满足$F'(x)=f(x)$.

分析 先求分段函数$f(x)$的变限积分

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt,$$

再讨论函数$F(x)$的连续性与可导性即可.

解 当$x<0$时，$F(x)=\int_0^x(-1)dt=-x$，当$x>0$时，

$F(x)=\int_0^x 1dt=x$，当$x=0$时，$F(0)=0$. 即

$$F(x)=|x|,$$

显然，$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，但在$x=0$点不可导.

故选(**B**).

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}\qquad F(x)=\int_0^x f(t)dt,$$

4． 设$F(x)=\begin{cases} e^{2x}, & x\le 0 \\ e^{-2x}, & x>0 \end{cases}$，$S$ 表示夹在 x 轴与曲线 $y=F(x)$之间的面积．对任何 $t>0$，$S_1(t)$表示矩形$-t\le x\le t$，$0\le y\le F(t)$的面积．求 (I) $S(t)=S-S_1(t)$ 的表达式； (II) $S(t)$的最小值.

分析 曲线$y=F(x)$关于y轴对称，x轴与曲线$y=F(x)$围成一无界区域，所以，面积S可用广义积分表示.

解 (I) $S=2\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx=-e^{-2x}\Big|_0^{+\infty}=1.$ $S_1(t)=2te^{-2t}$,

因此
$$S(t)=1-2te^{-2t},\quad \left(t\in\left(0,+\infty\right)\right).$$

$$S(t)=1-2te^{-2t},\quad \left(t\in\left(0,+\infty\right)\right).$$

(II) 由于

$$S'(t)=-2(1-2t)e^{-2t},$$

故$S(t)$的唯一驻点为 $t=\dfrac{1}{2}$. 又

$$S''(t)=8(1-t)e^{-2t},\qquad S''(\frac{1}{2})=\frac{4}{e}>0,$$

所以 $S(\dfrac{1}{2})=1-\dfrac{1}{e}$ 为极小值，它也是最小值.

5. 下列结论中正确的是

(A) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)}$与$\int_0^1\frac{dx}{x(x+1)}$都收敛.

(B) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)}$与$\int_0^1\frac{dx}{x(x+1)}$都发散.

(C) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)}$发散，$\int_0^1\frac{dx}{x(x+1)}$收敛.

(D) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)}$收敛，$\int_0^1\frac{dx}{x(x+1)}$发散.

分析 直接计算相应积分，判定其敛散性即可.

解 $$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)}=\left[\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right]_1^{+\infty}=\ln 2.$$

积分收敛.

$$\int_0^{1}\frac{dx}{x(x+1)}=\left[\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right]_0^{1}=0-(-\infty)=+\infty.$$

积分发散.

评注 本题是考查广义积分敛散性的判断.

6. 设函数$f(x)$与$g(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(x)\le g(x)$，且对任何$c\in(0,1)$

（A）$\int_{\frac{1}{2}}^{c} f(t)dt \ge \int_{\frac{1}{2}}^{c} g(t)dt.$　　（B）$\int_{\frac{1}{2}}^{c} f(t)dt \le \int_{\frac{1}{2}}^{c} g(t)dt.$

（C）$\int_{c}^{1} f(t)dt \ge \int_{c}^{1} g(t)dt.$　　（D）$\int_{c}^{1} f(t)dt \le \int_{c}^{1} g(t)dt.$

分析 本题主要考查定积分不等式的性质

解 因为$f(x)$与$g(x)$在$[0,1]$上连续,

则对任何$c\in(0,1)$, $f(x)$与$g(x)$在$[c,1]$上连续，且$f(x)\le g(x)$,所以 $\int_{c}^{1} f(t)\mathrm{d}t \le \int_{c}^{1} g(t)\mathrm{d}t.$

7. 在xoy坐标平面中，连续曲线 L 过点$M(1,0)$,其上任意点$P(x,y)(x\neq 0)$处的切线斜率与直线OP的斜率之差等于ax(常数$a>0$).(1)求 L 的方程；(2)当 L 与直线$y=ax$所围成平面图形的面积为时$\dfrac{8}{3}$,确定a的值.

解 (1) 设曲线L的方程为 $y=f(x)$,

则由题设可得

$$y'-\frac{y}{x}=ax.$$

这是一阶线性微分方程，其中 $P(x)=-\dfrac{1}{x},Q(x)=ax.$

$$y' - \frac{y}{x} = ax.$$

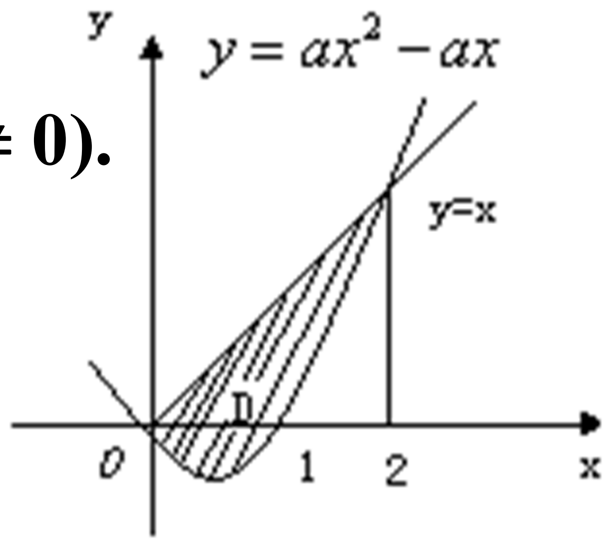
代入通解公式得

$$y = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left(\int axe^{-\int \frac{1}{x}dx}dx + C\right) = x(ax + C) = ax^2 + Cx.$$

又 $f(1) = 0$,所以 $C = -a$.

故曲线L的方程为 $y = ax^2 - ax \quad (x \neq 0)$.

(2) L与直线 $y = ax \quad (a > 0)$,



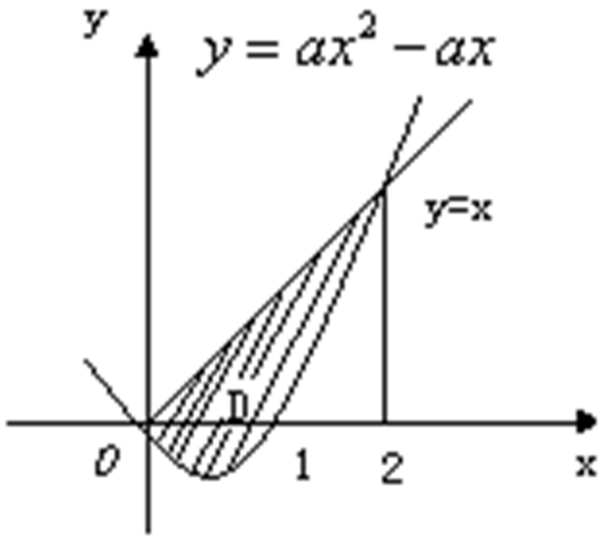
所围成平面图形如右图所示. 所以

$$D=\int_0^2\left[ax-\left(ax^2-ax\right)\right]\mathrm{d}x$$

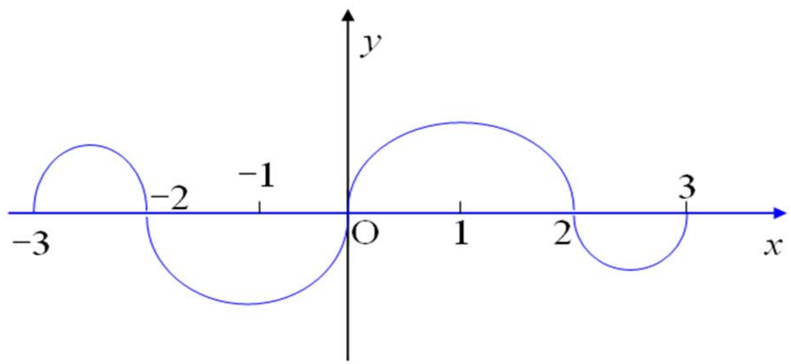
$$=a\int_0^2\left(2x-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}a=\frac{8}{3}$$

故

$$a=2.$$



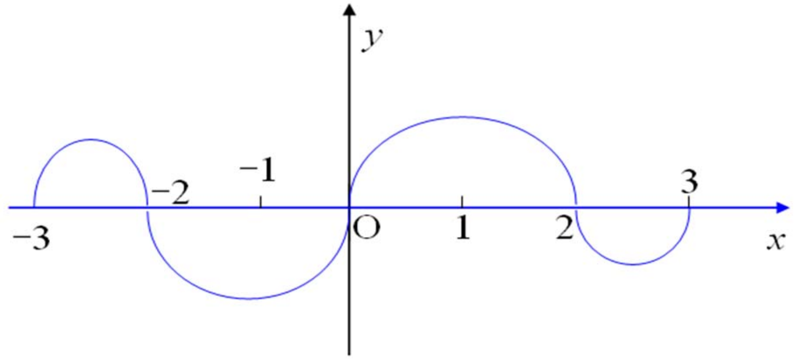
8. 如图，连续函数 $y=f(x)$在区间[−3，−2]，[2，3]上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周，在区间[−2，0]，[0，2] 的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周，设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.则下列结论正确的是　　(C)



(A)　$F(3)=-\frac{3}{4}F(-2)$.　　(B) $F(3)=\frac{5}{4}F(2)$.

(C)　$F(-3)=\frac{3}{4}F(2)$.　　(D) $F(-3)=-\frac{5}{4}F(-2)$.

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt.$$



分析 本题考查定积分的几何意义，应注意$f(x)$在不同区间段上的符号，从而搞清楚相应积分与面积的关系。

解 根据定积分的几何意义，知$F(2)$为半径是1的半圆面积：$F(2)=\dfrac{1}{2}\pi$， $F(3)$是两个半圆面积之差：

$$F(3)=\frac{1}{2}[\pi\cdot 1^2-\pi\cdot(\frac{1}{2})^2]=\frac{3}{8}\pi=\frac{3}{4}F(2).$$

$$F(-3)=\int_0^{-3}f(x)dx=-\int_{-3}^{0}f(x)dx=\int_0^3 f(x)dx=F(3).$$

9. 如图, 曲线方程为 $y = f(x)$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有连续导数，则定积分 $\int_0^a xf'(x)dx$ 等于　　　　**(C)**

(A)曲边梯形ABCD面积.　　(B) 梯形ABCD面积.

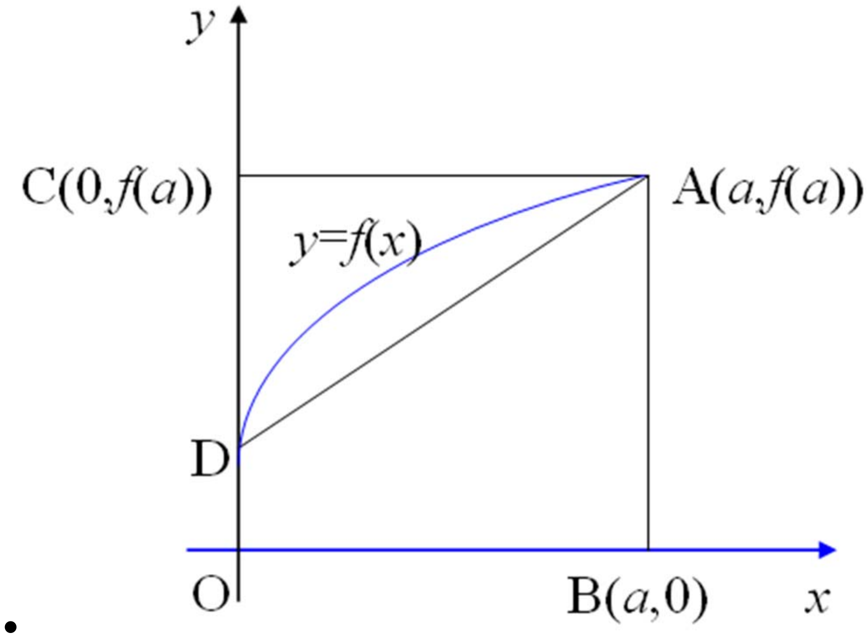
(C)曲边三角形ACD面积.　　(D)三角形ACD面积.

解 $\int_0^a xf'(x)dx = \int_0^a xdf(x)$

$$= af(a) - \int_0^a f(x)dx$$

其中 $af(a)$ 是矩形面积,

$\int_0^a f(x)dx$ 为曲边梯形的面积.



10. $f(x)$是周期为 2 的连续函数，

（1）证明对任意实数都有$\int_t^{t+2} f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx$;

（2）证明$g(x) = \int_0^x \left[2f(t) - \int_t^{t+2} f(s)ds\right]dt$是周期为 2 的周期函数.

解 （1）因为$f(x)$的周期为2， 令$x = 2 + u$， 则

$$\int_2^{t+2} f(x)dx = \int_0^t f(2+u)du = \int_0^t f(u)du = \int_0^t f(x)dx.$$

$$\Rightarrow \int_t^{t+2} f(x)dx = \int_t^0 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx + \int_2^{t+2} f(x)dx$$

$$= \int_0^2 f(x)dx.$$

$$g(x)=\int_0^x\left[2f(t)-\int_t^{t+2}f(s)ds\right]dt$$

(2) $$g(x+2)=\int_0^{x+2}\left[2f(t)-\int_t^{t+2}f(s)ds\right]dt$$

$$=\int_0^x\left[2f(t)-\int_t^{t+2}f(s)ds\right]dt$$

$$+\int_x^{x+2}\left[2f(t)-\int_t^{t+2}f(s)ds\right]dt$$

$$=g(x)+\int_x^{x+2}\left[2f(t)-\int_t^{t+2}f(s)ds\right]dt$$

$$=g(x)+2\int_x^{x+2}f(t)dt-\int_x^{x+2}\int_t^{t+2}f(s)dsdt$$

$$g(x+2)=g(x)+2\int_x^{x+2} f(t)dt-\int_x^{x+2}\int_t^{t+2} f(s)dsdt$$

因为 $\int_t^{t+2} f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx,$ 所以

$$\int_x^{x+2}\int_t^{t+2} f(s)dsdt=\int_x^{x+2}\int_0^2 f(s)dsdt$$

$$=\int_0^2 f(s)ds\cdot\int_x^{x+2} 1dt=2\int_0^2 f(s)ds=2\int_x^{x+2} f(x)dx$$

所以

$$g(x+2)=g(x)+2\int_0^2 f(t)dt-2\int_0^2 f(s)ds=g(x).$$

所以$g(x)$是周期为2的周期函数.

11. 计算不定积分 $\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)dx \quad (x>0).$

分析 变量代换是可以将问题化繁为简

令 $\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t$，得 $x=\frac{1}{t^2-1}, dx=\frac{-2tdt}{\left(t^2-1\right)^2}$.

$$\text{原式}=\int \ln(1+t)\frac{-2t}{\left(t^2-1\right)^2}dt=\int \ln(1+t)\frac{-1}{\left(t^2-1\right)^2}d\left(t^2-1\right)$$

$$=\int \ln(1+t)d\left(\frac{1}{t^2-1}\right) \quad =\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int \frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{1+t}dt$$

$$=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{1+t}dt$$

$$=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\left(\frac{1}{4(t-1)}+\frac{-1}{4(1+t)}+\frac{-1}{2(1+t)^2}\right)dt$$

$$=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{t-1}\right|-\frac{1}{2(1+t)}+C$$

$$=x\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})$$

$$-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})+C.$$

12. $\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx =$ $\underline{\quad -4\pi \quad}$.

分析 利用换元积分法，令

$$\sqrt{x}=t \quad \Rightarrow dx = 2tdt,$$

则有

$$\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx=\int_0^{\pi}2t^2\cos tdt$$

上式再利用分部积分法两次，就可得

$$\int_0^{\pi}2t^2\cos tdt=\int_0^{\pi}2t^2d(\sin t)=\cdots \quad = -4\pi.$$

13. (I)比较

$$\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n dt \text{与} \int_0^1 t^n |\ln t| dt \left(n = 1,2,\cdots\right)$$

的大小，说明理由；

(II)记$u_n = \int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n dt \quad \left(n = 1,2,\cdots\right)$,求极限$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

解 (I) 当$0 \le t \le 1$时，因为$\ln(1+t) \le t$，所以

$$|\ln t|[\ln(1+t)]^n \le t^n |\ln t|,$$

因此

$$\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n dt \le \int_0^1 t^n |\ln t| dt.$$

13. (I)比较

$$\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n dt \text{与} \int_0^1 t^n |\ln t| dt \left(n=1,2,\cdots\right)$$

的大小，说明理由；

(II)记 $u_n = \int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n dt \quad \left(n=1,2,\cdots\right)$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

解 (II) 由(I)知 $0 \le u_n = \int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n dt \le \int_0^1 t^n |\ln t| dt.$

因为 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt = -\int_0^1 t^n \ln t dt = -\dfrac{1}{n+1}\int_0^1 \ln t dt^{n+1}$

$$= \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

14. $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x =$ ________.

分析： 定积分的换元法.

解1 $I=\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$

令 $x-1=\sin\theta$, 则

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin\theta)\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}.$$

14. $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x =$ ____________.

分析： 定积分的换元法.

解2 $I=\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$

令 $x-1=t$, 则

$$I=\int_{-1}^1 (1+t)\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.$$

15. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x=$ ________.

分析：考查反常积分、分部积分和有理函数积分

解 $\displaystyle I=-\int_1^{+\infty}\ln x\,\mathrm{d}\frac{1}{1+x}=-\frac{\ln x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}\mathrm{d}x$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=(\ln x-\ln(x+1))\Big|_1^{+\infty}=\ln\frac{x}{x+1}\Big|_1^{+\infty}=\ln 2.$$

16. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x<\pi,\\ 2, & \pi\le x\le 2\pi,\end{cases}\quad F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ 则(\qquad)$$

(A) $x=\pi$是$F(x)$的跳跃间断点　　(B) $x=\pi$是$F(x)$的可去间断点

(C) $F(x)$在$x=\pi$处连续但不可导　(D) $F(x)$在$x=\pi$处可导

分析： 考查连续与可导的关系

解 由定积分的几何意义知 $F(\pi-)=F(\pi)=F(\pi+).$

$$F'_-(\pi)=\lim_{h\to 0^+}\frac{\int_0^{\pi-h}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}f(t)\,\mathrm{d}t}{-h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-\int_{\pi-h}^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t}{-h}=0,$$

$$F'_-(\pi) = 0,$$

$$F'_+(\pi) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\int_0^{\pi+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{-\int_{\pi}^{\pi+h} 2\,\mathrm{d}t}{-h} = 2.$$

因此

$$F'_-(\pi) \neq F'_+(\pi).$$

所以$F(x)$在$x=\pi$处连续但不可导，答案为C.

17. 计算 $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$， 其中 $\displaystyle f(x)=\int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t}\,\mathrm{d}t$.

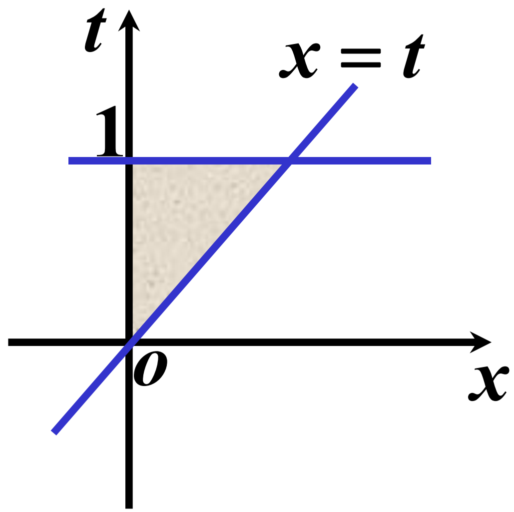
分析： 考查定积分转化为重积分和换元积分法

解

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{\int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t}\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\int_x^1 \frac{\ln(t+1)}{t}\mathrm{d}t$$

$$=-\int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{t}\mathrm{d}t\int_0^t \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$



$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{t}\,\mathrm{d}t \int_0^t \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = -2\int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{t}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$$

$$= -2\int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = -4\int_0^1 \ln(t+1)\,\mathrm{d}\sqrt{t}$$

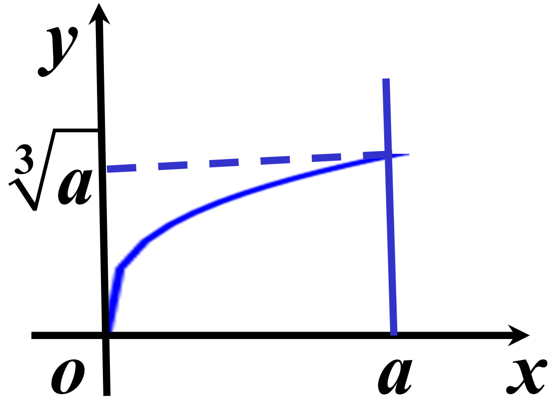
$$= -4\left(\sqrt{t}\ln(t+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{t}\,\mathrm{d}\ln(t+1)\right) \qquad \boxed{u=\sqrt{t}}$$

$$= -4\ln 2 + 4\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{t+1}\,\mathrm{d}t = -4\ln 2 + 4\int_0^1 \frac{u}{u^2+1}\,2u\,\mathrm{d}u$$

$$= -4\ln 2 + 8\int_0^1 \frac{u^2+1-1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = -4\ln 2 + 8 - 2\pi.$$

18. 设D是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$，直线$x=a(a>0)$及x轴所围成的平面图形，V_x, V_y 分别是D绕x轴，y轴旋转一周所得旋转体的体积，若 $V_y=10V_x$，求a的值.

分析： 考查定积分的几何应用



解
$$V_x=\pi\int_0^a x^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{5}a^{\frac{5}{3}}.$$

$$V_y=\pi a^2\cdot a^{\frac{1}{3}}-\pi\int_0^{a^{\frac{1}{3}}} y^6\,\mathrm{d}y=\frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}.$$

$$\because V_y=10V_x,\quad \therefore \frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}=10\frac{3\pi}{5}a^{\frac{5}{3}},\Rightarrow a=7\sqrt{7}.$$

19. 设曲线L的方程为 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x \quad (1\le x\le e)$,

(1) 求L的弧长；(2) 设D是由曲线L，直线$x=1$, $x=e$

及x轴所围的平面图形，求D的形心的横坐标.

解 (1) $y'=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}=\frac{x^2-1}{2x}$.

$$l=\int_1^e\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x=\int_1^e\sqrt{1+\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^e\frac{x^2+1}{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^e(x+\frac{1}{x})\mathrm{d}x=\frac{e^2+1}{4}.$$

(2) $$\bar{x}=\frac{\int_1^e x(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x)\mathrm{d}x}{\int_1^e (\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x)\mathrm{d}x}=\frac{\int_1^e (x^3-2x\ln x)\mathrm{d}x}{\int_1^e (x^2-2\ln x)\mathrm{d}x}$$

$$\int_1^e 2x\ln x\,\mathrm{d}x=\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x^2$$

$$=x^2\ln x-\frac{1}{2}x^2\Big|_1^e=\frac{e^2+1}{2}$$

$$\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x=\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x=(x\ln x-x)\Big|_1^e=1.$$

$$=\frac{\frac{1}{4}(e^4-1)-\frac{e^2+1}{2}}{\frac{1}{3}(e^3-1)-2}=\frac{3(e^4-2e^2-3)}{4(e^3-7)}.$$