第二章　一元函数微分学

重点、热点

1、导数和微分的定义，掌握用导数定义讨论分段函数在分段点的可导性。

注意可导与可微，可导与连续的关系。

2、基本初等函数的求导公式、微分公式(要熟记)，及反函数、隐函数、参数方程确定的函数求导数

3、Rolle定理、Lagrange 中值定理、

Cauchy中值定理、Taylor中值定理的应用。

4、用导数研究函数的形态

(单调、极值、凹凸、拐点、渐近线)

以及最值应用。

常考题型

1. 求给定函数的导数与微分(包括高阶导数),

隐函数和由参数方程所确定的函数求导,

特别是分段函数和带有绝对值的函数可导性的讨论.

2. 利用L'Hospital法则和Taylor展开式求不定式极限;

3. 讨论函数极值，方程的根，证明函数不等式;

4. 利用

Rolle定理、

Lagrange中值定理、

Cauchy中值定理

和

Taylor中值定理证明有关命题，

如证明在开区间内至少存在一点满足……，

此类问题证明经常需要构造辅助函数；

5. 几何、物理等方面的最大值、最小值应用问题.

解这类问题:

主要是确定目标函数和约束条件,

判定所讨论区间;

6. 利用导数研究函数性态。

一、 有关中值问题的解题方法

利用逆向思维,设辅助函数. 一般解题方法:

(1) 证明含一个中值的等式或根的存在，多用罗尔定理，可用原函数法找辅助函数 .

(2) 若结论中涉及到含中值的两个不同函数，可考虑用柯西中值定理 .

(3) 若结论中含两个或两个以上的中值，必须多次应用中值定理 .

(4) 若已知条件中含高阶导数, 多考虑用泰勒公式, 有时也可考虑对导数用中值定理 .

(5) 若结论为不等式,要注意适当放大或缩小的技巧.

常用函数的麦克劳林公式

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

二、导数应用

1. 研究函数的性态：

增减， 极值， 凹凸， 拐点， 渐近线， 曲率

2. 解决最值问题

- 目标函数的建立与简化
- 最值的判别问题

3. 其他应用： 求不定式极限； 几何应用；

相关变化率； 证明不等式； 研究方程实根等.

曲线的拐点的判别方法：

方法1: 设函数$f(x)$在x_0的邻域内二阶可导,

且$f''(x_0)=0$,

(1) x_0两近旁$f''(x)$变号,点$(x_0, f(x_0))$即为拐点;

(2) x_0两近旁$f''(x)$不变号,点$(x_0, f(x_0))$不是拐点.

方法2: 设函数$f(x)$在x_0的邻域内三阶可导,

且$f''(x_0)=0$,而$f'''(x_0)\neq 0$,那末$(x_0, f(x_0))$是

曲线$y=f(x)$的拐点.

Taylor公式的应用

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

(ξ在x_0与x之间).

1. n=0时，为Lagrange中值定理，有限增量公式

利用它可以证明函数的**单调性**；

利用它可以证明极值判别的**第一充分条件**；

Taylor公式的应用

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

(ξ在x_0与x之间).

2. n=1时,

利用它可以证明函数的凹凸性；方法1

利用它可以证明极值判别的第二充分条件；

Taylor公式的应用

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

(ξ在x_0与x之间).

3. n=2时，利用它可以证明函数的凹凸性；方法2

4. 利用它可以求极限及近似计算等等.

2.1　导数与微分

一、用导数定义求导数

例1 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-100)$,求 $f'(0)$.

解 $$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x-1)(x-2)\cdots(x-100)$$

$$=100!$$

二、分段函数在分段点处的可导性

例1 设 $f(x)=x\left|x(x-2)\right|$,求 $f'(x)$.

解 先去掉绝对值

$$f(x)=\begin{cases} x^2(x-2), x\le 0 \\ -x^2(x-2), 0<x<2, \\ x^2(x-2), x\ge 2 \end{cases}$$

当$x=0$时, $f'_-(0)=f'_+(0)=0,$ $f'(0)=0;$

当$x>2$或$x<0$时, $f'(x)=3x^2-4x;$

当$0<x<2$时, $f'(x)=-3x^2+4x;$

当$x=2$时,

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-x^2(x-2)}{x-2}=-4.$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2(x-2)}{x-2}=4.$$

$f'_-(2)\neq f'_+(2)$, $\quad\therefore f(x)$在$x=2$处不可导.

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2-4x, x>2,\text{或}x<0\\ 0, x=0,\\ -3x^2+4x, 0<x<2,\end{cases}$$

例2 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ ax+b, & x>1 \end{cases}$$

试确定a、b的值，使$f(x)$在点$x=1$处可导。

解 ∵可导一定连续，∴$f(x)$在$x=1$处也是连续的。由

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x^2=1$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b.$$

要使$f(x)$在点$x=1$处连续，必须有 $a+b=1$.

$a+b=1$. 又

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}(x+1)=2$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{ax+b-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{a(x-1)}{x-1}=a$$

要使$f(x)$在点$x=1$处可导，必须 $f'_-(1)=f'_+(1)$. 即

$a=2$.

故当$a=2$, $b=-1$时, $f(x)$在点$x=1$处可导.

三、运用各种运算法则求导数或微分

(要求**非常熟练**地运用)

例1 设$f(x)$可微，$y = f(\ln x)\cdot e^{f(x)}$，求$dy$.

解

$$dy = f(\ln x)de^{f(x)} + e^{f(x)}df(\ln x)$$

$$= f'(x)e^{f(x)}f(\ln x)dx + \frac{1}{x}f'(\ln x)e^{f(x)}dx$$

$$= e^{f(x)}[f'(x)f(\ln x) + \frac{1}{x}f'(\ln x)]dx$$

例2 设 $y=\frac{1}{2}\arctan\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}$,求 y'.

解 设 $u=\sqrt{1+x^2}$, 则 $y=\frac{1}{2}\arctan u+\frac{1}{4}\ln\frac{u+1}{u-1}$,

$$\because y'_u=\frac{1}{2(1+u^2)}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}\right)=\frac{1}{1-u^4}=\frac{1}{-2x^2-x^4},$$

$$u'_x=(\sqrt{1+x^2})'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\therefore y'_x=-\frac{1}{(2x+x^3)\sqrt{1+x^2}}.$$

例3 设 $\begin{cases} x = 2t + |t| \\ y = 5t^2 + 4t|t| \end{cases}$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$.

解 分析：当 $t = 0$ 时，$|t|$ 导数不存在，

$\therefore$ 当 $t = 0$ 时，$\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}$ 不存在， 不能用公式求导.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{5(\Delta t)^2 + 4\Delta t|\Delta t|}{2\Delta t + |\Delta t|} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t[5 + 4\operatorname{sgn}(\Delta t)]}{2 + \operatorname{sgn}(\Delta t)}$$

$$= 0.$$

故 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0} = 0.$

例4 设$y = x(\sin x)^{\cos x}$,求 y'.

解 $y' = y(\ln y)'$

$$= y(\ln x + \cos x \ln \sin x)'$$

$$= x(\sin x)^{\cos x}\left(\frac{1}{x} - \sin x \cdot \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right)$$

四、求切线方程和法线方程

例 1 已知两曲线$y=f(x)$与$y=\int_0^{\arctan x} e^{-t^2}dt$在点(0,0)处的切线相同，写出此切线方程，并求$\lim\limits_{n\to\infty} nf(\frac{2}{n})$.

解 由已知条件可知

$$f(0)=0, \qquad f'(0)=\frac{e^{-(\arctan x)^2}}{1+x^2}\bigg|_{x=0}=1.$$

故所求切线方程为 $y=x$.

$$\lim_{n\to\infty} nf(\frac{2}{n})=\lim_{n\to\infty} 2\cdot\frac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}}=2f'(0)=2$$

例2 已知曲线的极坐标方程$r=1-\cos\theta$,求曲线上对应于$\theta=\dfrac{\pi}{6}$处的切线与法线的直角坐标方程。

解 曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x=(1-\cos\theta)\cos\theta=\cos\theta-\cos^2\theta, \\ y=(1-\cos\theta)\sin\theta=\sin\theta-\sin\theta\cos\theta. \end{cases}$$

因此

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\left.\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\left.\frac{\cos\theta-\cos^2\theta+\sin^2\theta}{-\sin\theta+2\cos\theta\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=1.$$

故切线方程

$$y-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}=1\cdot(x-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}).$$

即

$$x-y-\frac{3}{4}\sqrt{3}+\frac{5}{4}=0.$$

法线方程

$$y-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}=-(x-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}),$$

即

$$x+y-\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{4}=0.$$

例 3 设 $f(x)$为周期是 5 的连续函数，在 $x=0$ 邻域内，恒 有 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$. 其 中 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{x}=0$,$f(x)$在 $x=1$ 处可导，求曲线$y=f(x)$在点$\left(6,\ f(6)\right)$处的切线方程。

解 由题设可知 $f(6)=f(1)$, $f'(6)=f'(1)$.

故切线方程为 $y-f(1)=f'(1)(x-6)$.

所以关键是求出$f(1)$和$f'(1)$, 由$f(x)$连续性

$$\lim_{x\to 0}[f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)]=-2f(1).$$

$$\lim_{x\to 0}[f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)]=-2f(1).$$

由所给条件可知 $-2f(1)=0$， 即 $f(1)=0.$

再由条件可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{8x}{\sin x}+\frac{\alpha(x)}{\sin x}\right)=8$$

令 $\sin x=t$， 可得

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-3f(1-t)}{t}=8.$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-3f(1-t)}{t}=8.$$ 又 $f(1)=0.$

$$\therefore\quad \lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-3f(1-t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{[f(1+t)-f(1)]}{t}+3\lim_{t\to 0}\frac{f(1-t)-f(1)}{(-t)}$$

$$=f'(1)+3f'(1)=4f'(1)=8.$$

则 $f'(1)=2.$ 所求切线方程为 $y-0=2(x-6)$, 即

$$2x-y-12=0.$$

五、高阶导数

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

1、求二阶导数

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

例1 $y=\sin^6 x+\cos^6 x$，求y''.

解 $y=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3$

$$=\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x$$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$$

$$y''=\frac{3}{8}\cdot 4^2\cos(4x+\pi)=-6\cos 4x.$$

例2 求由方程 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ 表示的函数的二阶导数.

解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)} = -\tan t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{(-\tan t)'}{(a\cos^3 t)'} = \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t}$$

$$= \frac{\sec^4 t}{3a\sin t}$$

例3 设 $\begin{cases} x = f'(t), \\ y = tf'(t) - f(t). \end{cases}$ 且 $f''(t) \neq 0$, 求 $\dfrac{d^2 y}{d x^2}$.

解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t f''(t)}{f''(t)} = t,$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{1}{f''(t)}$$

例4 已知 $\begin{cases} x=\ln(1+e^{2t}), \\ y=t-\arctan e^{t}, \end{cases}$ 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. **2011决赛**

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\frac{e^t}{1+e^{2t}}}{\frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}}=\frac{1+e^{2t}-e^t}{2e^{2t}}=\frac{1}{2}(e^{-2t}+1-e^{-t}),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{1}{2}(e^{-2t}+1-e^{-t})'}{(\ln(1+e^{2t}))'}=\frac{\frac{1}{2}(-2e^{-2t}+e^{-t})}{\frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}}$$

$$=\frac{1}{4}(-2e^{-4t}+e^{-3t}-2e^{-2t}+e^{-t}).$$

例5 设 $x^4 - xy + y^4 = 1$, 求y''在点(0,1)处的值.

解 方程两边对x求导得

$$4x^3 - y - xy' + 4y^3y' = 0 \qquad (1)$$

代入 $x = 0,\ y = 1$得 $\quad y'\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = \dfrac{1}{4};$

将方程(1)两边再对x求导得

$$12x^2 - 2y' - xy'' + 12y^2(y')^2 + 4y^3y'' = 0$$

代入 $x = 0,\ y = 1,\ y'\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = \dfrac{1}{4}$ 得 $y''\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = -\dfrac{1}{16}.$

2. n阶导数

设函数u和v具有n阶导数, 则

(1) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$

(2) $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$

(3) $$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''$$

$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

莱布尼兹公式

例6 设函数$y=f(x)$由方程$\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x}\ (x>0, y>0)$

所确定,求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 两边取对数 $\dfrac{1}{x}\ln y=\dfrac{1}{y}\ln x$, 即$y\ln y=x\ln x$,

$\therefore (1+\ln y)y'=\ln x+1$, $y'=\dfrac{\ln x+1}{1+\ln y}$,

$$y''=\frac{\frac{1}{x}(\ln y+1)-(\ln x+1)\frac{1}{y}\cdot y'}{(1+\ln y)^2}$$

$$=\frac{y(\ln y+1)^2-x(\ln x+1)^2}{xy(\ln y+1)^3}$$

常用高阶导数公式

$$(1)\ (a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a \quad (a>0) \qquad (e^x)^{(n)} = e^x$$

$$(2)\ (\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$(3)\ (\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$(4)\ (x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

$$(5)\ (\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} \qquad (\frac{1}{x})^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}$$

例1 设$y=\dfrac{4x^2-1}{x^2-1}$,求 $y^{(n)}$.

解 $$y=\frac{4x^2-1}{x^2-1}=\frac{4x^2-4+3}{x^2-1}=4+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$\because \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}},\quad \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}},$$

$$\therefore y^{(n)}=\frac{3}{2}(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right].$$

例2 设 $y = x^2 e^{2x}$，求$y^{(20)}$.

解 设$u = e^{2x}, v = x^2$,则由莱布尼兹公式知

$$y^{(20)} = (e^{2x})^{(20)} \cdot x^2 + 20(e^{2x})^{(19)} \cdot (x^2)'$$

$$+ \frac{20(20-1)}{2!}(e^{2x})^{(18)} \cdot (x^2)'' + 0$$

$$= 2^{20} e^{2x} \cdot x^2 + 20 \cdot 2^{19} e^{2x} \cdot 2x$$

$$+ \frac{20 \cdot 19}{2!} 2^{18} e^{2x} \cdot 2$$

$$= 2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95)$$

2.2 微分中值定理

数学竞赛中经常考的四大定理：

Rolle定理，Lagrange中值定理，

Cauchy中值定理和Taylor定理(Taylor公式).

这部分有关考题主要是证明题，其中技巧性比较高，

因此典型例题比较多，讨论比较详细。

微分中值定理与积分中值定理的关系：

$$F(b)-F(a)=f(\xi)(b-a)$$

Lagrange中值定理 $\Uparrow$　　　$\Downarrow$ 积分中值定理

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$ 微积分基本公式

一、用Rolle定理的有关方法

例 1 设 $f(x)$在[0，3]上连续，在（0，3）内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$， $f(3)=1$. 试证：必存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$. **(03年考研题)**

证 $\because f(x)$在[0，3]上连续，$\therefore f(x)$在[0，2]上连续，

且有最大值M和最小值m. 于是 $m\le f(0)\le M$;

$m\le f(1)\le M$; $m\le f(2)\le M$. 故

$$m\le\frac{1}{3}[f(0)+f(1)+f(2)]\le M.$$

$$m \le \frac{1}{3}[f(0)+f(1)+f(2)] \le M.$$

由连续函数介值定理可知, 至少存在一点$c \in [0, 2]$,使得

$$f(c)=\frac{1}{3}[f(0)+f(1)+f(2)]=1,$$

因此 $f(c)=f(3)$, 且$f(x)$在$[c,3]$上连续，$(c,3)$内可导,

由Rolle定理得出必存在 $\xi \in (c, 3) \subset (0, 3)$, 使得

$$f'(\xi)=0.$$

Rolle定理的变异版：

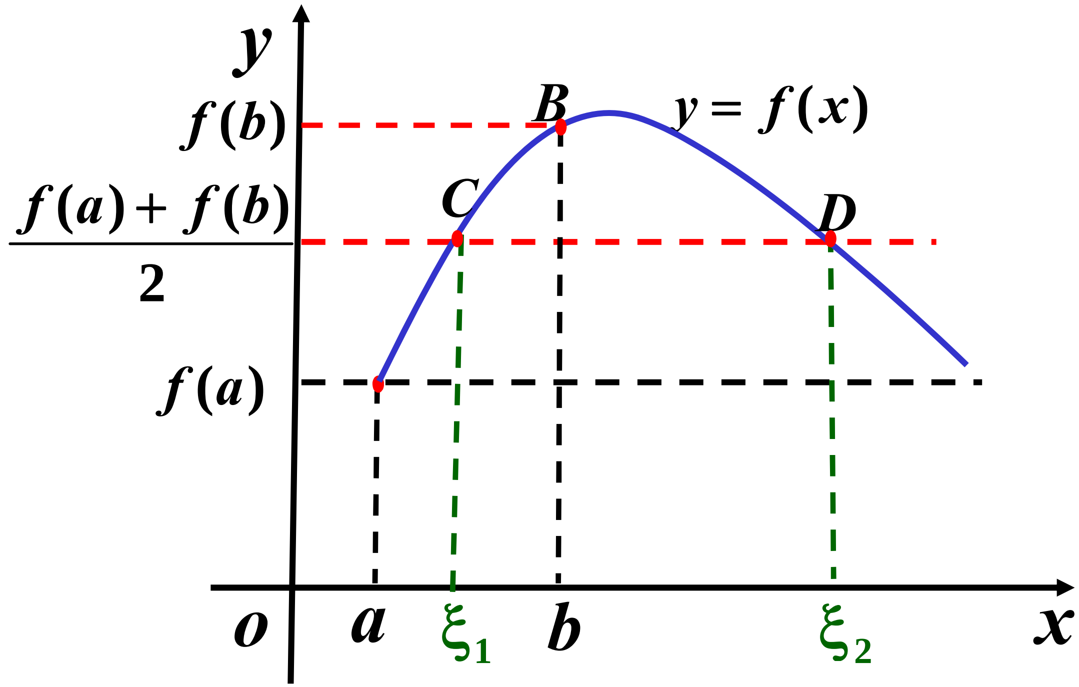
若函数 $f(x)$ 在闭区间$[a, +\infty)$上连续，在开区间$(a, +\infty)$内可导，且 $f(a)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, 求证：在开区间$(a, +\infty)$内至少存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi)=0.$

证 (1) 若存在一点$b>a$,使得$f(a) = f(b)$，则结论成立.

(2) 反之，对于任意一点$x>a$,则$f(x) - f(a)$在开区间$(a, +\infty)$内同号，否则由零点存在定理，则情形(1)必然出现.

不妨设在开区间$(a, +\infty)$内恒有 $f(x) - f(a)>0$,

则存在一点$b>a$,使得 $f(b)> f(a)$.


y
f(b)
B
y = f(x)
f(a)+f(b)
2
C
D
f(a)
o
a
ξ1
b
ξ2
x

模型Ⅰ：设$f(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)内可导，$f(a)=f(b)=0$则下列各结论皆成立.

(1) 存在$\xi_1\in(a,b)$使$f'(\xi_1)+lf(\xi_1)=0$

(l为实常数）

(2)存在$\xi_2\in(a,b)$使$f'(\xi_2)+k\xi_2^{k-1}f(\xi_2)=0$

(k为非零常数)

(3)存在$\xi_3\in(a,b)$使$f'(\xi_3)+g(\xi_3)f(\xi_3)=0$

($g(x)$为连续函数)

提示：(1) $F(x)=e^{lx}f(x)$;　　(2) $F(x)=e^{x^k}f(x)$;

(3) $F(x)=e^{G(x)}f(x)$　$(G'(x)=g(x))$.

模型 II：设 $f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上皆连续，(a,b)内皆可导，且 $f(a)=0$，$g(b)=0$，则存在$\xi\in(a,b)$，使

$$f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0.$$

提示：$F(x)=f(x)g(x)$.

例 2 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续，（0, 1）内可导，$f(0)=0$，k为正整数. 证明：存在$\xi\in(0,1)$使得

$$\xi f'(\xi)+kf(\xi)=f'(\xi).$$

提示：利用模型II，令 $g(x)=(x-1)^k$.

例 3 设 $f(x)$在[0，1]上连续，（0，1）内可导，且

$3\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)dx = f(0)$,求证：存在$\xi \in (0,1)$使$f'(\xi) = 0$.

证 由积分中值定理可知，存在$c \in [\frac{2}{3}, 1]$,使得

$$\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)dx = f(c)(1 - \frac{2}{3}).$$

得到

$$f(c) = 3\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)dx = f(0),$$

对$f(x)$在[0，c]上用Rolle定理，(三个条件都满足)

故存在$\xi \in (0, c) \subset (0, 1)$,使$f'(\xi) = 0$.

例4 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(1)=0$, 证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使

$$f'(\xi)=-\frac{2f(\xi)}{\xi}$$

证: 问题转化为证 $\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0$.

设辅助函数 $\varphi(x)=x^2 f(x)$

显然 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足Rolle定理条件, 故至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使

$$\varphi'(\xi)=2\xi f(\xi)+\xi^2 f'(\xi)=0$$

即有 $$f'(\xi)=-\frac{2f(\xi)}{\xi}$$

例5 设实数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 满足下述等式

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$$

证明方程 $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根 .

证: 令 $F'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, 则可设

$$F(x) = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

显然, $F(x)$在 $[0,1]$上连续,在 $(0,1)$内可导, 且 $F(0) = F(1) = 0$,由Rolle定理知存在一点$\xi \in (0,1)$,使 $F'(\xi) = 0$,

即 $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ 在$(0,1)$内至少有一个实根 ξ.

例6 设 $f(x)$在$[0,1]$连续, $(0,1)$可导，且$f(1)=0$,

求证存在$\xi\in(0,1)$,使 $nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$

证：设辅助函数$\varphi(x)=x^n f(x)$

显然$\varphi(x)$在$[0,1]$上满足Rolle定理条件,

因此至少存在$\xi\in(0,1)$, 使得

$$\varphi'(\xi)=n\xi^{n-1}f(\xi)+\xi^n f'(\xi)=0$$

即 $$nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$$

例7 若 $f(x)$可导, 试证在其两个零点间一定有 $f(x)+f'(x)$的零点.

提示: 设$f(x_1)=f(x_2)=0,\ x_1<x_2,$

欲证: $\exists\xi\in(x_1,x_2)$, 使 $f(\xi)+f'(\xi)=0$

只要证 $\mathrm{e}^{\xi}f(\xi)+\mathrm{e}^{\xi}f'(\xi)=0$

亦即 $[\mathrm{e}^{x}f(x)]'\Big|_{x=\xi}=0$

作辅助函数$F(x)=\mathrm{e}^{x}f(x)$, 验证$F(x)$在$[x_1,x_2]$上满足 Rolle定理条件.

二、用拉格朗日中值定理和柯西中值定理

例1 设函数$f(x)$在[0,1]上连续,在(0,1)内可导,**证明:**
至少存在一点$\xi\in(0,1)$,使 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

证: 问题转化为证

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}=\left.\frac{f'(x)}{(x^2)'}\right|_{x=\xi}$$

设$F(x)=x^2$,则$f(x)$, $F(x)$在 [0, 1] 上满足柯西中值定理条件, 因此在 (0 , 1) 内至少存在一点 ξ, 使

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}$$

即 $$f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$$

例2. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导, 且 $|f'(x)| \le M$, 证明 $f(x)$在 (a,b) 内有界.

证: 取点 $x_0 \in (a,b)$, 再取异于 x_0 的点 $x \in (a,b)$, 对 $f(x)$在以 x_0, x 为端点的区间上用拉氏中值定理, 得

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) \quad (\xi \text{界于} x_0 \text{与} x \text{之间})$$

$$\therefore \quad |f(x)| = |f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)|$$

$$\le |f(x_0)| + |f'(\xi)||x - x_0|$$

$$\le |f(x_0)| + M(b-a) = K \qquad (\text{定数})$$

可见对任意 $x \in (a,b)$, $|f(x)| \le K$, 即得所证 .

例3 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)内可导, 且 $0<a<b$, 试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

证 欲证$\dfrac{f'(\xi)}{a+b}=\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$,即要证$\dfrac{f'(\xi)(b-a)}{b^2-a^2}=\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$.

因 $f(x)$在 $[a,b]$上满足拉氏中值定理条件, 故有

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\quad \xi\in(a,b) \qquad ①$$

又因$f(x)$及x^2在$[a,b]$上满足柯西定理条件， 故有

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta},\quad \eta\in(a,b) \qquad ②$$

将①代入②, 化简得 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$, $\xi,\eta\in(a,b)$.

例4 证明 $f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

证: $\ln f(x) = x\ln(1+\frac{1}{x})$

$$= x[\ln(1+x)-\ln x]$$

$$\therefore \quad f'(x)=(1+\frac{1}{x})^x\underline{[\ln(1+x)-\ln x-\frac{1}{1+x}]}$$

令 $F(t)=\ln t$, 在 $[x, x+1]$上利用拉氏中值定理, 得

$$\ln(1+x)-\ln x=\frac{1}{\xi}>\frac{1}{1+x} \quad (0<x<\xi<x+1)$$

故当 $x>0$ 时, $f'(x)>0$, 从而 $f(x)$在 $(0,+\infty)$ 上单调增.

例5 设在$[a,b]$上，$f(x)>0$且可导，证明 $\exists \xi \in (a,b)$

使 $$\ln\frac{f(b)}{f(a)}=\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}(b-a)$$

证 即证

$$\ln f(b)-\ln f(a)=\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}(b-a)$$

可知对 $F(x)=\ln f(x)$

应用拉氏中值定理，便得结论

例6 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0, f(1)=1$,试证:对任意给定的正数 a,b 在 $(0,1)$ 内存在不同的 ξ,η 使 $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b.$

证 $\because a$ 与 b 均为正数, $\therefore 0<\dfrac{a}{a+b}<1$

又 $\because f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 由介值定理,

存在 $\tau\in(0,1)$, 使得 $f(\tau)=\dfrac{a}{a+b}$,

$f(x)$ 在 $[0,\tau],[\tau,1]$ 上分别用拉氏中值定理, 有

$$f(\tau)-f(0)=(\tau-0)f'(\xi),\quad \xi\in(0,\tau) \qquad ①$$

$$f(1)-f(\tau)=(1-\tau)f'(\eta),\quad \eta\in(\tau,1) \qquad ②$$

注意到 $f(0)=0, f(1)=1,$ 由①，②有

$$\tau=\frac{f(\tau)}{f'(\xi)}=\frac{\frac{a}{a+b}}{f'(\xi)} \quad ③ \qquad 1-\tau=\frac{1-f(\tau)}{f'(\eta)}=\frac{\frac{b}{a+b}}{f'(\eta)} \quad ④$$

③+ ④,得 $1=\dfrac{a}{f'(\xi)(a+b)}+\dfrac{b}{f'(\eta)(a+b)}$

$$\therefore \frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b.$$

此题的变异：

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且

$$f(a)=0, f(b)=1,$$

试证：在 (a,b) 内存在不同的 ξ,η 使

$$\frac{1}{f'(\xi)}+\frac{1}{f'(\eta)}=2(b-a).$$

提示：存在 $\tau\in(a,b)$, 使得 $f(\tau)=\dfrac{1}{2}$,

$f(x)$ 在 $[a,\tau],[\tau,b]$ 上分别用拉氏中值定理.

三、Taylor公式

例 1 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上具有二阶导数，且$f'(a)=f'(b)=0$,试证：在(a,b)内至少存在一点ξ，使$|f''(\xi)|\geq 4\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}\right|$成立。

分析：因所欲证的是不等式，故需估计 $f''(\xi)$.

由于一阶泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2,$$

(ξ介于x_0与x之间)

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2,$$

分别取 $x_0=a,b,\ x=\dfrac{a+b}{2}$. 因此分别应用泰勒公式即可.

证 因为

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+f'(a)\left(\frac{a+b}{2}-a\right)+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+f'(b)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)+\frac{1}{2!}f''(\xi_2)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

$$a<\xi_1<\frac{a+b}{2}\qquad \frac{a+b}{2}<\xi_2<b$$

$$f(\frac{a+b}{2}) = f(a) + \frac{1}{2!} f''(\xi_1)(\frac{b-a}{2})^2,$$

$$f(\frac{a+b}{2}) = f(b) + \frac{1}{2!} f''(\xi_2)(\frac{b-a}{2})^2,$$

两式相减，得

$$|f(b) - f(a)| = \frac{1}{8}(b-a)^2 |f''(\xi_1) - f''(\xi_2)|$$

$$\leq \frac{1}{4}(b-a)^2 \frac{1}{2}(|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|)$$

$$\leq \frac{1}{4}(b-a)^2 \max\{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|\}$$

$$|f(b)-f(a)| \le \frac{1}{4}(b-a)^2 \max\{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|\}$$

所以至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得

$$|f(b)-f(a)| \le \frac{1}{4}(b-a)^2 |f''(\xi)|,$$

即

$$|f''(\xi)| \ge 4\left|\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}\right|.$$

例2 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, $f(0)=f(1)$,

且 $|f''(x)|\le 2$, 证明 $|f'(x)|\le 1$.

证 $\forall x\in[0,1]$, 由泰勒公式得

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x)^2 \quad (0<\eta<1)$$

$$f(0)=f(x)-f'(x)\,x+\frac{1}{2}f''(\xi)\,x^2 \quad (0<\xi<1)$$

两式相减得

$$0=f'(x)+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x)^2-\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$$

例2 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, $f(0)=f(1)$,

且 $|f''(x)|\le 2$, 证明 $|f'(x)|\le 1$.

$$0=f'(x)+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x)^2-\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$$

$$\therefore\quad |f'(x)|=\left|\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x)^2-\frac{1}{2}f''(\xi)x^2\right|$$

$$\le\frac{1}{2}|f''(\eta)|(1-x)^2+\frac{1}{2}|f''(\xi)|x^2$$

$$\le(1-x)^2+x^2$$

$$=1-2x(1-x)\le 1,\quad x\in[0,1].$$

例3 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$上三阶连续可导, 且

$$f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0,$$

求证: $\exists \xi \in (-1,1)$, 使得 $f'''(\xi)=3$. 2011预赛

证 $\forall x \in [-1,1]$, 由麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(\eta)}{3!}x^3,$$

其中 $\eta \in (0,x)$或 $\eta \in (x,0)$. $\because f'(0)=0,$

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2!}(-1)^2+\frac{1}{6}f'''(\eta_1)(-1)^3$$

$$(-1<\eta_1<0)$$

$$0 = f(-1) = f(0) + \frac{f''(0)}{2!}(-1)^2 + \frac{1}{6}f'''(\eta_1)(-1)^3 \quad (-1 < \eta_1 < 0)$$

$$1 = f(1) = f(0) + \frac{f''(0)}{2!}\cdot 1^2 + \frac{1}{6}f'''(\eta_2)\cdot 1^3 \quad (0 < \eta_2 < 1)$$

后式减前式，得 $f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2) = 6.$

因为函数 $f'''(x)$ 在 $[\eta_1, \eta_2]$ 上连续，设其最大值为 M

最小值为 m,则 $m \le \frac{1}{2}[f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)] \le M.$

再由介值定理, $\exists \xi \in [\eta_1, \eta_2] \subset (-1, 1)$，使得

$$f'''(\xi) = \frac{1}{2}[f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)] = 3.$$

例4 证明：当0<x<1时，$e^{2x} < \dfrac{1+x}{1-x}$.

证：只要证 $(1-x)e^{2x} - 1 - x < 0 \quad (0 < x < 1)$

设 $f(x) = (1-x)e^{2x} - 1 - x,$ 则 $f(0) = 0$

$f'(x) = (1-2x)e^{2x} - 1,$ $f'(0) = 0$

$f''(x) = -4x\,e^{2x} < 0 \quad (0 < x < 1)$

利用一阶泰勒公式, 得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2$$

$$= -2\xi\,e^{2\xi}x^2 < 0 \quad (0 < \xi < x < 1)$$

故原不等式成立.

例5 若函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可微,且 $f(0)=f(1)$, $|f''(x)|\le 1$, 证明: $|f'(x)|\le \dfrac{1}{2}\quad (x\in[0,1])$

此题与例2相同

证 设 $x_0\in[0,1]$,在 x_0 处把 $f(x)$ 展成一阶泰勒公式,有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

令 $x=0, x=1$,则有

$$f(0)=f(x_0)-f'(x_0)x_0+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^{\ 2}$$

$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2$$

① − ②，注意到 $f(0)=f(1)$， 则有

$$f'(x_0)=\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^{\ 2}-\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2$$

$\because \left|f''(x)\right|\le 1,$

$$\therefore \left|f'(x_0)\right|\le \frac{1}{2}x_0^2+\frac{1}{2}(1-x_0)^2=(x_0-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$$

又由 $x_0\in[0,1]$ 知， $\left|x_0-\frac{1}{2}\right|\le\frac{1}{2}$， 于是有 $\left|f'(x_0)\right|\le\frac{1}{2}$

由 x_0 的任意性,可知命题成立.

例6 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-4\sin x+\sin x\cos x}{x^n}=A(\neq 0)$ 求n.

解 应用泰勒公式

$$\sin x = x-\frac{1}{3\,!}x^3+\frac{1}{5\,!}x^5+o(x^5)$$

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}[2x-\frac{1}{3\,!}(2x)^3+\frac{1}{5\,!}(2x)^5+o(x^5)]$$

$$\Rightarrow 3x-4\sin x+\sin x\cos x=\frac{1}{10}x^5+o(x^5)$$

$$\Rightarrow n=5$$

例7 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\arctan\dfrac{a}{n}-\arctan\dfrac{a}{n+1}) \quad (a\neq 0).$

解法1 利用中值定理求极限

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty} n^2\frac{1}{1+\xi^2}(\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1}) \quad (\xi\text{在}\frac{a}{n}\text{与}\frac{a}{n+1}\text{之间})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n+1)}\frac{a}{1+\xi^2}$$

$$=a.$$

解法2 利用Taylor公式

令$f(x)=\arctan x$,则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2},\qquad f''(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2},$$

$$\therefore\quad f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+o(x^2)$$

$$=x+o(x^2).$$

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left\{\left[\frac{a}{n}+o(\frac{1}{n^2})\right]-\left[\frac{a}{n+1}+o(\frac{1}{(n+1)^2})\right]\right\}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{an^2}{n(n+1)}+\frac{+o(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}}\right]=a.$$

解法3 利用罗必达法则

$$\text{原式} = \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan\frac{a}{x} - \arctan\frac{b}{x}}{\frac{1}{x^2}}$$

令 $t = \frac{1}{x}$,

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\arctan at - \arctan bt}{t^2}$$

$$= \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2(\arctan\frac{a}{n} - \arctan\frac{a}{n+1}) \quad (a \neq 0)$$

例8　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$.

解　$\because$ 分子关于 x 的次数为 2.

$$\therefore \sqrt[5]{1+5x}=(1+5x)^{\frac{1}{5}}$$

$$=1+\frac{1}{5}(5x)+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)\cdot(5x)^2+o(x^2)$$

$$=1+x-2x^2+o(x^2)$$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{[1+x-2x^2+o(x^2)]-(1+x)}=-\frac{1}{2}.$$

例9 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续, 且

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = 0,\quad \int_0^{\pi} f(x)\cos x dx = 0.$$

证明：在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点ξ_1,ξ_2,使得

$$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0.$$

证 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,\qquad x\in[0,\pi],$ 则有

$$F'(x)=f(x),\quad 且\quad F(0)=F(\pi)=0=F(\xi)$$

$$\because\quad 0=\int_0^{\pi} f(x)\cos x dx=\int_0^{\pi} F'(x)\cos x dx \qquad \xi\in(0,\pi).$$

$$=\int_0^{\pi}\cos x dF(x)=\int_0^{\pi} F(x)\sin x dx=\pi F(\xi)\sin\xi$$

2.3　导数的应用

一、函数的单调性判别

例1 证明：若$f(x)$二阶可导，且 $f''(x)>0, f(0)=0,$

则$F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$内单调递增。

证明：因

$$F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2},$$

要证$F(x)$单调递增，只需证 $F'(x)>0,$ 即证

$$xf'(x)-f(x)>0.$$

设

$$G(x)=xf'(x)-f(x),$$

设

$$G(x) = xf'(x) - f(x),$$

则

$$G'(x) = xf''(x) + f'(x) - f'(x) = xf''(x),$$

因为 $f''(x) > 0, x > 0$， 故$G(x)$是单调递增函数，而

$$G(0) = 0 \cdot f'(x) - 0 = 0,$$

因此

$$G(x) > G(0),$$

即：

$$xf'(x) - f(x) > 0.$$

例2 设 $f(x)$在 $(-\infty,+\infty)$上可导, 且 $f(x)+f'(x)>0$,

证明 $f(x)$ 至多只有一个零点 .

证: 设 $\varphi(x)=e^{x}f(x)$,

则 $\varphi'(x)=e^{x}[f(x)+f'(x)]>0$,

故 $\varphi(x)$在 $(-\infty,+\infty)$上连续单调递增, 从而至多只有一个零点 .

又因 $e^{x}>0$, 因此 $f(x)$也至多只有一个零点 .

思考: 若题中$f(x)+f'(x)>0$ 改为 $f(x)-f'(x)<0$,

其它不变时, 如何设辅助函数?

$$\boxed{\varphi(x)=e^{-x}f(x)}$$

二、不等式的证明

例 1 设$b>a>0$,求证：$\ln\frac{b}{a}>\frac{2(b-a)}{b+a}$.

证 令 $f(x)=(\ln x-\ln a)(x+a)-2(x-a),(x\geq a)$,

则
$$f'(x)=\frac{1}{x}(x+a)+(\ln x-\ln a)-2$$
$$f''(x)=-\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-a}{x^2}\qquad (x>a)$$

于是可知$f'(x)$在$x>a$时单调增加，又$f'(a)=0$,

$\therefore x>a$时$f'(x)>0$，这样$f(x)$单调增加，因此，

$b>a>0$时，$f(b)>f(a)=0$，得证

例2 证明当 $x>0$ 时, $(x^2-1)\ln x \ge (x-1)^2$.

证: 令 $f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$, 则 $\quad f(1)=0$

$$f'(x)=2x\ln x+x-\frac{1}{x}-2(x-1), \qquad f'(1)=0$$

$$f''(x)=2\ln x+1+\frac{1}{x^2}, \qquad f''(1)=2>0$$

$$f'''(x)=\frac{2(x^2-1)}{x^3}$$

法1 由 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的二阶Taylor公式，得

$$f(x)=\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3$$

$$=(x-1)^2+\frac{\xi^2-1}{3\xi^3}(x-1)^3 \ge 0 \qquad (x>0, \xi \text{在} x \text{与} 1 \text{之间})$$

故所证不等式成立 .

法2 列表判别:

$$f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2,\qquad f(1)=0$$

$$f'(x)=2x\ln x-\frac{1}{x}+2\qquad f'(1)=0$$

$$f''(x)=2\ln x+\frac{1}{x^2}+1,\qquad f''(1)=2>0$$

$$f'''(x)=\frac{2(x^2-1)}{x^3}$$

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'''(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$\searrow$ $+$	2	$\nearrow$ $+$
$f'(x)$	$\nearrow$ $-$	0	$\nearrow$ $+$
$f(x)$	$\searrow$ $+$	0	$\nearrow$ $+$

故当$x>0$时 $f(x)\geq 0$, 即$(x^2-1)\ln x\geq(x-1)^2$.

$$f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2, \qquad f(1)=0$$

$$f'(x)=2x\ln x-\frac{1}{x}+2 \qquad f'(1)=0$$

$$f''(x)=2\ln x+\frac{1}{x^2}+1, \qquad \boxed{f''(1)=2>0}$$

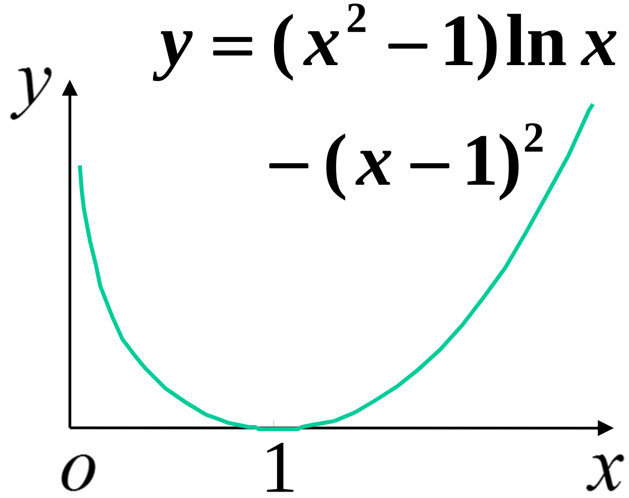
法3 利用极值第二判别法.

易知 $x=1$ 是 $f'(x)=0$ 的唯一根,

且 $f''(1)>0$, $\therefore x=1$ 为 $f(x)$ 的唯一极小点, 故 $f(1)=0$ 也是最小值,

因此当 $x>0$ 时 $f(x)\geq 0$, 即

$$(x^2-1)\ln x\geq (x-1)^2$$



例3 证明不等式

$$x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\frac{x+y}{2}, (x>0, y>0, x\neq y).$$

证　令 $f(t) = t\ln t \ (t>0)$,

则 $f'(t) = \ln t + 1$,　　$f''(t) = \frac{1}{t} > 0$,

$\therefore f(t) = t\ln t$ 在 (x, y) 或 (y, x), $x>0, y>0$ 是凹的.

于是 $\frac{1}{2}[f(x) + f(y)] > f(\frac{x+y}{2})$

即 $\frac{1}{2}[x\ln x + y\ln y] > \frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2}$,

即 $x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\frac{x+y}{2}$.

例4 证明 $\ln(1+x) > \dfrac{\arctan x}{1+x} \quad (x>0).$

证：设$\varphi(x) = (1+x)\ln(1+x) - \arctan x$ 则 $\varphi(0) = 0$

$$\varphi'(x) = 1 + \ln(1+x) - \frac{1}{1+x^2} > 0 \qquad (x>0)$$

故 $x>0$ 时, $\varphi(x)$单调增加，从而 $\varphi(x) > \varphi(0) = 0$

即 $$\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x} \quad (x>0)$$

思考: 证明 $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} < \dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x} \quad (0<x<1)$时, 如何设辅助函数更好？

提示： $\varphi(x) = (1+x)\ln(1+x) - \sqrt{1-x^2}\arcsin x$

例5. 设 $f(0)=0$, 且在 $[0,+\infty)$ 上 $f'(x)$存在，且单调递减，证明对一切 $a>0, b>0$ 有

$$f(a+b)<f(a)+f(b).$$

证: 设$\varphi(x)=f(a+x)-f(a)-f(x)$,则$\varphi(0)=0$.

$$\varphi'(x)=f'(a+x)-f'(x)<0 \quad (x>0)$$

所以当 $x>0$时, $\varphi(x)<\varphi(0)=0$

令 $x=b$,得

$$\varphi(b)=f(a+b)-f(a)-f(b)<0,$$

即所证不等式成立．

三、函数的极值与拐点

例 1 设 $y = f(x)$ 有二阶导数，满足

$$xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x},$$

求证：当 $f'(x_0) = 0$ 时，$f(x_0)$ 为极小值.

证 （1）$x_0 \neq 0$ 情形

$$f''(x_0) = \frac{1 - e^{-x_0}}{x_0} > 0 \quad \begin{pmatrix} x_0 > 0, 1 - e^{-x_0} > 0 \\ x_0 < 0, 1 - e^{-x_0} < 0 \end{pmatrix}$$

故 $f(x_0)$ 为极小值.

（2） $x_0=0$情形 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$,

这时方程条件用x=0代入不行，无法得出上面的公式

$\because$ $f''(x)$存在 $\therefore$ $f'(x)$连续， $\lim_{x\to0}f'(x)=f'(0)=0$

$$f''(0)=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{1}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1-e^{-x}}{x}-3[f'(x)]^2\right\}=\lim_{x\to0}\frac{1-e^{-x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}}{1}=1>0$$ 故 $f(x_0)$为极小值.

例2 求函数 $y = x + \dfrac{x}{x^2-1}$ 的单调区间,极值,凹凸区间,拐点,渐近线.

解 (1) 定义域: $x \neq \pm 1$,

即 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$,

$\because\ f(-x) = -x + \dfrac{-x}{x^2-1} = -f(x)$, 奇函数

(2) $y' = 1 - \dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$,

令 $y' = 0$, 得 $x = -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$.

$$y'' = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x+1)^3},$$

令 $y''=0$，得可能拐点的横坐标 $x=0.$

(3) $\because \lim\limits_{x\to\infty} y = \infty$，$\therefore$ 没有水平渐近线;

又 $\lim\limits_{x\to 1-0} y = -\infty$，$\lim\limits_{x\to 1+0} y = +\infty$，

$\therefore x=1$ 为曲线 y 的铅直渐近线;

$\lim\limits_{x\to -1-0} y = -\infty$，$\lim\limits_{x\to -1+0} y = +\infty$，

$\therefore x=-1$ 为曲线 y 的铅直渐近线;

$$\because a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}(x+\frac{x}{x^2-1})=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-ax)=\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=0,$$

$\therefore$ 直线 $y=x$ 为曲线 y 的斜渐近线.

(4) 以函数的不连续点 $(x=\pm1)$,驻点 $(x=-\sqrt{3},$ $x=0,\ x=\sqrt{3})$ 和可能拐点的横坐标为分点,

列表如下

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$-$
y''	$-$		$-$		$+$	0	$-$
y		极大值				拐点	

x	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y'		$-$	0	$+$
y''		$+$		$+$
y			极小值	

极大值 $y\big|_{x=-\sqrt{3}} = -\frac{3}{2}\sqrt{3},$

极小值 $y\big|_{x=\sqrt{3}} = \frac{3}{2}\sqrt{3},$

拐点为 $(0,0)$.

四、最大值和最小值

1．求函数$f(x)$在$[a,b]$上的最大值和最小值的方法.

2．最大（小）值的应用问题

首先要列出应用问题中的目标函数及其考虑的区间,

然后再求出目标函数在区间内的最大（小）值.

例1. 求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项 .

证：设 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}\ (x\ge 1)$, 用对数求导法得

$$f'(x)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$$

极大值

令 $f'(x)=0$, 得 $x=e$,

列表判别:

x	$[1,e)$	e	$(e,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$

因为 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 只有唯一的极大点 $x=e$, 因此在 $x=e$ 处 $f(x)$ 也取最大值 .

又因 $2<e<3$, 且 $\sqrt{2}=\sqrt[4]{4}<\sqrt[3]{3}$, 故 $\sqrt[3]{3}$ 为数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 中的最大项 .

例 2 已知 $f(x)$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 内的可微函数，$\varphi(x)=\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\ (x>0)$, a 是函数 $\varphi(x)-f(x)$ 的最小零点，$f(0)<f(a)$，且当 $x\geq a$ 时，$f'(x)<0$, 试证 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处取得最大值.

证 因为 $\varphi(a)-f(a)=0$, $\Rightarrow \varphi(a)=f(a)$, 又因为

$$\varphi(a)=\frac{1}{a}\int_0^a f(t)dt, \Rightarrow af(a)=\int_0^a f(t)dt,$$

$$\varphi'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(t)dt}{x^2}, \Rightarrow \varphi'(a)=\frac{af(a)-\int_0^a f(t)dt}{a^2}=0,$$

$$\varphi'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(t)dt}{x^2},\Rightarrow \varphi'(a)=\frac{af(a)-\int_0^a f(t)dt}{a^2}=0,$$

$$\varphi''(x)=\frac{[f(x)+xf'(x)-f(x)]x^2-2x\left[xf(x)-\int_0^x f(t)dt\right]}{x^4},$$

$\Rightarrow \varphi''(a)=\dfrac{f'(a)}{a}<0,$ 故$\varphi(x)$在$x=a$处取得极大值.

下证$g(x)=xf(x)-\int_0^x f(t)dt$在$(0,+\infty)$只有唯一零点$x=a$.

因为 $g'(x)=xf'(x)$, 当$x\geq a$时, $f'(x)<0$,则有

$g'(x)=xf'(x)<0$, 因此函数$g(x)$单调递减.

下证$g(x)=xf(x)-\int_0^x f(t)dt$在$(0,+\infty)$只有唯一零点$x=a$.

因为 $g'(x)=xf'(x)$，当$x\ge a$时，$f'(x)<0$,则有

$$g'(x)=xf'(x)<0,$$ 因此函数$g(x)$单调递减.

故函数$g(x)$在$(a,+\infty)$没有零点.

下面**反证**函数$g(x)$在$(0,a)$内存在$\xi\in(0,a)$使得$g(\xi)=0$,即

$$\xi f(\xi)-\int_0^{\xi} f(t)dt=0, \Rightarrow f(\xi)=\frac{\int_0^{\xi} f(t)dt}{\xi}=\varphi(\xi).$$

这与a是函数$\varphi(x)-f(x)$的最小零点**矛盾**，

故$g(x)$在$(0,+\infty)$只有唯一零点$x=a$.

故$g(x)$在$(0,+\infty)$只有唯一零点$x=a$.

即$\varphi'(x)$在$(0,+\infty)$只有唯一驻点$x=a$.

又因为函数$\varphi(x)$是定义在$[0,+\infty)$内的可微，且$\varphi(a)$是极大值，故结论得证.

注：此题综合性较强，极值的判别以及极值与最值之间的联系.

$$g(x)=xf(x)-\int_0^x f(t)dt \qquad \varphi'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(t)dt}{x^2},$$

2.4　综合习题讲解

一、填空题

1.设$f(x)=(x^{1949}-1)g(x)$，其中$g(x)$在点$a=1$连续且$g(1)=a$，则$f'(1)=$ ______.

解 根据导数 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$，则

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^{1949}-1)g(x)-0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[(x^{1948}+x^{1947}+\cdots+x+1)g(x)\right]$$

$$=1949\cdot\lim_{x\to 1}g(x)=1949\cdot g(1)=1949a.$$

2.设函数 $f(x)$在点 a 有导数 $f'(a)$，则

(1) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(a-\Delta x)-f(a)}{\Delta x} =$ ______.

(2) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(a+\Delta x)-f(a-\Delta x)}{\Delta x} =$ ______.

解 (1) $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a-\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = -\lim_{-\Delta x \to 0} \frac{f(a-\Delta x)-f(a)}{-\Delta x} = -f'(a).$$

(2) $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a-\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(a+\Delta x)-f(a)]+[f(a)-f(a-\Delta x)]}{\Delta x}$$

(2) $\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a-\Delta x)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(a+\Delta x)-f(a)]+[f(a)-f(a-\Delta x)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a)-f(a-\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=f'(a)+\lim_{-\Delta x\to 0}\frac{f(a-\Delta x)-f(a)}{-\Delta x}=2f'(a).$$

3.设 $y=\arctan e^{x}-\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=$ ________.

解 $y=\arctan e^{x}-\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$

$$=\arctan e^{x}-\frac{1}{2}\left[2x-\ln(e^{2x}+1)\right]$$

则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^{x}}{1+e^{2x}}-\dfrac{1}{2}\left[2-\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}\right]=\dfrac{e^{x}}{1+e^{2x}}-1+\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$

所以 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=\dfrac{e+e^{2}}{1+e^{2}}-1=\dfrac{e-1}{1+e^{2}}.$

4.设 $y=f(\ln x)e^{f(x)}$,其中 f 可微分, 则 $\mathrm{d}y=$ ________.

解 根据微分法则可得

$$\mathrm{d}y=\left[f'(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right]e^{f(x)}+f(\ln x)\cdot e^{f(x)}f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=e^{f(x)}\left[\frac{1}{x}f'(\ln x)+f(\ln x)f'(x)\right]\mathrm{d}x.$$

或者根据求导法则可得

$$y'=\left[f'(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\right]e^{f(x)}+f(\ln x)\cdot e^{f(x)}f'(x)$$

$$=e^{f(x)}\left[\frac{1}{x}f'(\ln x)+f(\ln x)f'(x)\right]$$

5.设 $y=(1+\sin x)^{x}$，则 $\mathrm{d}y=$ ________.

分析 它属幂指函数(底数和指数上都有自变量)，

一般形式为 $y=[f(x)]^{g(x)}$. 要求 $[f(x)]^{g(x)}$ 的微分或导数，

根据对数恒等式，先变换成

$$y=\mathrm{e}^{\ln[f(x)]^{g(x)}}=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}.$$ (按复合函数求微分或导数)

或

$$\ln y=\ln[f(x)]^{g(x)}=g(x)\ln f(x).$$ (按隐函数求微分或导数)

$$y=(1+\sin x)^x,$$

解 恒等变形得

$$\ln y = x\ln(1+\sin x)$$

根据微分法则知

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\mathrm{d}x\cdot\ln(1+\sin x)+x\cdot\frac{1}{1+\sin x}\cdot\cos x\mathrm{d}x$$

因此

$$\mathrm{d}y=y\left[\mathrm{d}x\cdot\ln(1+\sin x)+x\cdot\frac{1}{1+\sin x}\cdot\cos x\mathrm{d}x\right]$$

$$=(1+\sin x)^x\left[\ln(1+\sin x)+\frac{x\cos x}{1+\sin x}\right]\mathrm{d}x.$$

6. 函数 $f(x)=\arctan e^{x}+\arctan e^{-x}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内等于_____.

解 因为

$$f'(x)=\frac{e^{x}}{1+(e^{x})^{2}}+\frac{-e^{-x}}{1+(e^{-x})^{2}}=\frac{e^{x}}{1+e^{2x}}-\frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}\equiv 0.$$

所以

$$f(x)=\arctan e^{x}+\arctan e^{-x}\equiv C.$$

又

$$f(0)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.\quad\Rightarrow C=\frac{\pi}{2}.$$

二 计算题

1.设函数 $y=y(x)$ 满足方程 $\mathrm{e}^{y}=\sin(x+y)$. 在点 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 处，求二阶导数 y'' 和二阶微分 $\mathrm{d}^2 y$.

分析 $y=y(x)$ 是由方程 $\mathrm{e}^{y}=\sin(x+y)$ 确定的隐函数.

解 在方程 $\mathrm{e}^{y}=\sin(x+y)$ 两端关于自变量 x 同时求导数，则有

$$\mathrm{e}^{y}\cdot y'=\cos(x+y)\cdot(1+y'), \qquad (1)$$

再求导数，则有

$$\mathrm{e}^{y}y'^{2}+\mathrm{e}^{y}y''=-\sin(x+y)(1+y')^{2}+\cos(x+y)\cdot y''. \qquad (2)$$

$$e^y \cdot y' = \cos(x+y)\cdot(1+y'), \qquad (1)$$

$$e^y y'^2 + e^y y'' = -\sin(x+y)(1+y')^2 + \cos(x+y)\cdot y''. \qquad (2)$$

将$x=\pi/2, y=0$代入式(1)得$y'=0$;

再将$x=\pi/2, y=0$和$y'=0$,代入式(2)，则得二阶导数

$$y''=-1.$$

而在点$\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$处的二阶微分为

$$d^2y = y''dx^2 = -dx^2.$$

2.求 $y=a^{x^x}+x^{a^x}+x^{x^a}$ 的导数 y'.

分析 利用**对数求导法**分别求出 a^{x^x}、x^{a^x}、x^{x^a} 的导数.

解 $(a^{x^x})'=a^{x^x}\ln a\cdot(x^x)' \ =a^{x^x}\ln a\cdot(e^{x\ln x})'$

$$=a^{x^x}\ln a\cdot e^{x\ln x}(x\ln x)'=a^{x^x}x^x(\ln x+1)\ln a.$$

$$(x^{a^x})'=(e^{a^x\ln x})'=e^{a^x\ln x}(a^x\ln x)'=x^{a^x}a^x\left(\ln a\ln x+\frac{1}{x}\right).$$

$$(x^{x^a})'=(e^{x^a\ln x})'=e^{x^a\ln x}(x^a\ln x)'=x^{x^a}x^{a-1}(a\ln x+1).$$

3.设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\arctan t, \\ 2y-ty^2+e^t=5. \end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

分析　方法一　由 $x=\arctan t$ 得 $t=\tan x$，代入

$$2y-ty^2+e^t=5,$$

得 $2y-y^2\tan x+e^{\tan x}=5$. 根据隐函数求导法则可求.

方法二　根据参数方程求导法则可求.

答案为：
$$\frac{dy}{dx}=\frac{(y^2-e^{\tan x})\sec^2 x}{2(1-y\tan x)}.$$

4.求下列函数的 n 阶导数 $y^{(n)}$

$$(1)\quad y=\frac{1-x}{1+x},\qquad (2)\quad y=\frac{1}{x^2+x-2},\qquad (3)\quad y=\ln\frac{a+bx}{a-bx}.$$

分析 先把函数变形，然后套用已知函数的n阶导数公式

$$(1)\ y=\frac{1-x}{1+x}=\frac{2-(1+x)}{1+x}=\frac{2}{1+x}-1,\quad y^{(n)}=2\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{1+n}}.$$

$$(2)\ y=\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{1}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right),$$

$$y^{(n)}=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n)}\right]$$

$$y^{(n)}=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n)}\right]$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{3}\left[\frac{1}{(x-1)^{1+n}}-\frac{1}{(x+2)^{1+n}}\right].$$

$$(3)\ y=\ln\frac{a+bx}{a-bx}=\ln\frac{1+\frac{b}{a}x}{1-\frac{b}{a}x}=\ln\left(1+\frac{b}{a}x\right)-\ln\left(1-\frac{b}{a}x\right)$$

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!b^n}{(a+bx)^n}+\frac{(n-1)!b^n}{(a-bx)^n}.\qquad\left(\left|\frac{b}{a}x\right|\le 1\right)$$

5.设函数 $f(x)$在区间$(-\infty, x_0]$上有二阶导数.问：如何选择系数a,b,c，使函数

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x \le x_0 \\ a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c, & x > x_0 \end{cases}$$

在区间$(-\infty,+\infty)$内有二阶导数.

解 首先，函数$F(x)$在点x_0必须连续，即

$$\lim_{x\to x_0^+} F(x)=c=F(x_0)=f(x_0).$$

其次，因为函数$F(x)$在点x_0必须有一阶导数，

所以必须满足

$$f'_-(x_0) = F'_-(x_0) = F'_+(x_0) = [2a(x - x_0) + b]\Big|_{x=x_0} = b.$$

最后，因为函数$F(x)$在点x_0必须有二阶导数，所以

$$f''_-(x_0) = F''_-(x_0) = F''_+(x_0) = 2a.$$

因此，要使函数$F(x)$在点x_0有二阶导数，当且仅当

$$a = \frac{1}{2} f''_-(x_0), \quad b = f'_-(x_0), \quad c = f(x_0).$$

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \le x_0 \\ a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c, & x > x_0 \end{cases}$$

三、证明题

1.证明：若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可微分，且$f(a)=f(b)=0$，则对任意实数λ，必存在点$\xi\in(a,b)$，使$f'(\xi)=\lambda f(\xi)$.

证 作辅助函数

$$F(x)=\mathrm{e}^{-\lambda x}f(x),$$

则函数 $F(x)$闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可微分，且$F(a)=F(b)=0$. 根据罗尔定理，必存在点$\xi\in(a,b)$，使$F'(\xi)=0$. 即得

$$F'(\xi)=-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda\xi}f(\xi)+\mathrm{e}^{-\lambda\xi}f'(\xi)=0\ (a<\xi<b).$$

2.设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上可微分.证明：若$ab>0$，则有点$\xi(a<\xi<b)$，使

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

证 $$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = \frac{af(b)-bf(a)}{a-b} = \frac{\dfrac{f(b)}{b}-\dfrac{f(a)}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}$$

取函数

$$F(x)=\frac{f(x)}{x}, \qquad G(x)=\frac{1}{x}.$$

根据柯西中值定理，有$\xi\in(a,b)$使

$$\frac{\dfrac{f(b)}{b}-\dfrac{f(a)}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

$$=\frac{\dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

即

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

3.设$a>0, b>0, a\neq b$，证明不等式

$$\frac{2}{a+b}<\frac{\ln a-\ln b}{a-b}<\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

证　不妨设$a>b>0$，则要证的不等式就变成

$$\frac{2\left(\frac{a}{b}-1\right)}{\frac{a}{b}+1}=\frac{2(a-b)}{a+b}<\ln a-\ln b<\frac{a-b}{\sqrt{ab}}=\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}$$

把b暂时看作常数，把a看作变数，令

$$x=\frac{a}{b}\quad (x>1),$$

则要证明的不等式就又变成

$$\frac{2(x-1)}{x+1} < \ln x < \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (x > 1).$$

令

$$f(x) = \frac{2(x-1)}{x+1}, \quad g(x) = \ln x, \quad h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

则 $f(1) = g(1) = h(1) = 0.$ 又因为

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - 2(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2}, \quad g'(x) = \frac{1}{x},$$

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$$

故

$$f'(x) < g'(x) < h'(x) \quad (x>1).$$

因此

$$f(x) < g(x) < h(x) \quad (x>1),$$

即

$$\frac{2(x-1)}{x+1} < \ln x < \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (x>1).$$

$$f'(x) = \frac{2(x+1)-2(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2}, \qquad g'(x) = \frac{1}{x},$$

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x^3}}. \qquad f(1) = g(1) = h(1) = 0.$$

4　设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$.

证明 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{dx}{f(x)}\ge(b-a)^2$.

分析　将问题转化为积分变限函数的单调性证明.

证　作辅助函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt\int_a^x\frac{dt}{f(t)}-(x-a)^2,$$

$$\because F'(x)=f(x)\int_a^x\frac{1}{f(t)}dt+\int_a^x f(t)dt\cdot\frac{1}{f(x)}-2(x-a)$$

$$=\int_a^x\frac{f(x)}{f(t)}dt+\int_a^x\frac{f(t)}{f(x)}dt-\int_a^x 2dt,$$

$$\because f(x)>0, \quad \therefore \frac{f(x)}{f(t)}+\frac{f(t)}{f(x)} \geq 2$$

即 $F'(x)=\int_a^x\left(\frac{f(x)}{f(t)}+\frac{f(t)}{f(x)}-2\right)dt \geq 0,$

$F(x)$ 单调增加.

又 $\because F(a)=0, \quad \therefore F(b) \geq F(a)=0,$

即 $\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq (b-a)^2.$

四、竞赛真题选讲

1、设函数 $f(x)$ 连续，$g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A,$$

2009预赛

A 为常数，求 $g'(x)$并讨论$g'(x)$在$x=0$ 处的连续性.

分析 本题主要利用导数的定义和同阶无穷小.

解 由题设，知 $f(0)=0$，$g(0)=0$. 令$u=xt$，得

$$g(x)=\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x},\qquad (x\neq 0).$$

$$g(x)=\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}, \qquad (x\neq 0).$$

从而

$$g'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2},$$

由导数定义有

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}.$$

由于

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{xf(x) - \int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$$

$$= A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2}.$$

因此$g'(x)$在$x = 0$ 处连续.

2、设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 点附近有定义， 且在 $x=1$ 点可导， 并已知 $f(1)=0, f'(1)=2,$ 求

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2+x\tan x}.$$

2010决赛

分析 本题主要利用导数的定义和等价无穷小代换.

解 由题设，知 $f'(1)=\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{f(u)-f(1)}{u-1}=2.$

令 $u=\sin^2 x+\cos x,$ 故由上式有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{\sin^2 x+\cos x-1}=2.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2+x\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{\sin^2 x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2+x\tan x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2+x\tan x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^2 x}{x^2+x\tan x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2+x\tan x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2+x\tan x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\frac{\tan x}{x}}=\frac{1}{2}.$$

3、设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$ 上连续，在$(0,1)$ 内可微，且 $f(0)=f(1)=0,\ f(\frac{1}{2})=1$，证明：(1) 存在一个 $\xi\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f(\xi)=\xi$；(2) 存在一个 $\eta\in(0,\xi)$，使得

$$f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1.$$

2010决赛

分析 本题主要利用介值定理和Rolle中值定理.

证 (1) 令 $g(x)=f(x)-x$，则

$$g(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0,\quad g(1)=f(1)-1=-1<0,$$

所以，存在一个 $\xi\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $g(\xi)=0$. 即$f(\xi)=\xi$.

3、设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可微，且 $f(0)=f(1)=0,\ f(\frac{1}{2})=1$，证明：(1) 存在一个 $\xi\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f(\xi)=\xi$；(2) 存在一个 $\eta\in(0,\xi)$，使得

$$f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1.$$

2010决赛

证 (2) 令 $h(x)=e^{-x}(f(x)-x)$，则 $h(0)=h(\xi)=0$，

所以，存在一个$\eta\in(0,\xi)$，使得 $h'(\eta)=0$. 即

$$h'(\eta)=e^{-\eta}(f'(\eta)-1)-e^{-\eta}(f(\eta)-\eta)=0.$$

亦即 $$f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1.$$

4. 现要设计一个容积为V的一个圆柱体的容器.已知上下两底的材料费为单位面积a元，而侧面的材料费为单位面积b元.试给出最节省的设计方案：即高与上下底的直径之比为何值时所需费用最少？ 2010决赛

解 设圆柱容器的高为h,上下底的径为r，则有

$$V=\pi r^2 h,$$

则所需费用为

$$F(r)=2a\pi r^2+2b\pi rh=2a\pi r^2+\frac{2bV}{r}.$$

$$F(r)=2a\pi r^2+2b\pi rh=2a\pi r^2+\frac{2bV}{r}.$$

所以

$$F'(r)=4a\pi r^2-\frac{2bV}{r^2}.$$

那么，费用最少意味着

$$F'(r)=0,\qquad \text{也即} \qquad r^3=\frac{bV}{2a\pi}.$$

这时高与底的直径之比为

$$\frac{h}{2r}=\frac{V}{2\pi r^3}=\frac{a}{b}.$$

5、设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 具有二阶导数，且

$$f''(x)>0, \lim_{x\to+\infty} f'(x)=\alpha>0, \lim_{x\to-\infty} f'(x)=\beta<0,$$

且存在一点 x_0，使得 $f(x_0)<0$，证明：方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内恰有二个实根.

2010预赛

分析 主要利用Taylor公式、介值定理和Rolle定理.

解 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\alpha>0$，知存在一点$a$, 使得

$$f'(a)>\frac{\alpha}{2}>0,$$

由Taylor展开知

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2,$$

ξ介于x与a之间，又因$f''(x)>0$，所以

$$f(x)>f(a)+f'(a)(x-a),$$

又因$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(a)(x-a)=+\infty$，知存在一点$b$, 使得

$$f(b)>0.$$

同理由$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\beta<0$，知存在一点$c$, 使得

$$f'(c)<\frac{\beta}{2}<0,$$

由Taylor展开知

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\eta)}{2}(x-c)^2,$$

η介于x与c之间，又因 $f''(x)>0$，所以

$$f(x)>f(c)+f'(c)(x-a),$$

又因 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(c)(x-c)=+\infty$，知存在一点$d$，使得

$$f(d)>0.$$

分别考虑区间 $[d,x_0],[x_0,b]$，由零点存在定理知存在

$x_1\in(d,x_0),x_2\in(x_0,b)$，使得 $f(x_1)=f(x_2)=0.$

下面证 方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内恰有二个实根.

反证 假设方程至少有三个实根，不妨设为 a_1,a_2,a_3,且

$$a_1<a_2<a_3,\quad f(a_1)=f(a_2)=f(a_3)=0.$$

分别考虑区间 $[a_1,a_2],[a_2,a_3]$, 由Rolle定理知, 存在

$\xi_1\in(a_1,a_2),\xi_2\in(a_2,a_3)$, 使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0.$

考虑区间$[\xi_1,\xi_2]$, 由Rolle定理知, 存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$, 使得

$$f''(\xi)=0.$$

这与 $f''(x)>0$ 矛盾. 所以结论成立.

6. 设函数$f(x)$ 在x=0的某邻域内有二阶连续导数, 且$f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$均不为零. 证明：存在唯一一组实数k_1,k_2,k_3 ，使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{k_1 f(h)+k_2 f(2h)+k_3 f(3h)-f(0)}{h^2}=0.$$ 2011决赛

证 因为

$$\lim_{h\to 0}\frac{k_1 f(h)+k_2 f(2h)+k_3 f(3h)-f(0)}{h^2}=0.$$

所以 $$\lim_{h\to 0} k_1 f(h)+k_2 f(2h)+k_3 f(3h)-f(0)=0.$$

$$\Rightarrow k_1 f(0)+k_2 f(0)+k_3 f(0)-f(0)=0.$$

应用罗比达法则，得

$$\lim_{h\to 0}\frac{k_1 f'(h)+2k_2 f'(2h)+3k_3 f'(3h)}{2h}=0.$$

因此 $$\lim_{h\to 0} k_1 f'(h)+2k_2 f'(2h)+3k_3 f'(3h)=0.$$

$$\Rightarrow k_1 f'(0)+2k_2 f'(0)+3k_3 f'(0)=0.$$

应用罗比达法则，得

$$\lim_{h\to 0}\frac{k_1 f''(h)+4k_2 f''(2h)+9k_3 f''(3h)}{2}=0.$$

$$\Rightarrow k_1 f''(0)+4k_2 f''(0)+9k_3 f''(0)=0.$$

因为$f(0), f'(0), f''(0)$均不为零，联立方程

$$k_1 f(0) + k_2 f(0) + k_3 f(0) - f(0) = 0.$$

$$k_1 f'(0) + 2k_2 f'(0) + 3k_3 f'(0) = 0.$$

$$k_1 f''(0) + 4k_2 f''(0) + 9k_3 f''(0) = 0.$$

可得方程组

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 1, \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0, \\ k_1 + 4k_2 + 9k_3 = 0. \end{cases}$$

因此方程组存在唯一解： $k_1 = 3, k_2 = -3, k_3 = 1.$

7. 设函数$f(x)$ 在闭区间$[-1,1]$上具有连续的三阶导数,且

$$f(-1)=0,\ f(1)=1,\ f'(0)=0.$$

求证：在开区间$(-1,1)$内至少存在一点x_0，使得

$$f'''(x_0)=3.$$

2011预赛

证 由麦克劳林公式，得

$$f(x)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\frac{1}{6}f'''(\xi)x^3,$$

其中ξ介于0与x之间，$x\in[-1,1]$.

在上式中分别取$x=-1$和$x=1$, 得

$$1 = f(1) = f(0) + \frac{1}{2} f''(0) + \frac{1}{6} f'''(\xi_1), \quad 0 < \xi_1 < 1;$$

$$0 = f(-1) = f(0) + \frac{1}{2} f''(0) - \frac{1}{6} f'''(\xi_2), \quad 0 < \xi_2 < 1;$$

两式相减，得 $f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2) = 6.$

因为$f'''(x)$在闭区间$[\xi_2, \xi_1]$上连续，故设最大值为M，最小值为m，则有

$$m \le \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2} \le M.$$

再由连续函数的介值定理易知结论成立.

8. 设函数$f(x)$ 在闭区间$(-\infty,+\infty)$上无穷次可微，并且满足: 存在$M>0$，使得 1976年前苏联的竞赛题

$$|f^{(k)}(x)|\le M,\forall x\in(-\infty,+\infty),(k=1,2,\cdots),$$

且$f(\frac{1}{2^n})=0 \quad (n=1,2,\cdots)$，求证：在 $(-\infty,+\infty)$上

$$f(x)\equiv 0.$$

2012决赛

证 将$f(x)$展开成下列麦克劳林级数，且

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

又因

$$f(\frac{1}{2^n})=0 \quad (n=1,2,\cdots),$$

设 $x_n=\dfrac{1}{2^n}$, $(n=1,2,\cdots)$, 则

$$\lim_{n\to\infty} x_n=0, \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(0)=0;$$

且在区间 $[x_{n+1},x_n]$ 上 $f(x)$ 满足Roll定理，因此存在

$y_n\in(x_{n+1},x_n)$, 使得

$$\left.\begin{aligned} &f'(y_n)=0 \quad (n=1,2,\cdots),\\ &\lim_{n\to\infty} y_n=0, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(y_n)=f'(0)=0;$$

且在区间 $[y_{n+1},y_n]$ 上 $f'(x)$ 满足Roll定理，因此存在

且在区间 $[y_{n+1}, y_n]$ 上 $f'(x)$ 满足Roll定理，因此存在

$z_n \in (y_{n+1}, y_n)$， 使得

$$\left.\begin{aligned} & f''(z_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots), \\ & \lim_{n\to\infty} z_n = 0, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f''(z_n) = f''(0) = 0;$$

重复上述证明过程可得

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

所以在 $(-\infty, +\infty)$ 上

$$f(x) \equiv 0.$$

9.求方程 $x^2\sin\frac{1}{x}=2x-501$的近似解. 精确到0.001.

2012预赛

解 由泰勒公式

$$\sin t = t-\frac{\sin(\theta t)}{2}t^2,\quad \theta\in(0,1).$$

因此

$$\sin\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{\sin(\frac{\theta}{x})}{2}\frac{1}{x^2},$$

代入原方程得

$$x-\frac{1}{2}\sin(\frac{\theta}{x})=2x-501,\ \Rightarrow x=501-\frac{1}{2}\sin(\frac{\theta}{x}),$$

$$x-\frac{1}{2}\sin(\frac{\theta}{x})=2x-501, \Rightarrow x=501-\frac{1}{2}\sin(\frac{\theta}{x}),$$

由此知，当x>500时， $0<\frac{\theta}{x}<\frac{1}{500}$， 则

$$|x-501|=\frac{1}{2}|\sin(\frac{\theta}{x})|\le\frac{1}{2}\cdot\frac{\theta}{x}\le\frac{1}{1000}=0.001.$$

所以，x=501 即为满足题设条件的解.

10.设函数$y=f(x)$二阶可导，且 $f''(x)>0, f(0)=0, f'(0)=0,$

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}$，其中$u$是曲线$y=f(x)$上点$p(x, f(x))$处

的切线在x轴上的截距.

2012预赛

解　曲线$y=f(x)$上点$p(x, f(x))$处的切线方程为

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x),$$

令$Y=0$，则有

$$X = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad \Rightarrow u = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

$$X = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad \Rightarrow u = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

且有

$$\lim_{x\to 0} u = \lim_{x\to 0}\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{f'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{f''(x)} = 0.$$

由$f(x)$ 在$x=0$处的二阶泰勒公式知

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{u}{x} = \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{f(x)}{xf'(x)}\right) = 1 - \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{xf'(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{u}{x}=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{f(x)}{xf'(x)}\right)=1-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{xf'(x)}$$

$$=1-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)}{xf'(x)}=1-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f''(0)}{2}}{\frac{f'(x)}{x}}$$

$$=1-\frac{f''(0)}{2}\cdot\frac{1}{f''(0)}=\frac{1}{2}.$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\left(\frac{f''(0)}{2}u^2+o(u^2)\right)}{\left(\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)\right)u^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{u}=2.$$

11. 设函数$f(x)$在$[1, +\infty)$上连续可导，

$$f'(x)=\frac{1}{1+f^2(x)}\left[\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})}\right],$$

2013决赛

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

证 当$t>0$时，对函数 $\ln(1+x)$在区间$[0, t]$上应用拉格朗日中值定理，有

$$\ln(1+t)=\frac{t}{1+\xi}, \quad 0<\xi<t.$$

由此得

$$\frac{t}{1+t} < \ln(1+t) < t, \quad \Rightarrow \frac{1}{1+x} < \ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{1}{x},$$

所以，当$x\geq1$时，有 $f'(x) \geq 0$. 即$f(x)$在$[1, +\infty)$上单增.

又因

$$f'(x) \leq \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})} \leq \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})} \leq \frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$$

故

$$\int_1^x f'(t)\,\mathrm{d}t \le \int_1^x \frac{1}{2\sqrt{t^3}}\,\mathrm{d}t,$$

所以

$$f(x) - f(1) \le 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \le 1.$$

因此$f(x)$有上界.

由于$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调增加且有上界，所以

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ 存在.}$$

12. 设函数$f(x)$ 在闭区间$[-2,2]$上二阶可导，且

$$|f(x)|\le 1,\ f^2(0)+[f'(0)]^2=4.$$

求证：在开区间$(-2,2)$内至少存在一点ξ，使得

$$f(\xi)+f''(\xi)=0.$$

2013决赛

证 在$[-2,0]$与$[0,2]$上分别对$f(x)$应用拉格朗日中值定理，可知存在$\xi_1\in(-2,0),\xi_2\in(0,2)$，使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(0)-f(-2)}{2},\qquad f'(\xi_2)=\frac{f(2)-f(0)}{2},$$

由于$|f(x)|\le 1$，所以 $|f'(\xi_1)|\le 1,\quad |f'(\xi_2)|\le 1.$

设 $F(x)=f^2(x)+[f'(x)]^2$，则

$$|F'(\xi_1)|\le 2,\quad |F'(\xi_2)|\le 2.$$

由于

$$F(0)=f^2(0)+[f'(0)]^2=4,$$

且 $F(x)$在闭区间$[\xi_1,\xi_2]$上连续，故设其最大值为M，

则有

$$F(\xi)=M\ge 4,\quad \xi\in(\xi_1,\xi_2).$$

即

$$\left.\begin{aligned} &F(\xi)=f^2(\xi)+[f'(\xi)]^2\ge 4,\\ &|f(\xi)|\le 1,\end{aligned}\right\}\Rightarrow f'(\xi)\ne 0.$$

注意到最大值点ξ必是$F(x)$的极大值点. 由于$F(x)$可导，故由极值的必要条件可知

$$F'(\xi)=2f'(\xi)(f^2(\xi)+[f'(\xi)]^2)=0,$$

所以

$$f^2(\xi)+[f'(\xi)]^2=0.$$

13. 设函数$f(x)$ 在闭区间[0, 1]上二阶可导，且有正常数A,B 使得

$$|f(x)|\le A,\qquad |f''(x)|\le B.$$

证明：对任意 $x\in[0,1]$，有

$$|f'(x)|\le 2A+\frac{B}{2}.$$

2014决赛

证 由Taylor公式，有

$$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(0-x)^2,\ \xi\in(0,x),$$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2,\ \eta\in(x,1),$$

证 由Taylor公式，有

$$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(0-x)^2,\ \xi\in(0,x),$$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2,\ \eta\in(x,1),$$

上述两式相减，可得

$$f(0)-f(1)=-f'(x)+\frac{f''(\xi)}{2}(0-x)^2-\frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2,$$

整理可得

$$f'(x)=f(1)-f(0)+\frac{f''(\xi)}{2}(0-x)^2-\frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2,$$

整理可得

$$f'(x)=f(1)-f(0)+\frac{f''(\xi)}{2}(0-x)^2-\frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2,$$

根据已知条件 $|f(x)|\le A,\quad |f''(x)|\le B,$ 可得

$$|f'(x)|\le 2A+\frac{B}{2}(x^2+(1-x)^2),$$

又因为

$$x^2+(1-x)^2\le(x+(1-x))^2=1,$$

所以

$$|f'(x)|\le 2A+\frac{B}{2}.$$

五、考研真题选讲

1. 设 $y=\arctan e^x-\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$,则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=$ ______.

分析 本题为基础题型，先求导函数即可.

解 因为

$$y=\arctan e^x-x+\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1),$$

$$y'=\frac{e^x}{1+e^{2x}}-1+\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}.$$

所以

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=\frac{e-1}{e^2+1}.$$

2. 设 $f(x)=x\sin x+\cos x$,下列命题中正确的是

（A）$f(0)$是极大值， $f(\dfrac{\pi}{2})$是极小值.

（B） $f(0)$是极小值， $f(\dfrac{\pi}{2})$是极大值.

（C） $f(0)$是极大值， $f(\dfrac{\pi}{2})$也是极大值.

(D) $f(0)$是极小值， $f(\dfrac{\pi}{2})$也是极小值.

分析 先求出 $f'(x), f''(x)$,再用取极值的充分条件判断即可.

解 $$f'(x) = \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x,$$

$$\therefore \quad f'(0) = 0, f'(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

又因 $f''(x) = \cos x - x\sin x,$ 且

$$f''(0) = 1 > 0, \qquad f''(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0.$$

因此，正确答案为(B).

$$f(x) = x\sin x + \cos x,$$

3. 证明：当$0 < a < b < \pi$时，

$$b\sin b + 2\cos b + \pi b > a\sin a + 2\cos a + \pi a.$$

分析 构造函数

$$f(x) = x\sin x + 2\cos x + \pi x,$$

证明其单调递增即可.

4. 试确定常数A, B, C的值，使得

$$e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3),$$

其中$o(x^3)$是当$x\to 0$时比x^3高阶的无穷小。

分析　方法1　由Taylor公式知

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3),$$

将其代入上式即可得　$A=\frac{1}{3}, B=-\frac{2}{3}, C=\frac{1}{6}.$

方法2　根据高阶的无穷小的定义和洛比达法则也可求

5. 设函数 $y=y(x)$由方程$y\ln y-x+y=0$确定，试判断曲线$y=y(x)$在点(1, 1)附近的凹凸性.

分析 由凹凸性判别方法和隐函数的求导即得.

解 在$y\ln y-x+y=0$两边对 x 求导得

$$y'\ln y+2y'-1=0.$$

两边对x再求导得

$$y''\ln y+y'\cdot\frac{1}{y}y'+2y''=0.$$

将x=1, y =1 代入得上两式得 $y'=\frac{1}{2},\quad y''=-\frac{1}{8}.$

由于二阶导函数 y'' 在$x=1$的附近是连续函数,

所以由

$$y'' = -\frac{1}{8}$$

可知在$x=1$的附近有

$$y'' < 0,$$

故曲线$y = y(x)$在点(1, 1)附近是凸的.

6. 设函数 $f(x)$, $g(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)= g(a), f(b)=g(b)$，证明：存在$\xi \in (a,b)$，使得$f''(\xi) = g''(\xi)$.

证　构造辅助函数 $F(x) = f(x) - g(x)$. 由题设有

$$F(a)=F(b)=0.$$

又$f(x)$, $g(x)$在(a, b)内具有相等的最大值, 不妨设存在

$$x_1 \le x_2, \qquad x_1, x_2 \in (a,b)$$

使得

$$f(x_1) = M = \max_{x\in[a,b]} f(x), \qquad g(x_2) = M = \max_{x\in[a,b]} g(x).$$

若$x_1 = x_2$,令$c = x_1$，则 $F(c) = 0$. 若$x_1 < x_2$,因

$$F(x_1) = f(x_1) - g(x_1) \geq 0, \quad F(x_2) = f(x_2) - g(x_2) \leq 0.$$

因而存在$c \in [x_1, x_2] \subset (a,b)$，使 $F(c) = 0$.

在区间$[a,c]$,$[c,b]$上分别利用罗尔定理知， 存在

$\xi_1 \in (a,c), \xi_2 \in (c,b)$，使得 $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$.

再对$F'(x)$在区间$[\xi_1, \xi_2]$上应用罗尔定理知，存在

$\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a,b)$，使得$F''(\xi) = 0$. 即

$$f''(\xi) = g''(\xi).$$

7. (I) 证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$在闭区间 $[a,b]$上连续, 在开区间(a,b)内可导, 则存在$\xi(a<\xi<b)$, 使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(II) 证明: 若函数 $f(x)$在 x=0 处连续，在$(0,\delta)(\delta>0)$内可导，且 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)=A$,则 $f'_+(0)$存在，且 $f'_+(0)=A$.

分析 中值定理与右导数的定义

(II) **证** 对于任意的$t\in(0,\delta)$,函数 $f(x)$在$[0,t]$上连续，在$(0,t)$内可导，因此由右导数的定义与拉格朗日中值定理

$$f'_+(0)=\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\lim_{t\to0^+}\frac{f'(\xi)t}{t}=\lim_{t\to0^+}f'(\xi)$$

$$f'_+(0)=\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\lim_{t\to0^+}\frac{f'(\xi)t}{t}=\lim_{t\to0^+}f'(\xi)$$

$$\xi\in(0,t).$$

由于$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$,且当$t\to0^+$时，$\xi\to0^+$，所以

$$\lim_{t\to0^+}f'(\xi)=A.$$

故$f'_+(0)$存在，且$f'_+(0)=A.$

8. 求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}\left(x^2-t\right)e^{-t^2}dt$ 的单调区间与极值.

解 $D=(-\infty,+\infty)$, 由于

$$f(x)=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt-\int_1^{x^2}te^{-t^2}dt,$$

$$f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt+2x^3e^{-x^4}-2x^3e^{-x^4}=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt.$$

所以$f(x)$的驻点为 $x=0,\pm1.$

$$f(x)=\int_1^{x^2}\left(x^2-t\right)e^{-t^2}dt,\qquad f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt.$$

列表讨论如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	极小	$\nearrow$	极大	$\searrow$	极小	$\nearrow$

因此函数 $f(x)$ 的单调增加区间为 $(-1,0)$ 及 $(1,+\infty)$，单调减少区间为 $(-\infty,-1)$ 及 $(0,1)$；极小值为 $f(\pm1)=0$，

极大值为 $f(0)=-\int_1^0 te^{-t^2}dt=\dfrac{1}{2}\left(1-e^{-1}\right)$.

9. 设函数$f(x)$在$[0,3]$上连续，在$(0,3)$内存在二阶导数，且

$$2f(0)=\int_0^2 f(x)dx=f(2)+f(3).$$

(I) 证明存在$\eta\in(0,2)$,使$f(\eta)=f(0)$;

(II) 证明存在$\xi\in(0,3)$,使$f''(\xi)=0$.

证 (I) 设

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt \quad (0\le x\le 2),$$

则

$$\int_0^2 f(x)dx=F(2)-F(0).$$

$$\int_0^2 f(x)dx = F(2) - F(0).$$

根据拉格朗日中值定理，存在$\eta \in (0,2)$,使

$$F(2) - F(0) = 2F'(\eta) = 2f(\eta).$$

即

$$\int_0^2 f(x)dx = 2f(\eta).$$

由题设知

$$\int_0^2 f(x)dx = 2f(0).$$

故

$$f(\eta) = f(0);$$

(II)

$\dfrac{f(2)+f(3)}{2}$介于$f(x)$在$[2,3]$上的最小值与最大值之间，

根据连续函数的介值定理，存在$\zeta\in[2,3]$,使

$$f(\zeta)=\frac{f(2)+f(3)}{2}.$$

由题设知

$$\frac{f(2)+f(3)}{2}=f(0).$$

故

$$f(\zeta)=f(0).$$

由于

$$f(\eta)=f(\zeta)=f(0);$$

且

$$0<\eta<\zeta\leq 3,$$

根据罗尔定理，存在$\xi_1\in(0,\eta),\xi_2\in(\eta,\zeta)$,使

$$f'(\xi_1)=0,\qquad f'(\xi_2)=0,$$

从而存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,3)$,使得

$$f''(\xi)=0.$$

10

已知$f(x)$在$x=0$处可导，且$f(0)=0$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x)-2f(x^3)}{x^3}$

(A) $-2f'(0)$.　(B) $-f'(0)$.　(C) $f'(0)$.　(D) 0.　[B]

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x)-2f(x^3)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2 f(x)-x^2 f(0)-2f(x^3)+2f(0)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}-2\lim_{x\to 0}\frac{f(x^3)-f(0)}{x^3}$$

$$=f'(0)-2f'(0)=-f'(0).$$

11 曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是(C)

(A) (1,0).　(B) (2,0).　(C) (3,0).　(D) (4,0).

分析：此题主要考察拐点的判别.

若能想起同济教材P154第15题，则易知答案.

解 因为 $y''(1)\neq 0, y''(2)\neq 0.$ 排除答案A, B.

又因 $y''(3)=0, y'''(3)\neq 0.$ 所以答案为C.

12 证明$4\arctan x - x + \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} = 0$恰有2实根.

证 设$f(x) = 4\arctan x - x + \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$,则

$$f'(x) = \frac{4}{1+x^2} - 1 = \frac{3-x^2}{1+x^2} = \frac{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{1+x^2}.$$

令$f'(x) = 0$，解得驻点 $x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3}.$

由单调性判别法知：$f(x)$在$(-\infty, -\sqrt{3}\,]$上单调减少,

在$\left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$上单调增加，在$[\sqrt{3}, +\infty)$上单调减少.

因为$f(-\sqrt{3})=0$，且由上述单调性知

$$f(-\sqrt{3})\text{是}f(x)\text{在}(-\infty,-\sqrt{3}\,]\text{上的最小值，}$$

所以$x=-\sqrt{3}$是$f(x)$在$(-\infty,-\sqrt{3}\,]$上的唯一零点。

又因为

$$f(\sqrt{3})=2(\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3})>0,\text{且}\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty,$$

所以由连续函数的介值定理知$f(x)$在$[\sqrt{3},+\infty)$内存在零点，

且由$f(x)$的单调性知零点唯一。 综上所述，

$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内恰有两个零点，即原方程恰有两个实根.

13 求方程$k\arctan x - x = 0$不同实根的个数，其中k为参数.

解 设$f(x) = k\arctan x - x$,则

$$f'(x) = \frac{k}{1+x^2} - 1 = \frac{k-1-x^2}{1+x^2}.$$

1) 当$k-1 \le 0$时，即$k \le 1$时，$f'(x) \le 0$.

$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调减少，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$，所以方程有唯一实根。

$$f'(x)=\frac{k}{1+x^2}-1=\frac{k-1-x^2}{1+x^2}.$$

2) 当$k-1>0$时，即$k>1$时，令$f'(x)=0$,

解得驻点$x_1=-\sqrt{k-1}, x_2=\sqrt{k-1}$.

单调性判别法知：$f(x)$在$(-\infty,-\sqrt{k-1}\,]$上单调减少,

在$\left[-\sqrt{k-1},\sqrt{k-1}\,\right]$上单调增加,

在$[\sqrt{k-1},+\infty)$上单调减少,

因此$x_1=-\sqrt{k-1}$为极小值点,$x_2=\sqrt{k-1}$为极大值点.

极小值$f(-\sqrt{k-1})=-k\arctan\sqrt{k-1}+\sqrt{k-1}$,

极大值$f(\sqrt{k-1})=k\arctan\sqrt{k-1}-\sqrt{k-1}$.

令$\sqrt{k-1}=t$，则$k>1$时，$t>0$. 令

$$g(t)=k\arctan\sqrt{k-1}-\sqrt{k-1}\ =(1+t^2)\arctan t-t.$$

显然 $g(0)=0$. 又因 $g'(t)=2t\arctan t>0$. 所以

$g(t)>g(0)=0$. 因此$f(\sqrt{k-1})>0$, $f(-\sqrt{k-1})<0$.

且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$,

所以方程有3个实根。

14 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\ge 1,\\ 2x-1, & x<1,\end{cases}$ $y=f(f(x))$,

则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=e}=$ ________.

解 $y=f(f(x))=\begin{cases}\ln\sqrt{f(x)}, & f(x)\ge 1,\\ 2f(x)-1, & f(x)<1\end{cases}$

$$=\begin{cases}\ln\sqrt{\ln\sqrt{x}}, & x\ge e^2,\\ 2\ln\sqrt{x}-1, & 1\le x<e^2,\\ 2(2x-1)-1, & x<1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln(\dfrac{1}{2}\ln x), & x\ge e^2,\\ \ln x-1, & 1\le x<e^2,\\ 4x-3, & x<1\end{cases}$$

14 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\geq 1,\\ 2x-1, & x<1,\end{cases}$ $y=f(f(x))$,

则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=e}=$ __________.

$$y=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2}\ln x), & x\geq e^2,\\ \ln x-1, & 1\leq x<e^2,\\ 4x-3, & x<1\end{cases} \Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=e}=(\ln x-1)'\Big|_{x=e}=\frac{1}{e}.$$

注：此题的难点在于求函数的表达式.

15 设函数 $y(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$,

其中n为正整数，则 $y'(0)=$[A]

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$ (B) $(-1)^{n}(n-1)!$

(C) $(-1)^{n-1}n!$ (D) $(-1)^{n}n!$

解 $$y'(0)=\lim_{x\to0}\frac{y(x)-y(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!.$$

16 证明 $x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x \geq 1+\dfrac{x^2}{2}, \qquad (-1<x<1).$

证 令 $f(x)=x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\dfrac{x^2}{2}, \quad (-1<x<1).$

因为 $f(-x)=f(x).$ 所以只需讨论 $0\leq x<1.$

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+x(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x})-\sin x-x$$

$$=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x,$$

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x,$$

$$f''(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}+\frac{2}{1-x^2}+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}-\cos x-1$$

$$=\frac{4}{1-x^2}+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}-\cos x-1=\frac{4}{(1-x^2)^2}-\cos x-1,$$

$$f'''(x)=\frac{16x}{(1-x^2)^3}+\sin x.$$ 当 $0\le x<1$ 时，$f'''(x)\ge 0$,

因此 $f''(x)$ 单调递增，所以 $f''(x)\ge f''(0)=2>0.$

因此 $f'(x)$单调递增，所以 $f'(x)>f'(0)=0.$

因此 $f(x)$ 单调递增，所以

$$f(x) > f(0) = 0.$$

即

$$x\ln\frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2}, \qquad (-1 < x < 1).$$

$$f(x) = x\ln\frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2}, \quad (-1 < x < 1).$$

注：此题也可以不用到三阶导数来判定，因为

$$f''(x) == \frac{4}{(1-x^2)^2} - \cos x - 1,$$

由于

$$\frac{4}{(1-x^2)^2} \geq 4, \qquad \cos x + 1 \leq 2,$$

因此

$$f''(x) \geq 2 > 0.$$

17 设 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = t\sin t + \cos t \end{cases}$ (t为参数)，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} =$ ______.

分析：此题为基本题型，考查参数方程求导法则

解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t + t\cos t - \sin t}{\cos t} = t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{(t)'}{(\sin t)'} = \frac{1}{\cos t}$$

因此 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}.$

18 设函数$f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^{t}}dt$，则$y=f(x)$的反函数

$x=f^{-1}(y)$在$y=0$处的导数$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0}=$________.

分析：此题为基本题型，考查反函数求导法则

解 由题意知：当$y=0$时，$x=-1$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1-e^{x}},\qquad \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0}=\left.\frac{1}{\sqrt{1-e^{x}}}\right|_{x=-1}=\frac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}.$$

19

设函数$f(x)$由方程$y-x=e^{x(1-y)}$确定，则$\lim\limits_{n\to\infty} n(f(\frac{1}{n})-1)=$ __1__.

分析：综合题型，考查隐函数求导法则和导数的定义

解 由题意知：当$x=0$时，$y=1$.

$$\lim_{n\to\infty} n(f(\frac{1}{n})-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})-1}{\frac{1}{n}}=f'(0).$$

方程两边同时求对数得 $\ln(y-x)=x(1-y)$,

同时对x求导得 $$\frac{1}{y-x}(y'-1)=1-y+x(1-y'),$$

20 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1)=1$，证明

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=1$;

(2) 存在 $\eta\in(-1,1)$, 使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

证 (1) 设 $F(x)=f(x)-x$，则

$$F(0)=f(0)=0,\quad F(1)=f(1)-1=0,$$

由Rolle定理可知：存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$f'(\xi)=1;$$

20 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1)=1$，证明

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$;

(2) 存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1.$

证 (2) 设 $G(x)=e^{x}(f'(x)-1)$，则

$$f'(\xi)=f'(-\xi)=1,\ \Rightarrow G(\xi)=G(-\xi)=0.$$

由Rolle定理可知：存在 $\eta\in(-\xi,\xi)\subset(-1,1)$，使得

$$e^{\eta}(f'(\eta)-1)+e^{\eta}f''(\eta)=0.\ \Rightarrow f''(\eta)+f'(\eta)=1.$$

21

设函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$上可导，且 $f(0)=0$， $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$，

证明(1) 存在$a>0$,使得 $f(a)=1$;

(2) 对于(1)中的 a,存在$\xi\in(0,a)$,使得 $f'(\xi)=\dfrac{1}{a}$.

证 (1) **法1** 设 $G(x)=f(x)-1$, 则

$$G(0)=-1<0, \qquad \lim_{x\to+\infty} G(x)=1>0.$$

由零点存在定理可知： 存在 $a>0$, 使得

$$G(a)=1. \qquad \Rightarrow f(a)=1.$$

21

设奇函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $f(0)=0$， $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$，

证明(1) 存在 $a>0$,使得 $f(a)=1$;

(2) 对于(1)中的 a,存在 $\xi\in(0,a)$,使得 $f'(\xi)=\dfrac{1}{a}$.

证 (1) **法2** 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$，则根据极限的定义知

取 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$, 则存在 $M>0$, 当 $x>M$ 时，使得

$$|f(x)-2|<\frac{1}{2}.\quad \Rightarrow f(M+1)>\frac{3}{2}.$$

由介值定理可知： 存在 $0<a<M+1$，使得

$$f(a)=1.$$

21

设奇函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $f(0)=0$， $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$，

证明(1) 存在 $a>0$，使得 $f(a)=1$;

(2) 对于(1)中的 a，存在 $\xi\in(0,a)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{1}{a}$.

证 (2) 因为由拉格朗日中值定理可知：

存在 $\xi\in(0,a)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{1}{a}.$$

22 设函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$. (1) 求$f(x)$的最小值.

(2) 数列$\{x_n\}$满足

$$\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1.$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在并求极限.

解 (1) 令 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=0\Rightarrow x=1.$

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3},\Rightarrow f''(1)=1>0.$$

因此$f(x)$的最小值为 $f(1)=1.$

22 设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$. (1) 求$f(x)$的最小值.

(2) 数列$\{x_n\}$满足

$$\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1.$$

证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在并求极限.

解 (2) 由(1)知 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_n}\geq 1$, 又因 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$.

因此 $\dfrac{1}{x_{n+1}}<\dfrac{1}{x_n}$. 即 $x_{n+1}>x_n$, 所以数列$\{x_n\}$单增

又因

$$\ln x_n < \ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1.$$

因此

$$x_n < e.$$

所以数列$\{x_n\}$单增且有上界. 因此 $\lim_{n\to\infty} x_n$存在.

设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a.$ $\Rightarrow \ln a + \frac{1}{a} \le 1.$

因此 $a = 1.$