七、无穷级数基础考题

常见题型

求幂级数的和函数或求数项级数的和

将函数展开成幂级数

将函数展开成傅立叶级数、或确定傅立叶级数在某点的和（用狄里克雷定理）

证明级数的敛散性

考题1、

设有方程$x^n + nx - 1 = 0$，其中n是正整数，证明此方程存在唯一正实根x_n，并证明当$\alpha > 1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{\alpha}$收敛。

证：

记$f_n(x) = x^n + nx - 1$.

当$x > 0$时,$f_n'(x) = nx^{n-1} + n > 0$,

故$f_n(x)$在$[0, +\infty)$上单调增加,

而$f_n(0) = -1 < 0, f_n(1) = n > 0$,

故由介值定理知有唯一正实根x_n。

由$x_n^n+nx_n-1=0$与$x_n>0$知

$$0<x_n=\frac{1-x_n^n}{n}<\frac{1}{n},$$

故当$\alpha>1$时，$0<x_n^\alpha<(\frac{1}{n})^\alpha$,而正项级数

$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n})^\alpha$收敛，故原级数收敛。

考题2、

求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1+\frac{1}{n(2n-1)})x^{2n}$的收敛区间、和函数$f(x)$。

解答：因

$$\lim \frac{(n+1)(2n+1)+1}{(n+1)(2n+1)} \cdot \frac{n(2n-1)}{n(2n-1)+1} = 1$$

故$x^2 < 1$时级数绝对收敛，当$x^2 > 1$时

发散，收敛区间是(-1,1).

记

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)} x^{2n}.$$

其中$x \in (-1, 1)$.

则

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}, \quad x \in (-1, 1),$$

$$\begin{aligned} S''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cdot (2n-1) x^{2n-2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} \\ &= \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

因 $S(0)=0, S'(0)=0$,故

$$S'(x)=\int_0^x S''(t)dt=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt=\arctan x,$$

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^x S'(t)dt \\ &= \int_0^x \arctan t dt \\ &= x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2). \end{aligned}$$

又

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n}=\frac{x^2}{1+x^2},\quad x\in(-1,1).$$

从而

$$\begin{aligned} f(x) &= 2S(x)+\frac{x^2}{1+x^2} \\ &= 2\arctan x-\ln(1+x^2)+\frac{x^2}{1+x^2}, \end{aligned}$$

从而$x\in(-1,1)$.

考题3、

将函数$f(x)=\frac{x}{2+x-x^2}$展开成x的幂级数。

解答：因

$$\frac{x}{2+x-x^2}=\frac{x}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2-x}\right),$$

分别将$\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{2-x}$展开成x的幂级数：

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\quad |x|<1,$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2-x} &= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}, \quad |x| < 2.
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{2+x-x^2} &= \frac{x}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2-x}\right) \\
&= \frac{x}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}\right) \\
&= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right]x^{n+1}, \quad |x|<1.
\end{aligned}
$$

考题4、

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$(-\infty, +\infty)$内收敛,

其和函数$y(x)$满足

$$y'' - 2xy' - 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

（I）证明$a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n, n = 1, 2, \cdots$.

（II）求$y(x)$的表达式。

证明：（I）由$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$知

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},$$

$$\begin{aligned}y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n,\end{aligned}$$

代入$y'' - 2xy' - 4y = 0$并合并可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (2n+4)a_n]x^n = 0,$$

则

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (2n+4)a_n = 0$$

$$\Longrightarrow$$

$$a_{n+2} = \frac{2}{n+1}a_n, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

（II）由

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\ y(0)=0,\ y'(0)=1,$$

知$a_0=0, a_1=1,$

由

$$a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n$$

知

$$
\begin{aligned}
a_{2m} &= \frac{2}{2m-1} a_{2(m-1)} \\
&= \frac{2^m}{(2m-1)(2m-3)\cdots 3\cdot 1} a_0 \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{2m+1} &= \frac{2}{2m} a_{2m-1} \\
&= \frac{2^m}{(2m)(2m-2)\cdots 4\cdot 2} a_1 \\
&= \frac{1}{m!},
\end{aligned}
$$

于是

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} \\ &= x e^{x^2}. \end{aligned}$$

考题5、

将函数$f(x) = 1 - x^2 (0 \le x \le \pi)$展成余弦级数，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$的和。

解答：由于

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)dx = 2-\frac{2\pi^2}{3},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos n\pi dx \\ &= \frac{4}{n^2}(-1)^{n+1}, \quad n=1,2,\cdots, \end{aligned}$$

所以

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \\
&= 1 - \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos n\pi,
\end{aligned}
$$

其中$0 \le x \le \pi$.

令$x=0$有

$$f(0)=1-\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

又$f(0)=1$，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

考题6、

设a_n是曲线$y=x^n$与$y=x^{n+1}(n=1,2,\cdots)$所围成区域的面积，记

$$s_1=\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\quad s_2=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1},$$

求s_1与s_2的值。

解答：曲线$y = x^n$与$y = x^{n+1}$的交点是$(0,0)$与$(1,1)$。所围区域的面积是

$$a_n = \int_0^1 (x^n - x^{n+1})dx = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\
&= \frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}.
\end{aligned}
$$

考察幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$，知其收敛域是$(-1,1]$。

和函数是$-\ln(1+x)$.

因为

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n \\ &= x-\ln(1+x), \end{aligned}$$

令$x=1$得到

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \\ &= S(1) \\ &= 1-\ln 2. \end{aligned}$$

考题7、

求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$的收敛域及和函数。

解：记 $u_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$,由于

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| \\ = & \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}x^2 \\ = & x^2. \end{aligned}$$

所以当$x^2 < 1$，即$|x| < 1$时级数收敛。

又当$|x| = 1$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$，

由莱布尼兹判别法知此级数收敛，因此幂级数的收敛域是[-1,1]。

设

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}(-1\le x\le 1),$$

则

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2} \\ &= \frac{1}{1+x^2}, \end{aligned}$$

又$S(0)=0$，故

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt \\ &= \arctan x, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n} &= xS(x) \\ &= x\arctan x, \qquad x \in [-1,1]. \end{aligned}$$

考题8、

（1）证明对任意正整数n，都有

$$\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$$

成立。

（2）设$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$,证明

数列$\{a_n\}$收敛。

证明：（1）先证明当$0 < x \le 1$时，有

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \quad (*)$$

利用导数容易得到函数的单调性，结论是明显的。

比如设$f(x) = x - \ln(1+x), x \in (0,1]$,容易证得

$$f'(x) > 0,$$

从而(*)中的第二个不等式成立。

再令$x = \frac{1}{n}$，就可得结论中的第二个不等式成立。

（2）先证明数列$\{a_n\}$单调递减，即

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(1+\frac{1}{n}) \\ &< 0 \end{aligned}$$

再证明数列$\{a_n\}$有下界，

$$
\begin{aligned}
a_n &= 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n \\
&> \ln(1+\frac{1}{1})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{n})-\ln n \\
&= \ln(\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n}) \\
&= \ln\frac{n+1}{n} \\
&> 0.
\end{aligned}
$$

所以数列$\{a_n\}$收敛。

考题9、

求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$的收敛域及和函数

解答：（1）收敛域

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n(x)|}{|a_{n-1}(x)|} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{4n^2+4n+3}{2n+1} \right.\\ &\qquad \left.\cdot\frac{2(n+1)+1}{4(n+1)^2+4(n+1)+3}\cdot x^2\right| \\ &= x^2. \end{aligned}$$

令$x^2 < 1$，得到$-1 < x < 1$，当$x = \pm 1$时，

（2）当$|x| < 1$时，设

$$
\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} x^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^2 + 2}{2n+1} x^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [(2n+1) + \frac{2}{2n+1}] x^{2n}
\end{aligned}
$$

令

$S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}$, $S_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}$,

$$
\begin{aligned}
\int_0^x S_1(t)dt &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (2n+1)t^{2n}dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} \\
&= \frac{x}{1-x^2} \quad |x|<1
\end{aligned}
$$

于是

$$S_1(x) = (\frac{x}{1-x^2})' = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}, \quad |x| < 1.$$

因 $xS_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x^{2n+1} \ (|x| < 1)$，故

$$\begin{aligned}[xS_2(x)]' &= \sum_{n=0}^{\infty} 2x^{2n} \\ &= \frac{2}{1-x^2}, \quad |x| < 1\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\int_0^x [tS_2(t)]' dt &= \int_0^x \frac{2}{1-t^2} dt \\ &= \int_0^x \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) dt \\ &= \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|, \quad |x| < 1\end{aligned}$$

即

$$xS_2(x)|_0^x = \ln|\frac{1+x}{1-x}|,$$

故

$$xS_2(x) = \ln|\frac{1+x}{1-x}|.$$

当$x \neq 0$时，$S_2(x) = \frac{1}{x}\ln|\frac{1+x}{1-x}|.$

当$x=0$时，$S_1(0)=1$，$S_2(0)=2$.

故当$x=0$时，$S(x)=3$，

而当$x\in(-1,0)\cup(0,1)$时，

$$\begin{aligned} S(x) &= S_1(x)+S_2(x) \\ &= \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{x}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|. \end{aligned}$$

考题10、

设数列$\{a_n\}$满足条件：$a_0=3$，$a_1=1$，$a_{n-2}-n(n-1)a_n=0(n\geq 2)$，$S(x)$是幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数。

（I）证明：$S''(x)-S(x)=0$；

（II）求$S(x)$的表达式。

解答：由题意$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$得到

$$\begin{aligned}
S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} \\
S''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n
\end{aligned}$$

由题意$a_{n-2}=n(n-1)a_n$，得到

$$a_n=(n+1)(n+2)a_{n+2}.$$

所以

$$S''(x)=S(x).$$

特征方程为$\lambda^2-1=0$，得到$\lambda=\pm 1$.通解为 $S(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$。

由$S(x)=a_0=3$，$S'(x)=a_1=1$得

$$C_1=2, \quad C_2=1.$$

所以

$$S(x)=2e^x+e^{-x}.$$

题11、

设数列$\{a_n\},\{b_n\}$满足$0<a_n<\dfrac{\pi}{2},0<b_n<\dfrac{\pi}{2}$,

$\cos a_n - a_n = \cos b_n$，且级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛。

（I）证明：$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

（II）证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$收敛。

证明（I）方法一：

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛得 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0.$

令 $\lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{a},$ 等式 $\cos a_n - a_n = \cos b_n$ 两边同时

取极限得 $\cos a - a = 1.$

令 $\varphi(x) = 1 - \cos x + x, \varphi(0) = 0,$ 因 $\varphi'(x) = \sin x + 1,$

所以 $\varphi(x)$ 单调增加，由 $\varphi(x) = 0$ 得 $x = 0$ 。

故 $\lim_{n\to\infty} a_n = a = 0.$

（I）方法二：

由 $\cos a_n - a_n = \cos b_n$ 得到

$$a_n = \cos a_n - \cos b_n > 0$$

从而 $0 < a_n < b_n$.

因 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，

故 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

（II）由 $a_n = \cos a_n - \cos b_n$ 得

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\cos a_n - \cos b_n}{b_n}$$

$$= -\frac{2\sin(\frac{a_n + b_n}{2})\sin(\frac{a_n - b_n}{2})}{b_n} \sim \frac{b_n^2 - a_n^2}{2b_n},$$

因 $0 \le \frac{b_n^2 - a_n^2}{2b_n} \le \frac{b_n}{2}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2 - a_n^2}{2b_n}$ 收敛，

由比较审敛法得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ 收敛。

题12、

已知函数 $f(x)$ 可导,且 $f(0)=1, 0<f'(x)<\frac{1}{2}$.

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n), n=1,2,\cdots$

证明： (1)级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛;

(2) $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在, 且 $0<\lim_{n\to\infty} x_n<2$.

提示：利用绝对收敛定义.

(1)级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛；

证明(1)：由 $x_{n-1}=f(x_n), n=1,2,\cdots$ 有

$$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|$$

$$=|f'(\xi)(x_n-x_{n-1})|$$

$$<\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|$$

$$=\frac{1}{2}|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})|$$

$$|x_{n+1}-x_n| = \frac{1}{2}|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})|$$

$$< \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}|x_{n-1}-x_{n-2}|$$

$$< \cdots$$

$$< \frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|$$

显然 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|$ 收敛,

因此$\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n-1}-x_{n-2})$绝对收敛.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 且 $0<\lim\limits_{n\to\infty} x_n<2$.

证明(2)：记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)$，因此有

$$S_n=x_{n+1}-x_1,$$

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 收敛,因此 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在.

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在．不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$,

$$x_{n+1}=f(x_n)=f(x_n)-f(0)+1=f'(\xi)x_n+1,$$

由 $0 < f'(x) < \frac{1}{2}$ 得

$$x_{n+1} = f'(\xi)x_n + 1 < \frac{1}{2}x_n + 1,$$

两边取极限可得 $A < \frac{1}{2}A + 1$, 即 $A < 2$,

若 $A = 2$, 这与 $A < \frac{1}{2}A + 1$ 矛盾;

若 $A \le 0$, 这与 $(1 - f'(\xi))A = 1$ 矛盾;

因此 $0 < A < 2$, 即 $0 < \lim_{n\to\infty} x_n < 2$.

题13、

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数

$S(x)=(\qquad)$.

解： $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n}\right)'$$

$$=\left(\frac{x}{1+x}\right)'=\frac{1}{(1+x)^2}$$

题14、

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数。

解：由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$ 可知收敛半径R=1.

当 $x=\pm 1$ 时，因为 $(n+1)(n+3)\to\infty\neq 0\ (n\to\infty)$

所以收敛域为$(-1,1)$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$， $x\in(-1,1)$， 则

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+4n+3)x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n+2)+(n+1)]x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n+2)+(n+1)]x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(x^{n+2})'' + \sum_{n=0}^{\infty}(x^{n+1})'$$

$$= (\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2})'' + (\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1})'$$

$$= (\frac{x^2}{1-x})'' + (\frac{x}{1-x})'$$

$$= \frac{3-x}{(1-x)^3}$$

题15、

级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)$, k为常数。

(A) 绝对收敛

(B) 条件收敛

(C) 发散

(D) 收敛性与k有关

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}\sin(n+k)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(n+k)}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

因为

$$\left|\frac{\sin(n+k)}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right|\leq\left|\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right|$$

$$\leq\frac{1}{n\sqrt{n}}$$

由正项级数的比较判别法知该级数绝对收敛。

题16、

求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$的收敛域及和函数.

解:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)(2n+1)}}{\frac{1}{(n+2)(2n+3)}}=1$$

收敛半径为1. 且易知$x=-1$和1时级数也收敛.

故级数的收敛域为[-1,1]。

设

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)},\quad -1\le x\le 1$$

两边同时求导得

$$S'(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)},$$

两边再同时求导得

$$S''(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{2}{1-x^{2}},$$

两边积分得

$$S(x)=(1+x)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x),\quad -1<x<1$$

因此级数的和函数为

$$S(x)=\begin{cases}(1+x)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x), & -1<x<1\\ 2\ln 2, & x=-1,1\end{cases}$$

题17、

若 $a_0=1, a_1=0, a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})\ (n=1,2,\cdots)$,

$S(x)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数。

（1）证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径不大于1;

（2）证明 $(1-x)S'(x)-xS(x)=0,\ x\in(-1,1)$,

并求$S(x)$的表达式。

（1）证明$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径不大于1；

证明：

$$a_{n+1}=\frac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})$$

$$\Rightarrow a_{n+1}-a_n=-\frac{1}{n+1}(a_n-a_{n-1})$$

$$=-\frac{1}{n+1}\left(-\frac{1}{n}\right)(a_{n-1}-a_{n-2})$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=\frac{(-1)^n}{(n+1)!}$$

$$a_n = a_{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$$

$$= a_{n-2} + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$$

$$= \cdots\cdots$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}} \le \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

可知收敛半径 $R \le 1.$

（2）证明 $(1-x)S'(x)-xS(x)=0,\ x\in(-1,1)$,

并求S(x)的表达式。

证明： $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$

$$\Rightarrow (1-x)S'(x)=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)a_{n+1}-na_n]x^n+a_1$$

另外，

$$xS(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n$$

故

$$(1-x)S'(x)-xS(x)=\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)a_n-na_n-a_{n-1}]x^n+a_1$$

由 $a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})$ 可知

$$(n+1)a_n-na_n-a_{n-1}=0.$$

由 $a_1=0$ 得 $(1-x)S'(x)-xS(x)=0,\ x\in(-1,1).$

解微分方程得 $S(x)=\dfrac{ce^{-x}}{1-x},$

由 $S(0)=a_0=1$ 推出 $c=1.$

故 $\quad S(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-x},\quad x\in(-1,1).$

题18、 $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}=(\quad)$$

解析 $$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)+2}{(2n+1)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}=\cos 1+2\sin 1$$

题19、

已知 $\cos 2x - \dfrac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，求 a_n.

解析：

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} t^{2n}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

$$\Rightarrow \quad \cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} 2^{2n} x^{2n}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \quad x\in(-1,1)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{(1+x)^2}=\left(\frac{1}{1+x}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right)'$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1}, \qquad x\in(-1,1)$$

根据 $$\cos 2x-\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n,$$

可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}2^{2n}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

比较左右两边同类项系数，可得

当n为奇数时，$a_n=(-1)^{n+1}(n+1)=n+1;$

当n为偶数时，第1、2个和式中各有一项，从而

$$a_n=(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{n!}2^n+(-1)^{n+1}(n+1)=(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{n!}2^n-n-1;$$

综上所述

$$a_n = \begin{cases} n+1, & n \text{ is odd} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \dfrac{1}{n!} 2^n - n - 1, & n \text{ is even} \end{cases}$$