全国大学生数学竞赛试题讲解（非数学类）---无穷级数

七、【第一届预赛（2009）】

已知 $u_n(x)$ 满足

$$u_n'(x) = u_n(x) + x^{n-1}e^x \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

且 $u_n(1) = \dfrac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 之和。

分析：先解微分方程，再对设出的和函数$S(x)$两边求导，得到另一个微分方程，求解即可。

七、【第一届预赛（2009）】

解：　解以下微分方程

$$u_n'(x) = u_n(x) + x^{n-1}e^x \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

得

$$u_n(x) = \frac{x^n e^x}{n}$$

设

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n e^x}{n}, \quad x \in [-1, 1)$$

七、【第一届预赛（2009）】

则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n-1}e^{x}+\frac{x^{n}e^{x}}{n})=\mathrm{S(x)}+\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}e^{x}$$

$$=\mathrm{S(x)}+\frac{e^{x}}{1-x}$$

解以上方程得

$$S(x)=-e^{x}\ln(1-x),\quad x\in[-1,1)$$

八、【第一届预赛（2009）】

求 $x\to 1^-$ 时，与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ 等价的无穷大量。

解：令 $f(t)=x^{t^2}$，则当 $0<x<1, t\in(1,+\infty)$ 时，

$f'(t)=2tx^{t^2}\ln x<0$，故 $f(t)=x^{t^2}=e^{-t^2\ln\frac{1}{x}}$

在 $(0,+\infty)$ 上严格单调减。因此

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1} f(t)dt\le\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

$$\le f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n} f(t)dt=1+\int_0^{+\infty} f(t)dt$$

八、【第一届预赛（2009）】

即

$$\int_0^{\infty} f(t)dt \le \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \le 1 + \int_0^{+\infty} f(t)dt$$

又

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2},$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\ln\frac{1}{x}}{1-x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-\frac{1}{x}}{-1} = 1,$$

八、【第一届预赛（2009）】

$$\int_0^{\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} x^{t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2 \ln\frac{1}{x}} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{1-x}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$$

$x \to 1^-$ 时，与 $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ 等价的无穷大量是 $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$

一、（1）【第一届决赛（2010）】

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}(1+\dfrac{k}{n})\sin\dfrac{k\pi}{n^2}$.

分析：化为求级数的和。

一、（1）【第一届决赛（2010）】

解：记 $S_n=\sum_{k=1}^{n-1}(1+\frac{k}{n})\sin\frac{k\pi}{n^2}\quad(\mathrm{n}\geq 2)$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}(1+\frac{k}{n})\left(\frac{k\pi}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)$$

$$=\frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{k}+\frac{\pi}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2+o(\frac{1}{n})$$

$$\to\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}.$$

六、【第一届决赛（2010）】

设 $n>1$ 为整数，

$$F(x)=\int_0^x e^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)dt$$

证明：方程$F(x)=\dfrac{n}{2}$在 $\left(\dfrac{n}{2},n\right)$ 内至少有一个根。

六、【第一届决赛（2010）】

证明：因为

$$e^{-t}(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots\frac{t^n}{n!})<1,\quad \forall t>1$$

故有

$$F(\frac{n}{2})=\int_0^{\frac{n}{2}}e^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)dt<\frac{n}{2}$$

下面只需证明 $F(n)>\frac{n}{2}$.

六、【第一届决赛（2010）】

$$F(\mathrm{n})=\int_0^n e^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)dt$$

$$=-\int_0^n\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)de^{-t}$$

$$=1-e^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}\right)$$

$$+\int_0^n e^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right)dt$$

六、【第一届决赛（2010）】

由此递推出

$$F(\mathrm{n})=\int_0^n e^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)dt$$

$$=1-e^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}\right)$$

$$+1-e^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\right)$$

$$+\cdots+1-e^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}\right)+1-e^{-n} \qquad (*)$$

六、【第一届决赛（2010）】

记 $a_i=\dfrac{n^i}{i!}$，则 $a_0=1<a_1<a_2<\cdots<a_n$.

观察下面的矩阵。

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_0 & 2a_1 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_0 & a_1 & \cdots & 2a_n \end{pmatrix}$$

整个矩阵的所有元素之和为

$$(n+2)(1+a_1+\cdots+a_n)=(n+2)\left(1+\frac{n}{1!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}\right)$$

六、【第一届决赛（2010）】

由（*）式得到

$$F(n) > n+1-\frac{2+n}{2}e^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}\right)$$

$$> n+1-\frac{2+n}{2}=\frac{n}{2}$$

四、【第二届预赛（2010）】

设 $a_n > 0, S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，证明：

（1）当 $\alpha > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 收敛；

（2）当 $\alpha \le 1$ 且 $S_n \to \infty (n \to \infty)$ 时，$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 发散。

四、【第二届预赛（2010）】

解：令 $f(x)=x^{1-\alpha}, x\in[S_{n-1},S_n]$.

由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(S_{n-1},S_n)$,

$$f(S_n)-f(S_{n-1})=f'(\xi)(S_n-S_{n-1})$$

即 $S_n^{1-\alpha}-S_{n-1}^{1-\alpha}=(1-\alpha)\xi^{-\alpha}a_n$

四、【第二届预赛（2010）】

（1）当 $\alpha>1$ 时，

$$\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}=(\alpha-1)\frac{a_n}{\xi^{\alpha}}\geq\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$$

显然 $\{\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\}$ 的前 n 项和有界，从而收敛，

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 收敛。

四、【第二届预赛（2010）】

（2）当 $\alpha=1$ 时，因为 $a_n>0, S_n$ 单调递增，故

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{S_k}\geq\frac{1}{S_{n+p}}\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k=\frac{S_{n+p}-S_n}{S_{n+p}}=1-\frac{S_n}{S_{n+p}}$$

因为 $S_n\to+\infty$ 对任意的n，当 $p\in N,\dfrac{S_n}{S_{n+p}}<\dfrac{1}{2}$

从而 $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{S_k}\geq\frac{1}{2}$. 所以级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 发散。

四、【第二届预赛（2010）】

（2）当 $\alpha<1$ 时 $\dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}\geq\dfrac{a_n}{S_n}$.

由 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$ 发散及比较判别法，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 发散。

六、【第二届决赛（2011）】

设$f(x)$是实数轴上的可微函数，且

$$|f'(x)| < mf(x),\quad 0 < m < 1,$$

任取实数 a_0，定义 $a_n = \ln f(a_{n-1})$, n=1,2,$\cdots$.

证明：$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛。

六、【第二届决赛（2011）】

证：

$$|a_n - a_{n-1}| = |\ln f(a_{n-1}) - \ln f(a_{n-2})|$$

$$= \left|\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}(a_{n-1} - a_{n-2})\right|$$

$$\le m\,|a_{n-1} - a_{n-2}| \le \cdots \le m^{n-1}\,|a_1 - a_0|$$

由**m**的取值知级数绝对收敛。

一、（4）【第三届预赛（2011）】

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的和函数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}$ 的和。

一、（4）【第三届预赛（2011）】

解： $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2},\quad x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

$$\int_0^x S(t)dt=\cdots=\frac{x}{2-x^2},$$

$$S(x)=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2},\quad x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{10}{9}$$

七、【第四届预赛（2012）】

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数，

（1）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)>0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

（2）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)<0$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

七、【第四届预赛（2012）】

证明：（1）设

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=2\delta>\delta>0,$$

则存在正整数 N，对于任意的 $n>N$ 有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}>\delta,\quad \frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>\delta a_{n+1}$$

七、【第四届预赛（2012）】

$$a_{n+1} < \frac{1}{\delta}\left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right),$$

当 $m > N$ 时，有

$$\sum_{n=N}^{m} a_{n+1} \le \frac{1}{\delta}\sum_{n=N}^{m}\left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right) \le \frac{1}{\delta}\left(\frac{a_N}{b_N} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right) \le \frac{1}{\delta}\frac{a_N}{b_N}$$

因而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和有上界，从而级数收敛。

七、【第四届预赛（2012）】

证明：（2）若

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)<\delta<0,$$

则存在正整数 N，对于任意的 $n>N$ 有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{b_n}{b_{n+1}}$$

七、【第四届预赛（2012）】

于是

$$a_{n+1} > \frac{b_{n+1}}{b_n} a_n > \cdots > \frac{b_{n+1}}{b_n} \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdots \frac{b_{N+1}}{b_N} a_N = \frac{a_N}{b_N} b_{n+1}$$

因此由 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散。

七、【第五届预赛（2013）】

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性，若收敛，求其和。

分析：估计分子的范围，求和时利用部分和。

七、【第五届预赛（2013）】

解: 记

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},\ u_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)},\ n = 1, 2, \cdots$$

因n充分大时,

$$0 < a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + \ln n < \sqrt{n}$$

注: $$\frac{1}{n} = \int_{n-1}^{n} \frac{1}{n} dx < \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \int_1^2 \frac{1}{x} dx + \cdots + \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x} dx = 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx$$

七、【第五届预赛（2013）】

所以

$$u_n \le \frac{\sqrt{n}}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n^{3/2}}$$

所以级数收敛。

七、【第五届预赛（2013）】

下面求和。先化简部分和。

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{k+1}-\frac{a_k}{k+2}\right)$$

$$=\left(\frac{a_1}{2}-\frac{a_1}{3}\right)+\left(\frac{a_2}{3}-\frac{a_2}{4}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{a_{n-1}}{n}-\frac{a_{n-1}}{n+1}\right)+\left(\frac{a_n}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}\right)$$

七、【第五届预赛（2013）】

$$S_n = \cdots = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}(a_2 - a_1) + \frac{1}{4}(a_3 - a_2) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n+1}(a_n - a_{n-1}) - \frac{1}{n+2}a_n$$

$$= \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)}\right) - \frac{1}{n+2}a_n$$

$$= 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}a_n$$

七、【第五届预赛（2013）】

$$0 < a_n < 1 + \ln n \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{a_n}{n+2} < \frac{1+\ln n}{n+2}$$

且 $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1+\ln n}{n+2} = 0.$

所以 $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n+2} = 0$

于是 $\displaystyle S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1 - 0 - 0 = 1.$

七、【第五届决赛（2014）】

假设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为1，$\lim_{n\to\infty} na_n = 0$,

且 $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$. 证明：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛且

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A.$$

七、【第五届决赛（2014）】

补充：

3. 施笃兹定理

设数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$，其中$\{y_n\}$单调增加且趋于$+\infty$.

如果$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$存在或为$\infty$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}.$$

七、【第五届决赛（2014）】

证明：由 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$，知（根据施托斯定理）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} k|a_k|}{n} = 0$$

故对于任意 $\epsilon > 0$ 存在正整数 N_1，当 $n > N_1$

时，有

$$0 \le \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} k|a_k|}{n} < \frac{\epsilon}{3},\quad n|a_n| < \frac{\epsilon}{3}$$

七、【第五届决赛（2014）】

又因为 $\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=A$，故存在 $\delta>0$

当 $1-\delta<x<1$ 时，$\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-A\right|<\frac{\epsilon}{3}$.

取 N_2，当 $n>N_2$ 时，$\frac{1}{n}<\delta$，从而 $1-\delta<1-\frac{1}{n}$，

取 $x=1-\frac{1}{n}$，则

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-A\right|<\frac{\epsilon}{3}.$$

七、【第五届决赛（2014）】

取$N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$时，

$$\left|\sum_{k=0}^{n}a_n-A\right|=\left|\sum_{k=0}^{n}a_k-\sum_{k=0}^{n}a_kx^k-\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kx^k+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k-A\right|$$

$$\le\left|\sum_{k=0}^{n}a_k(1-x^k)\right|+\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kx^k\right|+\left|\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k-A\right|$$

七、【第五届决赛（2014）】

取 $x=1-\dfrac{1}{n}$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n}a_k(1-x^k)\right|=\left|\sum_{k=0}^{n}a_k(1-x)(1+\mathrm{x}+\cdots+x^{k-1})\right|$$

$$\le\sum_{k=0}^{n}|a_k|(1-x)k=\frac{\sum_{k=0}^{n}k|a_k|}{n}<\frac{\epsilon}{3}$$

七、【第五届决赛（2014）】

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k\right| \le \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty} k\,|a_k|\,x^k < \frac{\epsilon}{3n}\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k$$

$$\le \frac{\epsilon}{3n}\frac{1}{1-x} = \frac{\epsilon}{3n\cdot\frac{1}{n}} = \frac{\epsilon}{3};$$

又因 $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - A\right| < \frac{\epsilon}{3}$，则 $\left|\sum_{k=0}^{n} a_n - A\right| < 3\cdot\frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$

一、（4）【第六届预赛（2014）】

设 $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$，则 $\lim_{n\to\infty}x_n=$ ____

分析：拆项相消。

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)$$

$$=1-\frac{1}{(n+1)!}\to 1$$

六、【第六届预赛（2014）】

设 $A_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n^2}$，

求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\pi}{4} - A_n\right)$.

分析：用积分求极限，灵活运用微分中值定理

六、【第六届预赛（2014）】

解：令 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，

$$A_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{i^2}{n^2}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}A_n=\int_0^1 f(x)dx=\frac{\pi}{4}$$

记 $x_i=\dfrac{i}{n}$， $A_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i)dx$

令 $J_n=n\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x)-f(x_i))dx$

六、【第六届预赛（2014）】

由拉格朗日中值定理，存在$\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$满足

$$J_n = n\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\xi_i)(x - x_i)dx$$

记 m_i, M_i 分别是 $f'(x)$ 在$[x_{i-1}, x_i]$上的最小值

和最大值，则 $m_i \le f'(\xi_i) \le M_i$， 故积分

$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\xi_i)(x - x_i)dx$ 介于$m_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x - x_i)dx$ 和

六、【第六届预赛（2014）】

$M_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)dx$ 之间，所以存在 $\eta_i\in(x_{i-1},x_i)$

使得 $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\xi_i)(x-x_i)dx=-f'(\eta_i)(x_i-x_{i-1})^2/2$

注：以上是积分中值定理的推广形式（第一定理）

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx,\quad \xi\in[a,b]$$

其中$f(x)$连续，$g(x)$不变号。

于是，有

$$J_n=-\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n} f'(\eta_i)(x_i-x_{i-1})^2=-\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} f'(\eta_i)$$

六、【第六届预赛（2014）】

从而

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)=\lim_{n\to\infty} J_n=-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)dx$$

$$=-\frac{1}{2}[f(1)-f(0)]=\frac{1}{4}$$

四、【第六届决赛（2015）】

设 $p>0, x_1=\dfrac{1}{4}, x_{n+1}^p=x_n^p+x_n^{2p}\ (n=1,2,\cdots)$,

证明: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x_n^p}$ 收敛并求其和。

四、【第六届决赛（2015）】

证：记 $y_n = x_n^p$，则

$$y_{n+1} = y_n + y_n^2,\quad y_{n+1} - y_n = y_n^2 \ge 0$$

所以 $y_{n+1} \ge y_n$

假设$\{y_n\}$收敛，即有上界，记

$$A = \lim_{n\to\infty} y_n \ge \left(\frac{1}{4}\right)^p > 0$$

四、【第六届决赛（2015）】

从而 $A = A + A^2 \quad \Rightarrow \quad A = 0$ 矛盾。

故 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$

由 $y_{n+1} = y_n(1 + y_n),$ 即

$$\frac{1}{y_{n+1}} = \frac{1}{y_n(1+y_n)} = \frac{1}{y_n} - \frac{1}{1+y_n}$$

四、【第六届决赛（2015）】

于是

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+y_k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{y_k}-\frac{1}{1+y_k}\right)=\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_{n+1}}$$

$$\to\frac{1}{y_1}=4^p$$

五、【第六届决赛（2015）】

（1）展 $[-\pi,\pi)$ 上的函数 $f(x)=|x|$ 成傅里叶级数，并证明 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$；

（2）求积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{u}{1+e^u}du$ 的值。

五、【第六届决赛（2015）】

解：（1）偶函数，展开式为余弦级数

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi-1)$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{4}{\pi n^2}, & n=1,3,\cdots\\ 0, & n=2,4,\cdots\end{cases}$$

五、【第六届决赛（2015）】

由于$f(x)$连续，所以当 $x\in[-\pi,\pi)$ 时有

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)$$

令$x=0$，得到

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

五、【第六届决赛（2015）】

记

$$s_1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},\quad s_2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

则

$$s_1-s_2=\frac{1}{4}s_1,$$

故

$$s_1=\frac{4s_2}{3}=\frac{\pi^2}{6}$$

五、【第六届决赛（2015）】

解：（2）记 $g(u)=\dfrac{u}{1+e^{u}}$，则在 $[0,+\infty)$ 上有

$$g(u)=\frac{ue^{-u}}{1+e^{-u}}=ue^{-u}-ue^{-2u}+ue^{-3u}-\cdots$$

记该级数的前n项和为 $S_n(u)$，余项为

$$r_n(u)=g(u)-S_n(u)$$

则由交错（单调）级数的性质有

$$|r_n(u)|\le ue^{-(n+1)u}$$

五、【第六届决赛（2015）】

解：（2）因 $\int_0^{+\infty} ue^{-nu}du = \dfrac{1}{n^2}$, 故

$$\int_0^{+\infty} |r_n(u)|\,du \le \frac{1}{(n+1)^2}$$

于是有

$$\int_0^{+\infty} g(u)du = \int_0^{+\infty} S_n(u)du + \int_0^{+\infty} r_n(u)du$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{1}{k^2} + \int_0^{+\infty} r_n(u)du$$

五、【第六届决赛（2015）】

解：（2）由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} r_n(u)du = 0$，故

$$I = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

所以 $I + \frac{1}{2}s_1 = s_1$，再由（1）的结论得

$$I = \frac{1}{2}s_1 = \frac{\pi^2}{12}$$

五、【第七届决赛（2016）】

设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$ ，其中n为正整数，

(1) 若 $n\geq 2$，计算：I_n+I_{n-2}；

（2）设p为实数，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n^p$ 的绝对收敛性和条件收敛性。

五、【第七届决赛（2016）】

解：(1)

$$I_n + I_{n-2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x d(\tan x)$$

$$= \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{n-1}$$

五、【第七届决赛（2016）】

解：(2) 由于$0 < x < \dfrac{\pi}{4}$，所以

$$0 < \tan x < 1, \quad \tan^{n+2} x < \tan^{n} x < \tan^{n-2} x.$$

从而 $I_{n+2} < I_n < I_{n-2}$，于是 $I_{n+2} + I_n < 2I_n < I_{n-2} + I_n$

所以

$$\frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)}, \quad \left[\frac{1}{2(n+1)}\right]^p < I_n^p < \left[\frac{1}{2(n-1)}\right]^p.$$

五、【第七届决赛（2016）】

当 $p>1$ 时，

$$|(-1)^n I_n^p| \le I_n^p < \frac{1}{2^p(n-1)^p}, \quad n \ge 2$$

由 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^p}$ 收敛，知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n^p$ 绝对收敛。

当$0<p\le 1$时，由于$\{I_n^p\}$单调减少，并趋于0，

由Leibniz判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n^p$ 收敛。

五、【第七届决赛（2016）】

而 $$I_n^p > \frac{1}{2^p(n+1)^p} \geq \frac{1}{2^p(n+1)},$$

同时 $\frac{1}{2^p}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n^p$ 条件收敛

当 $p \leq 0$ 时，由于 $|I_n^p| \geq 1$，由级数收敛的必要条件知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n^p$ 发散。

六、【第八届预赛（2016）】

六：设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导，且 $f(x)=f(x+2)=f(x+\sqrt{3})$。用 Fourier 级数理论证明 $f(x)$ 为常数．

证： 由 $f(x)=f(x+2)$ 知 f 为以 2 为周期的周期函数，其 *Fourier* 系数分别为：

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x dx\ ,\quad b_n=\int_{-1}^{1}f(x)\sin n\pi x dx\ ,\ \text{..............................}4'$$

由 $f(x)=f(x+\sqrt{3})$ 知

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x+\sqrt{3})\cos n\pi x dx$$

$$=\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\cos n\pi(t-\sqrt{3})dt$$

$$=\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)(\cos n\pi t\cos\sqrt{3}n\pi+\sin n\pi t\sin\sqrt{3}n\pi)dt$$

六、【第八届预赛（2016）】

$$=\cos\sqrt{3}n\pi\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\cos n\pi t dt+\sin\sqrt{3}n\pi\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\sin n\pi t dt$$

$$=\cos\sqrt{3}n\pi\int_{-1}^{1}f(t)\cos n\pi t dt+\sin\sqrt{3}n\pi\int_{-1}^{1}f(t)\sin n\pi t dt$$

所以 $a_n=a_n\cos\sqrt{3}n\pi+b_n\sin\sqrt{3}n\pi$。 ....6'

同理可得 $b_n=b_n\cos\sqrt{3}n\pi-a_n\sin\sqrt{3}n\pi$

联立 $\begin{cases}a_n=a_n\cos\sqrt{3}n\pi+b_n\sin\sqrt{3}n\pi\\ b_n=b_n\cos\sqrt{3}n\pi-a_n\sin\sqrt{3}n\pi\end{cases}$，得 $a_n=b_n=0\quad(n=1,2\cdots)$. ....2'

而 f 可导，其 *Fourier* 级数处处收敛于 $f(x)$，所以

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{a_0}{2}$$

其中 $a_0=\int_{-1}^{1}f(x)dx$ 为常数。 ....2'

六、【第八届决赛（2017）】

设 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$

1. 证明：极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在

2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=C$ 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-C)$ 的敛散性

解. (1) 利用不等式：当 $x>0$ 时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$, 有

$$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{n}-\ln\frac{n}{n-1}=\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\leqslant\frac{1}{n}-\frac{\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n-1}}=0$$

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n}\ln\frac{k}{k-1}=1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln\frac{k}{k-1}\right)$$

$$=1+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k-1}\right)\right]\geq1+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k-1}\right]=\frac{1}{n}>0,$$

所以 $\{a_n\}$ 单调减少有下界，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在. -------------------- (5 分)

六、【第八届决赛（2017）】

(2) 显然, 以 a_n 为部分和的级数为 $1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln n+\ln(n-1)\right)$, 则该级数收敛于 C, 且 $a_n-C>0$, 用 r_n 记作该级数的余项, 则

$$a_n-C=-r_n=-\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\ln k+\ln(k-1)\right)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{k-1}\right)-\frac{1}{k}\right)$$

根据泰勒公式，当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$, 所以

$$a_n-C>\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{2(k-1)^2}-\frac{1}{k}\right)$$

……………………………………………………(10 分)

六、【第八届决赛（2017）】

记 $b_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{2(k-1)^2}-\frac{1}{k}\right)$，下面证明正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散。因为

$$c_n \triangleq n\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}-\frac{1}{2(k-1)(k-2)}\right)$$
$$< nb_n < n\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}-\frac{1}{2k(k-2)}\right)=\frac{1}{2}$$

而当 $n\to\infty$ 时，$c_n=\frac{n-2}{2(n-1)}\to\frac{1}{2}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}nb_n=\frac{1}{2}$.

根据比较判别法可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散

因此，正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-C)$ 发散。 ……………………………………(14 分)

◊

七、【第九届决赛（2018）】

七、**(本题满分 12 分)** 设$0<a_n<1$，$n=1,2,\cdots$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=q$ (有限或$+\infty$).

(1) 证明：当$q>1$时级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，当$q<1$时级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散；

(2) 讨论$q=1$时级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的收敛性并阐述理由.

七、【第九届决赛（2018）】

证：(1) 若 $q>1$，则 $\exists\, p\in\mathbf{R}$, s. t. $q>p>1$. 根据极限性质，$\exists N\in\mathbf{Z}^{+}$，s. t.

$\forall n>N$，有 $\dfrac{\ln\dfrac{1}{a_n}}{\ln n}>p$，即 $a_n<\dfrac{1}{n^p}$，而 $p>1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 收敛, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

若 $q<1$，则 $\exists\, p\in\mathbf{R}$, s. t. $q<p<1$. 根据极限性质，$\exists N\in\mathbf{Z}^{+}$, s. t. $\forall n>N$，

有 $\dfrac{\ln\dfrac{1}{a_n}}{\ln n}<p$，即 $a_n>\dfrac{1}{n^p}$，而 $p<1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 发散, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

七、【第九届决赛（2018）】

(2) 当$q=1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$可能收敛，也可能发散.

例如：$a_n=\dfrac{1}{n}$满足条件，但级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散；

又如：$a_n=\dfrac{1}{n\ln^2 n}$满足条件，但级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.