

# 剛體轉動尤拉方程 (Rigid Body Rotation Euler's equation) 的詳細推導及其非 Lagrangian 的數值模擬與應用

May 7, 2014

## Abstract

利用剛體尤拉方程解出的貼體角速度進行剛體轉動的模擬. This approach eliminates complex Lagrangian, Euler angles, or quaternion calculus. 以此方法寫出的剛體轉動演算法比 quaternion 或 Lagrangian 方法更容易理解且程式精簡很多，適合用於 computer graphics or animation, 3D rotational motion engine. 提供以 Python 寫出的應用實例: 陀螺。

由於古典力學中的剛體轉動已經發展完備，少有書籍會在尤拉方程的推導詳細著墨，導致大部分書籍上的推導已經簡化到不足以應用到實例上的狀況，主要是解釋的不夠清楚的原因，舉陀螺之例來說，幾乎所有古典力學的書上說明完貼體角速度的尤拉轉動運動方程，就會轉而求諸 Euler angle 來得到 Lagrangian，接著可以用 elliptical integral 解出解析解，或者以數值方法解其 Lagrangian，然後模擬其運動。不過若對尤拉方程透徹理解，只要得到貼體角速度加上給定初始值，就可以非常簡單地數值模擬剛體特徵軸的轉動，雖然無法得到解析解，但以此方法寫出的演算法相較於 Lagrangian 方法簡單許多。此方法可以廣泛的運用於任何剛體運動的尤拉方程，並且此處所涉及的貼體角速度的理解還可應用上其他用到轉動矩陣的相關領域如電腦視覺及物理模擬引擎。這邊我們呈現以此方法數值模擬完整的陀螺運動。這邊提供的詳細解說也適合當作大學古典力學中尤拉方程的教材例題。

這裡以陀螺為例子，將陀螺的運動分解成為很多個  $t$  到  $t+dt$  時間的微小轉動，這邊有三個大重點：

1. 最完整的剛體尤拉方程的推導證明。因為要做轉動軸的轉動數值積分必須要對尤拉方程的貼體角速度有最正確的理解。這邊補充了 Goldstein Classical Mechanics 中證明還不夠完整的地方，主要是以下的第二點。
2. 證明 Euler equation 中的貼體角速度 (angular velocity along body frame) 可直接用於建立剛體特徵軸與 lab frame 間的主動與被動轉動矩陣，並以此積分剛體轉動並追蹤每一時刻的剛體特徵軸在 lab frame 的位置。
3. 在近似  $t$  到  $t+dt$  時間的微小特徵軸轉動時可以非常準確地以在  $t+dt$  時間的 body 角速度來近似，即以  $\vec{\omega}_b(t+dt)$  來建立  $dt$  時間內的轉動矩陣<sup>1</sup>，這裡將展示以此近似加上用簡單的四階 Runge Kutta 就可以解出很精確的陀螺運動。(目前一般陀螺運動都需要蠻高階的數值計算來避免其中一些守恆的運動量退化。此方法將以非常簡單的四階 Runge Kutta 來得到非常理想的結果。)

---

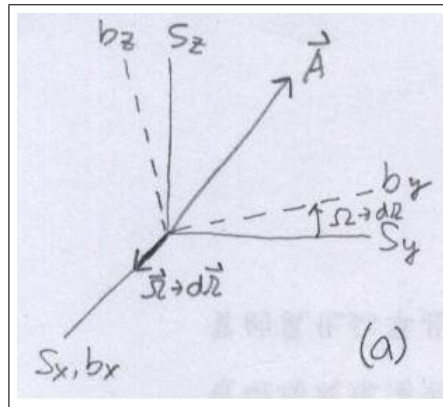
<sup>1</sup>The path order integral of  $\omega_b$  from time  $t$  to  $t+dt$ . This will be discussed more in the text.

首先我們先討論向量變化量在不同觀測座標中的關係。由於當我實際在解這問題時我發現 Goldstein classical mechanics 書中還有幾點證明還不清楚，因此這邊寫上我認為可以補充書上的推導證明。

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_b + \vec{\omega} \times \vec{L} \quad (1)$$

此公式如何而來？此公式為一隨時間變動的向量在恆定座標與非恆定座標 (此例為轉動中座標) 之間線性變換的結果。

Figure 1:



首先考慮一恆定座標 S(space)，一轉動座標 b(body)，為了方便討論座標軸的主被動性與座標轉換的左右手法則，我們這邊方便的先假設  $\hat{S}_x, \hat{b}_x$  兩軸重合，因此圖中顯示了 body frame 沿著  $+\hat{S}_x$  遵守右手定則逆時針轉了  $\Omega$  角度，依右手定則此角位移向量  $\hat{\Omega}$  會在  $+\hat{S}_x$  方向。但是接下來的推導以及所有公式都適用任意的座標旋轉，這邊是為了方便討論矩陣的主動被動的方向性，以及在之後的推導方便我們追蹤正負號以及矩陣主動被動意義的改變，因此在圖中做了一個方便我們思考的情形。另外，大部分書上在討論座標轉換時有時候給的公式是遵守左手定則，但這與物理定律所採納的右手定則相反，因此這邊我寫下完整的右手定則的推導，希望之後的人不需要像我一樣花了大半時間在轉換不同公式間左手右手定則帶來的正負號的改變。

依照圖1所示，我們可以寫下  $\vec{A}$  向量在 S,b 座標間的關係

$$(\vec{A})_b = \Omega_{\text{passive, r.h.}} (\vec{A})_s$$

其中  $\Omega$  是 s frame 到 b frame 的座標轉換矩陣，因為是轉換座標軸，因此矩陣取被動含意，並且我們採用右手定則，因此逆時針方向為正方向。接下來只要有用到矩陣的運算我都會標明主被動及左右手 (r.h. right-hand or l.h. left-hand)，這對接下來的推倒很重要。

若我們考慮  $\Omega$  的角度很小  $\Omega \rightarrow d\Omega$  (infinitesimal rotation)，則  $d\Omega$  矩陣與 unity matrix 相去不遠，可以寫成  $1(\text{unity matrix}) + \epsilon(\text{infinitesimal matrix})$ ， $\epsilon$  具有 antisymmetric matrix 的特性 [??]，帶入上式

$$(\vec{A})_b = (1 + \epsilon)_{\text{passive, r.h.}} (\vec{A})_s$$

infinitesimal matrix 有個特性，很容易自行驗證，

$$\epsilon_{\text{r.h., passive or active}} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_3 \geq 0 & -\epsilon_2 \leq 0 \\ -\epsilon_3 & 0 & \epsilon_1 \geq 0 \\ \epsilon_2 & -\epsilon_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \epsilon_{\text{l.h., passive or active}} = \begin{bmatrix} 0 & -\epsilon_3 \leq 0 & \epsilon_2 \geq 0 \\ +\epsilon_3 & 0 & -\epsilon_1 \leq 0 \\ -\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \end{bmatrix}$$

現在我們考慮  $\vec{A}$  是  $+\hat{b}_y$  軸的狀況，不過考慮相同矩陣  $(1 + \epsilon)$  的主動特性，也就是主動轉向量，這樣的話轉動方向會與原本的方向相反，變左手定則，我們會得到

$$(\hat{S}_y)_s = (1 + \epsilon) \times (\hat{b}_y)_s \quad \text{active, l.h.}$$

整理一下

$$(\hat{b}_y)_s = \underbrace{[(1 + \epsilon)]^T}_{\text{active, r.h.}} \times (\hat{S}_y)_s = (1 - \epsilon) \times (\hat{S}_y)_s \quad \text{active, l.h.}$$

代入上面 r.h.  $\epsilon$  的公式 (因  $\epsilon$  還是原本的矩陣)，整理一下

$$(\hat{b}_y)_s - (\hat{S}_y)_s = - \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_3 \geq 0 & -\epsilon_2 \leq 0 \\ -\epsilon_3 & 0 & \epsilon_1 \geq 0 \\ \epsilon_2 & -\epsilon_1 & 0 \end{bmatrix} \times (\hat{S}_y)_s$$

利用向量外積，上式也可寫成

$$(\hat{b}_y)_s - (\hat{S}_y)_s = (\vec{\epsilon})_s \times (\hat{S}_y)_s$$

其中  $\vec{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix}_s$  為一向量，在 S frame 中的分量為  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 。

現在我們將上式跟微小轉動公式 Rodrigues rotation formula 比較

$$\vec{r}' - \vec{r} = d\vec{\Omega} \times \vec{r}$$

$d\vec{\Omega}$  是 r 到 r' 的 r.h. 角位移向量，因此我們得到  $\vec{\epsilon} = d\vec{\Omega}$ ， $d\vec{\Omega}$  就是 s frame 到 b frame 的角位移向量 (follow r.h. rule)

$$(\hat{b}_y)_s - (\hat{S}_y)_s = (d\vec{\Omega})_s \times (\hat{S}_y)_s$$

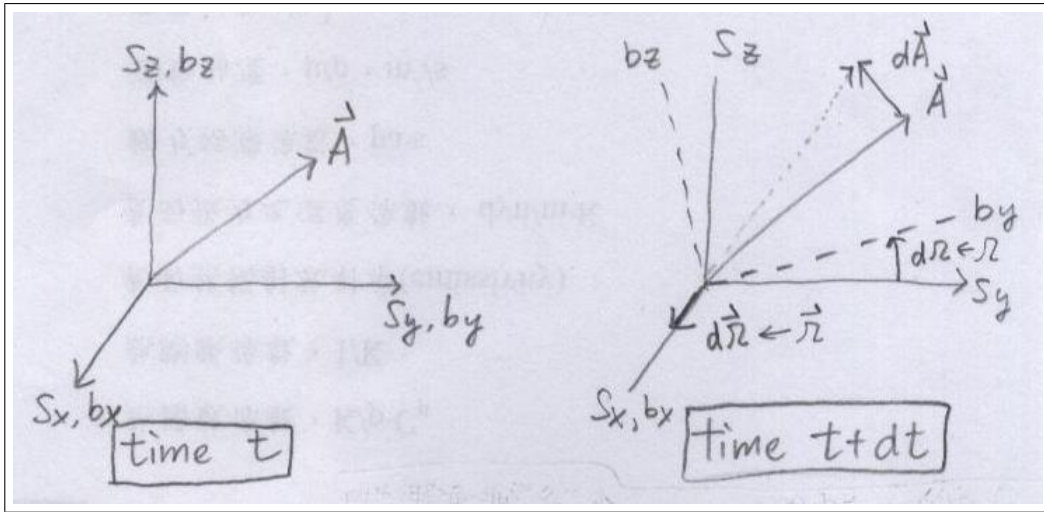
這一點很重要，因為我們將證明此  $(d\vec{\Omega})_s$  跟接下來我們要推導的尤拉公式中的貼體角速度  $\vec{\omega}$  有直接相關性，並且以此來做我們模擬剛體轉動的基礎。

以上的討論是考慮  $\vec{A}$  向量不隨時間變動的情況，接下來我們必須討論  $\vec{A}$  以及 b frame 皆隨時間變動的狀況。

在時間 t 時我們令 S 與 b frame 重合，過了 dt 時間原本的  $\vec{A}$  向量加了一改變量  $d\vec{A}$ ，並且 b frame 依右手定則轉動了一微小角度 (infinitesimal rotation)，這邊考慮相同的方便性我們假定  $S_x$  與  $b_x$  重合，但所有推導均考慮最一般性。在此前提下，向量  $\vec{A}$  在 t 到 t+dt 時間皆符合

$$(\vec{A})_s = (\vec{A})_b$$

Figure 2: Rate change of a vector observed in a inertial and non-inertial frame.



接著，在  $t+dt$  時間  $\vec{A} + d\vec{A}$  向量在  $s$  與  $b$  frame 間的關係為

$$(\vec{A} + d\vec{A})_b = \Omega_{\text{passive, r.h.}} (\vec{A} + d\vec{A})_s$$

$\Omega$  為  $s, b$  frame 轉動矩陣 (passive r.h.)，此  $\Omega$  矩陣與上一段  $\vec{A}$  不變動的情況的  $\Omega$  矩陣完全相同，我們取  $s$  到  $b$  frame 的轉動為微小量， $\Omega \rightarrow d\Omega$ ，上式依之前所述的原理可寫成

$$(\vec{A} + d\vec{A})_b = (1 + \epsilon)_{\text{passive, r.h.}} (\vec{A} + d\vec{A})_s$$

要強調這邊的  $\epsilon$  矩陣跟之前上一段的  $\epsilon$  矩陣是完全相同的，展開上式

$$(\vec{A})_b + (d\vec{A})_b = (\vec{A})_s + (d\vec{A})_s + \epsilon (\vec{A})_s + \epsilon (d\vec{A})_s$$

利用之前知道的  $(\vec{A})_s = (\vec{A})_b$ ，以及忽略高階項  $\epsilon (d\vec{A})_s$ ，重新整理成

$$(d\vec{A})_s = (d\vec{A})_b - \epsilon_{\text{r.h.}} (\vec{A})_s$$

依之前所述原理代入 r.h.  $\epsilon$  的公式，並且利用向量外積

$$\begin{aligned} (d\vec{A})_s &= (d\vec{A})_b - \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_3 \geq 0 & -\epsilon_2 \leq 0 \\ -\epsilon_3 & 0 & \epsilon_1 \geq 0 \\ \epsilon_2 & -\epsilon_1 & 0 \end{bmatrix} (\vec{A})_s \\ &= (d\vec{A})_b - (\vec{A})_s \times (d\vec{\Omega})_s \\ &= (d\vec{A})_b + (d\vec{\Omega})_s \times (\vec{A})_s \end{aligned}$$

因為這裡的  $\epsilon$  矩陣與上一段的  $\epsilon$  矩陣是一樣的，因此我們也可以用上之前轉動公式所推導的微小轉動矩陣  $\epsilon$  所對應的轉動向量  $(d\vec{\Omega})$ ，這樣我們就得到了 rate of change of a vector in rotating frame 公式

$$(d\vec{A})_s = (d\vec{A})_b + (d\vec{\Omega})_s \times (\vec{A})_s \quad (2)$$

這邊要強調，因為這裡的  $\epsilon$  矩陣與上一段的  $\epsilon$  矩陣是一樣的，所以證明了  $d\vec{\Omega}$  所對應的向量就是 s frame 轉到 b frame 的角位移向量 (r.h.)，這樣強調的目的是，我們會以此特性模擬剛體轉動。另外要注意的是  $\vec{A}$  與  $d\vec{\Omega}$  是沿著 t 時間的 s frame 取的投影量。這邊值得一提的是，傳統公式大多寫成

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_b + (d\vec{\Omega})_b \times (\vec{A})_b$$

這邊  $\vec{A}$  與  $d\vec{\Omega}$  則是沿著 t+dt 時間的 b frame 取的投影量，因若考慮  $(\vec{A})_b$  那我們的微小矩陣是作用在 body frame 的  $\vec{A}$  上面，因此在利用外積特性來指定轉動向量時我們也考慮  $(d\vec{\Omega})_b$  在 b frame 的投影，因此事實上  $\vec{A}$  與  $d\vec{\Omega}$  取 s 或 b frame 分量都是可以的，只要矩陣運算後出來的結果是一樣的就可以。<sup>2</sup>

上式取微分即得到一般常見的形式

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_b + (\vec{\omega})_s \times (\vec{A})_s \quad (3)$$

其中  $(\vec{\omega})_s$  為 s frame 到 b frame 的瞬時角速度。

嚴謹的定義了  $d\vec{\Omega}$  與  $(\vec{\omega})_s$  後，我們接著可以利用 Calvin Klein parameter 來近似原本的轉動矩陣 (也就是  $1 + \epsilon$  矩陣)<sup>3</sup>，這邊我們給他一個新代號  $CK(d\vec{\Omega})$ ，當然，接下來只要是矩陣運算我們都會寫上  $CK$  的主被動及左右手性質。

$$CK(d\vec{\Omega})_{\text{r.h.}} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2(bc - ad) & 2(bd + ac) \\ 2(bc + ad) & a^2 + c^2 - b^2 - d^2 & 2(cd - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(cd + ab) & a^2 + d^2 - b^2 - c^2 \end{bmatrix},$$

with  $a = \cos\left(\frac{|d\vec{\Omega}|}{2}\right)$ ,  $b, c, d = \text{component of } d\vec{\Omega} \cdot \sin\left(\frac{|d\vec{\Omega}|}{2}\right)$

現在，我們一再強調  $d\vec{\Omega}$  所對應的是 s frame 轉動到 b frame，因此我們建立的  $CK(d\vec{\Omega})$  矩陣具有以下的特性，根據圖2，

$$\begin{aligned} (\vec{A})_b &= \underbrace{CK(d\vec{\Omega})}_{\text{passive, r.h.}} (\vec{A})_s \\ (\hat{S}_y)_s &= \underbrace{CK(d\vec{\Omega})}_{\text{active, l.h.}} (\hat{b}_y)_s \end{aligned}$$

或者

$$(\vec{A})_s = \underbrace{[CK(d\vec{\Omega})]^T}_{\text{active, l.h.}} (\vec{A})_b \quad (4)$$

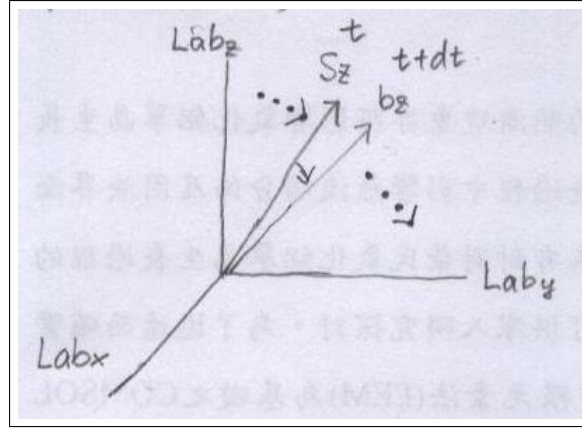
$$(\hat{b}_y)_s = \underbrace{[CK(d\vec{\Omega})]^T}_{\text{active, r.h.}} (\hat{S}_y)_s \quad (5)$$

2若我們知道的是  $(\vec{\omega})_s$  則可帶入  $CK((\vec{\omega})_s \cdot dt)$  來得到矩陣。以上兩式就是模擬或追蹤剛體的 body frame 的 x,y,z 軸轉動的基礎。

<sup>2</sup>Goldstein 在書上在這部分的說明比較少，不過他也提到只要在微分取完後，向量沿 space 或 body 取分量都是可以的。Page 176, version 2[??]

<sup>3</sup>力矩給出的角速度是遵守右手定則 (counterclockwise)，所以 CK 矩陣必須使用其 active counterclockwise sense 才能描述正確向量轉動，要小心，因大部分書上 (如 Goldstein) 給的公式都是 active clockwise (follow 左手定則) (舉例如書上的 Caley Klein parameter rotation matrix)，因此差一個負號。

Figure 3: How to apply rate-of-change-of-a-vector equation to a real rotation.



在我們進一步討論4及5式前，我們必須先說明我們如何應用上3式來解剛體轉動。我們會把剛體轉動分解為很多的微小轉動，每一小段的微小轉動我們都會運用上圖2的原理，現在我們需要另外設定一個 Lab frame，見圖3，此為真正的觀測者所處在的 inertial frame。考慮任意一段微小轉動  $t$  到  $t+dt$ ，在  $t$  時刻時我們將剛體的 principle axes 設定為 S frame，再將  $t+dt$  時刻剛體的 principle axes 設定為 b frame，這樣代表 s frame 到 b frame 就是剛體  $t$  到  $t+dt$  的轉動。將3式應用上這一段  $t$  到  $t+dt$  的微小轉動，並且考慮  $\vec{A}$  為剛體角動量  $\vec{L}$ ，則我們得到

$$(\Gamma)_s = \left( \frac{d\vec{L}}{dt} \right)_s = \left( \frac{d\vec{L}}{dt} \right)_b + (\vec{\omega})_s \times (\vec{L})_s \quad (6)$$

這裡第一等號也用上牛頓定律。現在我們從2式知道  $(d\vec{\Omega})_s$  是 s 到 b frame 的角位移，而這邊經由我們的設定，s 到 b frame 正是我們剛體特徵軸從  $t$  到  $t+dt$  的角位移，因此  $\left( \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right)_s = (\vec{\omega})_s$  正是剛體的瞬時角速度 (沿著  $t$  時間 s frame 取分量)，接著，因為 s, b frame 都是沿著 body principle axes 而取，因此沿 s frame 的角動量  $(\vec{L})_s$  可以寫成

$$(\vec{L})_s = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \times (\vec{\omega})_s$$

再次注意  $(\Gamma)_s$  與  $(\vec{\omega})_s$  與  $(\vec{L})_s$  都是沿著  $t$  時刻的剛體特徵軸 (也就是 s frame) 取的投影，並不是 Lab frame 的投影，這點要特別注意，基本上這代表， $(\vec{\omega})_s$  就是貼體角速度！並且  $(\Gamma)_s$  是貼體的角動量！這裡大部分的書上都沒有給出恰當的原因<sup>4</sup>。這邊我們證明了6式最後那一項中的兩個  $\vec{\omega}$  是相同的<sup>5</sup>。並且，力矩也必須從 lab frame 轉換到  $t$  時間的 s frame。代入  $\vec{L}$  並展開6式，我們就得到所謂的尤拉公式 (Euler's equation)

$$\begin{aligned} \Gamma_x(t) &= I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y(t) \omega_z(t) \\ \Gamma_y(t) &= I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z \\ \Gamma_z(t) &= I_z \dot{\omega}_z + (I_x - I_y) \omega_x \omega_y \end{aligned} \quad (7)$$

<sup>4</sup>注意因為 s frame 會持續的改變所以  $(\vec{r})_s$  不可取  $(\vec{r})_{lab}$  的值，同理  $(\vec{\omega})_s$  也不是  $(\vec{\omega})_{lab}$ ，兩者都必須經過轉換從 lab 轉到  $t$  時刻 s frame。

<sup>5</sup>但我們必須強調，任意情況下，角速度  $(\vec{\omega})$  在 body 轉動座標下的投影並不是 body 座標上觀察到的角速度！這是很常見的錯誤，這裡我們是有條件的考慮  $t$  到  $t+dt$  時刻的  $t$  時刻 s, b 座標重和。

注意  $\vec{\Gamma}$  及  $\vec{\omega}$  的  $x, y, z$  分量都是沿著  $t$  時刻的剛體特徵軸  $s$  frame 取的分量，這點必須要強調。之後數值模擬的時候這點是重要的。

我們將在剛體特徵軸的每一段  $t$  到  $t+dt$  的分解運動運用上  $s$  frame 轉到  $b$  frame 的尤拉公式，也就是運用上7式。這也代表我們將持續地改變  $space$  frame 來符合這個條件，但是當然我們會跟蹤  $space$  frame 每一個變換的位置來達到模擬轉動運動，而這時候就會用上4及5式。

接下來應用上陀螺，若考慮陀螺的條件  $I_x = I_y \neq I_z$ ，7式可寫成

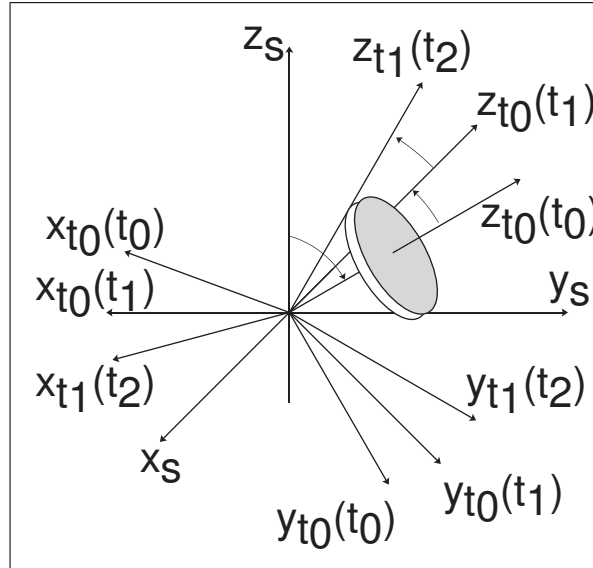
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{I_z - I_y}{I_x} & 0 \\ -\frac{I_x - I_z}{I_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\Gamma_x}{I_x} \\ \frac{\Gamma_y}{I_y} \\ \frac{\Gamma_z}{I_z} \end{bmatrix} \quad (8)$$

如之前所強調，右邊所有項都是在時間為  $t$  時刻的  $s$  frame 取得值，也因此以上的微分方程組可以用普通數值由拉法或四階 Ruge Kutta 求出左側  $\omega_{x,y,z}(t + dt)$ ，也就是從  $\vec{\omega}_s(t)$  求得  $\vec{\omega}_s(t + dt)$ 。不過對於任意的剛體轉動系統，只要能從7式右側  $\vec{\omega}_s(t)$  求得左側  $\vec{\omega}_s(t + dt)$ ，都還是能夠適用接下來的模擬方法，有不少的數值方法可以解一般的非線性一階 ODE 尤拉方程 [ode solver]。

現在我們都設定好了，我們也證明了貼體角速度在任意一段  $t$  到  $t+dt$  的時間中代表的意義，接下來我們就說明如何以這個特性及利用4及5式來追蹤  $s$  frame 在各個微小轉動的位置，也就是我們要求得  $\hat{S}_{x,y,z}(t_i, i=1 \sim N)$  in the lab frame。我們將不寫出 lab 的下標，

只要我們記得沒有下標就是表示是 lab frame。

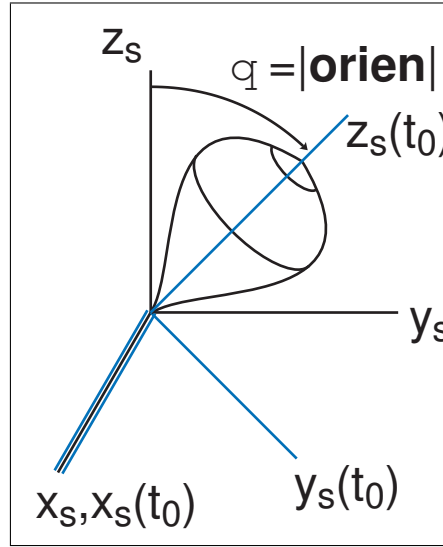
Figure 4: Boby 軸在每一分段  $t$  到  $t+dt$  的追蹤示意圖



假設陀螺特徵軸在 lab frame 的起始位置已知  $(\hat{x}\hat{y}\hat{z}_{lab}(t_0))$ ，初始貼體角速度已知  $\vec{\omega}_s(t_0)$ ，下標代表的是觀測的 frame。現在我們將  $s$  frame 放在  $(\hat{x}\hat{y}\hat{z}_{lab}(t_0))$ ，這樣依照圖3及其所述原理， $b$  frame 的軸就是我們要求的  $(\hat{x}\hat{y}\hat{z}_{lab}(t_1))$ ，若以  $\hat{z}$  軸為例，5式告訴我們

$$\underbrace{[CK(\vec{\omega}_s(t_0)dt)]^T}_{\text{active, r.h.}} \times \hat{z}_0(t_0) = \hat{z}_0(t_1)$$

Figure 5: 陀螺的初始值設定



其中  $\hat{z}_0(t_0, t_1)$  代表時間為  $t_0$  與  $t_1$  的  $z$  軸在  $t_0$  時間的座標軸 (也就是  $s$  frame) 的投影，因此  $\hat{z}_0(t_0)$  為單位向量  $[1 \ 1 \ 1]^T$ 。這樣我們求得下一個  $z$  軸的位置，不過我們得轉回  $lab$  frame，我們假設  $lab$  frame 的  $xyz$  軸到陀螺初始位置  $\hat{x}\hat{y}\hat{z}_{lab}(t_0)$  的轉動向量是  $\vec{\Omega}_0$ ，這樣我們可以用  $\vec{\Omega}_0$  輕易的改變陀螺初始位置，運用上4式

$$\hat{z}_{lab}(t_1) = \underbrace{[CK(\vec{\Omega}_0)]^T}_{\text{passive, l.h.}} \times \hat{z}_0(t_1)$$

注意這邊矩陣就取被動含意，結合以上兩式得到

$$\begin{aligned} \hat{z}_{lab}(t_1) &= \underbrace{[CK(\vec{\Omega}_0)]^T}_{\text{passive, l.h.}} \underbrace{[CK(\vec{\omega}_s(t_0) dt)]^T}_{\text{active, r.h.}} \times \hat{z}_0(t_0) \\ &= \underbrace{[CK(\vec{\Omega}_0)]^T}_{\text{passive, l.h.}} \underbrace{[CK(\vec{\omega}_s(t_0) dt)]^T}_{\text{active, r.h.}} \times [1 \ 1 \ 1]^T \end{aligned}$$

這樣我們就從  $t_0$  時間得到  $t_1$  時間陀螺  $z$  軸的位置。

接著若我們知道  $\hat{z}_{lab}(t_i)$ ，以及從尤拉公式數值法解出的  $\vec{\omega}_s(t_0, t_1, \dots, t_i)$ ，我們圖樣可以求得  $\hat{z}_{lab}(t_{i+1})$ ，首先用5式

$$\begin{aligned} \hat{z}_i(t_{i+1}) &= \underbrace{[CK(\vec{\omega}_s(t_i) dt)]^T}_{\text{active, r.h.}} \times \hat{z}_i(t_i) \\ &= \underbrace{[CK(\vec{\omega}_s(t_i) dt)]^T}_{\text{active, r.h.}} \times [1 \ 1 \ 1]^T \end{aligned}$$



再用4式轉回到 lab frame

$$\begin{aligned}
\hat{z}_{lab}(t_{i+1}) &= \underbrace{[CK(lab \rightarrow t_i)]^T}_{\text{passive, l.h.}} \times \hat{z}_i(t_{i+1}) \\
&= \underbrace{\left[ CK(\vec{\Omega}_0) \cdot CK(\vec{\omega}_s(t_0) dt) \cdot CK(\vec{\omega}_s(t_1) dt) \cdots CK(\vec{\omega}_s(t_{i-1}) dt) \right]^T}_{\text{passive, l.h.}} \times \\
&\quad \hat{z}_i(t_{i+1}) \\
&= \underbrace{\left[ CK(\vec{\Omega}_0) \cdot CK(\vec{\omega}_s(t_0) dt) \cdot CK(\vec{\omega}_s(t_1) dt) \cdots CK(\vec{\omega}_s(t_{i-1}) dt) \right]^T}_{\text{passive, l.h.}} \times \\
&\quad \underbrace{[CK(\vec{\omega}_s(t_i) dt)]^T}_{\text{active, r.h.}} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

這裡用上不同時間微小轉動矩陣的 commutative 性質  $(AB)C = A(BC)$ ，及微小轉動向量的可相加性。這樣我們就得到了  $(t_0, t_1, \dots, t_{i+1})$  時刻 z 軸在 lab frame 位置的公式，同樣方法可求得 x, y 軸。可以看出上面所有 passive 的矩陣的作用只是再把坐標軸從 body frame 轉回到 lab frame。

以上以  $CK(\vec{\omega}_s(t_i) dt)$  來近似  $t_i$  到  $t_{i+1}$  的轉動事實上還不夠好，數值模擬結果會發現陀螺總能量退化的很快，陀螺進動高度不應該下降但卻下降了。這邊我提出以  $CK(\vec{\omega}_s(t_{i+1}) dt)$  來近似  $t_i$  到  $t_{i+1}$  的轉動，因為模擬結果更好，以下我也嘗試提供物理解釋。這裡我們暫時假設  $\vec{\omega}_s(t_i) dt = \vec{\Omega}_s(t_i)$ ，我們知道轉動向量在  $t_{i+1}$  跟  $t_i$  時刻在 body frame 中的向量值一般不會一樣，也就是  $\vec{\Omega}_{i+1}(t_{i+1}) \neq \vec{\Omega}_i(t_i)$ ，這代表從  $t_i$  到  $t_{i+1}$  時，轉動向量在 body 座標上有變化，也因此我們不能夠單只考慮陀螺轉了  $\vec{\Omega}_s(t_i)$  而已，此額外轉動向量的變化在  $t_i$  時 s frame 的向量值為  $\Omega_{i+1}(t_{i+1}) - \Omega_i(t_i) = \Omega_i(t_i) + d\Omega_s(dt) - \Omega_i(t_i) = d\Omega_s(dt)$ ，也是一個轉動向量，所以 space 空間中總共的轉動可以考慮成兩步，第一步轉  $\Omega_s(t_i)$ ，第二步轉  $d\Omega_s(dt)$ ，寫成轉動矩陣

$$CK(\Omega_s(t_i)) \times CK(d\Omega_s(dt)) = CK(\Omega_s(t_i) + d\Omega_s(dt)) = CK(\Omega_{i+1}(t_{i+1})) \quad (9)$$

這代表我們只要考慮陀螺從  $t$  到  $t+dt$  的時候是轉了  $\Omega_s(t+dt)$  而不只是  $\Omega_s(t)$ ，因此考慮  $\Omega_s(t+dt)$  我們就更準確的近似了這個轉動，以下的 Python 程式模擬會證明，考慮了  $\Omega_s(t+dt)$  給出的結果比  $\Omega_s(t)$  好非常多。

以下將上述方法寫成 python 程式，並且畫圖模擬其 xyz 軸運動。

陀螺等周速運動 (Figure 9) 的初始值條件如何計算呢？等周速的條件在 Goldstein 第二版 5-77 式給出

$$Mgl = \dot{\phi} (I_3 \omega_3 - I_1 \dot{\phi} \cos \theta_0) \quad (10)$$

，不過此式是由尤拉角 (euler angles) 給出，但我們需要的是 angular velocity along body 的初始值，因此我們必須轉換尤拉角到 angular velocity along body，方法如下。上式中  $\omega_3$  即為我們的  $(\omega_z)_b$ ，這裡是 20 Hz， $\theta_0$  即為我們之前的 orien 向量所定，此模擬中是取 45 度角，由上式可求出兩組  $\dot{\phi}(t_0)$ 。另外尤拉角跟 angular velocity along body 的關係式在 Goldstein 4-125 式給出

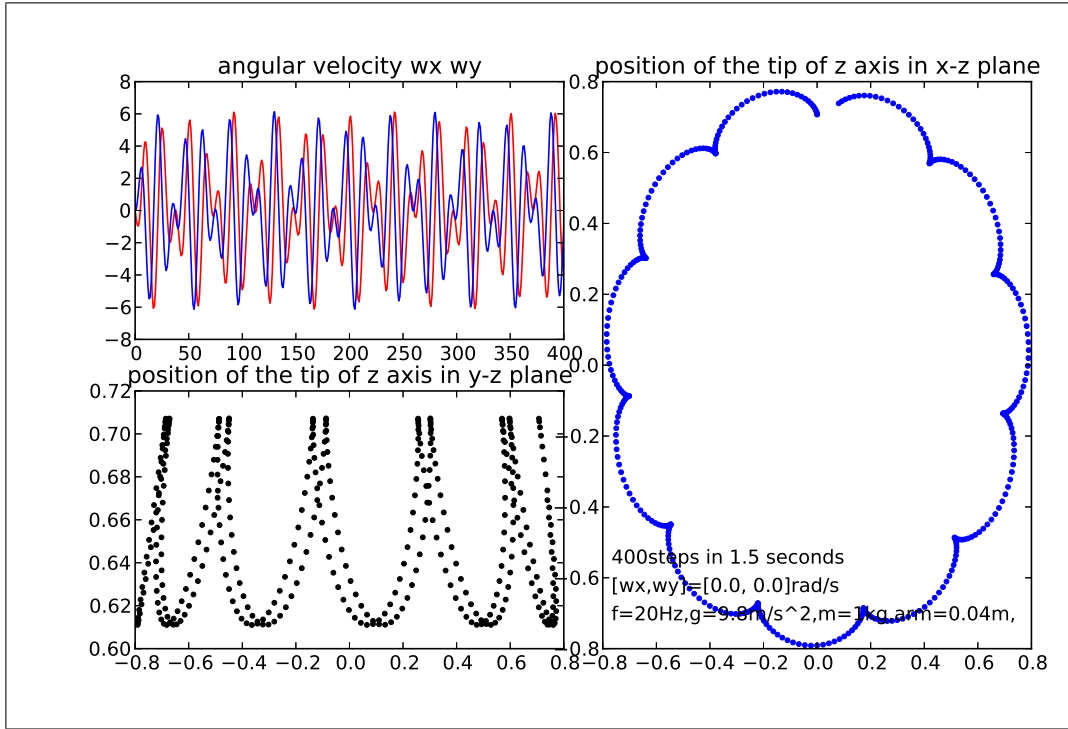
$$(\omega_x)_b = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \quad (11)$$

$$(\omega_y)_b = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \quad (12)$$

$$(\omega_z)_b = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \quad (13)$$

知道  $\dot{\phi}(t_0)$ 、 $\theta_0$ 、 $(\omega_z)_b$ ，我們由第三條求出  $\dot{\psi}(t_0)$ ，再把  $\dot{\psi}(t_0)$  帶到第一二條後就可得到  $(\omega_x(t_0), \omega_y(t_0))_b$ ，這樣我們就得到 angular velocity along body 的初始值。因為  $\dot{\phi}(t_0)$  有

Figure 6: 尖點運動



兩組，因此解出的貼體角速度也會有兩組，兩組的物理意義分別如下，一種情況是 fast top，這個狀況相當於重力的影響遠小於總角動量  $L$ ，因此這個特別的例子基本上相當於忽略重力，而陀螺基本上會像一個 free top 一樣進行 precession。另一種狀況是 slow top，也就是上面模擬結果中第四種的狀況，這裡提供的 python 程式所有情況都可以模擬。另外一個特殊的情況是在 fast top 的情形下，如果初始值  $\theta_0 = 0$ ，也就是陀螺  $z$  軸的起始狀態是垂直於水平面的，這樣的話陀螺幾乎會像靜止不動一樣，我們也叫這情況做 sleeping top。

**Remark 1** 要陀螺具有 *Precession and Nutation* 的動作， $L/\Delta L$  必須要大，如果  $L$  小於  $\Delta L$ ，則只會有陀螺質量受重力影響往下倒下的運動 (不過這對檢查程式有沒有錯誤很有幫助!)，理想上  $L$  至少要大於  $\Delta L$ ，最好  $L$  大大於  $\Delta L$ 。化成數值上的比較：這代表

$$L \gg \Delta L \Rightarrow I \cdot 2\pi f \gg \vec{\Gamma} \Delta t \Rightarrow I \cdot 2\pi f \gg \vec{r} \times \vec{F} \cdot 1/f \Rightarrow f \gg \sqrt{\frac{\text{arm} \cdot Mg \cdot \sin(\theta)}{2\pi I \cdot G}} \quad (14)$$

where  $\theta$  is gyro's tilt angle and  $G$  is moment of inertial geometry factor. 考慮  $\Delta t$  的量級大約是陀螺轉幾圈的時間 (characteristic time)，量級上約是  $\sim 1/f$ ，若假設 arm 是 10 cm,  $M = 1\text{kg}$ ,  $g = 10\text{ m/s}^2$ ,  $I = 0.5M(0.05)^2$ ，則  $f$  最少要 10 Hertz 以上。因此我們將以這些參數比較  $f = 1, 10, 50\text{ Hertz}$  所給出的陀螺運動。

Python code can be found here.

3D animation.

This document is prepared with Scientific Workplace 5.0 and typeset with Tex Live 2013 (Xelatex).

Figure 7: 有環運動

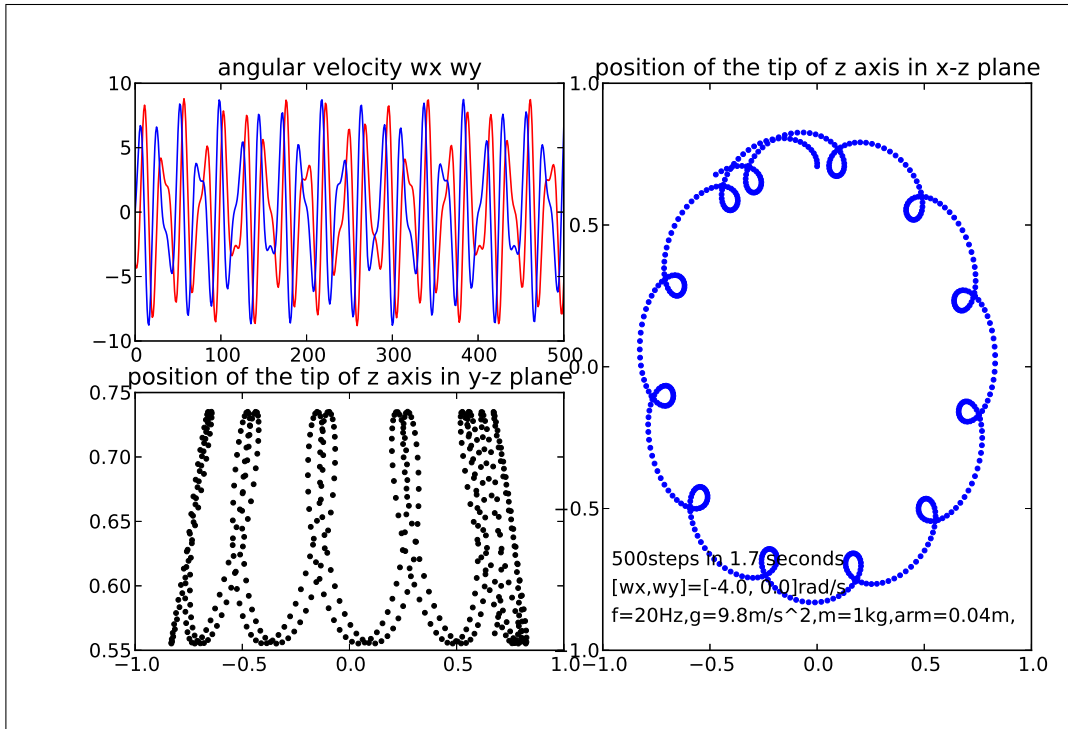


Figure 8: 無環運動

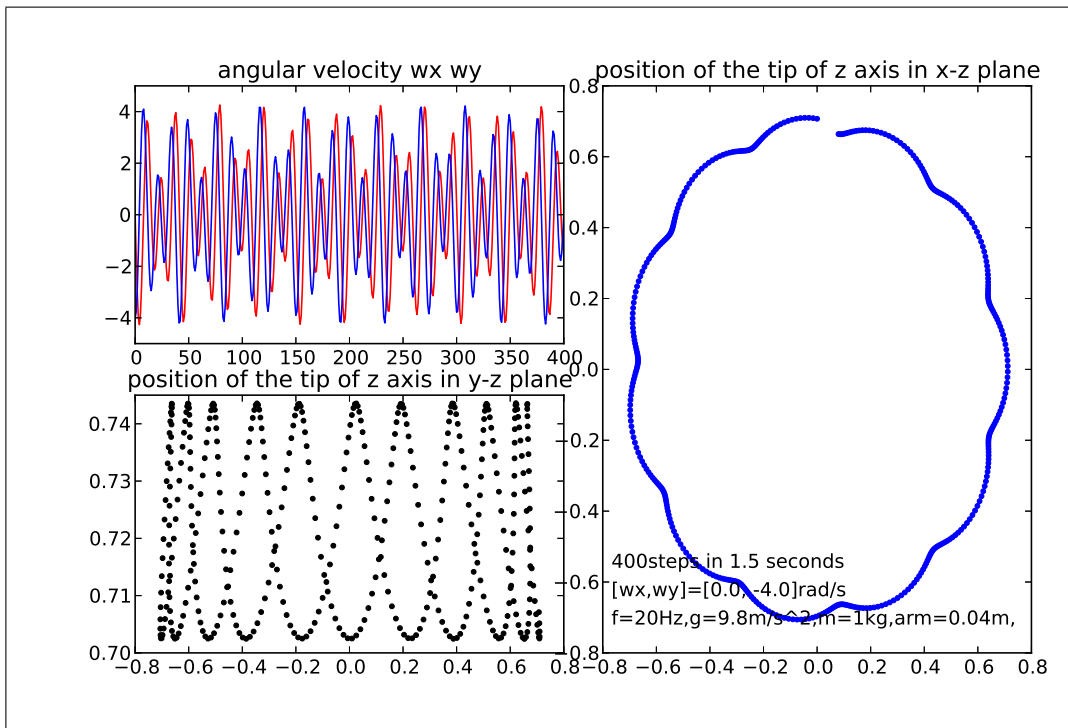


Figure 9: 等周速運動

