

硬幣滾動的數值模擬

方向餘弦矩陣遞推法與尤拉方程的綜合應用

小良台南西元 2014 年 9 月

硬幣的滾動目前的模擬大多採用剛體偵測法，舉例如 cinema 4D、Maya、AutoDesk 3ds Max: Reactor 等 3D 軟體所使用的物理引擎〔physics engine〕都是採用剛體偵測。目前免費的剛體偵測程式庫大致有 open dynamics engine, bullet physics, high precision 等。其中只有 high precision 有所謂的符合工程使用的精確度。由於剛體偵測法主要是應用在碰撞或者爆炸等物理模擬，其是以接觸點的偵測為計算原理，因此其計算量非常大，大多無法做長時間或者高精度的模擬，應用上滾動這類型的運動條件是比較吃力的。這邊建立在基礎的接觸點偵測法的原理之上，利用並加上硬幣滾動特有的滾動幾何條件，來做提高精度且增加計算速度的滾動模擬。

我們把真正的硬幣近似成一個無厚度的圓面，並且此圓面由許多扇形三角形組成，每個扇形三角形的張角為 θ ，我們知道，當 θ 取很小時，此近似就會接近一個真正的正圓。

這樣的話，當硬幣在滾動時，就相當是與地面的接觸點在眾多扇形三角形的鈍頂點變化變換的一個運動。

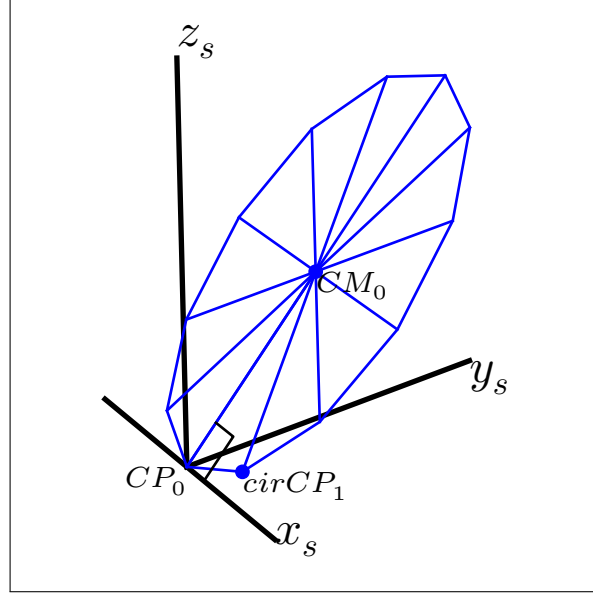
我們考慮此近似下的一小部分轉動，也就是與地面接觸點從一個鈍頂點變換到下一個鈍頂點的運動，這也是構成整的硬幣滾動的基礎轉動，當 θ 夠小，這一步的轉動也可視為一微小轉動。接著，我們再把這一個微小轉動分成三個步驟，這三個步驟也是三個轉動，因為考慮到微小轉動向量加法的可交換性 (associative)，我們選擇一特定順序並且沿著彼此互垂的三個轉軸的三個轉動，以便我們使用尤拉方程中的貼體角速度來做數值模擬。

以下就為這三步驟轉動作詳細描述：

1. 第一步先沿著 CP_0CM_0 軸轉，轉到 $cirCP_1$ 觸地為止，轉動的速率為沿 body \hat{y}_0 的角速度 ω_y ，跟上一章一樣我們會以下一步的時間 t_1 來近似，即 $\omega_y(t_1)$ 。
2. 設 $cirCP_1$ 觸地位置為 CP'_0 ，由於 $cirCP_1$ 已觸地，接下來代表三角形在 CP_0 的端點會被抬起，因此這一步我們考慮三角扇形沿著 CP'_0CM_0 軸轉動，由於當我們取微小轉動時，轉動的接觸點的速度在觸地前後是連續而且平滑的¹，因此我們可以近似此部分沿著 CP'_0CM_0 轉動的角速度為觸地前沿著 CP_0CM_0 轉動的角速度，即 $\omega_y(t_1)$ 。以上兩部分歷經 $2dt$ 時間，分別沿著兩個軸、兩個接觸點、及角速度近似為相同的轉動後，此時扇形三角形 (或硬幣) 在 $\hat{y}_0\hat{x}_1$ 平面。
3. 接著硬幣沿著 body \hat{z}'_0 軸轉，這只會造成 \hat{x}'_0 方向上的平移，接觸點 CP'_0 平移到 CP_1 ，質心 CM_0 到 CM'_0 ，這步驟的角速度為 $\omega_{z_0}(t_1)$ ，注意我們還是取下一時間 t_1 時間的角速度近似值。由於當 θ 取極限小後，硬幣在這一步的轉動具有 $CMCP$ 軸總是與地面的接觸點切線方向垂直的特性，因此這裡我們不細探此轉動過程，而做這一簡化。若要更仔細，我們也是可以再考慮三角形沿中心點鈍角 CP'_0 點及 \hat{z}'_0 軸轉動，直到三角型另一鈍點觸地，此點為 CP_1 ，接著三角形以 CP_1 為中心點， \hat{z}_1 軸為轉軸， CP'_0 點抬起，到 CM'_0CP_1

¹這邊需要一點解釋或引用。

Figure 1:



與 x_1 垂直。不過我們可以先看看我們的簡化表現如何。〔注意我們都是用下一時刻 t_{i+1} 的時間來做 t_i 到 t_{i+1} 時的轉動。〕

4. 然後沿著 x'_0 軸以 $\omega_{x'_0}$ 角速度轉， C'_0 軸轉到 C_1 。此步描述硬幣的高度變化。
5. 這樣完成一次 $t_0 \sim t_1$ 的轉動，接著重複以上來達成 $t_1 \sim t_2$ 轉動。

在假設硬幣為扇形的狀態下，我們必須先討論一個狀況，假設硬幣只沿著 $\overline{CP_0CM_0}$ 轉動，且我們考慮轉動到 CP_0CP_1 兩點都觸地為止，見圖3，原本硬幣在 $\triangle CP_0CM_0cirCP_1$ 平面，轉動後硬幣在 $\triangle CP_0CM_0CP_1$ 平面。我們想要將 CP_1 的位置表達成我們已知參數的函數，更重要的是，我們要知道 CP_1 的位置與沿著 $\overline{CP_0CM_0}$ 軸的貼體轉動角速度的關係。若假設 $\overline{CP_0CP_1}$ 與 \hat{x}_0 的夾角為 α ，沿著 *body* 軸 $\overline{CP_0CM_0}$ 轉動的角度為 ϕ^2 ，我們可以證明 α 與 ϕ 的關係式為

$$\cos(\phi) = \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\frac{\theta}{2})}$$

並且

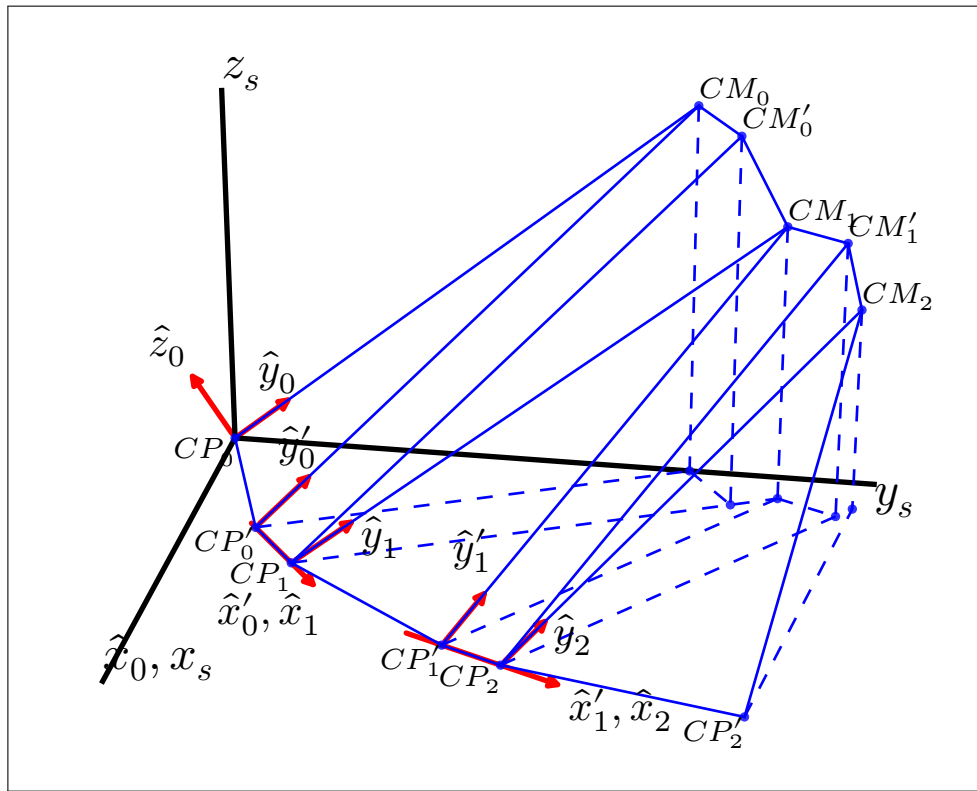
$$\sin(\alpha) = \frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\beta)}$$

當 θ 趨近於 0，接觸點觸地速度會變 0 變平滑。加圖 ##

我們以 steady state $\dot{\theta} = 0$ 的狀況來跟解析解 [1] 做比較，因為書上是採用尤拉角，因此要做比較的話，必須與尤拉角做連結，若以圖1中 space xyz 與 body xyz 的尤拉角關係，並且以書上採用的 z-y-z 轉軸轉 $\varphi - \theta - \phi$ 角的定義〔注意與我們技術文件一採用的尤拉角定義不同〕，則從 space xyz 轉到 body xyz 的尤拉角初始值為 $\varphi = -\frac{\pi}{2}, \theta = \frac{\pi}{2} - \text{lean angle}, \phi = \frac{\pi}{2}$ ，其中 lean angle 為硬幣平面與 space z 夾角。

²若從 $cirCP_1$ 、 CP_1 分別作垂線至 $\overline{CP_0CM_0}$ ， ϕ 即為兩垂線的夾角，見圖。

Figure 2: Successive rolling from CP_0 , CP_1 , CP_2 .



References

- [1] Jerry H. Ginsberg, Advanced Engineering Dynamics 2nd., Harper & Row Publishers Inc., New York, 1988

Figure 3: The relation graph of α and ϕ .

