

2012 小學數學競賽初賽選拔賽第二試應用題第十二題 小明家的電話號碼原為六位數，因號碼不夠用，電信公司在所有電話號碼的首位數與第二位數之間加上一個數碼 1 而成為一個七位數的電話號碼。數年後，電信公司發現號碼仍不敷使用，因此再將所有電話號碼的首位數前加上一個數碼 2 而成為一個八位數的電話號碼。小明發現經過這兩次更改後，家中最新的八位數電話號碼為原先六位數電話號碼的 97 倍。請問小明家最新的八位數電話號碼是什麼？

假設原六位數為 $XYZABC$ ，後來的八位數為 $2X1YZABC$ ，條件是

$$XYZABC \times 97 = 2X1YZABC$$

。寫成十進位制即為，

$$\begin{aligned} & (10000X + 10000Y + 1000Z + 100A + 10B + C) \times 97 \\ &= 20000000 + 1000000X + 100000 + 10000Y + 1000Z + 100A + 10B + C \end{aligned}$$

為了不要寫那麼多個零，我們消去三個零變成（這一步可以不需要做）

$$\begin{aligned} & (100X + 10Y + Z + 0.1A + 0.01B + 0.001C) \times 97 \\ &= 20000 + 1000X + 100 + 10Y + Z + 0.1A + 0.01B + 0.001C \end{aligned}$$

整理一下我們得到

$$8700X + 960Y + 96Z + 9.6A + 0.96B + 0.096C = 20100 \quad (1)$$

現在我們知道 $YZABC$ 最小是 0，最大是 9

$$0 \leq 960Y + 96Z + 9.6A + 0.96B + 0.096C \leq 960 \times 9 + 96 \times 9 + \dots$$

也就是

$$10500 \leq 8700X \leq 20100$$

這樣我們會發現

$$1.2 \leq X \leq 2.3$$

所以 X 只能等於 2。代入 1 式中得到

$$960Y + 96Z + 9.6A + 0.96B + 0.096C = 20100 - 8700X = 2700$$

用同樣的方法，因為 $ZABC$ 最小零最大九

$$1740 \leq 960Y = 2700 - (96Z + 9.6A + 0.96B + 0.096C) \leq 2700$$

這樣 Y 只能為 2。再代入 1 式中整理

$$96Z + 9.6A + 0.96B + 0.096C = 20100 - 8700 \times 2 - 960 \times 2$$

所以

$$684 \leq 96Z = 780 - (9.6A + 0.96B + 0.096C) \leq 780$$

這樣 Z 等於 8。再代入 1 式中整理

$$9.6A + 0.96B + 0.096C = 20100 - 8700 \times 2 - 960 \times 2 - 96 \times 8$$

因此

$$2.49 \leq 9.6A = 12 - (0.96B + 0.096C) \leq 12$$

所以 $A = 1$ 。再代入 1 式中整理

$$0.96B + 0.096C = 20100 - 8700 \times 2 - 960 \times 2 - 96 \times 8 - 9.6 \times 1 = 2.4$$

這樣

$$1.6 \leq 0.96B \leq 2.4$$

所以 $B = 2$ 。再代入 1 式最後可求得 C

$$0.096C = 20100 - 8700 \times 2 - 960 \times 2 - 96 \times 8 - 9.6 \times 1 - 0.96 \times 2$$

得到 $C = 5$ 。所以原六位數為 228125，八位數為 22128125。