

2006 小學數學競賽選拔賽初賽第二試應用題第三題 ABC 三個人玩棋，沒有和棋，輸得換人，贏的繼續玩。只知道 A 最後共玩了 10 盤，B 共玩了 21 盤，請問第九盤是誰跟誰玩？

先畫張表，1 代表玩，0 代表沒玩。ABC 代表三個人。

	A	B	C
1	1	1	0
2	1	0	1
3	0	1	1
4	1	1	0
5	0	1	1
6	1	0	1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
第 X 盤	0	1	1

輸了就要換人，代表每個人不能連玩，也就是不能有兩個零是上下相連。

A_0 代表 A 輸的總次數， A_1 代表 A 贏的總次數。相同的我們也定義 B_0, B_1, C_0, C_1 。我們假設總共有 x 盤，這樣的話 $A_0 + A_1 = x, B_0 + B_1 = x, C_0 + C_1 = x$ 。因最後我們知道 A 玩了 10 盤，B 玩了 21 盤，所以 $A_1 = 10, B_1 = 21$ 。所以 $A_0 = x - 10, B_0 = x - 21$ ，且我們知道 A_0, B_0 必須為大於等於零的整數，所以 $x \geq 21$ 。

但因為每個人的 0 不能相臨，代表 A_0 最多只能為 $\frac{x}{2}$ (若 x 為偶數)，或 $\frac{x+1}{2}$ (若 x 為奇數)。也就是說 A_0 不管如何都小於等於 $\frac{x+1}{2}$ 。不過我們又知道 $A_0 = x - 10$ ，這樣我們得到 $x - 10 \leq \frac{x+1}{2}$ ，整理一下這樣 $x \leq 21$ ，但是前面我們知道 x 必須大於等於 21，所以 x 只能為 21。這樣的話代表總共有 21 盤，然後 $A_0 = 11$ ，代表 21 盤中 A 沒玩 11 盤，但是因不會連著沒玩，所以一定是一盤沒玩一盤玩，且 A 第一盤一定是 0 是輸，這樣 21 盤中才可給出 11 個 0。這樣也代表 A 奇數盤都是 0，所以第九盤 A 是 0，也就是 A 沒玩，所以是 BC 玩。Q.E.D.

Exercise 1 衍伸題。若 A 玩 12 盤，B 玩 9 盤，那 C 最多玩幾盤？