0.1 牛頓定律在轉動座標與恆定座標之間轉換的解釋

例子：陀螺的運動方程（可加入Goldstein的書）

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_b + \vec{\omega}\times\vec{L} \tag{1}$$

此公式如何而來？此公式爲一隨時間變動的向量在恆定座標與非恆定座標(此例爲轉動中座標)之間線性變換的結果。

在恆定座標S(space)中，在時間爲t的時候一向量$\vec{A}$，過了時間dt後，觀察值爲$\vec{A}+d\vec{A}$，

$$t \;:\; (\vec{A})_s \tag{2}$$

$$t+dt \;:\; \left(\vec{A}+d\vec{A}\right)_s \tag{3}$$

在轉動座標b(body)中，時間爲t的時候向量的觀察值爲$\vec{b}$（=Ω×$\vec{A}$，Ω是S->b的轉動矩陣），時間爲t+dt的時候觀察值爲$\vec{b}+d\vec{b}$，

$$t \;:\; \left(\vec{b}\right)_b \tag{4}$$

$$t+dt \;:\; \left(\vec{b}+d\vec{b}\right)_b \tag{5}$$

在t+dt時必須滿足

$$\left(\vec{b}+d\vec{b}\right)_b = \underset{passive}{(\Omega+d\Omega)}\times\left(\vec{A}+d\vec{A}\right)_s \tag{6}$$

若假設t時S，b座標重合，則Ω=Unity，$\left(\vec{A}\right)_s = \left(\vec{b}\right)_b$，上式展開後得

$$\left(d\vec{A}\right)_s = \left(d\vec{b}\right)_b + \Omega\times\left(\vec{b}\right)_b \tag{7}$$

*1注意$\Omega, d\Omega$都是s->b的轉動矩陣
*2此式好像可直接證明？

- 3若s, b在t時重合，那torque應該要用$(N)_b$
- 因爲在t時間s與b座標重合，當我們應用上轉動矩陣的主動特性，可以知道$\left(\hat{A}\right)_s = \underset{active}{(1+d\Omega)}\times\left(\hat{b}\right)_s$，$\hat{b}$與$\hat{A}$分別爲body與space的座標軸x or y or z軸，這也代表$d\Omega$可看成是body的軸$\left(\hat{b}\right)_s$轉動一角度到$\left(\hat{A}\right)_s$，也就是$\frac{d\Omega}{dt}$爲body xyz軸的角速度！(在時間爲t到t+dt的時候)。或者說，因爲space 與body frame 重合，因此space的轉動矩陣= body的轉動矩陣，也因此可以以此算軸從t 時到t+dt 時在t 時座標上的變化。
- 角速度$(\omega)_s$在轉動座標下的投影並不是轉動座標上觀察到的角速度！
- L_b L_s要劃哪一個才對?
- 力矩給出的角速度是遵守右手定則(counterclockwise)，所以rotation formula必須使用其active counterclockwise sense才能描述座標轉動，要小心，因大部分書上(如Goldstein)給的公式都是active clockwise(follow左手定則)(舉例如書上的Caley Klein parameter rotation matrix)，因此差一個負號。

接下來用上陀螺，取陀螺的自旋軸為body z軸，取$\vec{A}$向量為陀螺角動量$\vec{L}$，以及對7取微分即得到

$$\left(\vec{\Gamma}\right)_s = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_b + d\dot{\Omega} \times \left(\vec{L}\right)_b \tag{8}$$

其中$\vec{\Gamma}$為Torque，$d\dot{\Omega}$是body xyz軸的角速度，因euler theorem知轉動矩陣$d\Omega$可看成一向量，再由$*$ 4 知此$d\Omega$即代表著body軸的轉動量，因此此向量$d\Omega$ 即等於$(\vec{\omega})_b \cdot dt$，重新整理後得

$$\left(\vec{\Gamma}\right)_s = \left(\frac{dI\vec{\omega}}{dt}\right)_b + \vec{\omega} \times (I\vec{\omega})_b \tag{9}$$

因為在body axis中I 是diagonal的，因此$\left(\vec{L}\right)_b = I\times$ body 角速度矩陣。而根據先前的推論body角速度就是軸角速度即為$\frac{d\Omega}{dt}$，因此$(\vec{L})_b = I \times \vec{\omega}$。注意$\vec{L}$並不在body z軸的方向。若加上考慮陀螺的條件$I_x = I_y \neq I_z$，Eq.(9)可以寫成

$$\begin{aligned} N_x &= I_x\dot{\omega}_x + (I_z - I_y)\omega_y\omega_z & (10)\\ N_y &= I_y\dot{\omega}_y + (I_x - I_z)\omega_x\omega_z & (11)\\ N_z &= I_z\dot{\omega}_z = 0 & (12) \end{aligned}$$

重新整理得

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x &= -\frac{I_z - I_y}{I_x}\omega_y\omega_z + \frac{N_x}{I_x} & (13)\\ \dot{\omega}_y &= -\frac{I_x - I_z}{I_y}\omega_x\omega_z + \frac{N_y}{I_y} & (14)\\ \dot{\omega}_z &= 0 & (15) \end{aligned}$$

change variables from $\omega_x\omega_y\omega_z$ to xyz, then

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x\\ y\\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{I_z-I_y}{I_x} & 0\\ -\frac{I_x-I_z}{I_y} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{N_x}{I_x}\\ \frac{N_y}{I_y}\\ \frac{N_z}{I_z} \end{bmatrix} \tag{16}$$

寫成這樣的目的就是下一步我們會嘗試用數值解來解這個微分方程組。

- 要陀螺具有Precession and Nutation的動作，L跟ΔL比必須要大，如果L小於ΔL，則只會有陀螺質量受重力影響往下倒下的運動，理想上L至少要大於ΔL，最好L大大於ΔL。化成數值上的比較：這代表

$$L \gg \Delta L \Rightarrow I\cdot 2\pi f \gg \vec{\Gamma}\Delta t \Rightarrow I\cdot 2\pi f \gg \vec{r}\times\vec{F}\cdot 1/f \Rightarrow f \gg \sqrt{\frac{arm\cdot Mg\cdot \sin(\theta)}{2\pi I\cdot G}} \tag{17}$$

  where θ is gyro's tilt angle and G is moment of inertial geometry factor. 考慮Δt的量級大約是陀螺轉幾圈的時間(characteristic time)，量級上約是$\sim 1/f$，若假設arm是10 cm, M = 1kg, g=10, I = 0.5M(0.05)^2,則f最少要10 Hertz以上。因此我們將以這些參數比較f = 1, 10, 50 Hertz所給出的陀螺運動。

- 一般認爲知道角速度在body上的分量並無太大用處，這裡我們證明了只要用數值計算的方法以及知道初始條件，還是可以追蹤並模擬三維空間陀螺的運動。

以上的微分方程組可以用Ruge Kutta求出$\vec{\omega}(t)$，此角速度是沿著body軸的分量，接下來說明如何以此重構出陀螺在space frame下的運動。

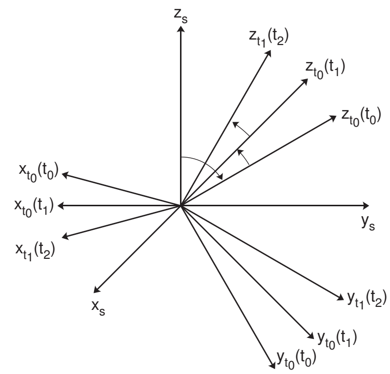

Figure 1:

由之前討論知道，雖然$(\vec{\omega}(t))_b$是角速度沿著body軸的分量，並不代表是body座標中觀察到的角速度，但我們知道若只考慮t到t+dt時間，在t時間時s與b重和，在此條件下我們證明了$(\vec{\omega}(t))_b$在t到t+dt時是body軸的轉動矩陣，也就是body軸的轉動速度，因此只要算出下一步的軸的位置，再轉回space frame，我們就可以一步一步的考慮body軸在space frame中的運動。

假設陀螺起使位置已知$z_0(t_0) = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \end{matrix}$，此爲body旋轉軸z軸單位向量，而此軸在空間中的位置向量爲$z_s(t_0)$，下標代表的是觀測的frame。所以$z_s(t_0)$代表時間是t_0的時候，z軸在space frame中的位置向量，$z_s(t_0)$與z_s不一樣。$z_0(t_1)$則代表時間是t_1的時候z軸在t_0時的座標軸觀察到的位置向量。因此我們要得到的是$z_s(t_{1\text{~}N})$，即所以時間在space中的向量值。當知道$(\vec{\omega}(t_i))_b$我們可以求$z_i(t_{i+1}) = \underbrace{(\vec{\omega}(t_i))_b \cdot dt}_{\text{rotation matrix}} \times z_i(t_i)$，而$z_i(t_i)$總是單位向量 $\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \end{matrix}$。

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import numpy as np
from matplotlib import pyplot
import pylab
import mpltoolkits.mplot3d.axes3d as p3
import matplotlib.animation as animation
def topEOM(wi,torquei):
 fout = np.dot(np.array([[0,b,0],[-b,0,0],[0,0,0]]),wi)+np.dot(
 np.array([[1/Ix,0,0],[0,1/Iy,0],[0,0,1/Iz]]),
 torquei)
 return fout
def topRK(wi,torquei):
 K1 = h*topEOM(wi,torquei)
```

```
K2 = h*topEOM(wi+K1/2,torquei)
K3 = h*topEOM(wi+K2/2,torquei)
K4 = h*topEOM(wi+K3,torquei)
nextw = wi + (K1+2*K2+2*K3+K4)/6
return nextw
```