2007 國際小學數學自然科學奧林匹亞 ISMO-數學基本題第一題 The 400-digit number

$$12345678901234567890\ldots890$$

is given.

Step 1: Cross out all the digits in odd-numbered places.
Step 2: Cross out all the digits in odd-numbered places of the remaining digits.
…
Continue until no digits remain. What is the last digit to be crossed out?

position	1st	2nd	3rd										13th							
total num of digits: 400	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
200		2		4		6		8		0		2		4		6		8		0
100				4				8				2				6				0
50								8								6				
25																6				
12																				
6																				
3																				
1																				

After the first operation, 200 digits will remain and the positions of these remains are $2 \times N$, where N is an interger. After the second operation, 100 digits will remain and the position of them are $2^2 \times N$. 50 digits remain after the third operation and positions of them are $2^3 \times N$. So in the last operation only 1 digit remains and the position of this digit is $2^8 \times N$. But the position has to been smaller than 400, so N can only be 1. So the position is $2^8 \times 1 = 256$. Because the digit sequence has a repetive period of 10 digits. 256 position is $25 \times 10 + 6$, so it is the 6th position in the sequence, which has a number 6. QED

網路題目 一個多位數，此多位數的開頭前幾位數可以是零，如 00358。把最後一位數提到前面就變成原來那位數的兩倍，求最小的此多位數。

設此多位數最後一位數為 $b\,(0<b<9)$，其餘位數為 a，a 為整數，因此此多位數為 $10a+b$

$$(10a+b)\times 2 = 10^n\times b + a$$

$$\to 19a = (10^n-2)\,b$$

$$\to a = \frac{10^n-2}{19}\times b$$

接下來我們提供兩個做法，我的方法是用電腦去解，有點作弊。這裡感謝張廷宇醫師提供了一個更正確的作法，可以不需要用到電腦。我們會先解釋張醫師的作法。

通常 1 除以質數的結果會是循環小數，而 $\frac{1}{19}$ 也是如此。而我們知道循環小數是可以分數化的。我們要找到符合上面式子的 a 與 b，可以朝 $\frac{1}{19}$ 循環小數分數化的方向去試試看。說不定會找到合適的 a 與 b。

我們先算出 $\frac{1}{19}=0.\overline{052631578947368421}$，後面 18 位數會無限循環，依照循環小數分數化的公式，我們可以重寫成

$$\frac{1}{19}=\frac{052631578947368421}{10^{18}-1}=\frac{k}{10^{18}-1}$$

其中 $k=052631578947368421$。朝上面的目標式整理

$$\frac{10^{18}-1}{19}-1=k-1$$

$$\Rightarrow 10\times\frac{10^{17}-2}{19}=k-1=052631578947368420$$

$$\Rightarrow 1\times\frac{10^{17}-2}{19}=05263157894736842$$

因此我們就找到符合目標式子的 a 與 b 了。注意我們刻意保留 05263157894736842 的首位數 0，因為這樣才會有 18 位循環小數，分數化公式才會成立。這樣我們找到 $a=05263157894736842$，$b=1$。所以此數字為 052631578947368421。驗證一下 $2\times 052631578947368421=105263157894736842$ 沒錯！

那如何證明這是最小滿足條件的數目呢？因為 k 是 $\frac{1}{19}$ 的循環位數，而 $\frac{1}{19}$ 的數值也只有一個，這代表 k 是唯一的循環位數，因此也就會是最小的循環位數。這樣子 $\frac{k-1}{10}=05263157894736842$，

也就是 a，就是最小滿足條件式的數值。而 $b=1$ 也是最小，因此 $10a+b$，就是最小的滿足條件的數字。

(我的作弊方法) 由於 $0<b<9$，因此 b 的公因數不可能有 19，所以由於 a 是一整數，代表 $\frac{10^n-2}{19}$ 必須是一整數。也就是我們要用方法去找到一個 n 讓 10^n-2 有最大質因數 19，我能想到的方法只能用電腦一個一個去代入 n 然後用電腦求餘數 mod 找出第一個找到 $\frac{10^n-2}{19}$ 餘數為零的 n。電腦程式如下

```
n = 0
while (10**n-2) % 19 != 0:
    n=n+1
print n
```

找到最小的 n 為 17，與前面方法相同。因此 a 為 5263157894736842，b 為 1，所以此數為 52631578947368421。驗算過後發現我們必須在 a 首位加個零，這樣尾數提到前面才會是 $2a=105263157894736842$。因此滿足題目最小的此位數為 052631578947368421。

Remark: 這裡也提出一個問題，我在算 $\frac{1}{19}$ 的時候遇到一個問題，就是電腦無法顯示足夠的位數，計算機更不用說，因此我是查網路才知道 $\frac{1}{19}$ 的結果與他有幾位旋環小數。這是電腦中很常見的問題。其實電腦應該有指令可以顯示出 64 位元的浮點數 float，因此我還要去查一下。

2006 小學數學競賽選拔賽初賽第二試應用題第三題 ABC 三個人玩棋，沒有和棋，輸得換人，贏的繼續玩。只知道 A 最後共玩了 10 盤，B 共玩了 21 盤，請問第九盤是誰跟誰玩?

先畫張表，1 代表玩，0 代表沒玩。ABC 代表三個人。

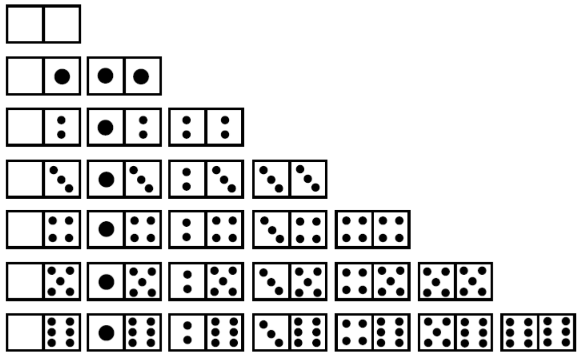
	A	B	C
1	1	1	0
2	1	0	1
3	0	1	1
4	1	1	0
5	0	1	1
6	1	0	1
⋮	⋮	⋮	⋮
第 X 盤	0	1	1

輸了就要換人，代表每個人不能連玩，也就是不能有兩個零是上下相連。

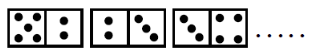
A_0 代表 A 輸的總次數，A_1 代表 A 贏的總次數。相同的我們也定義 $B_0B_1C_0C_1$。我們假設總共有 x 盤，這樣的話 $A_0 + A_1 = x$，$B_0 + B_1 = x$，$C_0 + C_1 = x$。因最後我們知道 A 玩了 10 盤，B 玩了 21 盤，所以 $A_1 = 10$，$B_1 = 21$。所以 $A_0 = x - 10$，$B_0 = x - 21$，且我們知道 A_0、B_0 必須為大於等於零的整數，所以 $x \geq 21$。

但因為每個人的 0 不能相臨，代表 A_0 最多只能為 $\frac{x}{2}$(若 x 為偶數)，或 $\frac{x+1}{2}$(若 x 為奇數)。也就是說 A_0 不管如何都小於等於 $\frac{x+1}{2}$。不過我們又知道 $A_0 = x - 10$，這樣我們得到 $x - 10 \leq \frac{x+1}{2}$，整理一下這樣 $x \leq 21$□ 但是前面我們知道 x 必須大於等於 21，所以 x 只能為 21。這樣的話代表總共有 21 盤，然後 $A_0 = 11$，代表 21 盤中 A 沒玩 11 盤，但是因不會連著沒玩，所以一定是一盤沒玩一盤玩，且 A 第一盤一定是 0 是輸，這樣 21 盤中才可給出 11 個 0。這樣也代表 A 奇數盤都是 0，所以第九盤 A 是 0，也就是 A 沒玩，所以是 BC 玩。Q.E.D.

衍伸題。若 A 玩 12 盤，B 玩 9 盤，那 C 最多玩幾盤？



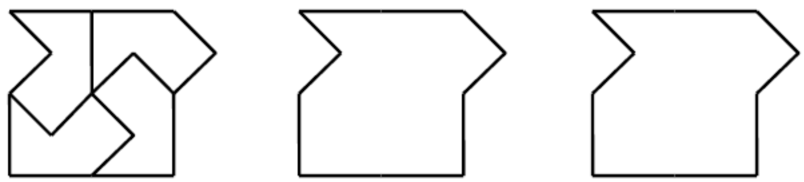
2006 小學數學競賽選拔賽初賽第二試應用題第八題 一套多明諾骨牌共有以上的 28 張。小華依照相鄰兩張牌相連接處的點數必須相同的規定，將這套多明諾骨牌排成如下圖的一長列，直到 28 張牌排完為止。請問排完後，最右邊小方格內的點數是幾點？



28 張多明諾骨牌中的每一個數字 0~8 都有八個，也就是偶數個。在相接骨牌時，由於數字必須相同，代表相接的數字必須成雙成對，也就是有相接的數字出現的次數都是偶數。但是第一個字母沒有與其他相接，由於 28 張骨牌最後都排完，代表每個數字都要出現偶數次在骨牌中，但是第一個五沒有與其他相接，是奇數，而中間成雙成對的五一定都是偶數個，所以最後一個數字必須是五來達成每個字母都要出現偶數次的要求。

2007 國際小學數學及自然科學奧林匹亞 IMSO 英文版試題數學探索題第四題

The figure on the left is divided into four congruent parts—four units of identical size and shape that can be laid flush on top of one another. Divide the figure on the right into five congruent parts (4 point), and then six (4 point).

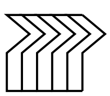
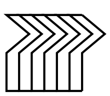


Analysis:

The provided graph and the arangement in this problem is intended to distract and steer the mindset of the students to think that this is a complicated geometric graph problem, but in fact it is really simple. The left graph serves as a decoy example of complicated geometric rotation and symmetry, and this tricks the students into thinking of more complicated geometric shapes in order to fill the same area with 5 and more pieces.

However, it is not your fault to fall into the trap, especially in a dilerberate one like this, shit happens all the time. This is a great example of learning how to pull yourself out of the trap. I was tricked into the complicated graph arrangment. But I stay calm. Forget about the problem. If I have a square, how to split it up into 5 identical pieces. If the area is 1 by 1 in size, then I am looking for an shape of an area of size equal to 0.2 (for 5 pieces). And to keep things simple I randomly choose an rectangle of size 1 by 0.2. This is a strip. And suddenly I realized 5 of this rectangle can make up for an square. And geometric translation suddenly strick my head, after realizing the shape in the problem has translational symmetry. The rest is simple.

Solution is the following.

2012 小學數學競賽初賽選拔賽第二試應用題第十二題 小明家的電話號碼原為六位數，因號碼不夠用，電信公司在所有電話號碼的首位數與第二位數之間加上一個數碼 1 而成為一個七位數的電話號碼。數年後，電信公司發現號碼仍不敷使用，因此再將所有電話號碼的首位數前加上一個數碼 2 而成為一個八位數的電話號碼。小明發現經過這兩次更改後，家中最新的八位數電話號碼為原先六位數電話號碼的 97 倍。請問小明家最新的八位數電話號碼是什麼？

假設原六位數為 $XYZABC$，後來的八位數為 $2X1YZABC$，條件是

$$XYZABC \times 97 = 2X1YZABC$$

。寫成十進位制即為，

$$\begin{aligned} & (10000X + 10000Y + 1000Z + 100A + 10B + C) \times 97 \\ = \; & 20000000 + 1000000X + 100000 + 10000Y + 1000Z + 100A + 10B + C \end{aligned}$$

為了不要寫那麼多個零，我們消去三個零變成 (這一步可以不需要做)

$$\begin{aligned} & (100X + 10Y + Z + 0.1A + 0.01B + 0.001C) \times 97 \\ = \; & 20000 + 1000X + 100 + 10Y + Z + 0.1A + 0.01B + 0.001C \end{aligned}$$

整理一下我們得到

$$8700X + 960Y + 96Z + 9.6A + 0.96B + 0.096C = 20100 \tag{1}$$

現在我們知道 $YZABC$ 最小是 0，最大是 9

$$0 \leq 960Y + 96Z + 9.6A + 0.96B + 0.096C \leq 960 \times 9 + 96 \times 9 + \cdots$$

也就是

$$10500 \leq 8700X \leq 20100$$

這樣我們會發現

$$1.2 \leq X \leq 2.3$$

所以 X 只能等於 2。代入**??**式中得到

$$960Y + 96Z + 9.6A + 0.96B + 0.096C = 20100 - 8700X = 2700$$

用同樣的方法，因為 $ZABC$ 最小零最大九

$$1740 \leq 960Y = 2700 - (96Z + 9.6A + 0.96B + 0.096C) \leq 2700$$

這樣 Y 只能為 2。再代入**??**式中整理

$$96Z + 9.6A + 0.96B + 0.096C = 20100 - 8700 \times 2 - 960 \times 2$$

所以

$$684 \leq 96Z = 780 - (9.6A + 0.96B + 0.096C) \leq 780$$

這樣 Z 等於 8。再代入**??**式中整理

$$9.6A + 0.96B + 0.096C = 20100 - 8700 \times 2 - 960 \times 2 - 96 \times 8$$

因此

$$2.49 \leq 9.6A = 12 - (0.96B + 0.096C) \leq 12$$

所以 $A = 1$。再代入**??**式中整理

$$0.96B + 0.096C = 20100 - 8700 \times 2 - 960 \times 2 - 96 \times 8 - 9.6 \times 1 = 2.4$$

這樣

$$1.6 \leq 0.96B \leq 2.4$$

所以 $B = 2$。再代入**??**式最後可求得 C

$$0.096C = 20100 - 8700 \times 2 - 960 \times 2 - 96 \times 8 - 9.6 \times 1 - 0.96 \times 2$$

得到 $C = 5$。所以原六位數為 228125，八位數為 22128125。

國中有一道機率的問題，我覺得值得我們聊聊，因為我們可以從這問題看到我們國高中教育與大學教育的銜接落差。而這主要是題目出得不好，是老師的問題。但就這麼一個簡單的出題的缺失，會造成非常多學生絞盡腦汁，花費且浪費非常多的時間，甚至錯失一個理解非常基本觀念的機會，你說這值不值得討論一下？

原題目在這裡

$$https://www.youtube.com/watch?v = DefzS7\_OD74$$

題目是：甲有兩個小孩，若看到了甲其中一個小孩是女生，請問兩個小孩都是女生的機率是多少？

好，我們已經看到了一個小孩是女生了，所以題目問兩個小孩都是女生的機率，其實就是在問另一個小孩也是女生的機率是多少，那應該就是 1/2 摟？

這時候老師說話了。如果你列出所有可能，假設有 AB 兩個小孩，則所有可能為 A 男 B 男、A 女 B 男、A 男 B 女，A 女 B 女。其中一個小孩是女生，所以第一種可能性去除，剩下三種可能性，而三種可能性之中只有一種是兩個女生，所以答案應該是 1/3。

但是，我們來更仔細的審視原來的題目。我們重新把問題問的方式改變一下，但是還是一樣的問題。

1. 假設今天我們看到其中一個小孩名子叫 Emily，她是女生，那麼另一個小孩是女生的機率是多少？
2. 假設今天有一個房間，裡面有兩個人，今天走出來一個人他告訴我們他叫 emily，我們看到是女生，那請問房間裡面另一個人是女生的機率是多少？
3. 又，再換一個方式問，假設房間裡面有兩個人，我們只知道裡面至少有一個人是女生，我們並沒有看到，那麼請問房間裡面兩個人都是女生的機率是多少？

以上所嘗試告訴大家的這個觀念其實是一個機率中非常重要的觀念，排列與組合。第一題的答案是 1/2，因為第一個人我們已經看到是女生，這是第一件事，第二件事第二個人是男是女我們關心的是與第一件事情無關的事，兩件事情只是照著次序先後問，這種類型的概念我們稱作排列。第二題跟第一題一模一樣。第三題，因為我們只知道裡面有一個是女生，但是裡面 AB 兩人，我們不知道誰是女生，所以確實若是把所以可能性 AB 男女組合起來會有四種狀況，然後去掉兩個人都是男生的情況，剩三種狀況，而只有一種兩個人都是女生，所以是 1/3。這種類型的概念，稱作組合。

我們再回來看原題目，" 若看到了甲其中一個小孩是女生"，這其實是有點給出了排列的概念，因為我們已經看到特定的人了，然後" 請問兩個小孩都是女生的機率是多少？"，這就奇怪了，這

其實有點隱含了組合的意味在裡面了，有點在問組合的概念，這樣就題目就有點不清楚，到底是要問排列，還是組合的問題？

如果問題是” 若看到了甲其中一個小孩是女生，另一個小孩是女生的機率是多少”，那答案是 1/2。這是非常恰當的排列問題。如果問題是” 若知道甲至少有一個小孩是女生，那兩個小孩都是女生的機率是多少？”，那答案是 1/3。這樣就是非常好的組合問題。

為什麼這個在國中階段就很重要？因為在高中教到排列組合的時候，就用上了這個概念。舉個例子為什麼高中會用上這個例子。一個袋子裡面有黑白兩種球，黑白數目一樣多，拿出球看完顏色後要放回去。第一次從裡面拿出一顆白球，放回去，請問第二次是白球的機率是多少？是 1/2。是排列問題。

若是一次拿出兩顆球，請問兩顆球都是白色的機率是多少，是 1/4。是組合問題。若知道拿出的兩顆球其中至少有一顆球是白色，但不知道是哪一顆，請問兩顆球都是白色的機率是多少，是 1/3。也是組合問題。

所以高中的排列組合的概念從國中就開始介紹了，但是看介紹得好不好。大學呢？從排列組合出發的應用性呢，那更多了。熱力學中的氣體分子動力論，分子的可分辨性與不可分辨姓，都是排列組合的原理。統計力學所用到的機率論也是以排列組合為其重要根基。

所以若是能在國中階段就將此觀念介紹清楚，那真的事會對未來事半功倍，而且從題目上的設計就很重要，若是題目設計得不好，那麼真的會事倍功半，這樣事半功倍與事倍功半的差距，可是四倍的差距阿。並且，如果考試中只有一題是這樣也就算了。要是所有題目有八成的題目都是這樣，那學生就很累很辛苦了，大概也根本不會想學了。不過學生或家長也不必太緊張，學習本來就是靠從錯誤中學，本來就是要靠摔倒來學習怎麼跑步。並不是說題目設計的好，學生就一定學得會，有太多的因素在裡面了。一步一步來，有穩定的進步才比較重要。