- 一個多位數，此多位數的開頭前幾位數可以是零，如 00358。把最後一位數提到前面就變成原來那位數的兩倍，求最小的此多位數。

設此多位數最後一位數為 $b\,(0<b<9)$，其餘位數為 a，a 為整數，因此此多位數為 $10a+b$

$$(10a+b)\times 2 = 10^n \times b + a$$

$$\rightarrow 19a = (10^n - 2)\,b$$

$$\rightarrow a = \frac{10^n-2}{19}\times b$$

接下來我們提供兩個做法，我的方法是用電腦去解，有點作弊。這裡感謝張廷宇醫師提供了一個更正確的作法，可以不需要用到電腦。我們會先解釋張醫師的作法。

1. 通常 1 除以質數的結果會是循環小數，而 $\frac{1}{19}$ 也是如此。而我們知道循環小數是可以分數化的。我們要找到符合上面式子的 a 與 b，可以朝 $\frac{1}{19}$ 循環小數分數化的方向去試試看。說不定會找到合適的 a 與 b。
   我們先算出 $\frac{1}{19} = 0.\overline{052631578947368421}$，後面 18 位數會無限循環，依照循環小數分數化的公式，我們可以重寫成

   $$\frac{1}{19} = \frac{052631578947368421}{10^{18}-1} = \frac{k}{10^{18}-1}$$

   其中 $k = 052631578947368421$。朝上面的目標式整理

   $$\frac{10^{18}-1}{19} - 1 = k - 1$$

   $$\Rightarrow 10\times\frac{10^{17}-2}{19} = k-1 = 052631578947368420$$

   $$\Rightarrow 1\times\frac{10^{17}-2}{19} = 05263157894736842$$

   因此我們就找到符合目標式子的 a 與 b 了。注意我們刻意保留 05263157894736842 的首位數 0，因為這樣才會有 18 位循環小數，分數化公式才會成立。這樣我們找到 $a=05263157894736842$，$b=1$。所以此數字為 052631578947368421。
   驗證一下 $2\times 052631578947368421 = 105263157894736842$ 沒錯！
   那如何證明這是最小滿足條件的數目呢？因為 k 是 $\frac{1}{19}$ 的循環位數，而 $\frac{1}{19}$ 的數值也只有一個，這代表 k 是唯一的循環位數，因此也就會是最小的循環位數。這樣子 $\frac{k-1}{10} = 05263157894736842$，也就是 a，就是最小滿足條件式的數值。而 $b=1$ 也是最小，因此 $10a+b$，就是最小的滿足條件的數字。

2. (我的作弊方法) 由於 $0 < b < 9$，因此 b 的公因數不可能有 19，所以由於 a 是一整數，代表 $\frac{10^n-2}{19}$ 必須是一整數。也就是我們要用方法去找到一個 n 讓 $10^n - 2$ 有最大質因數 19，我能想到的方法只能用電腦一個一個去代入 n 然後用電腦求餘數 mod 找出第一個找到 $\frac{10^n-2}{19}$ 餘數為零的 n。
電腦程式如下
```
n = 0
while (10**n-2) % 19 != 0:
n=n+1
print n
```
找到最小的 n 為 17，與前面方法相同。因此 a 為 5263157894736842，b 為 1，所以此數為 52631578947368421。驗算過後發現我們必須在 a 首位加個零，這樣尾數提到前面才會是 $2a = 105263157894736842$。因此滿足題目最小的此位數為 052631578947368421。

Remark: 這裡也提出一個問題，我在算 $\frac{1}{19}$ 的時候遇到一個問題，就是電腦無法顯示足夠的位數，計算機更不用說，因此我是查網路才知道 $\frac{1}{19}$ 的結果與他有幾位旋環小數。這是電腦中很常見的問題。其實電腦應該有指令可以顯示出 64 位元的浮點數 $float$，因此我還要去查一下。