SVOLGIMENTO TRACCIA (1) SECONDO APPELLO 26/06/2020

n°1 $X \sim geo(p)$, $Y \sim geo(p)$ indipendenti

a) $X+Y \sim ?$

sia $Z := X+Y$

$$\text{codom } X = \{1, 2 \dots\}$$
$$\text{codom } Y = \{1, 2 \dots\}$$
$$\text{codom } Z = \{2, 3, 4 \dots\}$$

$$\left[\text{Ricordo: } \quad p_X(k) = p_Y(k) = p(1-p)^{k-1} \quad \forall k \geq 1\right]$$

Calcolo la pf di Z:

$$p_Z(k) = P(Z=k) = P(X+Y=k) = P(X=k-Y)$$

$$\overset{\text{PROBABILITÀ TOTALE}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} P(X=k-j \mid Y=j)\, P(Y=j)$$

$$P(X=k-j \mid Y=j) \underset{\text{probabilità condizionata}}{\overset{\text{Definizione di}}{=}} \frac{P(X=k-j, Y=j)}{P(Y=j)} =$$

$$\overset{X \text{ e } Y \text{ indep}}{=} \frac{P(X=k-j) \cdot P(Y=j)}{P(Y=j)} = P(X=k-j)$$

Poichè codom $X = \{1, 2 \dots\}$ allora deve essere $k-j \geq 1$, perciò $1 \leq j \leq k-1$, quindi:

$$\mathbb{P}(Z=k) = \sum_{j=1}^{k-1} \mathbb{P}(X=k-j)\,\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{j=1}^{k-1} p(1-p)^{k-j-1}\,p(1-p)^{j-1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} p^2(1-p)^{k-2} = (k-1)\,p^2(1-p)^{k-2}$$

b) $\mathbb{P}(X=k \mid X+Y=m) = ? \quad \forall k \geq 1$

$$\mathbb{P}(X=k,\ X+Y=m) = \mathbb{P}(X=k,\ Y=m-k) \overset{X \text{ e } Y \text{ indipendenti}}{=}$$

$$= \mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=m-k) = p(1-p)^{k-1}p(1-p)^{m-k-1} =$$

$$= p^2(1-p)^{m-2}.$$

Quindi: la funzione di probabilità condizionata di X dato $X+Y$ è:

$$p_{X|X+Y}(k;m) := \mathbb{P}(X=k \mid X+Y=m) =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X=k,\ X+Y=m)}{p(\underbrace{X+Y}_{:=Z}=m)} = \frac{p^2(1-p)^{m-2}}{(m-1)p^2(1-p)^{m-2}} = \frac{1}{m-1}$$

$\forall\ 1 \leq k \leq m-1$, distribuzione uniforme su $\{1..m-1\}$

c) $X :=$ v.a. che descrive il numero di lanci per ottenere "T" la prima volta.

$Y =$ v.a. che descrive il numero di ulteriori lanci per ottenere "T" di nuovo;

$F :=$ v.a che descrive il numero di lanci per ottenere "T" per la seconda volta.

Allora $F = X + Y = Z$, X e Y indipendenti, quindi

$$P(X=k, F=m) = \frac{1}{m-1}$$ (Calcolato al punto b)

Poiché la legge condizionata di X dato $Z=m$ è uniforme su $1,\dots,m-1$, tutti i valori di k sono equiprobabili.

n°2

$n = 400$ STUDENTI

	ECO	MAT	LET	MED	FARM	TOT
M	21	16	145	2	6	180
F	14	4	175	13	4	210
	35	20	320	15	10	400

$$D_0 = \sum_{\substack{j=1..r \\ k=1..s}} \frac{\left(N_{jk} - \frac{N_{j\cdot} N_{\cdot k}}{n}\right)^2}{\frac{N_{j\cdot} N_{\cdot k}}{n}}$$; X = v.a. facoltà

Y = v.a. genere

$r = 5$ $\quad j = 1 \dots 5$ $\quad X = (x_1, \dots, x_5)$

$s = 2$ $\quad k = 1, 2$ $\quad Y = (y_1, y_2)$

$$D_0 = \frac{\left(21 - \frac{35 \times 190}{400}\right)^2}{\frac{35 \times 190}{400}} + \frac{\left(14 - \frac{35 \times 210}{400}\right)^2}{\frac{190 \times 210}{400}} +$$

$$\frac{\left(16 - \frac{20 \times 190}{400}\right)^2}{\frac{20 \times 190}{400}} + \frac{\left(4 - \frac{20 \times 210}{400}\right)^2}{\frac{20 \times 210}{400}} +$$

$$\frac{\left(145 - \frac{320 \times 190}{400}\right)^2}{\frac{320 \times 190}{400}} + \frac{\left(175 - \frac{320 \times 210}{400}\right)^2}{\frac{320 \times 210}{400}} +$$

$$\frac{\left(2 - \frac{15 \times 190}{400}\right)^2}{\frac{15 \times 190}{400}} + \frac{\left(13 - \frac{15 \times 210}{400}\right)^2}{\frac{15 \times 210}{400}} +$$

$$\frac{\left(6 - \frac{10 \times 190}{400}\right)^2}{\frac{10 \times 190}{400}} + \frac{\left(4 - \frac{10 \times 210}{400}\right)^2}{\frac{10 \times 210}{400}} =$$

$$= 1.1513 + 1,0417 + 4,4474 + 4.0238 +$$

$$+ 0.3224 + 0.2917 + 3.6864 + 3.3353 +$$

$$+ 0.3289 + 0.2976 = \underline{18.9258}$$

$$\begin{cases} \text{Se } D_0 \leq \chi^2_{1-\alpha, (2-1)(5-1)} & \text{si ACCETTA } H_0 \\ \text{se } D_0 > \chi^2_{1-\alpha, (2-1)(5-1)} & \text{si RIFIUTA } H_0 \end{cases}$$

$(2-1)(5-1) = 4$, $\alpha = 0.01 \Rightarrow 1-\alpha = 0.99$

Poiché $D_0 = 18.9258 > 13.2767 = \chi^2_{0.99, 4}$ si rifiuta H_0

n°3

TEOREMA: LGND

Sia $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una successione di v.a. i.i.d. Supponiamo che, per ogni i, $E(X_i)=\mu$ e $V(X_i)=\sigma^2$.

Allora, per ogni $\varepsilon>0$:

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}-\mu\right|>\varepsilon\right)=0$$

DIM: Sia $\bar{X}:=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ v.a.

$$E(\bar{X})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)=\frac{1}{n}\cdot n\mu=\mu$$

$$V(\bar{X})\underset{\text{indep}}{\overset{X_i \text{ sono}}{=}}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i)=\frac{1}{n^2}\, n\cdot\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

Si applica la disuguaglianza di Chebyshev a $\bar{X}$: fisso $\varepsilon>0$, ottengo

$$0\leq P(|\bar{X}-\mu|>\varepsilon)\leq\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

$$0\leq P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}-\mu\right|>\varepsilon\right)\leq\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

La tesi si ottiene passando al limite per n che tende a ∞. □