SVOLGIMENTO TRACCIA 3 (26-06-2020)

**n°1** $X_i \sim b(1,p) \quad \forall i = 1 \dots 4$

$$S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$

a) La funzione di probabilità condizionata di $X_i$ dato $S=2$ è:

$$p_{X_i|S}(k,2) = P(X_i = k \mid S=2) \quad \forall i = 1 \dots 4$$

Supponiamo $i=1$ (gli altri casi sono identici)

Poiché $X_1 \sim b(1,p)$, $X_1$ può assumere solo valori 0 e 1 con probabilità $(1-p)$ e $p$

$$P(X_1 = 1) = p \quad e \quad P(X_1 = 0) = 1-p \,, \quad p \in [0,1]$$

Quindi per $i=1$ e $k=1$ si ha:

$$P(X_1 = 1 \mid S=2) = \frac{P(X_1 = 1, S=2)}{P(S=2)}$$

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_4 \sim b(4,p)$$

[ S è la somma di 4 v.a. di Bernoulli indipendenti di parametro p, quindi è binomiale di parametri 4, p ]

$$P(S=2) = \binom{4}{2} p^2 (1-p)^{4-2}$$

$$P(X_1=1, S=r) = P(X_1=1, X_2+X_3+X_4=r-1) \overset{\text{indip}}{=}$$

$$= P(X_1=1)\, P(\underbrace{X_2+X_3+X_4}_{\sim b(3,p)}=r-1) = p\cdot \binom{3}{r-1} p^{r-1}(1-p)^{3-r+1} =$$

$$= \binom{3}{r-1} p^r (1-p)^{4-r} \quad \text{per } r \geq 1.$$ [Se $r=0$ la probabilità condizionale vale 0]

Quindi $$P(X_1=1 \mid S=r) = \frac{\binom{3}{r-1} p^r (1-p)^{4-r}}{\binom{4}{r} p^r (1-p)^{4-r}} =$$

$$= \frac{\binom{3}{r-1}}{\binom{4}{r}} = \frac{r}{4}$$

$$P(X_1=0 \mid X_1+X_2+X_3+X_4=r) = \frac{P(X_1=0, S=r)}{P(S=r)}$$

$$P(X_1=0, X_1+X_2+X_3+X_4=r) = P(X_1=0, X_2+X_3+X_4=r) =$$

$$\overset{\text{indip}}{=} P(X_1=0)\, P(\underbrace{X_2+X_3+X_4}_{\sim b(3,p)}=r) = (1-p)\binom{3}{r} p^r (1-p)^{3-r} =$$

$$= \binom{3}{r} p^r (1-p)^{4-r}$$

Quindi

$$P(X_1=0 \mid X_1+X_2+X_3+X_4=r) = \frac{\binom{3}{r} p^r (1-p)^{4-r}}{\binom{4}{r} p^r (1-p)^{4-r}} =$$

$$= \frac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{4-2}{4} = 1 - \frac{2}{4}$$

Quindi la legge condizionale di $X_1$ dato $S=2$ è di Bernoulli $\boxed{b\left(1, \frac{2}{4}\right)}$;

b) Il valore atteso di una v.a. $X \sim b(1,p)$ è $E(X) = p$, quindi il valore atteso della legge condizionale di $X_1$ dato $S=2$ è $\boxed{\frac{2}{4}}$;

c) $Z = X_1 + X_2$ ; $S = X_1 + \dots + X_4$

$$P_{Z|S}(k,2) = P(Z=k \mid S=2);$$

$$P(Z=k \mid S=2) = \frac{P(Z=k, S=2)}{P(S=2)};$$

Se $2 \geq k$ si ha: $P(X_1+X_2=k, X_1+\dots+X_4=2) =$

$$= P(X_1+X_2=k, X_3+X_4=2-k) \overset{\text{indip}}{=} \underbrace{P(X_1+X_2=k)}_{\sim b(2,p)} \underbrace{P(X_3+X_4=2-k)}_{\sim b(2,p)} =$$

$$= \binom{2}{k} p^k (1-p)^{2-k} \binom{2}{2-k} p^{2-k} (1-p)^{2-2+k} =$$

$$= \binom{2}{k} \binom{2}{2-k} p^2 (1-p)^{4-2}.$$

Quindi se $k > r$: $P(Z=k \mid S=r) = 0$

se $k \leq r$: $P(Z=k \mid S=r) = \dfrac{\binom{2}{k}\binom{2}{r-k} p^r (1-p)^{4-r}}{\binom{4}{r} p^r (1-p)^{4-r}} =$

$$= \frac{\binom{2}{k}\binom{2}{r-k}}{\binom{4}{r}}.$$

**n°2**

| | Categorie 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | TOT |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Gr 1 | 95 | 36 | 71 | 21 | 45 | 32 | 300 |
| Gr 2 | 53 | 26 | 43 | 18 | 32 | 28 | 200 |
| TOT | 148 | 62 | 114 | 39 | 77 | 60 | 500 |

$n = 500 \quad \alpha = 0.05.$

$X$ = v.a. che descrive le categorie $X = (x_1, .., x_6)$ $r = 6$

$Y$ = v.a. che descrive il gruppo $Y = (y_1, y_2)$ $s = 2$

$$D_0 = \sum_{\substack{j=1..6 \\ k=1,2}} \frac{\left(N_{jk} - \frac{N_{j\cdot} N_{\cdot k}}{n}\right)^2}{\frac{N_{j\cdot} N_{\cdot k}}{n}} =$$

$$= \frac{\left(95 - \frac{148 \times 300}{500}\right)^2}{\frac{148 \times 300}{500}} + \frac{\left(53 - \frac{148 \times 200}{500}\right)^2}{\frac{148 \times 200}{500}} +$$

$$+ \frac{\left(36 - \frac{62 \times 300}{500}\right)^2}{\frac{62 \times 300}{500}} + \frac{\left(26 - \frac{62 \times 200}{500}\right)^2}{\frac{62 \times 200}{500}} +$$

$$+ \frac{\left(71 - \frac{114 \times 300}{500}\right)^2}{\frac{114 \times 300}{500}} + \frac{\left(43 - \frac{114 \times 200}{500}\right)^2}{\frac{114 \times 200}{500}} +$$

$$\frac{\left(21 - \frac{39 \times 300}{500}\right)^2}{\frac{39 \times 300}{500}} + \frac{\left(18 - \frac{39 \times 200}{500}\right)^2}{\frac{39 \times 200}{500}} +$$

$$+ \frac{\left(45 - \frac{77 \times 300}{500}\right)^2}{\frac{77 \times 300}{500}} + \frac{\left(32 - \frac{77 \times 200}{500}\right)^2}{\frac{77 \times 200}{500}} +$$

$$+ \frac{\left(32 - \frac{60 \times 300}{500}\right)^2}{\frac{60 \times 300}{500}} + \frac{\left(28 - \frac{60 \times 200}{500}\right)^2}{\frac{60 \times 200}{500}} =$$

$$= 0.4329 + 0.6493 + 0.0387 + 0.0581 +$$
$$+ 0.0888 + 0.1482 + 0.2461 + 0.3692 +$$
$$+ 0.0312 + 0.0468 + 0.4444 + 0.6667 =$$
$$= 3{,}2304$$

$$\begin{cases} \text{Se } D_0 \leq \chi^2_{1-\alpha,(r-1)(s-1)} & \text{si accetta } H_0 \\ \text{Se } D_0 > \chi^2_{1-\alpha,(r-1)(s-1)} & \text{si rifiuta } H_0 \end{cases}$$

$$\chi^2_{1-\alpha,(r-1)(s-1)} = \chi^2_{0.95,5} = 11.0705$$

Poiché $3{,}2306 < 11.0705$ si accetta $H_0$.

n°3 **Teorema di Poisson:**

Sia $\lambda > 0$ e siano assegnate le v.a. binomiali $X_n \sim b(n, \frac{\lambda}{n})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se le $p_{X_n}(k)$ sono le rispettive pf, si ha:

$$\lim_{n \to +\infty} p_{X_n}(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \forall k \geq 0$$

DIM: Deve essere $\frac{\lambda}{n} \leq 1$. Fissiamo $k \geq 0$:

$$p_{X_n}(k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} \cdot \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n \cdot n^{k-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{(k-1)}{n}\right)}{n^k} \cdot \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{(k-1)}{n}\right) \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k};$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{X_n}(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{(k-1)}{n}\right) \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad \square$$