APPELLO 13/07/2020 SVOLGIMENTO TRACCIA 1

$\boxed{n^\circ 1}$

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta} e^{-x^2/\theta} & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$\theta > 0$

a) $Z = X^2$. $Z \sim ?$

Calcoliamo la funzione di distribuzione $F_Z(t)$

- se $t \leq 0$: $F_Z(t) = 0$ poiché la densità di X è >0 solo per $t>0$.

- se $t>0$:

$$F_Z(t) = P(Z \leq t) = P(X^2 \leq t) = P(X \leq \sqrt{t}) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\sqrt{t}} f(x,\theta)\, dx = \int_0^{\sqrt{t}} \frac{2x}{\theta} e^{-x^2/\theta}\, dx =$$

$$= \left[-e^{-x^2/\theta} \right]_0^{\sqrt{t}} = -e^{-\frac{t}{\theta}} + 1 = 1 - e^{-t/\theta}$$

è la FdD di una legge esponenziale di parametro $1/\theta$.

$Z \sim exp(1/\theta)$.

b) $E(Z) = \dfrac{1}{\frac{1}{\vartheta}} = \vartheta$ perché il valore atteso

di una v.a. esponenziale di parametro λ è $\dfrac{1}{\lambda}$.

$V(Z) = \vartheta^2$;

c) $W = e^{-X^2/\vartheta}$ $\quad f_W(x) = ?$

Calcoliamo la F.d.D di W:

Poiché X^2 allora $e^{-X^2/\vartheta} = \dfrac{1}{e^{X^2/\vartheta}} \Rightarrow$ W assume

valori compresi tra 0 e 1.

Se $0 < t < 1$:

$$F_Z(t) = P(Z \leq t) = P\left(e^{-X^2/\vartheta} \leq t\right) = P\left(\frac{-X^2}{\vartheta} \leq \log t\right) =$$

$$= P\left(\frac{X^2}{\vartheta} \geq -\log t\right) = P\left(X^2 \geq -\vartheta \log t\right) =$$

$$= 1 - P\left(X^2 \leq -\vartheta \log t\right) = 1 - \left(1 - e^{+\vartheta \frac{\log t}{\vartheta}}\right) =$$

$$= e^{\log t} = t$$

Quindi W è uniforme su $[0, 1]$.

n°2 $\quad n = 2000$

k	0	1	2	3	4	5
N_k	822	804	300	67	7	0

$$X \sim b\left(5, \frac{1}{6}\right) \qquad p_X(k) = P(X=k) = \binom{5}{k} \frac{1}{6}^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$$

$m = 6$; Verifico se $np_j \geq 5 \quad \forall \; j = 0, \dots, 5$

$$p_0 = P(X=0) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0.4019 \; ; \; np_0 = 803.755$$

$$p_1 = P(X=1) = \binom{5}{1} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.4019 \; ; \; np_1 = 803.755$$

$$p_2 = P(X=2) = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.1608 \; ; \; np_2 = 321.5$$

$$p_3 = P(X=3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0.0322 \; ; \; np_3 = 64.3$$

$$p_4 = P(X=4) = \binom{5}{4} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 = 0.0032 \; ; \; np_4 = 6.4$$

$$p_5 = P(X=5) = \binom{5}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 = 0.0001 \; ; \; np_5 = 0.3 < 5$$

E' necessario raggruppare le classi 4 e 5:

$$n\tilde{p}_4 = n(p_4 + p_5) = 2000(0.0032 + 0.0001) = 6.6 > 5$$

$$\tilde{N}_4 = N_4 + N_5 = 7 + 0 = 7$$

Quindi ora $\bar{m} = 5$ $\quad j = 0, 1, 2, 3, 4$

$$D_0 = \sum_{j=0}^{4} \frac{(N_j - np_j)^2}{np_j} =$$

$$= \frac{(822 - 803.8)^2}{803.8} + \frac{(804 - 803.8)^2}{803.8} + \frac{(300 - 321.5)^2}{321.5} +$$

$$+ \frac{(67 - 64.3)^2}{64.3} + \frac{(7 - 6.6)^2}{6.6} =$$

$$= 0.412 + 4{,}976 \times 10^{-5} + 1.438 + 0.113 + 0.024 =$$

$$= 1.99$$

$$\begin{cases} \text{Se } D_0 \leq \chi^2_{1-\alpha, \bar{m}-1} & \text{si ACCETTA } H_0 \\ \text{Se } D_0 > \chi^2_{1-\alpha, \bar{m}-1} & \text{si RIFIUTA } H_0 \end{cases}$$

$$\chi^2_{1-\alpha; \bar{m}-1} = \chi^2_{0.95, 4} = 9.48773$$

Poiché $D_0 = 1.99 < \chi^2_{1-\alpha, m-1}$ si accetta H_0.

1 $\boxed{n^\circ 3}$ TEOREMA: Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio probabilità

Siano $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$, $X \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$. X_1, X_2 indipendenti.
$\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Allora, detta $X := X_1 + X_2$ si ha $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$

DIMOSTRAZIONE: Sia $k \geq 0$. $k \in \mathrm{codom}(X)$

$$p_X(k) = P(X = k) = P(X_1 + X_2 = k) =$$

$$= P\left(\bigcup_{j=0}^{k} X_1 = j, \ X_2 = k - j\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} P(X_1 = j, \ X_2 = k - j) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} P(X_1 = j) \, P(X_2 = k - j) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_1^j}{j!} \, e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{k-j}}{(k-j)!} =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda_1^j \lambda_2^{k-j} =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2)^k \Rightarrow X \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2).$$

$\square$