Svolgimento Traccia ② Secondo Appello 26/06/20

n°1 $X \sim P(\lambda)$, $Y \sim P(\lambda)$, $Z \sim P(\lambda)$ indipendenti.

a) La funzione di probabilità condizionata di X dato $X+Y=n$ è:

$$\forall k \geq 0: \; p_{X|X+Y}(k,n) = P(X=k \mid X+Y=n) \underset{\substack{\text{di}\\ \text{prob.}\\ \text{condizionata}}}{\overset{\text{def}}{=}} \frac{P(X=k,\ X+Y=n)}{P(X+Y=n)};$$

$$P(X=k,\ X+Y=n) = P(X=k,\ k+Y=n) = P(X=k,\ Y=n-k) =$$

$$\underset{\text{indipendenti}}{\overset{X \text{ e } Y}{=}} P(X=k)\,P(Y=n-k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-2\lambda}\frac{\lambda^n}{k!(n-k)!}$$

[RICORDO: $P(X=k) = \begin{cases} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} & \text{se } k \geq 0 \\ 0 & \text{se } k < 0 \end{cases}$] per ogni $k \geq 0$ e $n > k$.

Quindi $p_{X|X+Y}(k,n) = P(X=k \mid X+Y=n) =$

$$= \underbrace{\frac{e^{-2\lambda}\dfrac{\lambda^n}{k!(n-k)!}}{e^{-2\lambda}\dfrac{(2\lambda)^n}{n!}}} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{2^n} = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}$$

perché $X+Y \sim P(2\lambda)$ è la somma di due v.a. di Poisson indipendenti ciascuna di parametro λ.

La legge condizionale di X dato $X+Y=n$ è una legge binomiale $b(n, \frac{1}{2})$

Il valore atteso di X dato $X+Y=n$ è quindi:

$$E(X \mid X+Y=n) = n \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{n}{2}}$$

[Ricorda: se $T \sim b(n,p)$ allora $E(T) = np$]

b) $\operatorname{cov}(X,Y) := E\big[(X - E(X))(Y - E(Y))\big]$ se

$E(X) < +\infty$ e $E(Y) < +\infty$;

$$\operatorname{cov}(X,Y) \overset{\text{PROPOSIZIONE}}{=\!=} E(XY) - E(X)E(Y)$$ se $E(X) < +\infty$ e $E(Y) < +\infty$

$$\operatorname{cov}(A+B, C) = E((A+B)C) - E(A+B)E(C) =$$

$$= E(AC + BC) - E(A+B)E(C) =$$

$$= E(AC) + E(BC) - E(A)E(C) - E(B)E(C) =$$

$$= \underbrace{E(AC) - E(A)E(C)} + \underbrace{E(BC) - E(B)E(C)} =$$

$$= \operatorname{cov}(A,C) + \operatorname{cov}(B,C) \quad \square$$

c) $cov(X+Y, X+Z) = cov(X,X) + cov(X,Z) + cov(Y,X) + cov(Y,Z)$;

$cov(X,Z) = 0 = cov(Y,X) = cov(Y,Z)$ [v.a indipendenti]

Quindi $cov(X+Y, X+Z) = cov(X,X) = V(X) = \lambda$

$\boxed{n°2}$

	STIPENDIO					
	27-29	29-31	31-33	33-35	≥35	TOT
GR. 1	6	11	16	14	13	60
GR. 2	5	9	8	6	2	30
TOT	11	20	24	20	15	90

$\alpha = 0.05$ $\qquad$ $n = 90$

$X :=$ v.a. che descrive la classe di stipendio

$Y :=$ v.a. che descrive il gruppo

$r = 5 \qquad j = 1, \dots, 5 \qquad X = (X_1, \dots, X_5)$

$s = 2 \qquad k = 1, 2 \qquad Y = (Y_1, Y_2)$

$$D_0 = \sum_{\substack{j=1,\dots,5 \\ k=1,2}} \frac{\left(N_{jk} - \frac{N_{j\cdot} N_{\cdot k}}{n}\right)^2}{\frac{N_{j\cdot} N_{\cdot k}}{n}} =$$

$$= \frac{\left(6 - \frac{11 \times 60}{90}\right)^2}{\frac{11 \times 60}{90}} + \frac{\left(5 - \frac{11 \times 30}{90}\right)^2}{\frac{11 \times 30}{90}} +$$

$$+ \frac{\left(11 - \frac{20 \cdot 60}{90}\right)^2}{\frac{20 \times 60}{90}} + \frac{\left(9 - \frac{20 \times 30}{90}\right)^2}{\frac{20 \times 30}{90}}$$

$$+ \frac{\left(16 - \frac{24 \times 60}{90}\right)^2}{\frac{24 \times 60}{90}} + \frac{\left(8 - \frac{24 \times 30}{90}\right)^2}{\frac{24 \times 30}{30}}$$

$$+ \frac{\left(14 - \frac{20 \times 60}{90}\right)^2}{\frac{20 \times 60}{90}} + \frac{\left(6 - \frac{20 \times 30}{90}\right)^2}{\frac{20 \times 30}{90}}$$

$$+ \frac{\left(13 - \frac{15 \times 60}{90}\right)^2}{\frac{15 \times 60}{90}} + \frac{\left(2 - \frac{15 \times 30}{90}\right)^2}{\frac{15 \times 30}{90}} =$$

$$= 0.2425 + 0.4848 + 0.4083 + 0.8167 +$$

$$+ 0 + 0 + 0.03333 + 0.0667 + 0.9 + 1.8 =$$

$$= 4.752.$$

$$\begin{cases} \text{Se } D_0 \leq \chi^2_{1-\alpha, (2-1)(5-1)} & \text{si accetta } H_0 \\ \text{Se } D_0 > \chi^2_{1-\alpha, (2-1)(5-1)} & \text{si rifiuta } H_0 \end{cases}$$

$$\chi^2_{1-0{,}05,4} = \chi^2_{0.95,4} = 9.48773$$

Poiché $4.752 < 9.48773$ piaccetto H_0, quindi il gruppo e lo stipendio sono indipendenti.

$\boxed{n^\circ 3}$ **PROPOSIZIONE**: (Disuguaglianza di Markov)

Se X è v.a. che non è mai negativa, allora per ogni $a>0$:

$$\boxed{P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}}$$

DIM: Supponiamo X v.a. assolut continua con pdf f

$$E(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^{\infty} x\, f(x)\, dx =$$

$$= \underbrace{\int_0^a x f(x)\, dx}_{\geq 0} + \int_a^{\infty} x\, f(x)\, dx \geq \int_a^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$\geq \int_a^{\infty} a\, f(x)\, dx = a \int_a^{\infty} f(x)\, dx = a\, P(X \geq a)$$

Quindi $\quad \frac{E(X)}{a} \geq P(X \geq a) \quad \square$