

第 108 學年度清華大學普通物理實驗(一)

☐預報 或 ☒結報 課程編號： 10810PHYS101010

實驗名稱： 轉動慣量測量及角動量守恆實驗

系 級： 電機資訊學院學士班 1 年級 組 別： 13

學 號： 108060018 姓 名： 葉承泓

組 員： 陳竑廷

實驗日期： 108 年 11 月 20 日 補作日期： 年 月 日

◎ 以下為助教記錄區

預報繳交日期	報告成績	助教簽名欄
結報繳交日期		
報告缺失紀錄		

六、實驗結果與分析

(一)實驗 A—質點式剛體之轉動慣量測量：

1. 測量旋轉平臺(轉動平臺)以「通過中心(質心)且垂直平臺」的轉軸旋轉時的轉動慣量 I_0

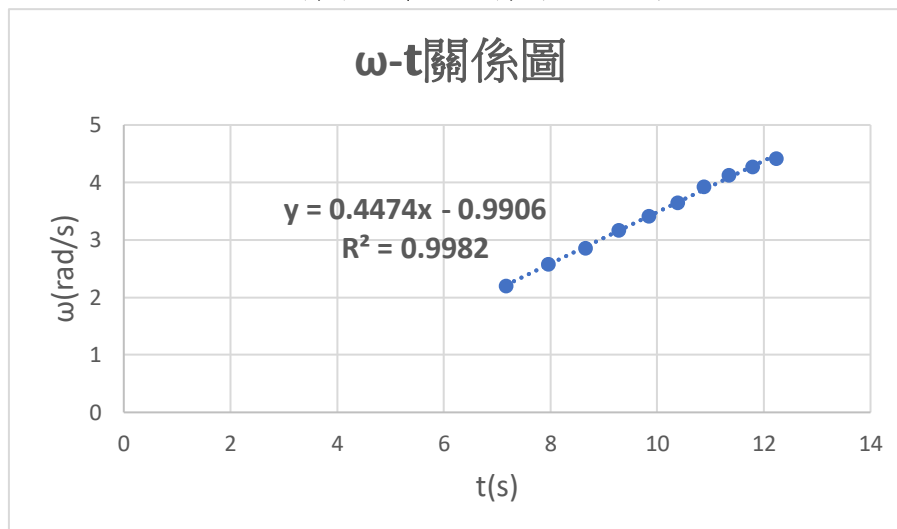
表 1 旋轉平臺的轉動慣量 I_0

輪幅半徑長度測量值 $r \doteq 0.015 \text{ m}$

懸掛物體 之質量 $m(\text{kg})$	Arduino 原始測量數據				Arduino 測量數據之導出量得出過程	
	$t_0(\text{ms})$	$t_{\text{末}}(\text{ms})$	$f(1/\text{s})$	$T(\text{s})$	平均 $t = \frac{(t_{\text{末}}+t_0)}{2} \times \frac{1}{1000}(\text{s})$	$\omega = 2\pi f(\text{rad/s})$
0.04935	7031	7316	0.351	2.85	7.17	2.21
	7837	8081	0.41	2.44	7.96	2.58
	8542	8762	0.455	2.2	8.65	2.86
	9181	9379	0.505	1.98	9.28	3.17
	9759	9943	0.543	1.84	9.85	3.41
	10298	10470	0.581	1.72	10.38	3.65
	10802	10962	0.625	1.6	10.88	3.93
	11273	11425	0.658	1.52	11.35	4.13
	11722	11869	0.68	1.47	11.80	4.27
	12158	12300	0.704	1.42	12.23	4.42

由 ω - t 關係圖斜率所得到的角加速度 $\alpha(\text{rad/s}^2)$	輪幅外緣的切線加速度(即為懸掛物體落下之直線加速度) $a=\alpha r(\text{m/s}^2)$	棉線張力對輪幅(輪軸)所施的力矩量值 $\tau = \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{T} = rT = r(mg - ma)$ ($\text{kg} \times \text{m}^2/\text{s}^2$)	轉動慣量測量值 $I_{\text{實驗(平臺)}} = \frac{\tau}{\alpha}$ ($\text{kg} \times \text{m}^2$)
0.4474	0.0067	0.0072	0.016

圖 1 旋轉平臺單獨旋轉時之 ω - t 關係圖



數據分析：

1. 利用游標尺測量輪幅的直徑，所得之長度再除以 2 即可得到其半徑長度，紀錄在表 1 中
2. 用電子天平測量懸掛物體(砝碼 3 片+砝碼架)的質量 m ，紀錄在表 1 中
3. 將實驗器材架設好，綿線綑綁於輪軸上，一端綁上懸掛物體，另一端不能緊密纏繞，而是要能很順暢地放線
4. 將 Arduino 偵測儀連接至筆記型電腦，開啟 CoolTerm 軟體，收集偵測到的數據。
5. 將收集到的數據匯入 Excel 進行資料分析，其中第一行的資料為 t_0 (單位：ms)；第二行的資料為 $t_{末}$ (單位：ms)；第三行的資料為 f (單位：1/s)；第三行的資料為 T (單位：s)，如表 1 所示

6. 接著算出各時間區間(區段)的平均時間點 $t = \frac{(t_{末} + t_0)}{2} \text{ ms} = \frac{(t_{末} + t_0)}{2} \times \frac{1}{1000} \text{ s}$ (來代表此段時間)

7. 由 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ 可得出各時間區間的平均 ω 值

8. 理論推導過程：對於懸掛物體而言，其受到向下的重力 mg 以及繩子所施予、方向向上的張力 T ，假設其加速度量值為 a (方向朝下方)，則 $mg - T = ma \Rightarrow T = mg - ma$ 。而繩子對輪軸所造成的力矩量值為 $\tau = r \times T \Rightarrow \tau = r \times (mg - ma)$ ，又因為 $\tau = I \times \alpha$ ，故 $\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{r \times (mg - ma)}{I}$ 。由於懸掛物體做等加速度運動，故 a 為定值，而因為旋轉平臺所繞著旋轉的轉軸在此次實驗中固定(為「通過中心(質心)且垂直平臺的轉軸」)，不隨時間 t 而變動，故 I 亦為定值。由此可知 α 為定值，不隨時間改變，所以旋轉平臺作等角加速度運動，由於 $\omega(t)$ 對 t 作微分所得到的值即為 $\alpha(t)$ ，故 α 為 $\omega(t)$ 圖形的斜率，又 α 為定值，可得知 ω - t 關係圖為一斜直線

9. 畫出 ω - t 關係圖(如圖 1)，畫出其回歸直線並求得直線斜率，此值即為 α 的實驗值
10. 利用切線加速度 $a = \alpha r$ 可得出 a 值，記錄此值在表 1 中，此 a 值即為懸掛物體的加

速度量值(因為綿線連接著懸掛物體與輪軸，且棉線視為非彈性繩，故若視懸掛物體、棉線和輪軸外緣(與棉線接觸)之點為一個系統，則其加速度量值皆相同(在此假設為 a)

11. 由 $\tau = r \times (mg - ma)$ 可求得 τ 值，將其記錄於表 1 中

12. 再經由 $\tau = I \times \alpha \Rightarrow I = \frac{\tau}{\alpha}$ 即可得到旋轉平臺的 I 測量值

2. 改變質點式剛體的旋轉半徑 R (固定其質量 M 以及懸掛之物體質量 m)：
測量角速度 ω 與時間 t 之間的關係

表 2 改變質點式剛體的旋轉半徑 R

輪幅半徑長度測量值 $r \doteq 0.015 \text{ m}$

質點式剛體之質量 $M \doteq 0.3 \text{ kg}$

懸掛物體之質量 $m \doteq 0.04935 \text{ kg}$

第一次實驗						
質點式剛體的旋轉半徑 $R(\text{m})$	Arduino 原始測量數據				Arduino 測量數據之導出量得出過程	
	$t_0(\text{ms})$	$t_{\text{末}}(\text{ms})$	$f(1/\text{s})$	$T(\text{s})$	平均 $t = \frac{(t_{\text{末}} + t_0)}{2} \times \frac{1}{1000}(\text{s})$	$\omega = 2\pi f(\text{rad/s})$
0.2275	12806	13106	0.333	3	12.96	2.09
	13674	13945	0.369	2.71	13.81	2.32
	14470	14724	0.394	2.54	14.60	2.48
	15218	15458	0.417	2.4	15.34	2.62
	15923	16148	0.444	2.25	16.04	2.79
	16586	16800	0.467	2.14	16.69	2.93
	17220	17427	0.483	2.07	17.32	3.03
	17829	18027	0.505	1.98	17.93	3.17

由 ω - t 關係圖斜率所得到的角加速度 $\alpha(\text{rad/s}^2)$	輪幅外緣的切線加速度 (即為懸掛物體落下之直線加速度) $a=\alpha r(\text{m/s}^2)$	棉線張力對輪幅(輪軸)所施的力矩量值 $\tau = \vec{r} \times \vec{T} = rT = r(mg - ma)$ ($\text{kg} \times \text{m}^2/\text{s}^2$)
0.2142	0.0032	0.0073

轉動慣量測量值 $I_{\text{實驗(平臺+剛體)}} = \frac{\tau}{\alpha}$ ($\text{kg} \times \text{m}^2$)	轉動慣量測量值 $I_{\text{實驗(剛體)}} = I_{\text{實驗(平臺+剛體)}} - I_{\text{實驗(平臺)}}$ ($\text{kg} \times \text{m}^2$)	轉動慣量理論值 $I_{\text{理論(剛體)}} = MR^2$ ($\text{kg} \times \text{m}^2$)	轉動慣量 $I_{\text{剛體}}$ 誤差百分比(%)
0.034	0.018	0.016	13.69

第二次實驗						
質點式剛體的旋轉半徑 R(m)	Arduino 原始測量數據				Arduino 測量數據之導出量得出過程	
0.14	$t_0(\text{ms})$	$t_{\text{末}}(\text{ms})$	$f(1/\text{s})$	$T(\text{s})$	平均 $t = \frac{(t_{\text{末}} + t_0)}{2} \times \frac{1}{1000}(\text{s})$	$\omega = 2\pi f(\text{rad/s})$
	6713	7142	0.233	4.29	6.93	1.46
	7902	8244	0.292	3.42	8.07	1.83
	8871	9160	0.346	2.89	9.02	2.17
	9704	9961	0.389	2.57	9.83	2.44
	10452	10688	0.424	2.36	10.57	2.66
	11140	11357	0.461	2.17	11.25	2.90
	11773	11976	0.493	2.03	11.87	3.10
	12366	12557	0.524	1.91	12.46	3.29
	12928	13109	0.552	1.81	13.02	3.47

由 ω - t 關係圖斜率所得到的角加速度 $\alpha(\text{rad/s}^2)$	輪幅外緣的切線加速度 (即為懸掛物體落下之直線加速度) $a=\alpha r(\text{m/s}^2)$	棉線張力對輪幅(輪軸)所施的力矩量值 $\tau = \vec{r} \times \vec{T} = rT = r(mg - ma)$ ($\text{kg} \times \text{m}^2/\text{s}^2$)
0.3293	0.0049	0.0073

轉動慣量測量值 $I_{\text{實驗(平臺+剛體)}} = \frac{\tau}{\alpha}$ ($\text{kg} \times \text{m}^2$)	轉動慣量測量值 $I_{\text{實驗(剛體)}} = I_{\text{實驗(平臺+剛體)}} - I_{\text{實驗(平臺)}}$ ($\text{kg} \times \text{m}^2$)	轉動慣量理論值 $I_{\text{理論(剛體)}} = MR^2$ ($\text{kg} \times \text{m}^2$)	轉動慣量 $I_{\text{剛體}}$ 誤差百分比(%)
0.022	0.0058	0.0059	-1.10

第三次實驗						
質點式剛體的旋轉半徑 $R(\text{m})$	Arduino 原始測量數據				Arduino 測量數據之導出量 得出過程	
0.07	$t_0(\text{ms})$	$t_{\text{末}}(\text{ms})$	$f(1/\text{s})$	$T(\text{s})$	平均 $t = \frac{(t_{\text{末}} + t_0)}{2} \times \frac{1}{1000}(\text{s})$	$\omega = 2\pi f(\text{rad/s})$
	13575	13874	0.334	2.99	13.72	2.10
	14423	14678	0.392	2.55	14.55	2.46
	15156	15382	0.442	2.26	15.27	2.78
	15812	16017	0.488	2.05	15.91	3.07
	16411	16601	0.526	1.9	16.51	3.30
	16967	17145	0.562	1.78	17.06	3.53
	17490	17662	0.581	1.72	17.58	3.65

由 ω - t 關係圖斜率所得到的角加速度 $\alpha(\text{rad/s}^2)$	輪幅外緣的切線加速度 (即為懸掛物體落下之直線加速度) $a=\alpha r(\text{m/s}^2)$	棉線張力對輪幅(輪軸)所施的力矩量值 $\tau = \vec{r} \times \vec{T} = rT = r(mg - ma)$ ($\text{kg} \times \text{m}^2/\text{s}^2$)
0.413	0.0062	0.0072

轉動慣量測量值 $I_{\text{實驗(平臺+剛體)}} = \frac{\tau}{\alpha}$ ($\text{kg} \times \text{m}^2$)	轉動慣量測量值 $I_{\text{實驗(剛體)}} = I_{\text{實驗(平臺+剛體)}} - I_{\text{實驗(平臺)}}$ ($\text{kg} \times \text{m}^2$)	轉動慣量理論值 $I_{\text{理論(剛體)}} = MR^2$ ($\text{kg} \times \text{m}^2$)	轉動慣量 $I_{\text{剛體}}$ 誤差百分比(%)
0.018	0.0014	0.0015	-8.12

圖 2 改變質點式剛體的旋轉半徑 R 之第一次實驗的 ω - t 關係圖

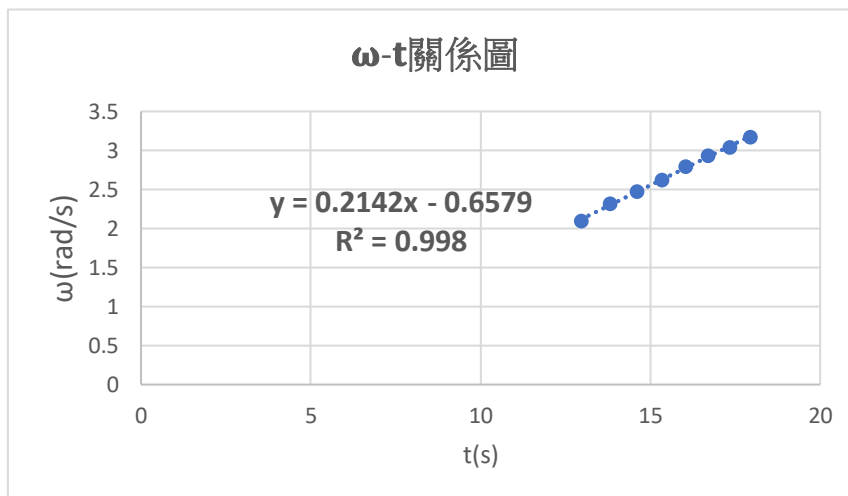


圖 3 改變質點式剛體的旋轉半徑 R 之第二次實驗的 ω -t關係圖

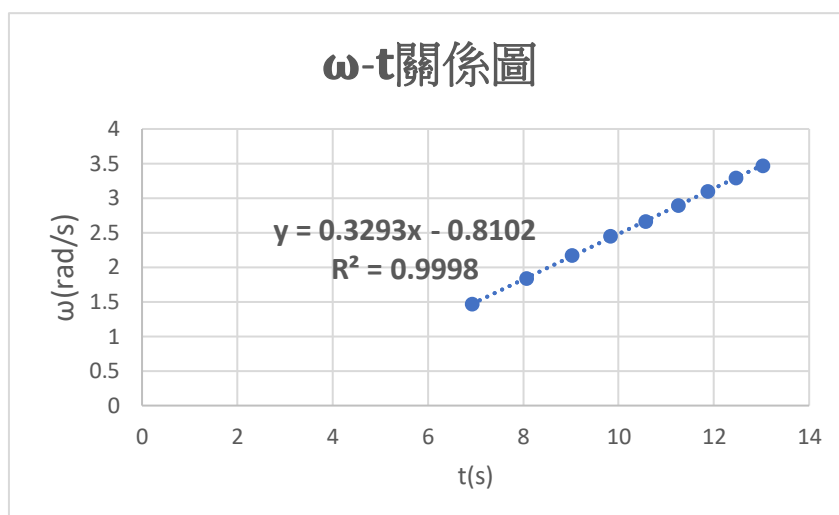
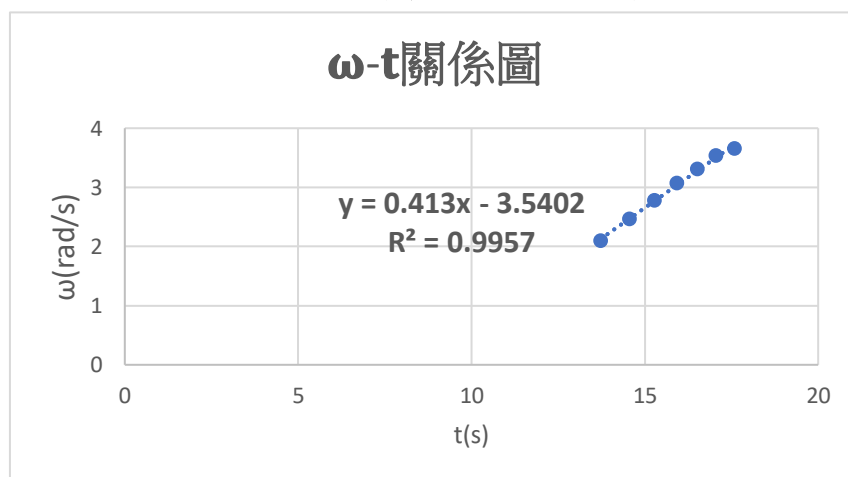


圖 4 改變質點式剛體的旋轉半徑 R 之第三次實驗的 ω -t關係圖



數據分析：

1. 利用游標尺測量輪幅的直徑，所得之長度再除以 2 即可得到其半徑長度，紀錄在表 2 中
2. 用電子天平測量質點式剛體的質量 M ，記錄在表 2 中
3. 用電子天平測量懸掛物體(砝碼 3 片+砝碼架)的質量 m ，記錄在表 2 中
4. 將實驗器材架設好，綿線綑綁於輪軸上，一端綁上懸掛物體，另一端不能緊密纏繞，而是要能很順暢地放線
5. 在旋轉平臺上讀取出此時質點式剛體所在位置距離轉軸的旋轉半徑 R ，記錄於表 2 中
6. 將 Arduino 偵測儀連接至筆記型電腦，開啟 CoolTerm 軟體，收集偵測到的數據。
7. 將收集到的數據匯入 Excel 進行資料分析，其中第一行的資料為 t_0 (單位：ms)；第二行的資料為 $t_{\text{末}}$ (單位：ms)；第三行的資料為 f (單位：1/s)；第三行的資料為 T (單位：s)，如表 2 所示
8. 接著算出各時間區間(區段)的平均時間點 $t = \frac{(t_{\text{末}} + t_0)}{2} \text{ ms} = \frac{(t_{\text{末}} + t_0)}{2} \times \frac{1}{1000} \text{ s}$ (來代表此段

時間)

9. 由 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ 可得出各時間區間的平均 ω 值
10. 理論推導過程：對於懸掛物體而言，其受到向下的重力 mg 以及繩子所施予、方向向上的張力 T ，假設其加速度量值為 a (方向朝下方)，則 $mg - T = ma \Rightarrow T = mg - ma$ 。而繩子對輪軸所造成的力矩量值為 $\tau = r \times T \Rightarrow \tau = r \times (mg - ma)$ ，又因為 $\tau = I \times \alpha$ ，故 $\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{r \times (mg - ma)}{I}$ 。由於懸掛物體做等加速度運動，故 a 為定值，而因為旋轉平臺與質點式剛體所繞著旋轉的轉軸在此次實驗中固定(為「通過中心(質心)且垂直平臺的轉軸」)，不隨時間 t 而變動，故 I 亦為定值。由此可知 α 為定值，不隨時間改變，所以旋轉平臺與質點式剛體作等角加速度運動，由於 $\omega(t)$ 對 t 作微分所得到的值即為 $\alpha(t)$ ，故 α 為 $\omega(t)$ 圖形的斜率，又 α 為定值，可得知 ω - t 關係圖為一斜直線
11. 畫出 ω - t 關係圖(如圖 2)，畫出其回歸直線並求得直線斜率，此值即為 α 的實驗值
12. 利用切線加速度 $a = \alpha r$ 可得出 a 值，記錄此值在表 2 中，此 a 值即為懸掛物體的加速度量值(因為綿線連接著懸掛物體與輪軸，且棉線視為非彈性繩，故若視懸掛物體、棉線和輪軸外緣(與棉線接觸)之點為一個系統，則其加速度量值皆相同(在此假設為 a))
13. 由 $\tau = r \times (mg - ma)$ 可求得 τ 值，將其記錄於表 2 中
14. 再經由 $\tau = I \times \alpha \Rightarrow I = \frac{\tau}{\alpha}$ 即可得到旋轉平臺與質點式剛體的 I 實驗值
15. 由 $I_{\text{實驗(剛體)}} = I_{\text{實驗(平臺+剛體)}} - I_{\text{實驗(平臺)}}$ 可得到質點式剛體的 I 實驗值
16. 因為此為質量為 M 的質點式剛體以轉動半徑 R 繞著旋轉軸旋轉，故其之 I 理論值為 MR^2
17. 如表 2， I 誤差 $= \frac{I_{\text{實驗值}} - I_{\text{理論值}}}{I_{\text{理論值}}} \times 100\%$
18. 改變質點式剛體的旋轉半徑 R ，重複步驟 4.~17.，共作出 3 組不同 R 的實驗數據

(二) 實驗 C—盤與環的轉動慣量測量：

1. 盤的轉動慣量($I_{\text{盤}}$)測量：測量角速度 ω 與時間 t 之間的關係

表 3 盤的轉動慣量 $I_{\text{盤}}$ 測量

輪幅半徑長度測量值 $r \doteq 0.015 \text{ m}$

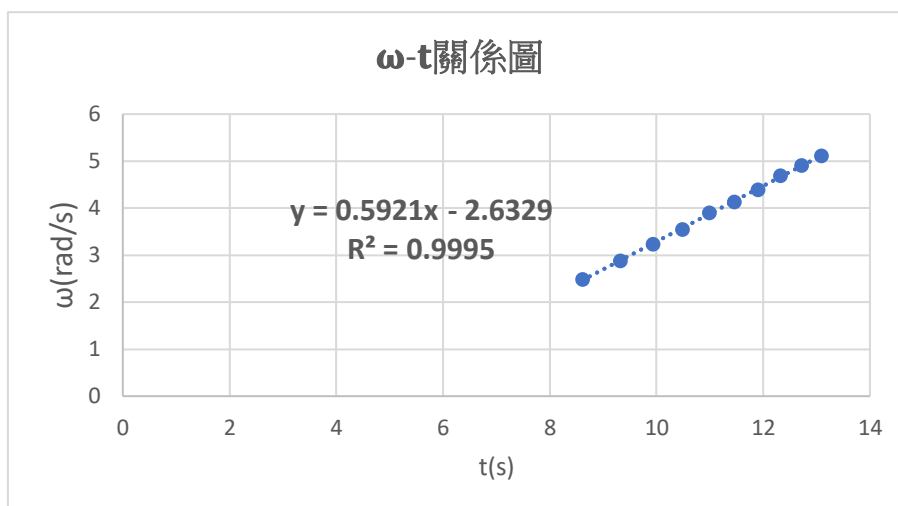
懸掛物體之質量 $m \doteq 0.04935 \text{ kg}$

盤之質量 $M(\text{kg})$	盤的 (旋轉) 半徑 $R(\text{m})$	Arduino 原始測量數據				Arduino 測量數據之導 出量得出過程	
1.45577	0.115	$t_0(\text{ms})$	$t_{\text{末}}(\text{ms})$	$f(1/\text{s})$	$T(\text{s})$	平均 $t = \frac{(t_{\text{末}} + t_0)}{2} \times \frac{1}{1000}(\text{s})$	$\omega = 2\pi f(\text{rad/s})$
		8484	8737	0.395	2.53	8.61	2.48
		9206	9424	0.459	2.18	9.32	2.88
		9835	10029	0.515	1.94	9.93	3.24
		10398	10575	0.565	1.77	10.49	3.55
		10911	11072	0.621	1.61	10.99	3.90
		11384	11536	0.658	1.52	11.46	4.13
		11830	11973	0.699	1.43	11.90	4.39
		12250	12384	0.746	1.34	12.32	4.69
		12646	12774	0.781	1.28	12.71	4.91
		13026	13149	0.813	1.23	13.09	5.11

由 ω - t 關係圖斜率所得 到的角加速度 $\alpha(\text{rad/s}^2)$	輪幅外緣的切線加速度 (即為懸掛物體落下之 直線加速度) $a = \alpha r(\text{m/s}^2)$	棉線張力對輪幅(輪軸) 所施的力矩量值 $\tau =$ $ \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{T} = rT =$ $r(mg - ma)$ ($\text{kg} \times \text{m}^2/\text{s}^2$)
0.5921	0.0089	0.0072

轉動慣量測量值 $I_{\text{實驗(盤)}} = \frac{\tau}{\alpha}$ ($\text{kg} \times \text{m}^2$)	轉動慣量理論值 $I_{\text{理論(盤)}} = \frac{1}{2}MR^2$ ($\text{kg} \times \text{m}^2$)	轉動慣量 $I_{\text{盤}}$ 誤差百分比 (%)
0.012	0.0096	27.16

圖 5 盤轉動的 ω - t 關係圖



數據分析：

1. 利用游標尺測量輪幅的直徑，所得之長度再除以 2 即可得到其半徑長度，紀錄在表 3 中
2. 用電子天平測量懸掛物體(砝碼 3 片+砝碼架)的質量 m ，紀錄在表 3 中
3. 用電子天平測量盤的質量 M ，記錄在表 3 中
4. 利用游標尺測量盤的直徑，所得之長度再除以 2 即可得到其半徑長度，紀錄在表 3 中，此半徑亦為其旋轉半徑
5. 將實驗器材架設好，將轉盤放上
6. 將 Arduino 偵測儀連接至筆記型電腦，開啟 CoolTerm 軟體，收集偵測到的數據。
7. 將收集到的數據匯入 Excel 進行資料分析，其中第一行的資料為 t_0 (單位：ms)；第二行的資料為 $t_{\text{末}}$ (單位：ms)；第三行的資料為 f (單位：1/s)；第三行的資料為 T (單位：s)，如表 3 所示

8. 接著算出各時間區間(區段)的平均時間點 $t = \frac{(t_{\text{末}} + t_0)}{2} \text{ ms} = \frac{(t_{\text{末}} + t_0)}{2} \times \frac{1}{1000} \text{ s}$ (來代表此段時間)

9. 由 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ 可得出各時間區間的平均 ω 值

10. 理論推導過程：對於懸掛物體而言，其受到向下的重力 mg 以及繩子所施予、方向向上的張力 T ，假設其加速度量值為 a (方向朝下方)，則 $mg - T = ma \Rightarrow T = mg - ma$ 。而繩子對輪軸所造成的力矩量值為 $\tau = r \times T \Rightarrow \tau = r \times (mg - ma)$ ，又因為 $\tau = I \times \alpha$ ，故 $\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{r \times (mg - ma)}{I}$ 。由於懸掛物體做等加速度運動，故 a 為定值，而因為盤所繞著旋轉的轉軸在此次實驗中固定(為「通過中心(質心)且垂直盤面的轉軸」)，不隨時間 t 而變動，故 I 亦為定值。由此可知 α 為定值，不隨時間改變，所以盤作等角加速度運動，由於 $\omega(t)$ 對 t 作微分所得到的值即為 $\alpha(t)$ ，故 α 為 $\omega(t)$ 圖形的斜率，又 α 為定值，可得知 ω - t 關係圖為一斜直線

11. 畫出 ω - t 關係圖(如圖 5)，畫出其回歸直線並求得直線斜率，此值即為 α 的實驗值
12. 利用切線加速度 $a=\alpha r$ 可得出 a 值，記錄此值在表 3 中，此 a 值即為懸掛物體的加速度量值(因為綿線連接著懸掛物體與輪軸，且綿線視為非彈性繩，故若視懸掛物體、綿線和輪軸外緣(與綿線接觸)之點為一個系統，則其加速度量值皆相同(在此假設為 a)
13. 由 $\tau = r \times (mg - ma)$ 可求得 τ 值，將其記錄於表 3 中
14. 再經由 $\tau = I \times \alpha \Rightarrow I = \frac{\tau}{\alpha}$ 即可得到盤的 I 實驗值
15. 因為此為質量為 M 、半徑 R 的盤繞著「通過中心(質心)且垂直盤面」的旋轉軸旋轉，故其之 I 理論值為 $\frac{1}{2}MR^2$
16. 如表 3， I 誤差 $=\frac{I_{\text{實驗值}}-I_{\text{理論值}}}{I_{\text{理論值}}} \times 100\%$

2. 環的轉動慣量($I_{\text{環}}$)測量：測量角速度 ω 與時間 t 之間的關係

表 4 環的轉動慣量 $I_{\text{環}}$ 測量

輪幅半徑長度測量值 $r \doteq 0.015 \text{ m}$

懸掛物體之質量 $m \doteq 0.04935 \text{ kg}$

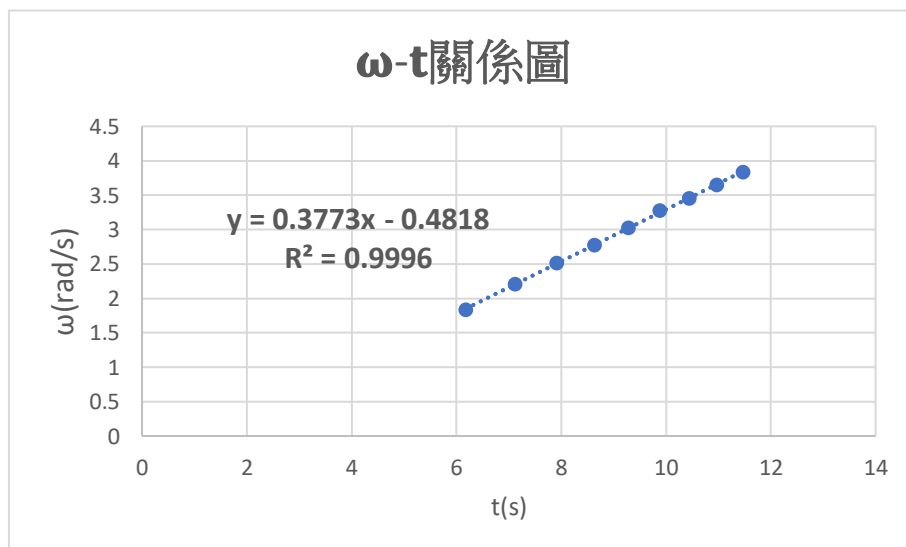
環之質量 $M(\text{kg})$	環的內(半)徑 $R_1(\text{m})$	環的外(半)徑 $R_2(\text{m})$
1.41732	0.058	0.066

Arduino 原始測量數據				Arduino 測量數據之導出量得出過程	
$t_0(\text{ms})$	$t_{\text{末}}(\text{ms})$	$f(1/\text{s})$	$T(\text{s})$	平均 $t = \frac{(t_{\text{末}}+t_0)}{2} \times \frac{1}{1000}(\text{s})$	$\omega = 2\pi f(\text{rad/s})$
6007	6350	0.292	3.43	6.18	1.83
6973	7258	0.351	2.85	7.12	2.21
7788	8038	0.4	2.5	7.91	2.51
8513	8740	0.441	2.27	8.63	2.77
9174	9382	0.481	2.08	9.28	3.02
9781	9973	0.521	1.92	9.88	3.27
10345	10527	0.549	1.82	10.44	3.45
10881	11053	0.581	1.72	10.97	3.65
11388	11552	0.61	1.64	11.47	3.83

由 ω - t 關係圖斜率所得到的角加速度 $\alpha(\text{rad/s}^2)$	輪幅外緣的切線加速度 (即為懸掛物體落下之直線加速度) $a=\alpha r(\text{m/s}^2)$	棉線張力對輪幅(輪軸)所施的力矩量值 $\tau = \vec{r} \times \vec{T} = rT = r(mg - ma)$ ($\text{kg} \times \text{m}^2/\text{s}^2$)
0.3773	0.0057	0.0073

轉動慣量測量值 $I_{\text{實驗(盤+環)}} = \frac{\tau}{\alpha}$ ($\text{kg} \times \text{m}^2$)	轉動慣量測量值 $I_{\text{實驗(環)}} = I_{\text{實驗(盤+環)}} - I_{\text{實驗(盤)}}$ ($\text{kg} \times \text{m}^2$)	轉動慣量理論值 $I_{\text{理論(環)}} = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$ ($\text{kg} \times \text{m}^2$)	轉動慣量 $I_{\text{環}}$ 誤差百分比(%)
0.019	0.0070	0.0055	27.50

圖 6 環轉動的 ω - t 關係圖



數據分析：

1. 利用游標尺測量輪幅的直徑，所得之長度再除以 2 即可得到其半徑長度，紀錄在表 4 中
2. 用電子天平測量懸掛物體(砝碼 3 片+砝碼架)的質量 m ，紀錄在表 4 中
3. 用電子天平測量環的質量 M ，記錄在表 4 中
4. 利用游標尺測量環的內(半)徑及外(半)徑長度，紀錄在表 4 中
5. 將實驗器材架設好，將環放置於轉盤上，並將環及轉盤放置於輪軸上
6. 將 Arduino 偵測儀連接至筆記型電腦，開啟 CoolTerm 軟體，收集偵測到的數據。

7. 將收集到的數據匯入 Excel 進行資料分析，其中第一行的資料為 t_0 (單位：ms)；第二行的資料為 $t_{\text{末}}$ (單位：ms)；第三行的資料為 f (單位：1/s)；第三行的資料為 T (單位：s)，如表 4 所示
8. 接著算出各時間區間(區段)的平均時間點 $t = \frac{(t_{\text{末}} + t_0)}{2} \text{ ms} = \frac{(t_{\text{末}} + t_0)}{2} \times \frac{1}{1000} \text{ s}$ (來代表此段時間)
9. 由 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ 可得出各時間區間的平均 ω 值
10. 理論推導過程：對於懸掛物體而言，其受到向下的重力 mg 以及繩子所施予、方向向上的張力 T ，假設其加速度量值為 a (方向朝下方)，則 $mg - T = ma \Rightarrow T = mg - ma$ 。而繩子對輪軸所造成的力矩量值為 $\tau = r \times T \Rightarrow \tau = r \times (mg - ma)$ ，又因為 $\tau = I \times \alpha$ ，故 $\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{r \times (mg - ma)}{I}$ 。由於懸掛物體做等加速度運動，故 a 為定值，而因為盤與環所繞著旋轉的轉軸在此次實驗中固定(為「通過中心(質心)且垂直盤面的轉軸」)，不隨時間 t 而變動，故 I 亦為定值。由此可知 α 為定值，不隨時間改變，所以盤與環作等角加速度運動，由於 $\omega(t)$ 對 t 作微分所得到的值即為 $\alpha(t)$ ，故 α 為 $\omega(t)$ 圖形的斜率，又 α 為定值，可得知 ω - t 關係圖為一斜直線
11. 畫出 ω - t 關係圖(如圖 6)，畫出其回歸直線並求得直線斜率，此值即為 α 的實驗值
12. 利用切線加速度 $a = \alpha r$ 可得出 a 值，記錄此值在表 4 中，此 a 值即為懸掛物體的加速度量值(因為綿線連接著懸掛物體與輪軸，且綿線視為非彈性繩，故若視懸掛物體、綿線和輪軸外緣(與綿線接觸)之點為一個系統，則其加速度量值皆相同(在此假設為 a))
13. 由 $\tau = r \times (mg - ma)$ 可求得 τ 值，將其記錄於表 4 中
14. 再經由 $\tau = I \times \alpha \Rightarrow I = \frac{\tau}{\alpha}$ 即可得到盤+環的 I 實驗值
15. 由 $I_{\text{實驗(環)}} = I_{\text{實驗(盤+環)}} - I_{\text{實驗(盤)}}$ 可得到環的 I 實驗值
16. 因為此為質量為 M 、內徑 R_1 、外徑 R_2 的環繞著「通過中心(質心)且垂直環面」的旋轉軸旋轉，故其之 I 理論值為 $\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$
17. 如表 4， I 誤差 $= \frac{I_{\text{實驗值}} - I_{\text{理論值}}}{I_{\text{理論值}}} \times 100\%$

(三) 實驗 E—角動量守恆：

表 5 改變轉動慣量下的角動量守恆

Arduino 的 ω_i 原始測量數據 (rad/s)		ω_i 平 均值 (rad/s)	Arduino 的 ω_f 原始測量數 據(rad/s)		ω_f 平均 值(實驗 值) (rad/s)
12.82398121	12.56637061	12.54	6.477964052	6.408849013	6.35
12.56637061	12.56637061		6.54707909	6.34601716	
12.82398121	12.32132639		6.477964052	6.34601716	
12.82398121	12.56637061		6.477964052	6.34601716	
12.82398121	12.56637061		6.477964052	6.157521601	
12.32132639	12.56637061		6.34601716	6.220353454	
12.56637061	12.32132639		6.34601716	6.157521601	
12.56637061	12.56637061		6.34601716	6.100972933	
12.56637061	12.08256535				
12.56637061	12.56637061				
12.56637061	12.56637061				
12.56637061	12.32132639				
12.56637061	12.32132639				
12.56637061					

表 6 角動量守恆的 ω 實驗誤差

角速度 ω_f 測量值 (rad/s)	角速度理論值 $\omega_f = \frac{M_1 R^2}{M_1 R^2 + M_2 (R_1^2 + R_2^2)} \omega_i$ (rad/s)	ω_f 誤差(%)
6.35	8.00	-20.61

數據分析：

1. 將實驗器材架設好，將轉盤放置於輪軸上(環先放在旁邊預備)
2. 將 Arduino 偵測儀連接至筆記型電腦，開啟 CoolTerm 軟體
3. 用手轉動盤(造成盤有初角速度)，過一段時間後放上環，收集偵測到的數據。
4. 將收集到的數據匯入 Excel 進行資料分析，其中第一行的資料為 t_0 (單位：ms)；第二行的資料為 $t_{末}$ (單位：ms)；第三行的資料為 f (單位：1/s)；第三行的資料為 T (單位：s)
5. 由 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ 可得出各時間區間的平均 ω 值
6. 取前、後兩段值較接近者(中間的 ω 值劇烈變化部分不取值)，分別取其平均值，作為 ω_i 與 ω_f 的實驗值
7. 由於整個盤+環所成的系統在整個轉動過程中(環被放上盤之前後)所受到之淨力矩為

$\vec{0}$ (而系統內有內力矩，但環的力矩等於盤反向的力矩，故系統內也並沒有淨力矩)，故由角動量守恆定律， $I_i\omega_i = I_f\omega_f$ ，其中 I_i 表示放置環前的物體(即盤)之轉動慣量； ω_i 表示放置環前的物體(即盤)之旋轉角速度； I_f 表示放置環後的物體(即盤+環所成的整個系統)之轉動慣量；而 ω_f 則表示放置環後的物體(即盤+環所成的整個系統)之旋轉角速度。

$$8. \text{ 理論上：因為 } \begin{cases} I_i\omega_i = I_f\omega_f \\ I_i = I_{\text{盤}} = \frac{1}{2}M_1R^2 \\ I_f = I_{\text{盤}} + I_{\text{環}} = \frac{1}{2}M_1R^2 + \frac{1}{2}M_2(R_1^2 + R_2^2) \end{cases} \Rightarrow \omega_f = \frac{M_1R^2}{M_1R^2 + M_2(R_1^2 + R_2^2)} \omega_i ,$$

可得到 ω_f 的理論值，記錄在表 6 中

$$9. \text{ 如表 6, } \omega_f \text{ 誤差} = \frac{\omega_{f \text{ 實驗值}} - \omega_{f \text{ 理論值}}}{\omega_{f \text{ 理論值}}} \times 100\%$$

七、問題與討論

Q₁：此實驗中可能引起誤差的因素有哪些？

A₁：1. 儀器測量精確度：

- (1) 在以電子天平測量 m 及 M 時，儀器精確度只到 0.1 公克(小數點後 4 位)的程度，但是實際數值可能超過小數點後 4 位，因此也會導致誤差
- (2) 用游標尺測量輪軸半徑、盤的半徑與環的內徑、外徑長度時，因為其精確度只到 0.05mm 的層級，但是實際數值可能超過小數點後 3 位，也是造成誤差的原因之一
- (3) 以 Arduino 控制盒測量 T 時，螢幕上所顯示(偵測到的)的數值只到小數點後 2 位，也會造成測量上的誤差

2. 觀測記錄者觀測之精確度(人為判斷誤差)：

- (1) 在確認游標尺零點及其他刻度是否已對齊實際物體的位置時，有人為觀測上的誤差；而讀取游標尺刻度時，估計值也會因人而異，而與實際值有差距。
 - (2) 在選擇從 CoolTerm 軟體截取某部分數值時，可能無法完整反映出真實情形；而取值的範圍會因人而異，且與實際值有落差，導致理論與真實測量值不同的情況
 - (3) 儀器裝置並沒有安裝得很精確，例如：A 型基座並無調整至恰好水平，而有稍微的偏移，這也會導致旋轉時並非在水平面上旋轉，而是與水平面之間有一個夾腳，這樣的旋轉就會受到重力的影響(若為水平面上旋轉時重力會被正向力恰好完全抵消)，而與理論值(假設其在水平面上旋轉)有誤差
3. 棉線與滑輪之間有摩擦力，使得真正造成力矩的張力量值並非 $mg-ma$ ，而是需要再減去(或加上，須看不同情況而定)此摩擦力的量，但理論值計算時我們卻直接用 $mg-ma$ 來計算力矩，因此與實際上有些微差距。而這也是導致 $\omega-t$ 關係圖之所以 y 軸截距不為 0 的原因(相關討論請見 Q₆)。

Q₂：在實驗 A 中，為什麼調水平時，要在轉動平臺鎖定一方塊剛體？

A₂：因為轉動平臺與輪軸之間實際上有摩擦力作用，而轉動平臺的轉軸兩側之質量相等(因為轉軸通過質心，故將整個轉動平臺的質量分成兩半)，所以兩側一樣重，很難

克服摩擦力轉動，但我們就是希望看它往哪個方向偏轉才能得知哪裡較低/高，若其不偏轉(因為摩擦力的作用)則我們會認為已達水平，但事實上卻並沒有。因此我們會在轉動平臺一側加上一個重物，使兩側質量不相同，因此能夠克服摩擦力使得重的那一側會明顯轉到其所能轉到的整個圓周的位置最低處，我們就可以知道並未達到水平，經過調整後若真正達到水平，那麼無論轉動平臺轉至何處(不一定要是「重物所在的那一側轉到其所能轉到的整個圓周的位置最低處」)，它都會保持平衡不轉動。

Q3：實驗 E 所得到的角速度數據是否與理論值相符？

A3：理論上應相符，因為整個盤+環所成的系統在整個轉動過程中(環被放上盤之前後)所受到之淨力矩為 $\vec{0}$ ，故角動量應守恆，(環被放上盤後之)末角速度應符合理論值，但由於當環被放到盤上時，兩者之間會碰撞而損失能量。當環剛被放到盤上的瞬間呈靜止狀態，接著盤轉速減少，環轉速上升，整個過程中角動量理論上應不變(而為定值)，但因為在盤與環到達轉速相同的時刻之前，它們的接觸面之間有相對運動，故有摩擦力做功(這個摩擦力做功會使得盤轉速減少，環轉速上升，以及一部份的熱能散失)，而這產生的熱能使得整個系統的能量(轉動動能)減少，但轉動慣量又不變(不論在何時刻皆為「通過中心(質心)且垂直盤面的轉軸」，並不隨時間改變)，因此角速度會下降，造成角動量實際上不守恆，測量出來的角速度數據也因此比理論值還小。

Q4：實驗 E 的碰撞過程中喪失多少百分比的轉動動能？計算之。

$$\text{Hint: \%K}_E \text{ Lost} = \frac{\frac{1}{2}I_i\omega_i^2 - \frac{1}{2}I_f\omega_f^2}{\frac{1}{2}I_i\omega_i^2}$$

$$\text{A4: 由公式可知: \%K}_E = \frac{\frac{1}{2}I_i\omega_i^2 - \frac{1}{2}I_f\omega_f^2}{\frac{1}{2}I_i\omega_i^2} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}M_1R^2\omega_i^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}M_1R^2 + \frac{1}{2}M_2(R_1^2 + R_2^2)\right]\omega_f^2}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}M_1R^2\omega_i^2} =$$

$$\frac{M_1R^2\omega_i^2 - [M_1R^2 + M_2(R_1^2 + R_2^2)]\omega_f^2}{M_1R^2\omega_i^2} \Rightarrow \omega_i \cong 12.54、\omega_f \cong 6.35、M_1 \cong 1.45577、M_2 \cong$$

1.41732、 $R \cong 0.115$ 、 $R_1 \cong 0.066$ 、 $R_2 \cong 0.058$ 帶入即可得到 $\%K_E$

Q5：比較 B 實驗部分(點質量的角動量守恆)與 E 實驗部分(角動量守恆)的異同。

A5：

(1) 相同之處：兩個實驗過程中物體(點質量 vs. 環及盤所成的系統)所受到的淨力矩皆為 $\vec{0}$ ，故角動量守恆，在改變(點質量的旋轉半徑 vs. 環及盤所成的系統的質量)前後的角動量保持定值

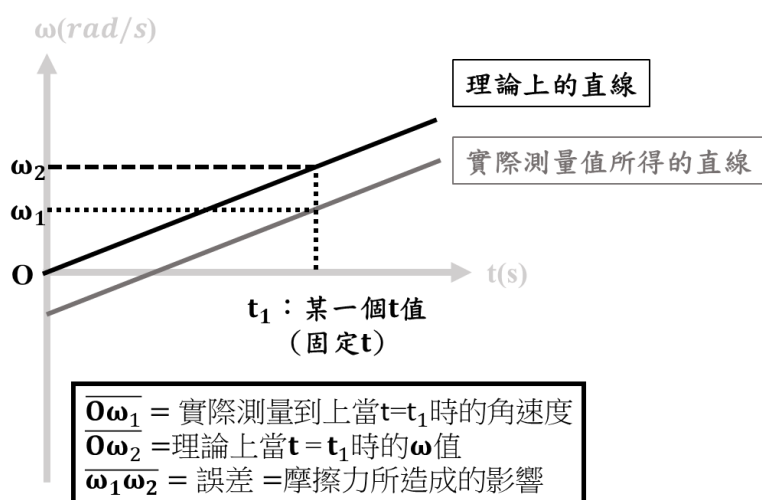
(2) 相異之處：B 實驗中是改變點質量的旋轉半徑，而質量不改變；E 實驗中則是改變旋轉物體的總質量(由只有盤的質量改變為盤+環的質量)，而盤的旋轉半徑不變。

Q6：理論上， ω - t 關係圖應成線性關係，故可以線性回歸分析數據。依據你的

實驗數據，請說明：所得到的線性回歸結果，其截距的物理意義。

A6：理論上當時間為 0 時， ω 的量值應亦為 0。一般而言滑輪所造成之摩擦力會與棉線運動方向反向，故理論上的張力 T 的量值會比實際我們測得的來得大，又因為 $\tau = r \times T$ ，其中 r 為定值，故當 T 變小時 τ 值也減少，又 $\tau = I \times \alpha$ ，其中 I 為定值(因為質量 M 與轉動半徑 R 都為定值，不隨時間而改變其值)使得角加速度 α 也減小，所以在某時刻 t (固定時間點 t)下，角速度的理論值會比實際測量值來的大，故直線會向下平移，造成 y 軸截距不為 0，而是一個負數。可想成是當時間點為 0 時(一剛開始)，重力正要開

始作用(使棉繩有向下拉動的趨勢)，而摩擦力就作用使得旋轉平臺有倒轉的傾向(因為摩擦力拉動棉線的方向與重力將棉線拉動的方向反向，因此若重力造成旋轉平臺順時針旋轉，則單看摩擦力的作用會使得旋轉平臺產生逆時針方向的旋轉)。



八、心得及建議

終於……我們終於提早離開實驗室了~~(而且竟然是在這個實驗!!)

帶著忐忑不安的心情，我走進實驗室，聽說這是前幾次實驗中的大魔王關。看到實驗器材紀錄簿上寫著 19:30、20:??、……，又聽說有人做到 10:00 多才離開，我的心更加慌張了。

幸好，看起來助教們也知道我們的害怕(可能也害怕自己會半夜才走出實驗室)，因此將 5 份子實驗縮減成 3 份，這讓我稍微安心了一點。不過即使安心了那麼一點點，我卻仍然無法細心處理每一個實驗數據，總是會漏東漏西的，可能也因為緊張而沒辦法靜下來仔細思考，造成我們的誤差超過了 100%，這明顯就是公式的某個地方代不對，結果後來發現根本就是我沒有減掉旋轉平臺的轉動慣量，難怪差那麼多!!可是就算誤差少了很多，卻還是滿大的，最後是在助教來一步一步仔細問我們，我也仔細地全盤思考過後，才忽然靈光乍現~我把 m 和 M 搞混了，又是一個令人愉快的誤差率作自由落體運動的時刻!!最後的誤差終於來到了 10% 上下，而經由我們的分工合作後——至少比之前幾次還要更分工合作了——先由我校正完 A 型基座，我的隊友先列出表格的內容，然後再由他負責操作實驗步驟，我來處理實驗數據。

我們這次有一個新的突破——我們決定利用「共用」的方式就不會發生之前「兩個人搶一臺電腦」既費時又沒效率的狀況了~~(雖然很早以前就想用了，不過又因為登入或網路等等問題而沒辦法用)，這是我們第一次用「共用」來加速實驗的進行，而看來成效還真的滿好的~我們竟然能夠在大約 4:15 就完成實驗的進行——而且是被稱為大魔王關卡的實驗——真是連我們自己都感到驚訝~~

(竟然會有這一天)我們在陽光的溫暖照映下，踏著輕快的步伐，走出實驗室~~在那個時刻，一切盡是那麼的美好，真想讓時間暫停，永遠停留在那美好時刻……。

然而，緊接著而來的是令人頭痛的結報還有更多的實驗……

(不過那天真的是令我滿驚訝的~我們竟然竟然有機會這麼早離開實驗室耶)

九、參考資料

1. 國立清華大學普通物理實驗室網站—實驗 5. 轉動慣量測量實驗 (Rorational Motion) • 網址：<http://www.phys.nthu.edu.tw/~gplab/exp005.html>
2. 轉動慣量測量及角動量守恆實驗講義 • 網址：
[http://www.phys.nthu.edu.tw/~gplab/file/05%20Rotational%20Motion/Rotation%20Motion%20\(TW\)-20141103.pdf](http://www.phys.nthu.edu.tw/~gplab/file/05%20Rotational%20Motion/Rotation%20Motion%20(TW)-20141103.pdf)