

第 108 學年度清華大學普通物理實驗(一)

☐預報 或 ☒結報 課程編號： 10810PHYS101010

實驗名稱： 簡諧運動 (Simple Harmonic Motion)

系 級：電機資訊學院學士班 1 年級 組 別： 13

學 號： 108060018 姓 名： 葉承泓

組 員： 陳竑廷

實驗日期： 108 年 12 月 18 日 補作日期： 年 月 日

◎ 以下為助教記錄區

| 預報繳交日期 | 報告成績 | 助教簽名欄 |
|--------|------|-------|
| | | |
| 結報繳交日期 | | |
| | | |
| 報告缺失紀錄 | | |

六、實驗結果與分析

(一)測量靜態彈性係數(static spring constant)及動態彈性係數(dynamic spring constant)

1. 測量靜態彈性係數 k_s

表 1 三種不同粗細程度的彈簧之靜態彈性係數 k_s

| | 彈簧原長 $x(m)$ | 彈簧質量 m_s (kg) | 懸掛於彈簧一端之砝碼(含砝碼架)質量 $m(kg)$ | 彈簧所受之外力 $F=mg(kg \times m/s^2)$ | 彈簧總長度 $L=x+\Delta x(m)$ | 彈簧伸長量 $\Delta x(m)$ | k_s 值(kg/s^2) |
|-----|----------------|-----------------------|-------------------------------|------------------------------------|----------------------------|------------------------|---------------------|
| 粗彈簧 | 0.08 | 0.01164 | 0.0075 | 0.0735 | 0.114 | 0.034 | 1.3348 |
| | | | 0.0575 | 0.5635 | 0.47 | 0.39 | |
| | | | 0.0675 | 0.6615 | 0.56 | 0.48 | |
| 中彈簧 | 0.10 | 0.01366 | 0.0575 | 0.5635 | 0.15 | 0.05 | 5.1531 |
| | | | 0.0675 | 0.6615 | 0.17 | 0.07 | |
| | | | 0.0775 | 0.7595 | 0.188 | 0.088 | |
| 細彈簧 | 0.10 | 0.0112 | 0.0575 | 0.5635 | 0.13 | 0.03 | 9.7674 |
| | | | 0.0675 | 0.6615 | 0.141 | 0.041 | |
| | | | 0.0775 | 0.7595 | 0.15 | 0.05 | |

圖 1 粗彈簧之 $F-\Delta x$ 關係圖

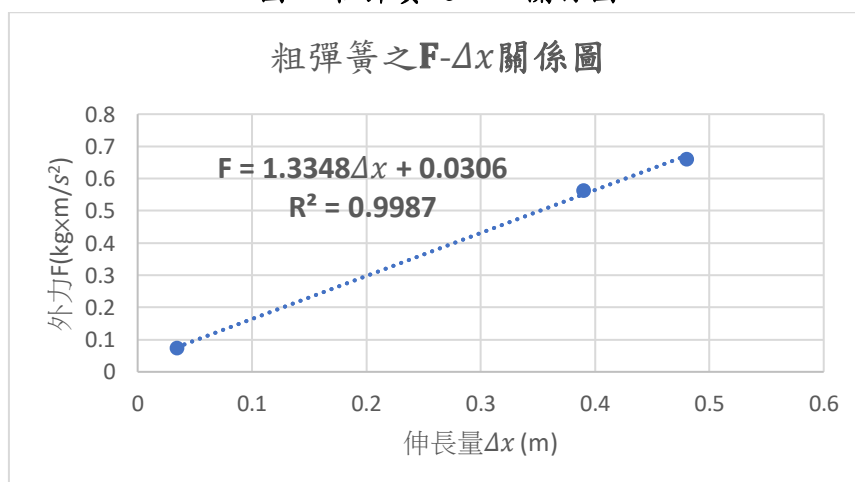


圖 2 中彈簧之F- Δx 關係圖

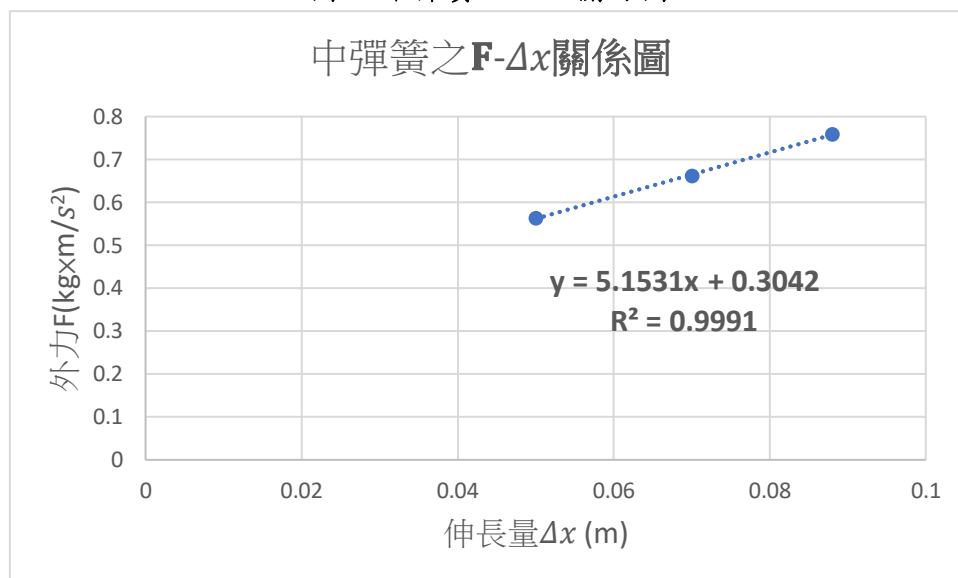
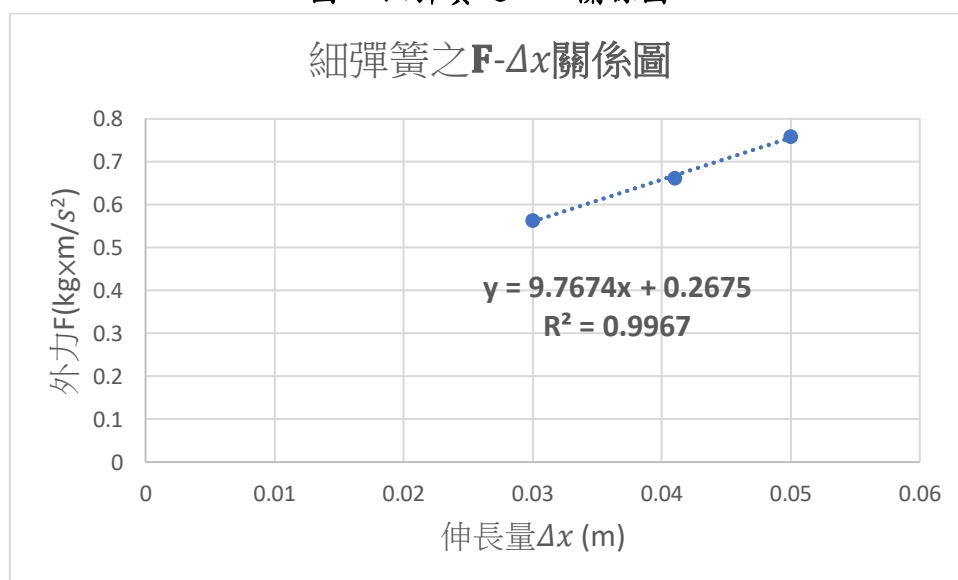


圖 3 細彈簧之F- Δx 關係圖



數據分析：

1. 利用長直鐵尺分別測量三種不同粗細程度的彈簧的原長度 x ，記錄在表 1 中
2. 利用電子天平分別測量三種不同粗細程度的彈簧的質量 m_s ，將測量結果記錄在表 1 中
3. 將適當質量(使得掛上這些砝碼(含砝碼架)後的粗彈簧不至於伸長到超過彈性限度而導致彈性疲乏)的砝碼(含砝碼架)掛在粗彈簧一端，而粗彈簧另一端則懸掛在某水平鐵架上。記錄下此時所懸掛的砝碼(含砝碼架)總質量 m 於表 1 中
4. 此時粗彈簧所受到的外力 F 即為砝碼(含砝碼架)的重量 mg (如表 1)
5. 利用長直鐵尺測量此時粗彈簧的總長度 L ，記錄在表 1 中
6. 因為彈簧之「原長度+伸長量=總長度」，所以可計算出伸長量 $\Delta x = L - x$ (如表 1 所示)
7. 改變掛在粗彈簧上的砝碼質量，重複步驟 3.~6.，共作 3 組不同質量的實驗
8. 由於彈簧的施力滿足虎克定律($F = -kx$ ，其中 F 表示彈簧所施予在物體上的力、 k 值

為彈力係(常)數、 x 為彈簧較原長度之伸長量)，故同一條彈簧在彈性疲乏前之 $F-\Delta x$ 關係圖應呈現一線性關係(通過原點之斜直線)

9. 畫出 $F-\Delta x$ 關係圖(如圖 1)，畫出其回歸直線並求得直線斜率，此值即為此條彈簧的靜態彈性係數 k_s
10. 將粗彈簧依次更換為中彈簧、細彈簧，分別重複實驗步驟 3.~9.，即可得到各個彈簧的 k_s 值

2. 測量動態彈性係數 k_d

表 2 三種不同粗細程度的彈簧之動態彈性係數 k_d

| | 彈簧原長 $x(m)$ | 彈簧質量 m_s (kg) | 懸掛於彈簧一端之砝碼(含砝碼架)質量 $m(kg)$ | 彈簧所受之外力 $F=mg(kg \times m/s^2)$ | 測量到的彈簧簡諧振動週期 $T(s)$ | k_d 值(kg/s^2) | k_d 平均值(kg/s^2) |
|-----|----------------|--------------------|-------------------------------|------------------------------------|---------------------|---------------------|-----------------------|
| 粗彈簧 | 0.08 | 0.01164 | 0.0575 | 0.06914 | 1.355 | 1.32 | 1.31 |
| | | | 0.0675 | 0.07914 | 1.452 | 1.34 | |
| | | | 0.0725 | 0.08414 | 1.538 | 1.27 | |
| 中彈簧 | 0.10 | 0.01366 | 0.0575 | 0.07116 | 0.631 | 6.15 | 5.77 |
| | | | 0.0675 | 0.08116 | 0.716 | 5.55 | |
| | | | 0.0875 | 0.10116 | 0.805 | 5.61 | |
| 細彈簧 | 0.10 | 0.0112 | 0.0575 | 0.0687 | 0.479 | 10.54 | 10.20 |
| | | | 0.0675 | 0.0787 | 0.538 | 9.72 | |
| | | | 0.0875 | 0.0987 | 0.59 | 10.35 | |

數據分析：

1. 利用長直鐵尺分別測量三種不同粗細程度的彈簧的原長度 x ，記錄在表 2 中
2. 利用電子天平分別測量三種不同粗細程度的彈簧的質量 m_s ，將測量結果記錄在表 2 中
3. 將適當質量(使得掛上這些砝碼(含砝碼架)後做簡諧運動時的粗彈簧不至於伸長到超過彈性限度而導致彈性疲乏)的砝碼(含砝碼架)掛在粗彈簧一端，而粗彈簧另一端則懸掛在某水平鐵架上。記錄下此時所懸掛的砝碼(含砝碼架)總質量 m 於表 2 中
4. 此時粗彈簧所受到的外力 F 即為砝碼(含砝碼架)的重量 mg (如表 2)
5. 將彈簧向下拉長(但不超過彈性限度)，放手使其做簡諧運動，同時將手機上的計時器軟體開始計時，測量其通過最高點(或最低點)連續 11 次之間的時間間隔(此即 10 倍的簡諧運動週期)，將此時間長除以十，即可得到此彈簧進行簡諧運動的振動週期 T ，將其記錄於表 2 中。

6. 由於當彈簧質量不可忽略時，其做簡諧運動的週期 T 可以表示為 $T = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{1}{3}m_s}{k_d}}$ ，

因此 $k_d = \frac{4\pi^2(m + \frac{1}{3}m_s)}{T^2}$ ，即可算出粗彈簧的動態彈性係數 k_d

7. 改變掛在粗彈簧上的砝碼質量，重複步驟 3.~6.，共作 3 組不同質量的實驗
8. 將步驟 7. 的三組實驗所得到之 k_d 值取算術平均數，將 k_d 平均值記錄在表 2 中，此即代表粗彈簧的動態彈性係數 k_d
9. 將粗彈簧依次更換為中彈簧、細彈簧，分別重複實驗步驟 3.~8.，即可得到各個彈簧的 k_d 值

(二) 週期 T 和動態彈性係數 k_d 之間的關係

圖 4 以粗彈簧進行簡諧運動之 x - t 關係圖

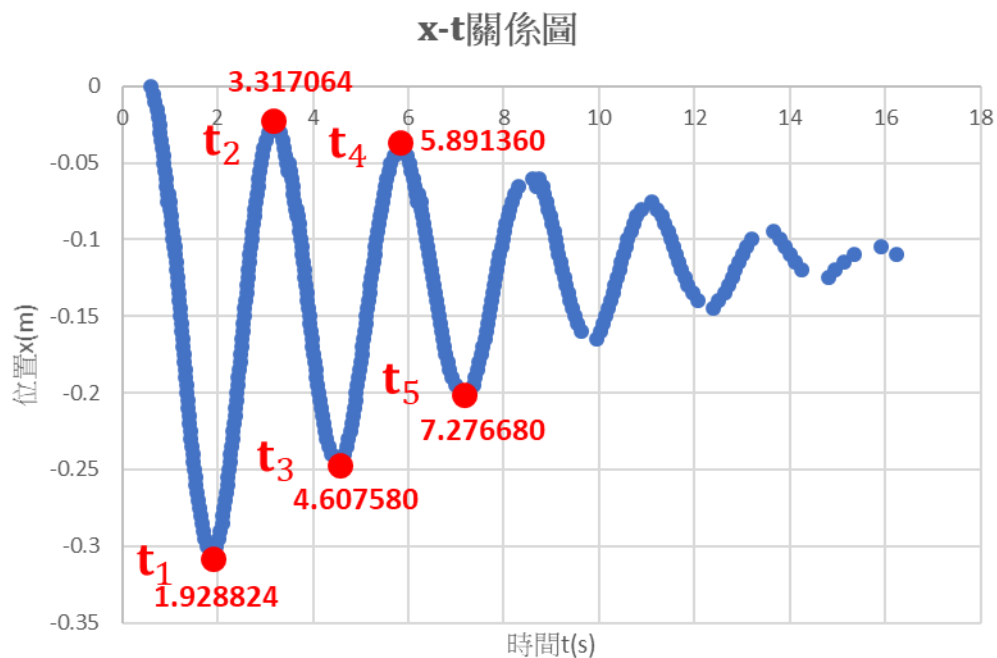


表 3 以粗彈簧進行簡諧運動之測量數據與比較

滑車質量 $M = 0.37652 \text{ kg}$

| | | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|---|-----------------------------|
| $t_1(\text{s})$ | $t_2(\text{s})$ | $t_3(\text{s})$ | $t_4(\text{s})$ | $t_5(\text{s})$ |
| 1.928824 | 3.317064 | 4.607580 | 5.891360 | 7.276680 |
| $T_1 = t_3 - t_1(\text{s})$ | $T_2 = t_5 - t_3(\text{s})$ | $T_3 = t_4 - t_2(\text{s})$ | 平均週期 $T=\frac{T_1+T_2+T_3}{3}(\text{s})(\text{實驗值})$ | 週期 T(理論值) 週期 T 誤差(%) |
| 2.678756 | 2.574296 | 2.669100 | 2.640717 | 2.381547 10.8824 |
| ln T(實驗值) | | | ln k_d | |
| 0.971051 | | | 0.963469 | |

圖 5 以中彈簧進行簡諧運動之x-t關係圖

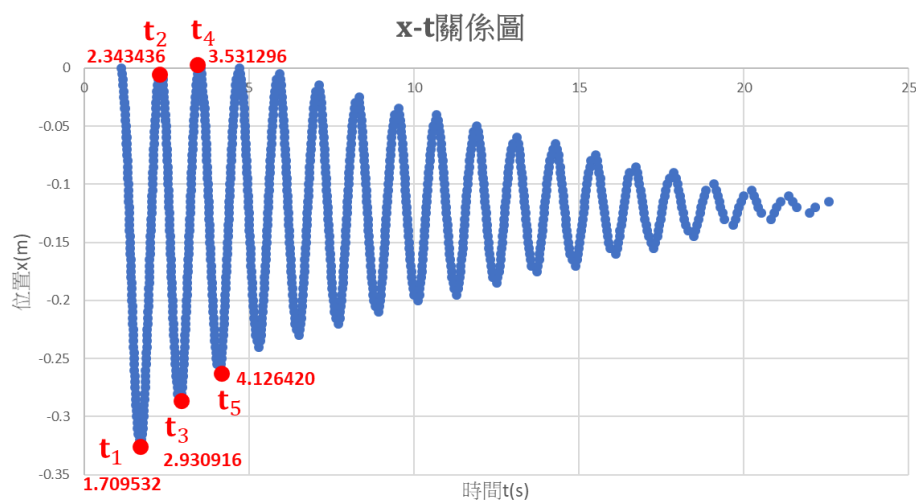


表 4 以中彈簧進行簡諧運動之測量數據與比較

滑車質量 $M = 0.37652 \text{ kg}$

| $t_1(\text{s})$ | $t_2(\text{s})$ | $t_3(\text{s})$ | $t_4(\text{s})$ | $t_5(\text{s})$ |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|---|-----------------|
| 1.709532 | 2.343436 | 2.930916 | 3.531296 | 4.126420 |
| $T_1 = t_3 - t_1(\text{s})$ | $T_2 = t_5 - t_3(\text{s})$ | $T_3 = t_4 - t_2(\text{s})$ | 平均週期 $T = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{3}(\text{s})$ (實驗值) | 週期 T (理論值) |
| 1.221384 | 1.195504 | 1.187860 | 1.201583 | 1.134956 |
| $\ln T$ (實驗值) | | | $\ln k_d$ | |
| 0.18364 | | | 2.445782 | |

圖 6 以細彈簧進行簡諧運動之x-t關係圖

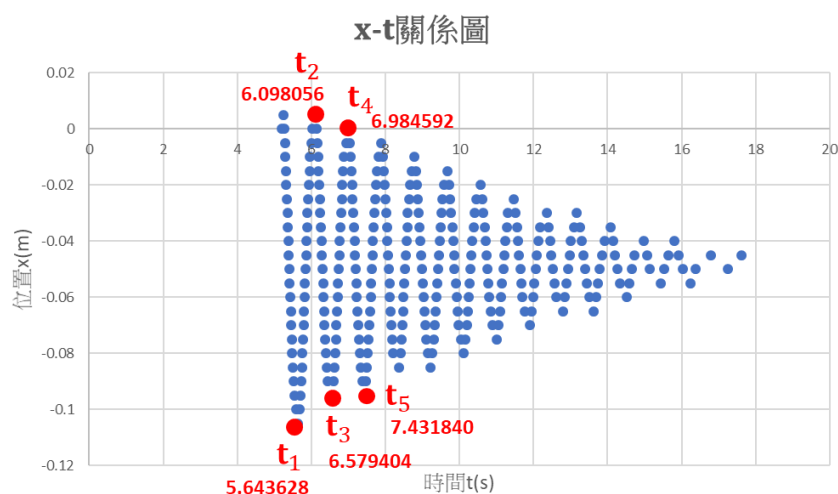


表 5 以細彈簧進行簡諧運動之測量數據與比較

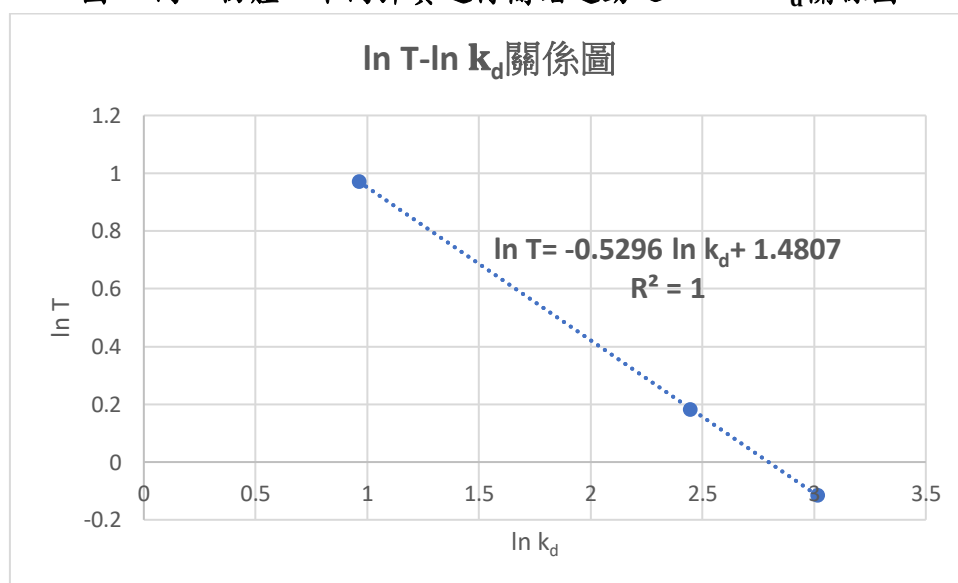
滑車質量 $M \doteq 0.37652 \text{ kg}$

| $t_1(\text{s})$ | $t_2(\text{s})$ | $t_3(\text{s})$ | $t_4(\text{s})$ | $t_5(\text{s})$ |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|---|-------------------------|
| 5.643628 | 6.098056 | 6.579404 | 6.984592 | 7.431840 |
| $T_1 = t_3 - t_1(\text{s})$ | $T_2 = t_5 - t_3(\text{s})$ | $T_3 = t_4 - t_2(\text{s})$ | 平均週期 $T=\frac{T_1+T_2+T_3}{3}(\text{s})(\text{實驗值})$ | 週期 T(理論值) 週期 T 誤差(%) |
| 0.935776 | 0.852436 | 0.886536 | 0.891583 | 0.853627 4.45 |
| ln T(實驗值) | | | ln k _d | |
| -0.11476 | | | 3.015492 | |

表 6 同一物體、不同彈簧進行簡諧運動之 T 值與 k_d 值之間的關係

| | $\ln T$ (實驗值) | $\ln k_d$ |
|-----|---------------|-----------|
| 粗彈簧 | 0.971051 | 0.963469 |
| 中彈簧 | 0.18364 | 2.445782 |
| 細彈簧 | -0.11476 | 3.015492 |

圖 7 同一物體、不同彈簧進行簡諧運動之 $\ln T$ - $\ln k_d$ 關係圖



數據分析：

1. 利用電子天平測量滑車的質量 M ，將測量結果記錄在表 3 中
2. 先架設好一維滑車運動軌道——軌道水平校正：將水平儀放置於滑車軌道方向，利用調整軌道底部可調高度的三支點調整軌道的水平，使氣泡位於管中央，此時軌道即呈現水平狀態。
3. 將兩彈簧固定端鎖在軌道上
4. 將滑車放置於兩彈簧固定端之間，並分別在滑車與兩彈簧固定端之間各連接上一根粗彈簧

5. 將 Arduino 感應器的兩條線路個別一端連接於滑車(但兩條線路分別連接到滑車兩端的接孔)，一端連接於主控盒，再用 USB 線連接 Arduino 主控盒與筆記型電腦，以進行資料傳輸
6. 在筆記型電腦上開啟 Arduino 偵測軟體
7. 用手將滑車向左方(或向右方)移動數公分
8. 在 Arduino 偵測軟體按下連接鈕使其連接上滑車的感應器，開始進行感應以及資料傳輸
9. 放開手使滑車開始進行簡諧運動
10. 待滑車停止後，Arduino 偵測軟體上輸出相關物理量的數據，將其匯入(複製到)Excel 中進行數據分析
11. 畫出此運動過程中之x-t關係圖，如圖 4 所示
12. 取相鄰的 5 個峰值數據點，將其依時間點先後順序令為 t_1 、 t_2 、 t_3 、 t_4 、 t_5 ，並找出其對應的時間數據
13. 如表 3 所示，將同樣位於x-t關係圖函數圖形上的相鄰波峰/波谷的時間測量值相減而得到 T_1 、 T_2 、 T_3 ，再取平均後，即可得到此簡諧運動的週期 T 之實驗值
14. 由 $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$ ，又因為兩彈簧與滑車之間互相為串聯關係，而且此實驗中的彈簧所掛上的物體在進行簡諧運動，故彈簧的彈力係數應選擇動彈力係數，所以式中的 $k = k_d + k_d = 2k_d$ 。由此可得到簡諧運動週期 T 的理論值
15. 如表 3， T 誤差 $=\frac{T_{\text{實驗值}} - T_{\text{理論值}}}{T_{\text{理論值}}} \times 100\%$
16. 將實驗 T 值取以 e 為底的對數，即求得 $\ln T$ ；另外將此彈簧之 k_d 值(由實驗(一)所得)取以 e 為底的對數，即求得 $\ln k_d$
17. 將粗彈簧依次更換為中彈簧、細彈簧，分別重複實驗步驟 3.~15.
18. 將各彈簧的 $\ln T$ 與 $\ln k_d$ 值的數據擷取出來記錄於表 6 中
19. 由於 $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{2k_d}} \Rightarrow \ln T = \ln 2\pi + \frac{1}{2}\ln M - \left(\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln k_d\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)\ln k_d + \left(\ln 2\pi + \frac{1}{2}\ln M - \frac{1}{2}\ln 2\right)$ ，由於滑車質量 M 為一定值(不隨時間而改變)，所以 $\ln T - \ln k_d$ 關係圖成一線性關係，且其斜率應為 $-\frac{1}{2}$ ，如圖 7 所示

(三) 以手機攝影功能錄下整個簡諧運動過程，再匯入到 Tracker 軟體進行運動分析

圖 8 Tracker 軟體分析之 x-t 圖

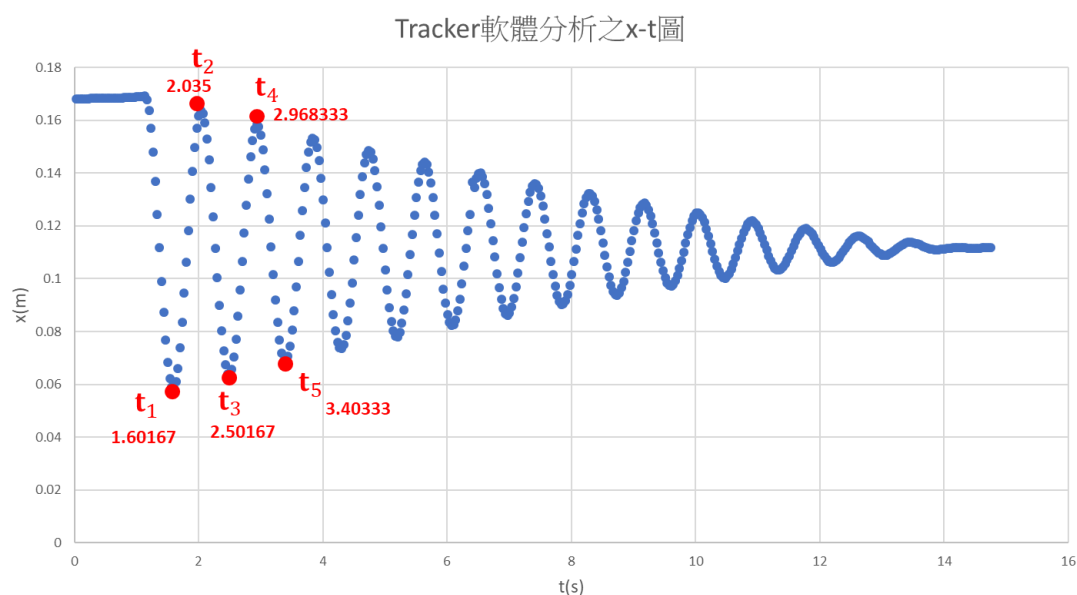


表 7 以細彈簧進行簡諧運動之 Tracker 軟體分析數據與比較

滑車質量 $M = 0.37652 \text{ kg}$

| | | | | | | | | | |
|---|--|---|--|---|-------------------|---|--|--------------------|--|
| t ₁ (s) | | t ₂ (s) | | t ₃ (s) | | t ₄ (s) | | t ₅ (s) | |
| 1.60167 | | 2.035 | | 2.50167 | | 2.968333 | | 3.40333 | |
| T ₁ = t ₃ – t ₁ (s) | | T ₂ = t ₅ – t ₃ (s) | | T ₃ = t ₄ – t ₂ (s) | | 平均週期 T= $\frac{T_1+T_2+T_3}{3}$ (s)(實 驗值) | | 週期 T(理 論值) | |
| 0.9 | | 0.90166 | | 0.933333 | | 0.911664 | | 0.853627 | |
| ln T(實驗值) | | | | | ln k _d | | | | |
| -2.68841 | | | | | 3.015492 | | | | |

數據分析：

1. 在此我們選取實驗(二)細彈簧的實驗初始值，將 Arduino 偵測儀改為用手機錄影整個運動過程後匯入 Tracker 軟體進行分析
2. 利用 Tracker 軟體的「自動追蹤」功能，可迅速又方便地追蹤滑車上某特定點的運動軌跡(也可利用手動一個一個影格去描點，以得出其位置)
3. 在坐標軸(x 軸平行軌道方向)與長度校正後，我們有各個影格處滑車所在的位置，將時間及位置資料匯入 Excel 後進行分析及畫圖，其位置與時間的關係可得知(即 $x(t)$)，如圖 8 所示
4. 同實驗(二)由 x-t 圖中獲得各數據的方式，可獲得表 7 中的數值

(四) 選一組 M 與 k ，以實驗證明：週期 T 與振幅 A 之大小無關。

在此我們選取同一輛滑車以及同樣 2 根細彈簧來分別進行 3 次不同初始擺盪振幅的實驗：

第一次實驗：

圖 9 以細彈簧進行簡諧運動之x-t關係圖

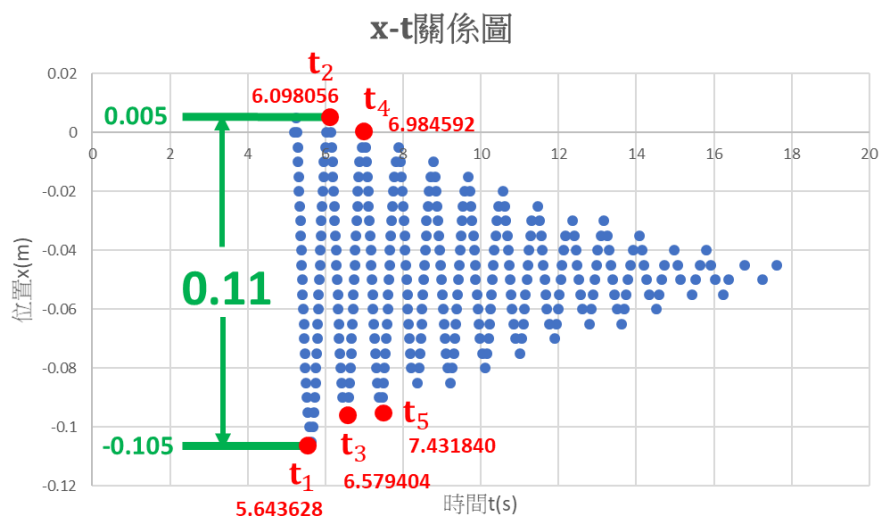


表 8 以細彈簧進行簡諧運動之測量數據與比較

| $t_1(s)$ | $t_2(s)$ | $t_3(s)$ | $t_4(s)$ | $t_5(s)$ |
|----------------------|----------------------|----------------------|--|----------|
| 5.643628 | 6.098056 | 6.579404 | 6.984592 | 7.431840 |
| $T_1 = t_3 - t_1(s)$ | $T_2 = t_5 - t_3(s)$ | $T_3 = t_4 - t_2(s)$ | 平均週期 $T = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{3}(s)$ | 振幅 A(m) |
| 0.935776 | 0.852436 | 0.886536 | 0.891583 | 0.11 |

第二次實驗：

圖 10 以細彈簧進行簡諧運動之x-t關係圖

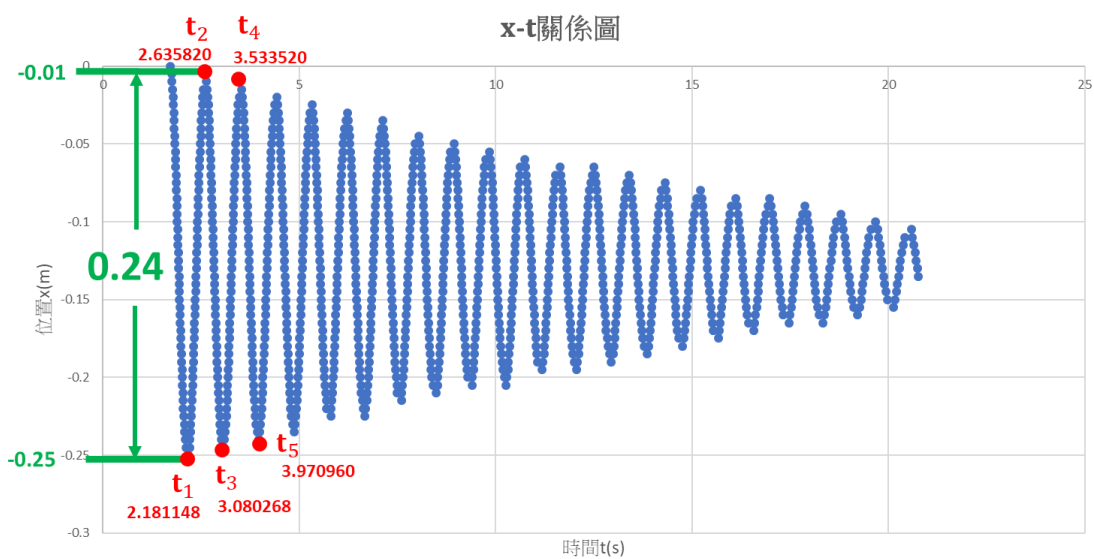


表 9 以細彈簧進行簡諧運動之測量數據與比較

| $t_1(s)$ | $t_2(s)$ | $t_3(s)$ | $t_4(s)$ | $t_5(s)$ |
|----------------------|----------------------|----------------------|--|----------|
| 2.181148 | 2.635820 | 3.080268 | 3.533520 | 3.970960 |
| $T_1 = t_3 - t_1(s)$ | $T_2 = t_5 - t_3(s)$ | $T_3 = t_4 - t_2(s)$ | 平均週期 $T = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{3}(s)$ | 振幅 A(m) |
| 0.899120 | 0.890692 | 0.897700 | 0.895837 | 0.24 |

第三次實驗：

圖 11 以細彈簧進行簡諧運動之x-t關係圖

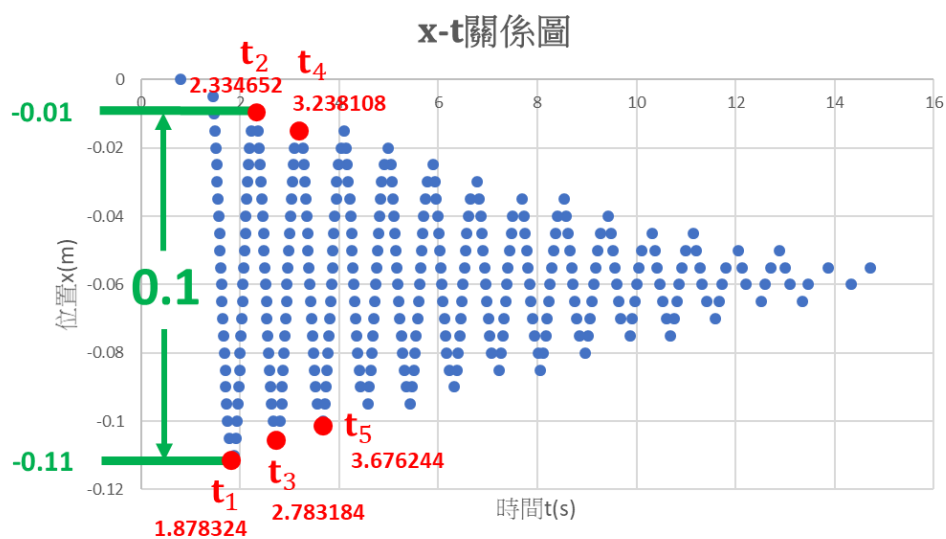


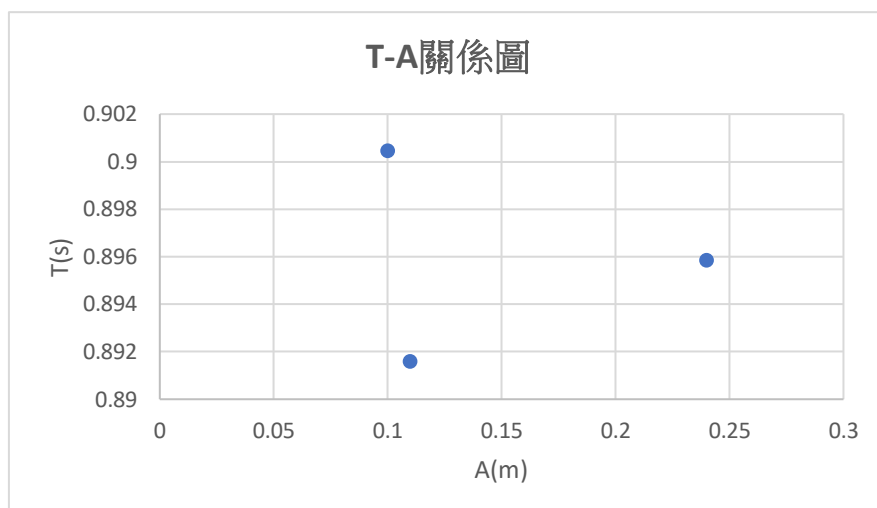
表 10 以細彈簧進行簡諧運動之測量數據與比較

| $t_1(s)$ | $t_2(s)$ | $t_3(s)$ | $t_4(s)$ | $t_5(s)$ |
|----------------------|----------------------|----------------------|--|----------|
| 1.878324 | 2.334652 | 2.783184 | 3.238108 | 3.676244 |
| $T_1 = t_3 - t_1(s)$ | $T_2 = t_5 - t_3(s)$ | $T_3 = t_4 - t_2(s)$ | 平均週期 $T = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{3}(s)$ | 振幅 A(m) |
| 0.904860 | 0.893060 | 0.903456 | 0.900459 | 0.1 |

表 11 同一物體、同 2 根細彈簧進行簡諧運動之 T 值與 A 值之間的關係

| | T(s) | A(m) |
|-------|----------|------|
| 第一次實驗 | 0.891583 | 0.11 |
| 第二次實驗 | 0.895837 | 0.24 |
| 第三次實驗 | 0.900459 | 0.1 |

圖 12 同一物體、同 2 根細彈簧進行簡諧運動之 T-A 關係圖



數據分析：

1. 先架設好一維滑車運動軌道——軌道水平校正：將水平儀放置於滑車軌道方向，利用調整軌道底部可調高度的三支點調整軌道的水平，使氣泡位於管中央，此時軌道即呈現水平狀態。
2. 將兩彈簧固定端鎖在軌道上
3. 將滑車放置於兩彈簧固定端之間，並分別在滑車與兩彈簧固定端之間各連接上一根細彈簧
4. 將 Arduino 感應器的兩條線路個別一端連接於滑車(但兩條線路分別連接到滑車兩端的接孔)，一端連接於主控盒，再用 USB 線連接 Arduino 主控盒與筆記型電腦，以進行資料傳輸
5. 在筆記型電腦上開啟 Arduino 偵測軟體
6. 用手將滑車向左方(或向右方)移動數公分
7. 在 Arduino 偵測軟體按下連接鈕使其連接上滑車的感應器，開始進行感應以及資料傳輸
8. 放開手使滑車開始進行簡諧運動
9. 待滑車停止後，Arduino 偵測軟體上輸出相關物理量的數據，將其匯入(複製到)Excel 中進行數據分析
10. 畫出此運動過程中之 x-t 關係圖，如圖 9 所示
11. 取相鄰的 5 個峰值數據點，將其依時間點先後順序令為 t_1 、 t_2 、 t_3 、 t_4 、 t_5 ，並找出其對應的時間數據
12. 如表 8 所示，將同樣位於 x-t 關係圖函數圖形上的相鄰波峰/波谷的時間測量值相減而得到 T_1 、 T_2 、 T_3 ，再取平均後，即可得到此簡諧運動的週期 T
13. 計算振幅 $A = (t_2 \text{ 點的 } x \text{ 值}) - (t_1 \text{ 點的 } x \text{ 值})$
14. 用手將滑車移動與之前相異之距離，重複實驗步驟 7.~13.，共得出三組不同振幅的數據
15. 將各次實驗的 T 值與 A 值的數據擷取出來記錄於表 11 中
16. 畫出 T-A 關係圖，如圖 12 所示

17. 由圖 12 可發現：在同樣的 M 及 k (即同一物體、同 2 根細彈簧)下，週期 T 與振幅 A 之大小無關

(五) 阻尼的影響

圖 13 有阻尼影響之滑車進行簡諧運動之 $x-t$ 關係圖

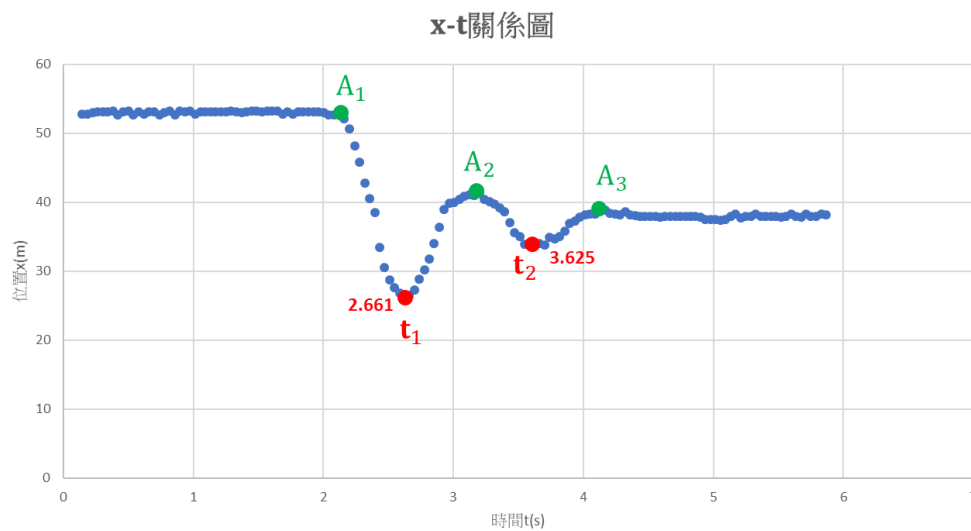


表 12 有阻尼影響之滑車進行簡諧運動之 T 實驗值

| t_1 (s) | t_2 (s) | T (實驗值)= $t_2 - t_1$ (s) |
|-----------|-----------|-------------------------------|
| 2.661 | 3.625 | 0.964 |

圖 14 有阻尼影響之滑車進行簡諧運動之波峰峰值的 $x-t$ 關係圖

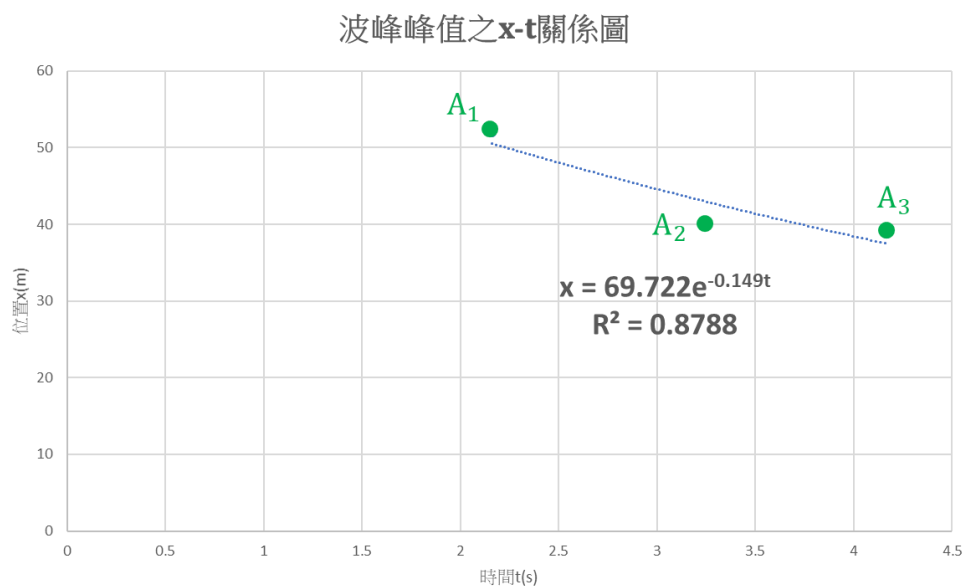


表 13 有阻尼影響之滑車進行簡諧運動之各物理量

| M(kg) | A(m) | $-\frac{b}{2m}$ | b |
|--------|--------|-----------------|------|
| 0.4438 | 69.722 | -0.149 | 0.13 |

表 14 有阻尼影響之滑車進行簡諧運動之 T 誤差值

| T _{實驗值} (s) | T _{理論值} (s) | T 誤差(%) |
|----------------------|----------------------|---------|
| 0.964 | 0.927 | 4.0433 |

數據分析：

1. 利用電子天平測量紅色阻尼滑車的質量 M，將測量結果記錄在表 13 中
2. 先架設好一維滑車運動軌道—軌道水平校正：將水平儀放置於滑車軌道方向，利用調整軌道底部可調高度的三支點調整軌道的水平，使氣泡位於管中央，此時軌道即呈現水平狀態。
3. 將兩彈簧固定端鎖在軌道上
4. 將紅色阻尼滑車(因為下方有磁鐵，故會產生阻力消耗滑車運動時的能量，導致阻尼震盪的產生)放置於兩彈簧固定端之間，並分別在滑車與兩彈簧固定端之間各連接上一根細彈簧
5. 將超音波測距儀放置於滑車軌道的其中一末端，並經由線路連接於主控盒，再用 USB 線連接 Arduino 主控盒與筆記型電腦，以進行資料傳輸
6. 在筆記型電腦上開啟 CoolTerm 軟體
7. 用手將滑車向左方(或向右方)移動數公分
8. 在 CoolTerm 軟體按下連接紐使其連接上滑車的感應器，開始進行感應以及資料傳輸
9. 放開手使滑車開始進行阻尼簡諧運動
10. 待滑車停止後，將 CoolTerm 軟體上所輸出之相關物理量的數據匯入(複製到)Excel 中進行數據分析
11. 畫出此運動過程中之 x-t 關係圖，如圖 13 所示
12. 取相鄰的 2 個峰值(波谷)數據點，將其依時間點先後順序分別令為 t_1 及 t_2 ，並找出其相對應的時間數據
13. 將 $t_2 - t_1$ 即可得到此阻尼簡諧運動的週期 T 之實驗值
14. 將圖中 3 個波峰依時間順序分別令為 A₁ 點、A₂ 點以及 A₃ 點，則將此三點的(t,x)數據擷取出來，再另外畫一張只有此三個數據的 x-t 關係圖，如圖 14 所示
15. 由阻尼簡諧運動的公式： $x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}$ ，可知 x 與 t 之間應呈現自然指數的倍數的關係，因此我們在圖 14 中找到最適合的回歸自然指數函數的曲線，與公式中的各個參數互相對照位置及數值(數據)後，可以得到表 13 中除了滑車質量的其他數據，其中 b 被稱為「阻尼係數」

16. 理論上，由於此為阻尼簡諧運動，因此其週期應滿足公式： $T = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - (\frac{b}{2m})^2}} =$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{(\frac{k}{m})^2 - (\frac{b}{2m})^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - (\frac{b}{2m})^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2k_d}{m} - (\frac{b}{2m})^2}} \quad (\text{因為兩彈簧與滑車之間互相為串聯關係，而})$$

且此實驗中的彈簧所掛上的物體在進行簡諧運動，故彈簧的彈力係數應選擇動彈力係數，所以式中的 $k = k_d + k_d = 2k_d$ ，因此將各物理量的值代入，即可得到 T 的理論值

17. 如表 14， T 誤差 $= \frac{T_{\text{實驗值}} - T_{\text{理論值}}}{T_{\text{理論值}}} \times 100\%$

七、問題與討論

Q1：此實驗中可能引起誤差的因素有哪些？

A1：1. 儀器測量精確度：

- (1) 在以電子天平測量 m 及 M 時，儀器精確度只到 0.1 公克(小數點後 4 位)的程度，但是實際數值可能超過小數點後 4 位，因此也會導致誤差
- (2) 用長直鐵尺測量彈簧的長度時，因為其精確度只到 0.001m(即 1mm)的層級，但是實際數值可能超過小數點後 3 位，也是造成誤差的原因之一
- (3) 以 Arduino 感應器測量位置時，螢幕上所顯示(偵測到的)的位置只到小數點後 3 位，時間也只精準到 $1\mu s$ ，也會造成測量上的誤差
- (4) 以 Arduino 控制盒連接超音波測距器測量與滑車之間的距離時，Arduino 控制盒螢幕上顯示的數值只到小數點後 2 位，也導致測量上的誤差
- (5) 用手機錄影後匯入軟體分析時，自動追蹤功能(或用手動描點的方式也會)可能無法定位到滑車上某點的精確(確切)位置，而手機拍攝角度也造成螢幕上依比例測量出來的長度與實際不符(有差異)
- (6) 用手機錄影時因為並沒有使用慢動作拍攝，而滑車卻振動得很快，因此拍攝出來的畫面模糊不太清晰，會造成判斷位置時的判斷誤差

2. 觀測記錄者觀測之精確度(人為判斷誤差)：

- (1) 在確認長直鐵尺零點及其他刻度是否已對齊實際物體的位置時，有人為觀測上的誤差；而讀取刻度時，估計值也會因人而異，而與實際值有差距。
- (2) 儀器裝置並沒有安裝得很精確——軌道不水平：架設器材時，用氣泡式水平儀調整軌道的水平（為了使滑車在鉛直方向所受外力和為 0 而不向特定某側滑動）時，氣泡可能不是恰位於水平儀正中心，但我們卻認為已達水平，這使得測量值與理論值之間有差異(相關討論在 Q6)

3. 理想狀態下，滑車的輪子是以純滾動的方式行進在軌道上，此時輪子所受到之軌道給予的摩擦力為靜摩擦力，因為輪子上與地面接觸的那一點，與地面之間並沒有相對運動(可視為位移為 0)，因此靜摩擦力作功為 0，滑車所具有的能量不變。但實際上，滑車的輪子與軌道之間有動摩擦力作用(假設軌道與輪子之間的動摩擦係數為 μ_k ，則動摩擦力為 $f_k = N\mu_k = mg\mu_k$)，這個摩擦力作用在滑車上會消耗掉滑車的能量(動

能)，使得移動速率變慢(因為 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ ，又滑車質量 m 保持固定不變，故當 E_k 下降

時， v 值也跟著下降)，因此原本理論上並不是要測阻尼振盪的實驗，其 $x-t$ 圖卻也呈現出阻尼振盪的結果(只是在真正要測阻尼對滑車作簡諧運動所產生的影響時，不只有滑車輪子與地面之間的摩擦力造成阻力，還有磁鐵也會造成排斥滑車前進的力量，使阻力更加倍增，而阻尼所造成的影響也隨之增強)

4. 其他如空氣阻力所造成的影響、彈簧伸長或收縮時也會有少部分能量消耗……等等，都會讓實驗與理論值之間的差距越來越大

Q₂：在何種情況下，彈簧不遵守虎克定律？

A₂：一般情形下，彈簧皆應遵守虎克定律，但當彈簧因過度伸長而造成彈性疲乏後，它就不遵循虎克定律了(而且即使把它壓縮回來也仍是，因為此為永久性的傷害，並無法挽回)。

Q₃：為何圖 1 中，滑車上要兩邊裝彈簧而不能只用一條？

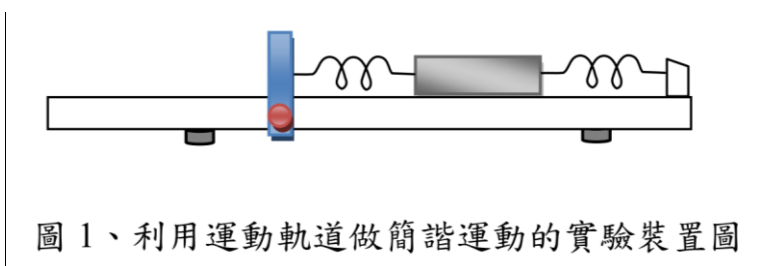


圖 1、利用運動軌道做簡諧運動的實驗裝置圖

A₃：

- (1) 較容易固定彈簧，使之不易在縮短的過程中脫落：因為如果只有一邊有裝上彈簧，則在實驗時彈簧可能在壓縮時從滑車上或彈簧固定端上脫落
- (2) 彈簧並聯後，等效彈性係數變大，可以使各個彈簧的伸長量皆降低(因為 $F=-kx$ ，由於 F 值不變(使物體作簡諧運動所需施的力量不變)，而 k 值若為等效彈力常數則會比原本的任意一個彈簧的 k 值還要大(因為 $k_{\text{等效}} = k_1 + k_2$ (詳細討論及證明在 Q₉)，又 $k_1 > 0$ 且 $k_2 > 0$)，因此彈簧的伸長量變小，可避免彈簧伸長量超過其彈性限度而導致彈性疲乏，也使得整個簡諧運動的範圍(幅度)不至於太大到軌道不夠長的地步。

Q₄：如果彈簧的質量 m_s 不能忽略，而且振盪時彈簧的伸長是均勻的，試證週期應為

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{1}{3}m_s}{k}}$$

A₄：因為根據能量守恆定律，在平衡點處之動能等於位移最大時的那點的位能，故

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\int v^2 dm_s = \frac{1}{2}mv^2 \int_0^1 \left(\frac{x}{L}v\right)^2 \rho dx = \frac{2\pi^2 A^2}{T^2} \left(m + \frac{1}{3}m_s\right) = U = \frac{1}{2}kA^2, \text{ 其中 } L$$

是彈簧原長度， ρ 表示彈簧的線密度($\rho = \frac{L}{m_s}$)，因此 $T = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{1}{3}m_s}{k}}$

Q₅：做簡諧運動的滑車終將停止，找出至少兩個會使滑車停止運動的原因。

A₅：

- (1) 地面摩擦力對滑車輪子作負功，使滑車的能量(動能)減少，因此最後動能被減少為 0，因而停止運動

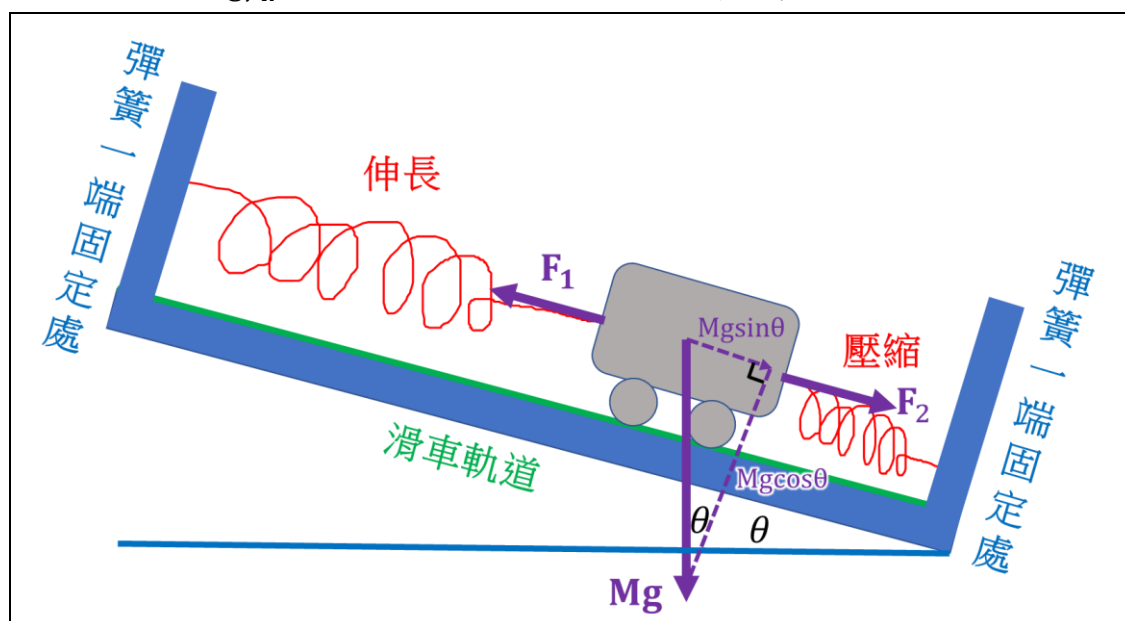
- (2) 空氣阻力對滑車作負功(因為空氣阻力的方向恆與物體運動(位移)的方向相反)，使滑車的能量(動能)減少，因此最後動能被減少為 0，因而停止運動
- (3) 彈簧在伸長與收縮時，因彈簧粒子間的摩擦而會有少部分能量(彈力位能)消耗，使整體(整個系統)的總能量降低，最後彈簧的彈力位能、滑車的動能皆減少為 0，因此滑車停止運動

Q₆：空氣軌不水平對本實驗會有何影響？

A₆：

如下圖所示，若軌道向某方向傾斜(如下圖中為向右下方傾斜 θ 角)，則滑車的種力可被分解為垂直軌道面以及平行軌道面的分力，其中垂直軌道面的分力會被正向力所抵銷(平衡)掉，但平行軌道面的分力則會造成滑車在來回振動時運動方向上多增加了一個力，而此力會半個週期對滑車作正功(當滑車往右下方移動時)，下半個週期又對滑車作負功(當滑車往左上方移動時)。如圖中所示，理論上我們假設軌道為水平的，即滑車並不會有鉛錘方向上的運動(移動)，而去推導出各項有關於彈簧對滑車所施予的力 F (即滑車所受到的合力，只是因為在此假設前提下，此合力恰好等於彈簧對滑車所施予的力)的公式。但實際上滑車所受到的合力並不只有彈簧所施予的 F 這一項，而是由於軌道不水平，所以會受到重力平行軌道面的分力的影響，而要分作上下坡時來看待：當滑車下坡時，其重力平行軌道面的分力對其做正功，因此公式中的 F (即滑車所受到的合力)應修正為 $F - Mg\sin\theta$ (假設沿著軌道面向左上方為正向)；而當滑車上坡時，其重力平行軌道面的分力對其做負功，因此公式中的 F (即滑車所受到的合力)應修正為 $F + Mg\sin\theta$ (假設沿著軌道面向左上方為正向)。

其實軌道不水平還會造成其他影響，例如軌道施予滑車之正向力比軌道為水平時小(因為 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ，所以 $|\cos\theta| < 1$ ，故 $|Mg\cos\theta| < |Mg| = Mg$)，使得實際上的軌道與滑車輪子之間的動摩擦力(若滑車輪子並非以純滾動方式前進時)並不是 $Mg\mu_k$ ，而是應該被修正為 $Mg\mu_k \cos\theta$ ，因此軌道不水平也會影響到摩擦力的作用。



Q₇：任何實驗測量均有誤差，誤差來源除了由實驗者的操作所致以外，每一儀器都有它的測量限度，即它的解析度(resolution)。做完幾個空氣軌實驗後，你是否已

瞭解實驗系統的性能和它的解析度？試估計由測量儀器的解析度所造成的百分誤差，並和數據之誤差做比較。

A7：儀器解析度造成的百分誤差通常較小，因為儀器本身的精密程度就比較高，而數據在人為分析過程中所產生的誤差，影響應該會遠大於儀器本身因為解析度而產生的誤差。

Q8：為什麼同一條彈簧，彈性係數卻會有動與靜的差別？

A8：這題我真的想了好久都想不到，上網查資料也沒有幾個在討論這個問題的，比較有回答到問題的解釋為「如果彈簧彈性係數夠大（或彈簧本身質量可忽略）且彈簧處於線性範圍時，兩彈性係數的比較要和實驗誤差相對照；若是彈簧質量不可忽略，則彈簧伸長時鄰近兩圈之間距離會逐漸改變，此時比較的公式需要重新推導」。

Q9：證明當 2 條彈簧(彈性係數分別為 k_1 與 k_2)互相並聯時，其等效彈力常數 $k = k_1 + k_2$ 。

A9：由於 2 彈簧互相並聯，因此其伸長量皆相同，假設為 x ，而假設並聯後各彈簧之彈力分別為 F_1 、 F_2 ，則並聯後之彈簧的總彈力 $F = F_1 + F_2$ 。由於彈簧滿足虎克定律，故 $F = -kx \Rightarrow F = F_1 + F_2 = -k_1x + (-k_2x) = -kx \Rightarrow k_1x + k_2x = kx \Rightarrow k_1 + k_2 = k \Rightarrow k = k_1 + k_2$ ，即得證

八、心得及建議

這次的實驗講義竟然只有 3 頁耶！不過實際做起來其實東西還是滿多的，我們這一組仍然繼續著我們的新應用科技—雲端共用，讓我們事半功倍(但還是做得滿久的就是了)，一開始的我們做起來總是卡卡的，看到陌生的實驗器材不知道該怎麼下手(操作)，後來就越做越熟練了，而且一開始的幾部數據誤差值還太大必須重做，但越到後面，我們處理得越得心應手，甚至可以一次通關！最後我們幸運地能夠在 4:38 的時候成功做完實驗，真是令人感到開心~(不過聽說下一個實驗—熱力學實驗，可就跟這個實驗呈現強烈的對比—除了實驗內容還是很多之外—不但實驗講義超級多，而且內容也是看都看不懂、碰都沒碰過的熱力學，不知道下星期的我會幾點出實驗室(希望別太晚啊~我晚上還要上微積分演習課耶)

我們在最後助教檢查的部分發現了一個很奇妙的地方—在實驗(一)測量靜彈力係數時，我原本將外力計算為「砝碼(含砝碼架)重+彈簧本身的重量」，但其實在帶入公式時公式就已經有將彈簧本身的質量考慮進去計算了，因此助教要我把外力改成只有砝碼(含砝碼架)的重量，然而，我卻發現改了以後直線的斜率竟然不變，而只有 y 軸截距改變，也就是說，直線只是上下平移而已，並不影響靜彈力係數(圖形斜率)的值，這令我們都感到驚訝，真是太神奇了！(結果後來助教還是發現我們的靜彈力係數數據不太對(跟動彈力係數的值差太多了—快 10 倍)，原來是因為外力我只代入 m 而非 mg ，這個改變可就不只讓 $F-x$ 的函數圖形上下平移，而是大幅度的改變斜率了~~)

一上物理實驗課程的倒數第二個實驗，在陽光的溫煦照耀下，成功~~!!

九、參考資料

1. 國立清華大學普通物理實驗室網站—簡諧運動 (Simple Harmonic Motion) · 網址：
<http://www.phys.nthu.edu.tw/~gplab/exp009.html>
2. 實驗 9 簡諧運動實驗講義 · 網址：

<http://www.phys.nthu.edu.tw/~gplab/file/09%20Simple%20Harmonic%20Motion/Simple%20Harmonic%20Motion%20expA.pdf>

3. 簡諧運動·維基百科，自由的百科全書·網址：

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%B0%A1%E8%AB%A7%E9%81%8B%E5%8B%95>

4. 力學 標題:彈簧的彈力係數·網址：

<http://www.phy.ntnu.edu.tw/demolab/phpBB/viewtopic.php?topic=16316>