

第 108 學年度清華大學普通物理實驗(一)

☐預報 或 ☒結報 課程編號： 10810PHYS101010



實驗名稱： 演示實驗 A:運動學與力學篇—雙珠競走

系 級： 電機資訊學院學士班 1 年級 組 別： 13

學 號： 108060018 姓 名： 葉承泓

組 員： 陳竑廷

實驗日期： 108 年 9 月 25 日 補作日期： 年 月 日

◎ 以下為助教記錄區

預報繳交日期	報告成績	助教簽名欄
結報繳交日期		
報告缺失紀錄		

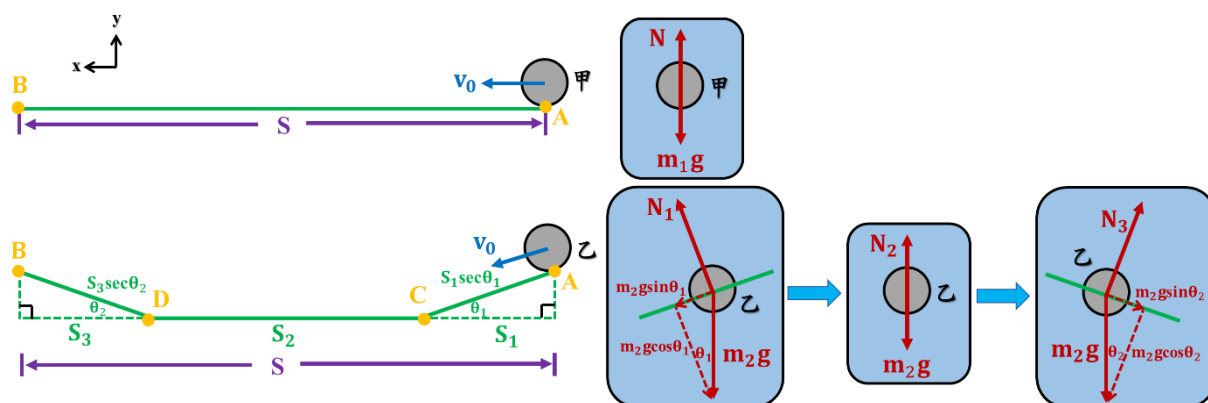
一、目的

在空間中有相異兩點 A、B 位於不同鉛直線上，且兩點間有高度差(假設 A 點高於 B 點)。我們知道 A 點、B 點之間的最短距離為 \overline{AB} ，但若想將一球從靜止狀態由 A 點滾向 B 點，找出時間最短的路徑，那麼軌道所在的位置依然是 \overline{AB} 嗎？透過這個實驗，我將利用雙珠競走的器材，讓同樣大小、同質量的兩顆球由同高度靜止釋放，途經不同形狀、高度的軌道，再透過置於定點的錄影機(手機)以慢動作將整個過程記錄下來，接著透過 Tracker 軟體分析各球的運動狀況及到達所花費的時間。然後，再改變其中一顆球的質量，比較所需時間是否改變，來探討軌道形狀、球的質量對到達時間的影響，及展現運動物體的速度與加速度間的關係、向量的 x、y 分量分解。

二、原理(參考「附錄 B」)

初始速度相同的兩顆球在具相同水平位置的起點和終點，但路徑不同的軌道上競走。其中一球所受合力為 0(不考慮空氣阻力及摩擦力)，因此不受加速度影響(加速度 $= \vec{0}$)，另一球軌道於鉛直面上高度先下降後再上升，如下圖所示。假設兩顆球分別稱為甲球、乙球，質量分別為 m_1 、 m_2 ，兩球皆從起點(A 點)出發，初速分別為 \vec{v}_0 (方向朝左)與 \vec{v}_0 (方向平行斜面朝左下方)，前往終點(B 點)，其中甲球沿著 \overline{AB} 上的軌道，乙球沿著「先直線下降(傾斜角 θ_1 ($0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$))，再水平前進，最後直線上升(傾斜角

θ_2 ($0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$))抵達 B 點」的軌道行進。假設 $\overline{AB} = S$ ，乙球下降過程的水平位移為 S_1 ，水平移動過程位移為 S_2 ，上升過程的水平位移為 S_3 。



甲球在整個過程中所受之合力為 0，故作等速運動，抵達所花費時間為 $t_{\text{甲}} = \frac{S}{v_0}$ 。

乙球在下降過程中(\overline{AC} 段)所受之力有重力 $m_2 g$ (可分解為平行斜面的分力 $m_2 g \sin \theta_1$ (方向沿斜面朝左下方)及垂直斜面的分力 $m_2 g \cos \theta_1$ (方向垂直斜面朝右下方))，以及斜面施予的正向力 N_1 (方向垂直斜面朝左上方)。因為乙球在垂直斜面方向上沒有加速度，故合力為 0，可得知 $N_1 = m_2 g \cos \theta_1$ ；在平行斜面的方向上，因為不考慮摩擦力的影響，所以其所受合力為 $m_2 g \sin \theta_1$ (方向沿斜面朝左下方)。由

$F_{\text{合力}} = m_2 g \sin \theta_1 = m_2 a \Rightarrow a = g \sin \theta_1$ 為定值，可知球做等加速度運動。因此可用等加速

度運動公式得到 $S_1 \sec \theta_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} g \sin \theta_1 t_1^2$ ，其中 t_1 表示行經 \overline{AC} 段的時間。解出

$$t_1 = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2S_1 g \sec \theta_1 \sin \theta_1}}{g \sin \theta_1} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2S_1 g \tan \theta_1}}{g \sin \theta_1} \text{ (負不合)}, \text{ 取 } t_1 = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2S_1 g \tan \theta_1}}{g \sin \theta_1}。 \text{ 在 C 點}$$

$$\text{的速率 } v_C = v_0 + (g \sin \theta_1) \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2S_1 g \tan \theta_1}}{g \sin \theta_1} = \sqrt{v_0^2 + 2S_1 g \tan \theta_1}。$$

假設在 C、D 兩點的軌道為弧形轉彎，且碰撞軌道時無能量損耗，則到達 C 點的前一瞬間速度原為 v_C (方向為平行斜面朝左下方)，過了 C 點的下一瞬間，因為無能量損耗，所以速度轉向變為 v_C (方向為 x 軸正向)；到達 D 點的前一瞬間速度原為 v_D (方向為 x 軸正向)，過了 D 點的下一瞬間，因為無能量損耗，所以速度轉向變為 v_D (方向為平行斜面朝左上方)。

在 \overline{CD} 段的運動期間，球所受的合力為 0 ($|\overline{N_2}| = |\overline{m_2 g}|$)，故作等速度運動，因此所需時間 $t_2 = \frac{S_2}{v_C} = \frac{S_2}{\sqrt{v_0^2 + 2S_1 g \tan \theta_1}}$ ，在 D 點的速率 $v_D = v_C = \sqrt{v_0^2 + 2S_1 g \tan \theta_1}$ 。

最後，在上升過程中 (\overline{DB} 段) 所受之力有重力 $m_2 g$ (可分解為平行斜面的分力 $m_2 g \sin \theta_2$ (方向沿斜面朝右下方) 及垂直斜面的分力 $m_2 g \cos \theta_2$ (方向垂直斜面朝左下方))，以及斜面施予的正向力 N_3 (方向垂直斜面朝右上方)。因為乙球在垂直斜面方向上沒有加速度，故合力為 0，可得知 $N_3 = m_2 g \cos \theta_2$ ；在平行斜面的方向上，因為不考慮摩擦力的影響，所以其所受合力為 $m_2 g \sin \theta_2$ (方向沿斜面朝右下方)。由

$F_{\text{合力}} = m_2 g \sin \theta_2 = m_2 a' \Rightarrow a' = g \sin \theta_2$ 為定值，可知球做等加速度運動。另外，由於整個過程 ($A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$) 中乙球只受到重力及正向力 (皆為保守力)，故乙球的力學能守恆，而 A、B 兩點位於同水平高度，因此重力位能相同，所以在兩點的動能也一樣 (皆為 $\frac{1}{2} m_2 v_0^2$)，可得出在 B 點的速率 = 在 A 點的速率 = v_0 (方向為平行斜面朝左上方)。因此

可用等加速度運動公式得到 $v_0 = v_D - g \sin \theta_2 t_3$ ，其中 t_3 表示行經 \overline{DB} 段的時間。解出

$$t_3 = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2S_1 g \tan \theta_1} - v_0}{g \sin \theta_2}。$$

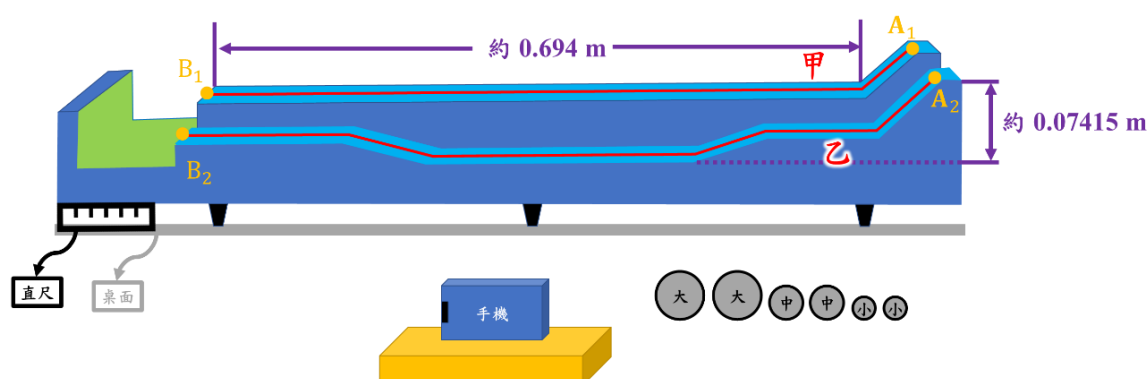
綜上所述，乙球由 A 點到達 B 點所需時間為 $t_{\text{乙}} = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2S_1 g \tan \theta_1} - v_0}{g \sin \theta_1} +$

$$\frac{S_2}{\sqrt{v_0^2 + 2S_1 g \tan \theta_1}} + \frac{\sqrt{v_0^2 + 2S_1 g \tan \theta_1} - v_0}{g \sin \theta_2}。$$

三、實驗器材

1. 雙珠競走(Racing Ball)軌道 1 組(2 個)
2. 大、中、小球各 2 顆(代表 3 種不同質量的球各 2 顆)
3. 15 公分、精準度到 1mm 的直尺 1 支
4. 手機(具拍攝慢動作功能)1 支
5. 筆記型電腦
6. Tracker 軟體

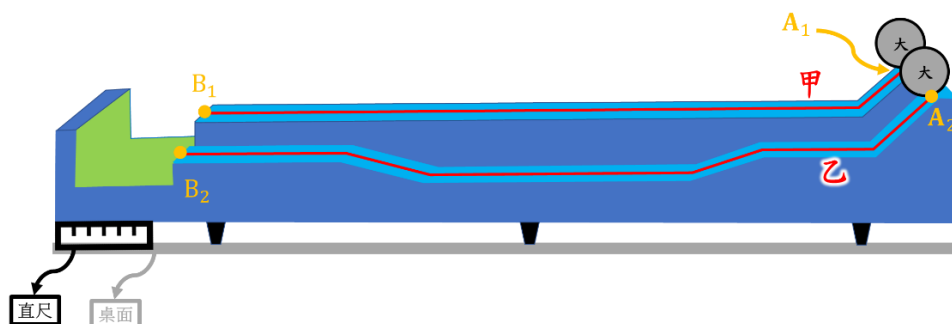
圖 3 實驗器材配置圖



四、實驗步驟(器材用法)

(一) 雙珠競走觀察實驗—觀察軌道及質量對到達先後順序的影響

1. 將甲、乙軌道放置於水平桌面上
2. 如下圖所示，在甲、乙兩軌道較高的那端(A₁、A₂端)分別放上一顆大球，使其同時靜止釋放，觀察當「兩軌道上之球的質量相等」時，到達B₁、B₂端的先後順序，紀錄在表1中
3. 將乙軌道上的球依次改為中球、小球，甲軌道仍為大球，同樣使兩球同時靜止釋放，觀察當「甲軌道上的球之質量大於乙軌道上的球之質量」時，到達B₁、B₂端的先後順序，紀錄在表1中
4. 將甲軌道上的球依次改為中球、小球，乙軌道上的球改為大球，同樣使兩球同時靜止釋放，觀察當「甲軌道上的球之質量小於乙軌道上的球之質量」時，到達B₁、B₂端的先後順序，紀錄在表1中
5. 再將(甲軌道，乙軌道)依次改為(中球，中球)、(中球，小球)、(小球，小球)，同樣使兩球同時靜止釋放，觀察到達B₁、B₂端的先後順序，紀錄在表1中



(二) 單珠滾動量化實驗—測量軌道及質量對到達所需時間的影響

在此實驗中，我將把大、中、小球分別在甲軌道上由A₁點運動至B₁點、乙軌道上由A₂點運動至B₂點，以影片方式記錄下來，再透過Tracker軟體計算出所耗費的時間及最後的速率。

1. 將甲、乙軌道放置於水平桌面上
2. 將直尺立於軌道旁
3. 在甲軌道較高的那端(A₁端)放上一顆大球，使其靜止釋放，以慢動作記錄下大球運動的情形(軌跡、位置、速率等)

- 將大球依次替換為中球、小球，使其靜止釋放，以慢動作記錄下球運動的情形
- 在乙軌道較高的那端(A₂端)放上一顆大球，使其靜止釋放，以慢動作記錄下大球運動的情形
- 將大球依次替換為中球、小球，使其靜止釋放，以慢動作記錄下球運動的情形
- 將每一部影片用 Tracker 軟體的自動追蹤功能得出各時間點，球心的 x、y 軸位置，進而算出各項物理量，如到達所耗費的時間及最後的速率，分別記錄在表 2、表 3 中

五、實驗結果與分析

(一) 雙珠競走觀察實驗—軌道及質量對到達所需時間的影響

表 1

乙 \ 甲	大球	中球	小球
大球	乙較快	幾乎同時抵達	甲較快
中球	乙較快	乙較快	(未觀察)
小球	乙較快	乙較快	乙較快

觀察分析：

- 以肉眼或慢動作重播觀察兩球到達終點的先後順序，並記錄在表 1 中
- 由表格中可發現「相同質量的球時，位於乙軌道的球會先抵達終點」，與理論相符合
- 然而，理論上到達時間與球的質量應無關(由公式中無 m_1 、 m_2 可知)，意即同樣滾於甲軌道上的大、中、小球滾動時間皆應相同，與乙軌道小球相比的快慢結果也應一樣(理論上到達終點時間：甲軌道大球=甲軌道中球=甲軌道小球>乙軌道小球)。但由表中我發現實際上卻並非如此(經過多次檢驗，結果都是「到達終點時間：甲軌道大球>甲軌道中球>甲軌道小球」)，因此我決定將每顆球在不同軌道運動時間做量化數據，以便比較，即為實驗(二)

(二) 單珠滾動量化實驗—測量軌道及質量對到達所需時間的影響

表 2 不同軌道及不同球的質量之到達所需時間 t(s)

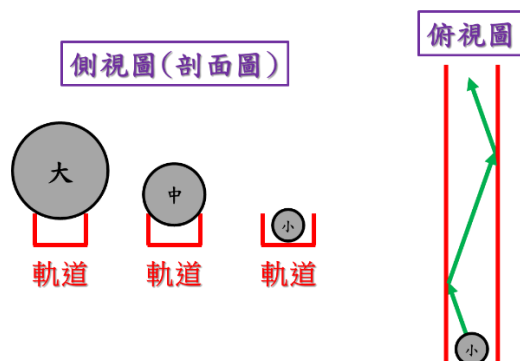
	大球		中球		小球	
	第一次實驗	第二次實驗	第一次實驗	第二次實驗	第一次實驗	第二次實驗
甲軌道	1.248333	1.241667	1.225	1.22	1.203333	1.208333
	平均值		平均值		平均值	
	1.245		1.2225		1.205833	
乙軌道	1.163333	1.161667	1.083333	1.103333	1.113333	1.125
	平均值		平均值		平均值	
	1.1625		1.093333		1.119167	

表 3 不同軌道及不同質量之球到達時的 x 軸方向速度 v_x (m/s)(方向朝左為正)

	大球		中球		小球	
甲軌道	第一次實驗	第二次實驗	第一次實驗	第二次實驗	第一次實驗	第二次實驗
	0.714304	0.724774	0.731086	0.734495	0.750172	0.740680
	平均值		平均值		平均值	
	0.719539		0.732790		0.745426	
乙軌道	第一次實驗	第二次實驗	第一次實驗	第二次實驗	第一次實驗	第二次實驗
	0.755155	0.731028	0.780764	0.794041	0.753287	0.691613
	平均值		平均值		平均值	
	0.743092		0.787402		0.722450	

數據分析：

1. 慢動作影片經過 Tracker 軟體的位置分析(如「九、附錄 A」所示)後，可選擇出球開始落下的時間點，以及球到達終點的時間點，計算兩者之差即為「到達所需時間」，同一顆球同個軌道各做兩次實驗，再取平均值，得到表二的數據
2. Tracker 軟體已計算出各時間點的 v_x 值，找到球到達終點的時間點，記錄下該點的 v_x 值於表 3。同樣地，同一顆球同個軌道各做兩次實驗，再取平均值
3. 由表 2 可發現，同樣滾在甲軌道上，同樣皆由靜止出發且起、終點相同，但質量不同的球平均抵達所需時間隨質量增加而有增加的趨勢，這與理論上「到達時間與球的質量大小無關」相違背。另外，在表 3 也可發現甲軌道數據中不同質量的球抵達終點時速率竟然不同(理論上速率應相同，皆為 v_0)。我認為造成以上結果的原因可能是在理論上忽略摩擦力的影響，但實際上有摩擦力做負功，使得速率減慢，而大球速率被減慢得較多(受到摩擦力的影響較大)，因此比小球慢抵達終點，最後的速率也較小。
4. 表 2 及表 3 中各有一項數據很特別：若由第 3. 點的結論來看，到達所需時間應為乙軌道小球小於乙軌道中球，到達終點時的速率也應為小球較快，但我卻測出小球的時間較長、速率較慢。我覺得除了實驗誤差外，也有可能是因為小球的直徑小於軌道寬度(如下側視圖)，若在起點處靜止釋放時並沒有沿著軌道的方向行徑，就會使得小球在軌道裡彈來彈去(如下俯視圖)，造成時間加長、速率下降(因碰撞導致能量減少)。



5. 由表 3 中可發現，同質量的球，在不同軌道上運動，抵達終點時的速率乙軌道 > 甲軌

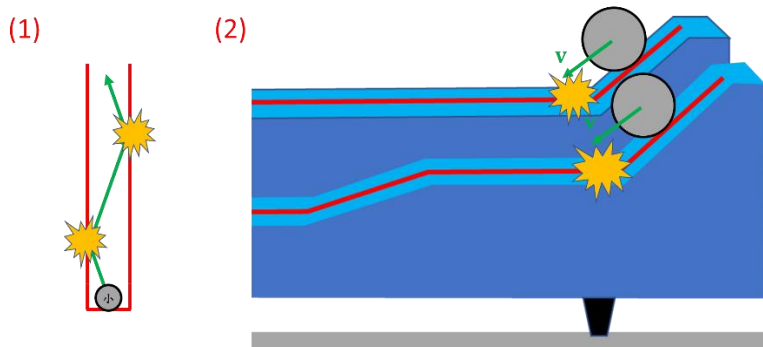
道(理論上應相同,皆為 v_0),我認為可能是摩擦力所造成,但乙軌道所經過的路徑較長,摩擦力所作的負功應較大,使動能減少較多,速率變得較慢,因此我想可能是因為以軌道的速率較快,使球較快達到純滾動狀態,這時摩擦力就不再作負功了,速率也就保持固定。

六、問題與討論

Q₁：此實驗中可能引起誤差的因素有哪些？

A₁：

1. 兩個軌道放球時間不同：我們當時做實驗時是利用雙手放開球使其開始滾動，並不是利用有磁控開關的發射架(可幾乎同時發射兩顆球)，因此兩手之間放開的時間差會造成其中一球先出發，導致先後順序判斷上的誤差
2. 雙手放球時手與球之間的摩擦力：造成球的滾動，進而影響軌道對球的摩擦力作用：若為順時針轉，則在球與地面接觸之點處，地面施予球的摩擦力(只可能是動摩擦力)朝球的行徑方向，使得球減速；若為逆時針轉，則在球與地面接觸之點處，地面施予球的摩擦力(可能為靜摩擦力或動摩擦力，端看球與地面接觸之點處的「平行軌道面」的方向是否有相對運動)朝球的行徑方向之反向，使得球加速，皆會影響球的抵達時間
3. 球的滾動情形(在 Q₆ 量化討論)
4. 軌道對球的摩擦力(在 Q₇ 量化討論)
5. 碰撞損失的能量：球碰撞軌道(例如以下圖 2 種方式)時，被軌道吸收而損失的能量(以熱能方式逸散)



6. 儀器測量上的誤差：手機所拍攝的角度使得實際上同樣為 1cm 的長度，處於遠方的會看起來(在螢幕上顯示)、測量起來較短。另外，Tracker 自動追蹤功能也可能無法精準找出球心所在的位置
7. 人為測量上的誤差：在找尋手離開球及球到達終點的時間點時(一個一個影格去用肉眼檢查)，可能並非找到正確的時間點
8. 儀器精準度的誤差：直尺的長度精確度只到 0.1mm，手機的慢動作拍攝時間精準度只到 0.004 s，這都會導致測量上誤差的產生

Q₂：兩球最終速度是否相同？

A₂：由「二、原理」可知，理論上(忽略摩擦力)兩球最終速度應相同(皆為 v_0 朝 x 軸正向)，但由於實際狀況有不可忽略的摩擦力(如大球速率被減慢得較多)，以及達成純滾動情況發生的時間不同，這都會影響摩擦力作負功的程度，進而影響最終速度。

Q3：較快抵達終點是否意味過程中獲得能量？這些能量從何而來？

A3：1. 是，獲得動能使 x 軸速率增加

2. 由重力位能轉換而來

說明：

由「二、原理」可知，理論上(不考慮摩擦力)，兩球(無論質量大小)分別在甲、乙軌道上競走，則乙軌道上的球會較快抵達終點。因為乙軌道的球在行進過程中 y 方向有往下位移，因此其重力位能減少，但力學能又守恆(因為只受到保守力—重力與正向力)，因此位能轉成動能，使球運動速率增加而移動得較快。抵達終點前的上坡段，因 y 方向向上位移，故其重力位能增加，由力學能守恆可知動能減少，速率下降回 v_0 ，但整個過程的 $v_x \geq v_0$ ，故較甲軌道上的球早抵達終點。

實際測量上，同質量的球分別在甲、乙軌道上競走，則乙軌道上的球仍然會較快抵達終點。這是因為乙軌道與球之間的摩擦力對球所作的負功(使速率減小)比重力位能轉換成之動能能量(使速率增加)小，故總和而言，乙軌道上的球的平均 v_x 仍然較大，使其較快抵達終點。

Q4：兩球的時間差與什麼條件相關？

A4：理論上，由公式可知兩球的時間差為 $|t_{\text{甲}} - t_{\text{乙}}| =$

$$\left| \frac{S_1 + S_2 + S_3}{v_0} - \left(\frac{\sqrt{v_0^2 + 2S_1 g \tan \theta_1} - v_0}{g \sin \theta_1} + \frac{S_2}{\sqrt{v_0^2 + 2S_1 g \tan \theta_1}} + \frac{\sqrt{v_0^2 + 2S_1 g \tan \theta_1} - v_0}{g \sin \theta_2} \right) \right|, \text{ 與 } S_1、S_2、S_3、v_0、$$

$\theta_1、\theta_2$ 有關。而實際上也與摩擦力所作負功的量、達到純滾動的時間點(摩擦力不再作負功的時間點)、……等等因素有關(在 Q7 與 Q6&7 會有更詳細討論摩擦力與滾動所造成的影響)。

Q5：下降的球不論多深都回得來？

A5：理論上(不考慮摩擦力及空氣阻力等)是，因為球只受到保守力(做功)，所以任意時間點的「重力位能+動能」恆為定值(若重力位能零位面固定不動)，所以若球以初速率 v_0 出發，必定可回到同高度，且此時速率為 v_0 。而實際上，因為有摩擦力(非保守力)消耗能量(將力學能轉成熱能)，因此若想要回到同高度(重力位能與出發時相同)，

必須滿足 $\frac{mv_0^2}{2} \geq W_f$ ，其中 W_f 表示摩擦力所作的負功，那麼回到同高度時的速率會變成

$$\sqrt{v_0^2 - \frac{2W_f}{m}}。$$

Q6：加入球轉動的情形將會如何？

A6：理論上，若不考慮地面摩擦力及空氣阻力，且球在出發時無轉動，則在整段過程中，沒有摩擦力使其作轉動，故此種情形與「二、原理」中的討論狀況相同。實際情形，轉動與摩擦力共同影響球的行進速率，如下方 Q6&7 所討論。

Q7：加入摩擦力考慮，結果如何？

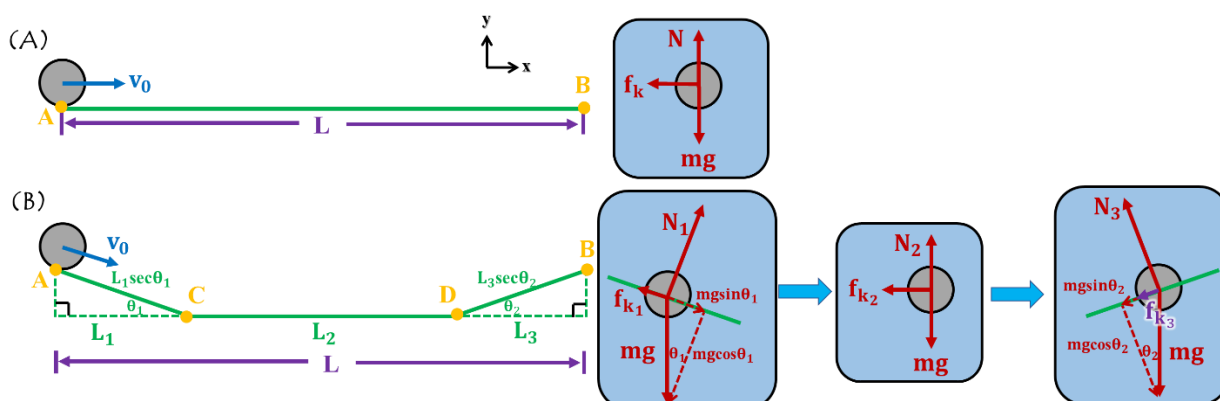
A7：部分想法請參考「十二、附錄 C」。

理論上，若考慮地面摩擦力及空氣阻力，但不考慮球的轉動(即當作球未轉動來計

算)。

如下圖(A)，在朝右方為 x 軸正向、朝上方為 y 軸正向的座標平面中，一顆質量為 m 、半徑為 r 的鐵球，以初速度 v_0 朝右沿著水平軌道運動，起點與終點的直線距離為 L ，球與地面之間的動摩擦係數為 μ_k (因為球與地面有相對位移，故摩擦力為動摩擦力)，則地面施予球的正向力 $N=mg$ (方向朝上)，摩擦力 $f_k=N\mu_k=mg\mu_k$ (方向朝左)。由 $F_x=ma_x$ ， $f_k=mg\mu_k=ma_x \Rightarrow a_x=g\mu_k$ (方向朝左) 為定值，故球作等加速度運動，令球到達終點時的速度為 V (方向朝右)，可列出 $V^2=v_0^2-2g\mu_k L \Rightarrow V=\sqrt{v_0^2-2g\mu_k L}$ 。再由

$$V=\sqrt{v_0^2-2g\mu_k L}=v_0+(-g\mu_k)t, \text{ 解 } t \text{ 可得 } t=\frac{v_0-\sqrt{v_0^2-2g\mu_k L}}{g\mu_k}。$$



如上圖(B)，在同樣的坐標系中，同一顆球以同樣初速率，但速度方向平行斜面向右下方，沿著軌道運動，軌道於鉛直面上高度「先直線下降(傾斜角 $\theta_1 (0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2})$)，再水平前進，最後直線上升(傾斜角 $\theta_2 (0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2})$)」抵達 B 點，起點與終點之水平高度相同。

假設在 C、D 兩點的軌道為弧形轉彎，且碰撞軌道時無能量損耗，則到達 C 點的前一瞬間速度原為 v_C (方向為平行斜面向右下方)，過了 C 點的下一瞬間，因為無能量損耗，所以速度轉向變為 v_C (方向為 x 軸正向)；到達 D 點的前一瞬間速度原為 v_D (方向為 x 軸正向)，過了 D 點的下一瞬間，因為無能量損耗，所以速度轉向變為 v_D (方向為平行斜面向右上方)。

因為球與地面有相對位移，故摩擦力為動摩擦力，類似「二、原理」的推導過程，因為球在垂直斜面方向上沒有加速度，故合力為 0，可得知 $N_1=mg\cos\theta_1$ 、 $N_3=mg\cos\theta_2$ ，但要加入摩擦力的作用，其中 $f_{k1}=N_1\mu_k=mg\mu_k\cos\theta_1$ (方向沿斜面向左上方)， $f_{k2}=N_2\mu_k=mg\mu_k$ (方向朝左方)， $f_{k3}=N_3\mu_k=mg\mu_k\cos\theta_2$ (方向沿斜面向左下方)。

由 $F_{\text{合力}}=mgsin\theta_1-f_{k1}=mgsin\theta_1-mg\mu_k\cos\theta_1=ma \Rightarrow a=g\sin\theta_1-g\mu_k\cos\theta_1$ 為定值，可知球做等加速度運動。因此可用等加速度運動公式得到

$$L_1\sec\theta_1=v_0t_1+\frac{1}{2}(g\sin\theta_1-g\mu_k\cos\theta_1)t_1^2, \text{ 其中 } t_1 \text{ 表示行經 } \overline{AC} \text{ 段的時間。解出}$$

$$t_1 = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2L_1 g \sec \theta_1 (g \sin \theta_1 - g \mu_k \cos \theta_1)}}{g \sin \theta_1 - g \mu_k \cos \theta_1} \text{ (負不合)}, \text{ 取 } t_1 = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2L_1 g \sec \theta_1 (g \sin \theta_1 - g \mu_k \cos \theta_1)}}{g \sin \theta_1 - g \mu_k \cos \theta_1}。$$

球在 C 點的速率 $v_C = v_0 + (g \sin \theta_1 -$

$$g \mu_k \cos \theta_1) \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2L_1 g \sec \theta_1 (g \sin \theta_1 - g \mu_k \cos \theta_1)}}{g \sin \theta_1 - g \mu_k \cos \theta_1} = \sqrt{v_0^2 + 2L_1 g \sec \theta_1 (g \sin \theta_1 - g \mu_k \cos \theta_1)}。$$

在 \overline{CD} 段的運動期間，球所受的合力為 $\overline{f_{k2}}$ ，由於 $F'_{\text{合力}} = -mg\mu_k = ma' \Rightarrow a' = -g\mu_k$

為定值，故作等加速度運動，因此所需時間 t_2 滿足 $L_2 = v_C t_2 + \frac{1}{2}(-g\mu_k)t_2^2 \Rightarrow t_2 =$

$$\frac{v_C \pm \sqrt{v_C^2 - 2L_2 g \mu_k}}{g \mu_k} \text{ (因為在 D 點的速率 } v_D = v_C + (-g\mu_k)t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{v_C - v_D}{g \mu_k} = \frac{v_C}{g \mu_k} - \frac{v_D}{g \mu_k} <$$

$$\frac{v_C}{g \mu_k}, \text{ 故正號不合)}, \text{ 取 } t_2 = \frac{v_C - \sqrt{v_C^2 - 2L_2 g \mu_k}}{g \mu_k}, \text{ 則在 D 點的速率 } v_D = v_C +$$

$$(-g\mu_k) \frac{v_C - \sqrt{v_C^2 - 2L_2 g \mu_k}}{g \mu_k} = \sqrt{v_C^2 - 2L_2 g \mu_k}。$$

最後，在上升過程中 (\overline{DB} 段) 所受之力如附圖所示，由 $F''_{\text{合力}} = mg \sin \theta_2 + f_{k3} =$

$mg \sin \theta_2 + mg \mu_k \cos \theta_2 = ma'' \Rightarrow a'' = g \sin \theta_2 + g \mu_k \cos \theta_2$ 為定值，可知球做等加速度運

動。因此可用等加速度運動公式得到 $L_3 \sec \theta_2 = v_D t_3 - \frac{1}{2}(g \sin \theta_2 + g \mu_k \cos \theta_2)t_3^2$ ，其中 t_3

表示行經 \overline{DB} 段的時間。解出 $t_3 = \frac{v_D \pm \sqrt{v_D^2 - 2L_3 \sec \theta_2 (g \sin \theta_2 + g \mu_k \cos \theta_2)}}{g \sin \theta_2 + g \mu_k \cos \theta_2}$ (因為在 B 點的速率

$$v_B = v_D - (g \sin \theta_2 + g \mu_k \cos \theta_2)t_3 \Rightarrow t_3 = \frac{v_D - v_B}{g \sin \theta_2 + g \mu_k \cos \theta_2} = \frac{v_D}{g \sin \theta_2 + g \mu_k \cos \theta_2} -$$

$$\frac{v_B}{g \sin \theta_2 + g \mu_k \cos \theta_2} > \frac{v_D}{g \sin \theta_2 + g \mu_k \cos \theta_2}, \text{ 故正號不合)}, \text{ 取 } t_3 =$$

$$\frac{v_D - \sqrt{v_D^2 - 2L_3 \sec \theta_2 (g \sin \theta_2 + g \mu_k \cos \theta_2)}}{g \sin \theta_2 + g \mu_k \cos \theta_2}, \text{ 則在 B 點的速度 } v_B = v_D - (g \sin \theta_2 +$$

$$g \mu_k \cos \theta_2) \frac{v_D - \sqrt{v_D^2 - 2L_3 \sec \theta_2 (g \sin \theta_2 + g \mu_k \cos \theta_2)}}{g \sin \theta_2 + g \mu_k \cos \theta_2} = \sqrt{v_D^2 - 2L_3 \sec \theta_2 (g \sin \theta_2 + g \mu_k \cos \theta_2)} \text{ (方向為平行斜面向右上方)}。$$

Q6&7：若同時考慮摩擦力及球轉動的情形將會如何？

A6&7：如下圖，在朝右方為 x 軸正向、朝上方為 y 軸正向的座標平面中，假設順時鐘

方向為轉動正向。一顆質量為 m 、半徑為 r (轉動慣量為 $I = \frac{2}{5}mr^2$) 的鐵球，以初速度 v_0

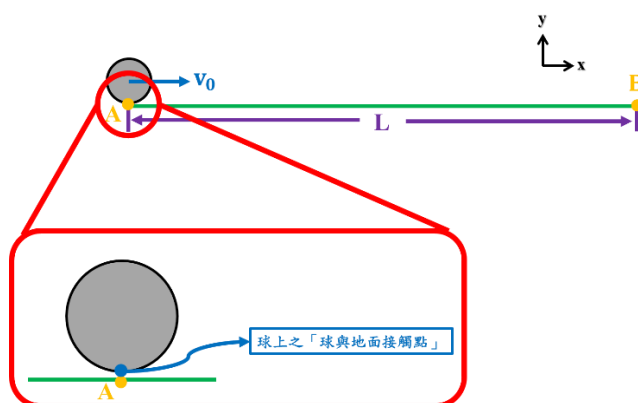
朝右、初角速度 $\omega_0 = 0$ ，沿著水平軌道運動，起點與終點的直線距離為 L ，球與地面

之間的動摩擦係數為 μ_k ，則地面施予球的正向力 $N = mg$ (方向朝上)，摩擦力 $f_k = N\mu_k =$

$mg\mu_k$ (方向朝左)，由 $F_x = ma_x$ ， $f_k = mg\mu_k = ma_x \Rightarrow a_x = g\mu_k$ (方向朝左)。由於球上之

「球與地面接觸點」的速度為「球的質心速度+此點對於質心作圓周運動的切線速

度」，故剛出發時此點的速度為 v_0 (方向朝右)，與地面之間有相對速度，所以此時地面給球的摩擦力為動摩擦力。此動摩擦力作用會使得質心速率下降(因為力與速度反向)，但使球開始順時針轉動(因其提供順時針方向的力矩)。因為此點與地面之間仍有相對運動，故動摩擦力將一直作用在球上，讓移動速率持續下降、轉動角速率持續上升，直到質心速率=轉動切線速率為止，此時球達到純滾動，地板所施予球的摩擦力為靜摩擦力，且此力對球不作功(因為每一瞬間球上之「球與地面接觸點」與地面之間皆無相對位移(位移量值=0))，球將保持等速度前進至終點。



綜上所述，假設出發時的時間點為 0，達到純滾動的時間點為 t ，達到純滾動時的位移為 $+d$ ，速度為 V (方向向右)、角速度為 ω (順時針方向)，可列出達到純滾動的瞬間，滿足下列方程組：

$$\left\{ \begin{array}{l} V^2 = v_0^2 - 2g\mu_k d \\ V = v_0 - g\mu_k t \\ \tau = f_k \times r = mrg\mu_k = I\alpha = \frac{I(\omega - \omega_0)}{t} = \frac{I\omega}{t} = \frac{2mr^2\omega}{5t} \\ V = \omega r \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{2v_0}{7g\mu_k} \\ V = \frac{5}{7}v_0 \\ \omega = \frac{5v_0}{7r} \\ d = \frac{12v_0^2}{49g\mu_k} \end{array} \right.$$

(1) 若 $d < L$ ，即 $L > \frac{12v_0^2}{49g\mu_k}$ ，此時球還未到達終點即達到純滾動，摩擦力變為靜摩擦

力且不對球做功，球開始等速前進。因此到達終點所花時間為 $\frac{2v_0}{7g\mu_k} + \frac{L-d}{V} =$

$$\frac{2v_0}{7g\mu_k} + \frac{L - \frac{12v_0^2}{49g\mu_k}}{\frac{5}{7}v_0}, \text{ 此時速度為 } V = \frac{5}{7}v_0 \text{ (方向朝 } x \text{ 軸正向)}$$

(2) 若 $d = L$ ，即 $L = \frac{12v_0^2}{49g\mu_k}$ ，則球到達終點時恰好達到純滾動，因此到達終點所花時

間為 $\frac{2v_0}{7g\mu_k}$ ，此時速度為 $V = \frac{5}{7}v_0$ (方向朝 x 軸正向)

(3) 若 $d > L$ ，即 $L < \frac{12v_0^2}{49g\mu_k}$ ，此時球在達到純滾動前就到達終點，因為整段途中摩擦

力皆為 f_k (方向向左)，所以為等加速度運動。因此可列出方程組：

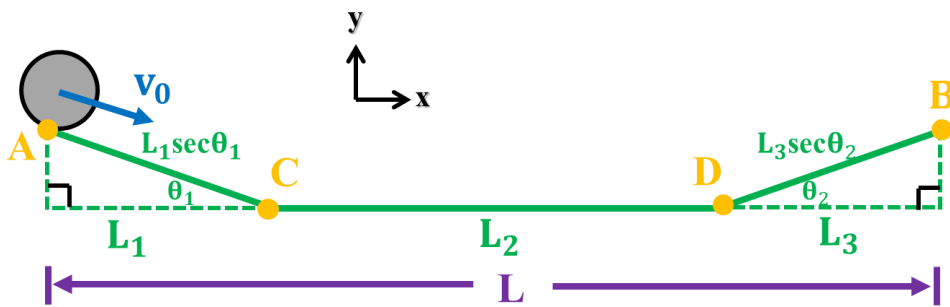
$$\begin{cases} V^2 = v_0^2 - 2g\mu_k L \\ V = v_0 - g\mu_k t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = \sqrt{v_0^2 - 2g\mu_k L} (\text{因為 } V \text{ 的方向朝 } x \text{ 軸正向，故取正}) \\ t = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2g\mu_k L}}{g\mu_k} \end{cases}$$

如下圖，在與上同樣的座標平面即正負方向定義上，同樣一顆鐵球，以初速度 v_0 ，方向為平行斜面向右下方、初角速度 $\omega_0 = 0$ ，沿著軌道運動，軌道於鉛直面上高度「先直線下降(傾斜角 $\theta_1 (0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2})$)，再水平前進，最後直線上升(傾斜角

$\theta_2 (0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2})$)」抵達 B 點，起點與終點之水平高度相同。起點與終點的直線距離為

L ，球與地面之間的動摩擦係數為 μ_k ，則如同 Q7 的討論方法，只是在此我們再加入滾動的因素，並且我們討論到達 B 點時球並未達到純滾動的情形(若在途中已達到純滾動，則在剩下的路徑中，摩擦力(可能為靜摩擦力或無摩擦力)對球不作功，此種情況即為「二、原理」所討論的，因此剩下的路段所經過的時間、速率的變化等就可用「二、原理」的方法計算)。由類似前面的討論方式，我們可列出下列方程組(重力的分量及正向力皆通過質心，故不造成力矩)：

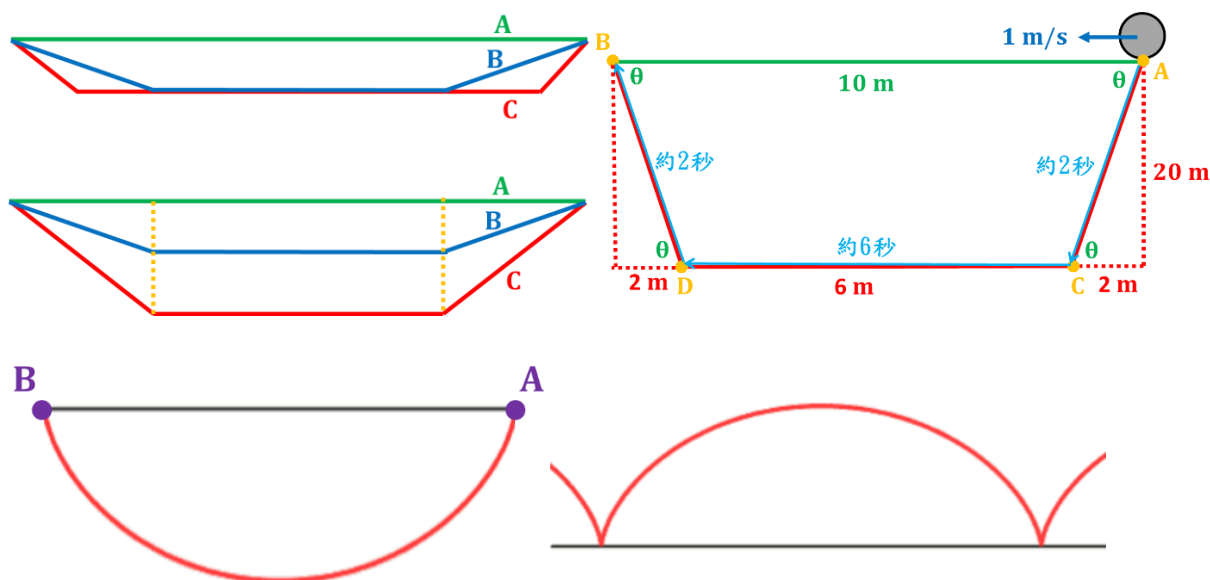
$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 \sec \theta_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} (g \sin \theta_1 - g \mu_k \cos \theta_1) t_1^2 \\ v_C = v_0 + (g \sin \theta_1 - g \mu_k \cos \theta_1) t_1 \\ \tau_1 = f_{k_1} \times r = m r g \mu_k \cos \theta_1 = I \alpha_1 = \frac{I(\omega_C - \omega_0)}{t_1} = \frac{I \omega_C}{t_1} = \frac{2 m r^2 \omega_C}{5 t_1} \\ L_2 = v_C t_2 + \frac{1}{2} (-g \mu_k) t_2^2 \\ v_D = v_C + (-g \mu_k) t_2 \\ \tau_2 = f_{k_2} \times r = m r g \mu_k = I \alpha_2 = \frac{I(\omega_D - \omega_C)}{t_2} = \frac{2 m r^2 (\omega_D - \omega_C)}{5 t_2} \\ L_3 \sec \theta_2 = v_D t_3 - \frac{1}{2} (g \sin \theta_2 + g \mu_k \cos \theta_2) t_3^2 \\ v_B = v_D - (g \sin \theta_2 + g \mu_k \cos \theta_2) t_3 \\ \tau_3 = f_{k_3} \times r = m r g \mu_k \cos \theta_2 = I \alpha_3 = \frac{I(\omega_B - \omega_D)}{t_3} = \frac{2 m r^2 (\omega_B - \omega_D)}{5 t_3} \end{array} \right.$$



整個運動所花費總時間 $=t_1 + t_2 + t_3$ ，到達終點時的速率為 v_B 、角速率為 ω_B 。

Q8：如果有一個軌道可以使鋼珠到達終點的時間最小，請問它是什麼形狀？

A8：若兩側斜面傾斜角皆為 0° ，則即為水平軌道，鋼珠到達終點的時間並非最小(由雙珠競走實驗即可知)，當傾斜角度越來越大，鋼珠能在更短時間內將重力位能轉換為動能，因此到達軌道中央的水平部分時能以更快的速度通過。然而，越大的角度代表著鋼珠必須走更大的路徑長(因為三角形較短的兩邊長之和 $>$ 第三邊邊長，如下方左上圖所示)，但重力頂多只能給予 g 的加速度，若角度太大，則由重力位能轉換而來的動能使速率增加的幅度卻不比路徑長的增加(也就是說，雖然速率增加，但也頂多每秒鐘增加 $g \text{ m/s}$ ，若路徑長增加太多，反而要花更多時間才能跑完)，例如當斜面傾斜角很大時(接近 90° ，如下方右上圖所示，若直接走 \overline{AB} 軌道，所需時間為 10 秒，但若走 $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$ 的軌道，則也需要大約 10 秒的時間，並不是最快路徑，因此角度不能太過小，也不能太過大。由網路上的資料，使鋼珠到達終點的時間最小的軌道為「最速曲線(路徑)」(如下方左下圖所示)，也就是「擺線」，它是透過微積分中的變分法所證明，其形狀為「某個圓上的一點，在圓沿直線運動時候所滑過的軌跡」(如下方右下圖所示)。



七、心得及建議

本次實驗是力學演示實驗，不用作預報(還好還好~不然我真的快來不及作完了！上次的向心力實驗結報就花了好幾個晚上，直到演示實驗前一天才印出來)，但屬於 09 班的室友已作過演示實驗，他有向我展示他研究的實驗器材——羅馬拱橋，也因此我有事先到實驗網站上大概看看有哪些物品可以「玩」，除了羅馬拱橋以外，我還看到牛頓擺、平衡鳥、雲霄飛車、珠鍊噴泉、隨意平衡等等，好多跟力學運動有關的玩具啊！(果然是要來「玩物理」的)其中我最想研究的器材其實是彈性碰撞與非彈性碰撞球，但是到了實驗現場好像沒找到(還是說其實只有我沒看到)，最後我選擇了很類似的實驗器材——雙珠競走，班上同學在器材邊圍成了一圈，因為我們發現：同一軌道上，不同質量的球到達終點所需時間竟然不同(我們拿固定一顆球放在另外一個軌道來當作固定變因，以便於比較)，我以前曾經有用過 Tracker 軟體分析球的運動情形(軌跡)，這剛好可以拿來運用、量化數據！於是我最後留下來拍攝慢動作影片，拍了幾部後發現竟然有

一小段時間是以正常速度拍攝，於是...我只好再從頭來過(還好有記得放基準物品(直尺)，不然又得重來)。經過了快一個小時，教室裡的學生只剩下我和另一個也對雙珠競走有興趣的同學，我們互相討論了一下，都覺得不同質量的球在同一個軌道上的到達時間隨質量增加而增加很奇怪(我就覺得這個實驗器材有很多可以討論的現象)。實驗回來後，我試著找回兩年前用 Tracker 軟體的手感，利用「自動追蹤」的功能找出球的各項運動量，但更多問題又緊接而來了：為什麼球的到達速率會不同？同一軌道質量越大的球到達時速率越小，同樣質量不同軌道也有不同的到達速率。究竟是什麼原因讓我花這麼多時間在它身上啊？

(我目前還尚未想出原因的問題有：

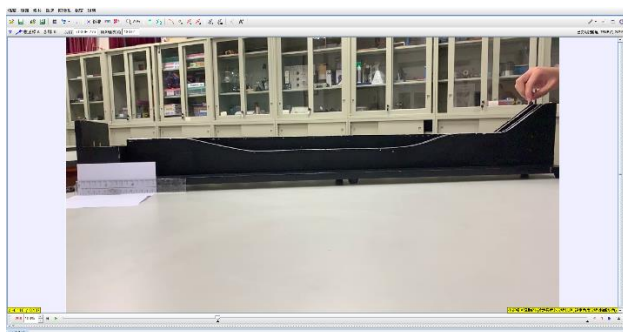
1. 摩擦力做負功，使得速率減慢，而「大球速率被減慢得較多(受到摩擦力的影響較大)」
2. 同質量的球，在不同軌道上運動，受到摩擦力作負功，負功大小應為「動摩擦力量值 \times 軌道長」，但明明乙軌道的路徑較長，抵達終點時的速率卻是「乙軌道 $>$ 甲軌道」)

八、參考資料

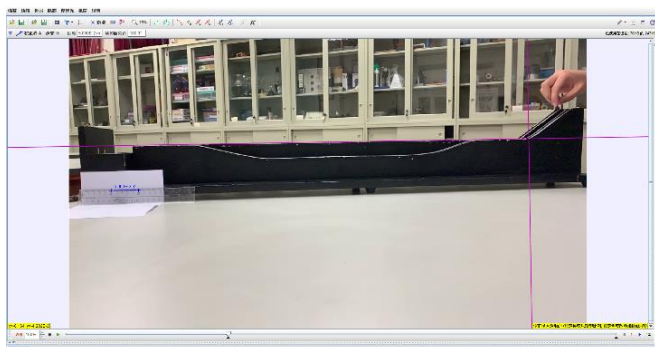
1. 神奇！兩點之間最快的路徑竟是曲線？你知道為什麼嗎！科普·網址：
<https://kknews.cc/zh-tw/science/26oevlg.html>
2. 兩點之間竟然不是直線最快？只有學霸才看得懂這些顛覆認知的定理·網址：
<https://kknews.cc/news/rbn8gqn.html>
3. [力學] 困惑我多年的純滾動？·Kiwi 的物理教室·網址：
http://kiwiphysics.blogspot.com/2014/09/blog-post_60.html
4. 轉動慣量列表·維基百科，自由的百科全書·網址：
<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%BD%89%E5%8B%95%E6%85%A3%E9%87%8F%E5%88%97%E8%A1%A8>
5. 國立清華大學普通物理實驗室網站—實驗 4:運動學與力學篇(Demonstrations A)·網址：
<http://www.phys.nthu.edu.tw/~gplab/exp004.html>

九、附錄 A(Tracker 軟體分析過程)

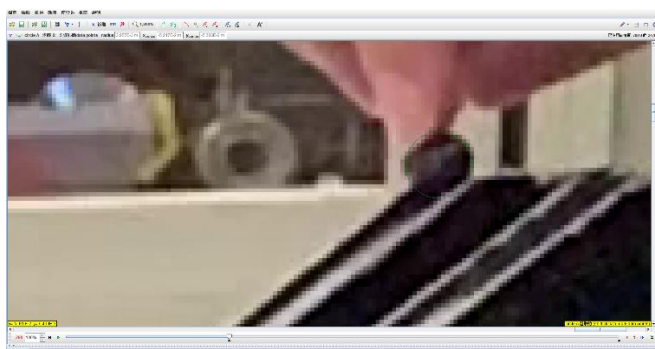
1. 開啟 Tracker 軟體，將慢動作影片匯入



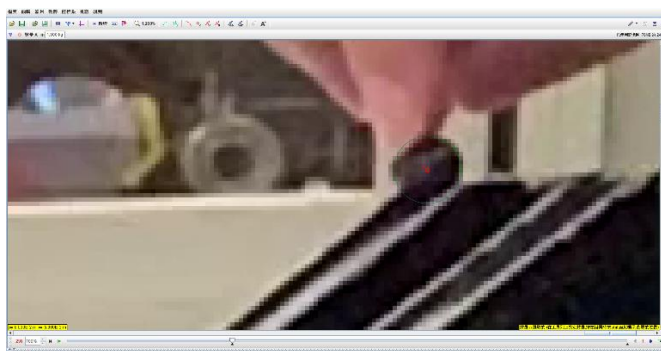
2. 將坐標系定出(x 軸正向平行甲軌道指向左側、y 軸正向垂直甲軌道指向上方)，校正桿校正使畫面比例為實際長度(直尺的 5cm)



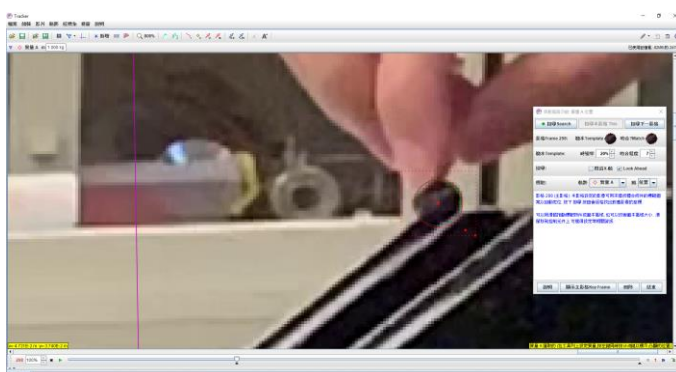
3. 利用 circle fitter 找出球心位置



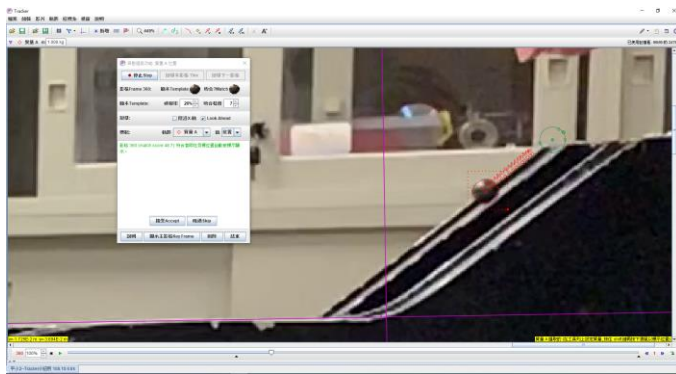
4. 新增質點 A，將此質點位置設定在球心位置



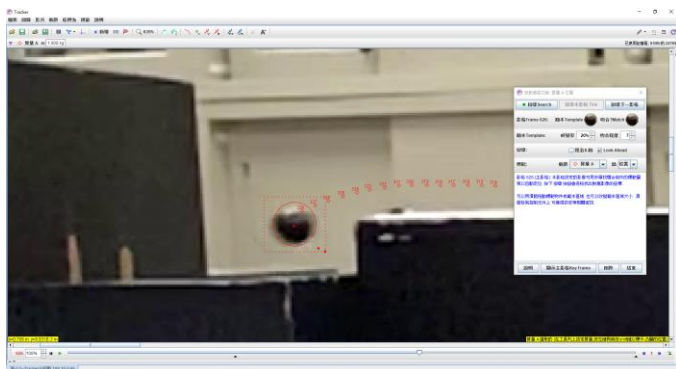
5. 開啟自動追蹤功能，選定範本，調整吻合程度至 7



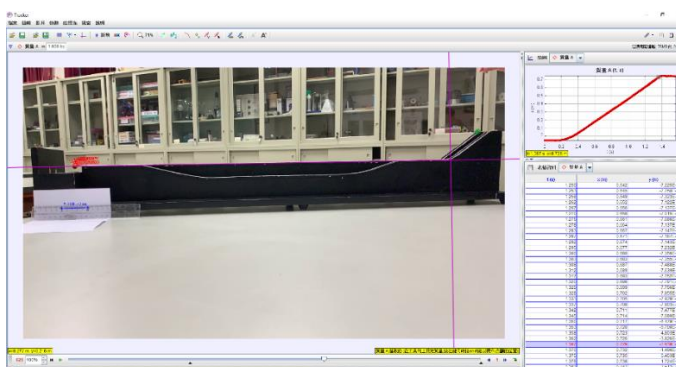
6. 按下「搜尋 Search」即開始自動追蹤運動時球心的位置



7. 持續自動追蹤，直到球滾過終點即可停止追蹤

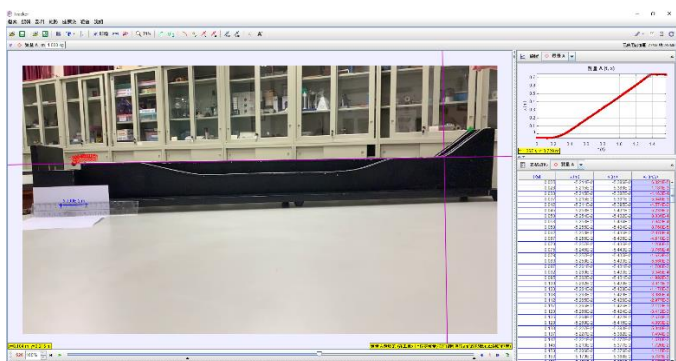


8. 打開右側的顯示欄位，選取「質量 A」，即有各個時間點對應球的(x,y)座標位置



9. 一個接一個影格挑選出手放開球(球開始移動)的時間點，以及球抵達終點的時間點，將兩個時間點的時間差算出，即為「抵達所需時間」(表 2)

10. 開啟「表格資料」，點選「 v_x 」，再按下「結束」，即可得到各時間點球的 x 軸速度，找到球抵達終點時的 v_x ，即為「球到達時的 x 軸方向速度」(表 3)



11. 另外，在視窗右下方的表格按下滑鼠右鍵，選擇「分析」，軟體會畫出各種可能關係圖，如下圖中由上而下的曲線分別為「 v_x-t 關係圖」、「 $x-t$ 關係圖」以及「 $y-t$ 關係圖」



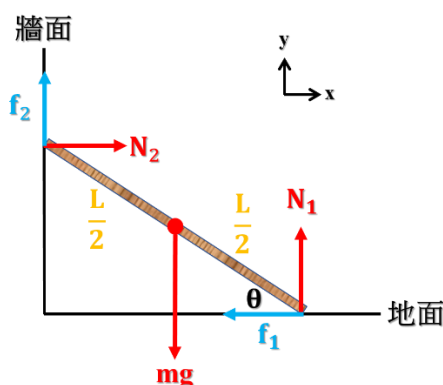
12. 重複上述動作，將每部影片(共 12 部)處理後所得數據紀錄在表 2、表 3 中

十、Bonus~~~~~

Q：如下圖所示，已知一長度為 L 的梯子靠在牆邊，與地面夾角為 θ ，牆壁及地板都不是光華的，梯子質量為 M 。(以下為未知數)地板給予的正向力及摩擦力假設為 N_1 和 f_1 ，牆壁給予的正向力及摩擦力假設為 N_2 和 f_2 。由 x 方向、 y 方向靜力平衡和力矩平衡可以列出 3 條方程式

$$\begin{cases} N_1 + f_2 = mg \\ f_1 = N_2 \\ \frac{L}{2} N_1 \cos \theta = \frac{L}{2} f_1 \sin \theta + \frac{L}{2} N_2 \sin \theta + \frac{L}{2} f_2 \cos \theta \end{cases}$$

但是有 4 個未知的力，少一個方程式。請試著猜猜看如果想求出 4 種未知的力大小，缺少的最後一個條件為什麼，或者是我們少考慮什麼(除了摩擦係數以外)？



A：首先，我先試著帶入數值，若有多組數值皆符合常理、所示之力圖及方程式，則代表缺少最後一個條件，而並非我們少考慮到某個因素。若帶入 $L=10(m)$ 、 $mg=15(N)$ 、

$\theta = \frac{\pi}{6}$ 、 $N_1 = 10(\text{N})$ 、 $N_2 = f_1 = \frac{5\sqrt{3}}{2}(\text{N})$ 、 $f_2 = 5(\text{N})$ ，則符合(可實際達成靜力平衡)；若

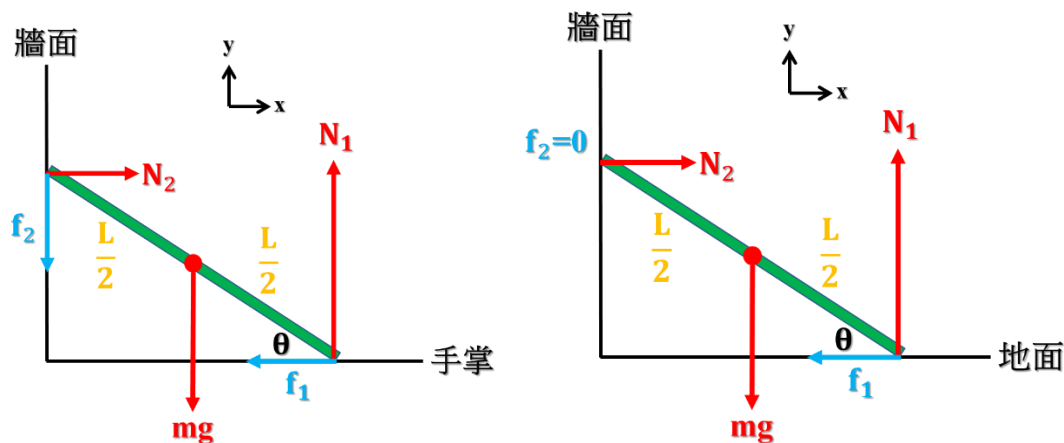
帶入 $L=20(\text{m})$ 、 $mg=30(\text{N})$ 、 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 、 $N_1 = 20(\text{N})$ 、 $N_2 = f_1 = \frac{5\sqrt{3}}{3}(\text{N})$ 、 $f_2 = 10(\text{N})$ ，也可符合(也可實際達成靜力平衡)，故我們應該是缺少某個條件。

我認為在此靜力平衡的狀況下， f_2 的方向並不一定朝向 y 軸正向，可能有以下 3 種情形：

- (1) f_2 的方向朝 y 軸正向：此時我們必須給予另一個條件(例如已知牆面光滑無摩擦力，或是已知梯子正要滑落並給予靜摩擦係數)才能解出實際各力的值
- (2) f_2 的方向朝 y 軸負向：想像將一支筆一端放在手上，一端靠在牆壁上，用手垂直將筆向上推，如左下圖所示。則手掌對筆的正向力 N_1 增加，若其超過 mg ，則筆有向上移動的趨勢，此時牆壁對筆施予靜摩擦力向下，可與重力一起平衡住 N_1 ，因此筆依然保持靜止。而在此題目中，地面所施予的正向力 N_1 也可能較大，使 f_2 方向朝下，但整個梯子仍可保持靜力平衡。此時我們可列得下列三條方程式：

$$\begin{cases} N_1 = mg + f_2 \\ f_1 = N_2 \\ \frac{L}{2}N_1\cos\theta + \frac{L}{2}f_2\cos\theta = \frac{L}{2}f_1\sin\theta + \frac{L}{2}N_2\sin\theta \end{cases}$$

然而，我們依然有 4 個未知數 N_1 、 N_2 、 f_1 、 f_2 ，但只有 3 條方程式，因此我們還是需要另一個條件(例如已知牆面光滑無摩擦力，或是已知梯子正要滑落並給予靜摩擦係數)才能解出實際各力的值



- (3) $f_2 = 0$ ，此時力圖如右上圖所示，即使牆面粗糙(不光滑)，但若 $N_1 = mg$ ，此時的梯子只是輕輕靠在牆面上，沒有要向上或向下滑動的趨勢，因此連靜摩擦力都沒有，梯子依然可保持靜力平衡(「有正向力但無摩擦力」的情況是可能發生的：比如說拿一支筆放在桌上，此時筆有受到桌子給予的正向力，但沒有任何摩擦力)。此時可列得具有 3 個未知數的三條方程式：

$$\begin{cases} N_1 = mg \\ f_1 = N_2 \\ \frac{L}{2}N_1\cos\theta = \frac{L}{2}f_1\sin\theta + \frac{L}{2}N_2\sin\theta \end{cases}$$

可解得

$$\begin{cases} N_1 = mg \\ f_1 = N_2 = \frac{mg\cot\theta}{2} \end{cases}$$

因此我認為無論牆面是否光滑， f_2 皆為 0（國高中時就直接假設牆面光滑了）。

十一、附錄 B(原本在「二、原理」的想法)

初始速度相同的兩顆球在具相同水平位置的起點和終點，但路徑不同的軌道上競走。其中一球所受合力為 0（不考慮空氣阻力及摩擦力），因此不受加速度影響（加速度 $=\vec{0}$ ），另一球軌道於鉛直面上高度先下降後再上升，如圖 1 所示。假設兩顆球分別稱為甲球、乙球，質量分別為 m_1 、 m_2 ，兩球皆從起點(A 點)出發，初速皆為 \vec{v}_0 (方向朝左)，前往終點(B 點)，其中甲球沿著 \overline{AB} 上的軌道，乙球沿著「先直線下降(傾斜角 θ_1 ($0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$))，再水平前進，最後直線上升(傾斜角 θ_2 ($0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$))抵達 B 點」的軌道行進。

假設 $\overline{AB} = S$ ，乙球下降過程的水平位移為 S_1 ，水平移動過程位移為 S_2 ，上升過程的水平位移為 S_3 ，則甲球在整個過程中所受之合力為 0，故作等速運動，抵達所花費時間為 $t_{\text{甲}} = \frac{S}{v_0}$ 。

乙球在下降過程中(\overline{AC} 段)所受之力有重力 m_2g (可分解為平行斜面的分力 $m_2g\sin\theta_1$ (方向沿斜面朝左下方)及垂直斜面的分力 $m_2g\cos\theta_1$ (方向垂直斜面朝右下方))，以及斜面施予的正向力 N_1 (方向垂直斜面朝左上方)。因為乙球在垂直斜面方向上沒有加速度，故合力為 0，可得知 $N_1 = m_2g\cos\theta_1$ ；在平行斜面的方向上，因為不考慮摩擦力的影響，所以其所受合力為 $m_2g\sin\theta_1$ (方向沿斜面朝左下方)，此力又可被分解為 x 軸的分力 $m_2g\sin\theta_1\cos\theta_1$ (方向朝 x 軸正向)及 y 軸的分力 $m_2g\sin^2\theta_1$ (方向朝 y 軸負向)。

我們只需討論 x 軸的運動即可得到行經 \overline{AC} 段的時間：

由 $F_{x\text{軸合力}} = m_2g\sin\theta_1\cos\theta_1 = m_2a_x \Rightarrow a_x = g\sin\theta_1\cos\theta_1$ 為定值，可知球做等加速度運

動。因此可用等加速度運動公式得到 $S_1 = v_0t_1 + \frac{1}{2}g\sin\theta_1\cos\theta_1t_1^2$ ，其中 t_1 表示行經 \overline{AC} 段的

時間。解出 $t_1 = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2S_1g\sin\theta_1\cos\theta_1}}{g\sin\theta_1\cos\theta_1}$ (負不合)，取 $t_1 = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2S_1g\sin\theta_1\cos\theta_1}}{g\sin\theta_1\cos\theta_1}$ 。在 C 點的 x

軸速度 $v_{x_C} = v_0 + (g\sin\theta_1\cos\theta_1)t_1 = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2S_1g\sin\theta_1\cos\theta_1}}{g\sin\theta_1\cos\theta_1} = \sqrt{v_0^2 + 2S_1g\sin\theta_1\cos\theta_1}$ (方向朝 x 軸正向)。

在 \overline{CD} 段的運動期間，球所受的合力為 $0(|\overline{N_2}|=|\overline{m_2g}|)$ ，故作等速度運動，因此所需時間 $t_2 = \frac{S_2}{v_{xc}} = \frac{S_2}{\sqrt{v_0^2 + 2S_1 g \sin \theta_1 \cos \theta_1}}$ ，在D點的x軸速度 $v_{xD} = v_{xc} = \sqrt{v_0^2 + 2S_1 g \sin \theta_1 \cos \theta_1}$ （方向朝x軸正向）。

最後，在上升過程中(\overline{DB} 段)所受之力有重力 m_2g (可分解為平行斜面的分力 $m_2g \sin \theta_2$ (方向沿斜面朝右下方)及垂直斜面的分力 $m_2g \cos \theta_2$ (方向垂直斜面朝左下方))，以及斜面施予的正向力 N_3 (方向垂直斜面朝右上方)。因為乙球在垂直斜面方向上沒有加速度，故合力為0，可得知 $N_3 = m_2g \cos \theta_2$ ；在平行斜面的方向上，因為不考慮摩擦力的影響，所以其所受合力為 $m_2g \sin \theta_2$ (方向沿斜面朝右下方)，此力又可被分解為x軸的分力 $m_2g \sin \theta_2 \cos \theta_2$ (方向朝x軸負向)及y軸的分力 $m_2g \sin^2 \theta_2$ (方向朝y軸負向)。

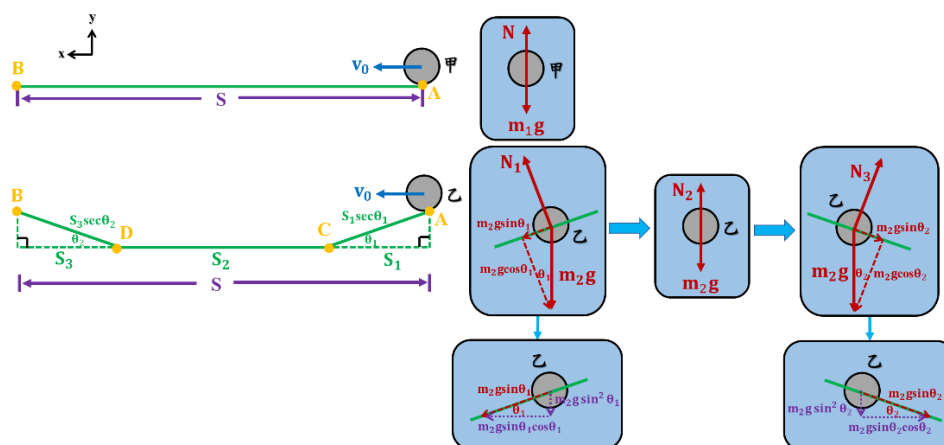
我們只需討論x軸的運動即可得到行經 \overline{DB} 段的時間：

由 $F_{x \text{ 軸合力}} = m_2g \sin \theta_2 \cos \theta_2 = m_2a'_x \Rightarrow a'_x = g \sin \theta_2 \cos \theta_2$ 為定值，可知球做等加速度運動。另外，由於整個過程($A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$)中乙球只受到重力及正向力(皆為保守力)，故乙球的力學能守恆，而A、B兩點位於同水平高度，因此重力位能相同，所以在兩點的動能也一樣(皆為 $\frac{1}{2}m_2v_0^2$)，可得出在B點的速度=在A點的速度= v_0 (方向朝x軸正向)。因此可用等加速度運動公式得到 $v_0 = v_{xD} + g \sin \theta_2 \cos \theta_2 t_3$ ，其中 t_3 表示行經 \overline{DB} 段的時間。解出 $t_3 = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2S_1 g \sin \theta_1 \cos \theta_1} - v_0}{g \sin \theta_2 \cos \theta_2}$ 。

綜上所述，乙球由A點到達B點所需時間為 $t_{\text{乙}} = t_1 + t_2 + t_3 =$

$$\frac{\sqrt{v_0^2 + 2S_1 g \sin \theta_1 \cos \theta_1} - v_0}{g \sin \theta_1 \cos \theta_1} + \frac{S_2}{\sqrt{v_0^2 + 2S_1 g \sin \theta_1 \cos \theta_1}} + \frac{\sqrt{v_0^2 + 2S_1 g \sin \theta_1 \cos \theta_1} - v_0}{g \sin \theta_2 \cos \theta_2}。$$

圖 1



例如，當 $S = 2 + 2\sqrt{3}$ ， $S_1 = S_3 = \sqrt{3}$ ， $S_2 = 2$ ， $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{6}$ ， $v_0 = 1$ 時， g 以

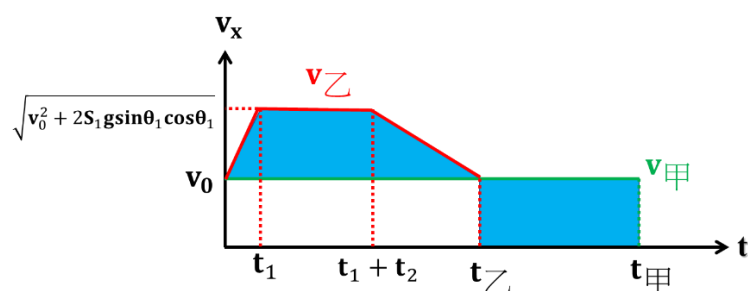
$10(\text{m/s}^2)$ 帶入，可得到 $2 + 2\sqrt{3} = t_{\text{甲}} > t_{\text{乙}} = \frac{4\sqrt{3}}{5} + \frac{1}{2}$ ；又如當 $S = 4$ ， $S_1 = S_3 = 1$ ，

$S_2 = 2$ ， $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{3}$ ， $v_0 = 1$ 時， g 以 $10(\text{m/s}^2)$ 帶入，可得到 $4 = t_{\text{甲}} > t_{\text{乙}} =$

$\frac{4\sqrt{1+5\sqrt{3}}-4}{5\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{1+5\sqrt{3}}} \doteq 1.6172$ 。事實上，甲球與乙球在運動過程中的 $v_x - t$ 圖如圖 2 所示

(因我們只需要看 x 軸方向的運動即可得出時間)，因為乙球在途中會被加速，故整個過程中 v_x 量值 $\geq v_0$ ，所以無論 m_1 、 m_2 、 S 、 S_1 、 S_2 、 S_3 、 θ_1 、 θ_2 、 v_0 為何，乙球理論上都會比甲球早到。

圖 2 運動過程中甲、乙兩球的速度隨時間變化圖(圖中 2 塊藍色區域面積相同)

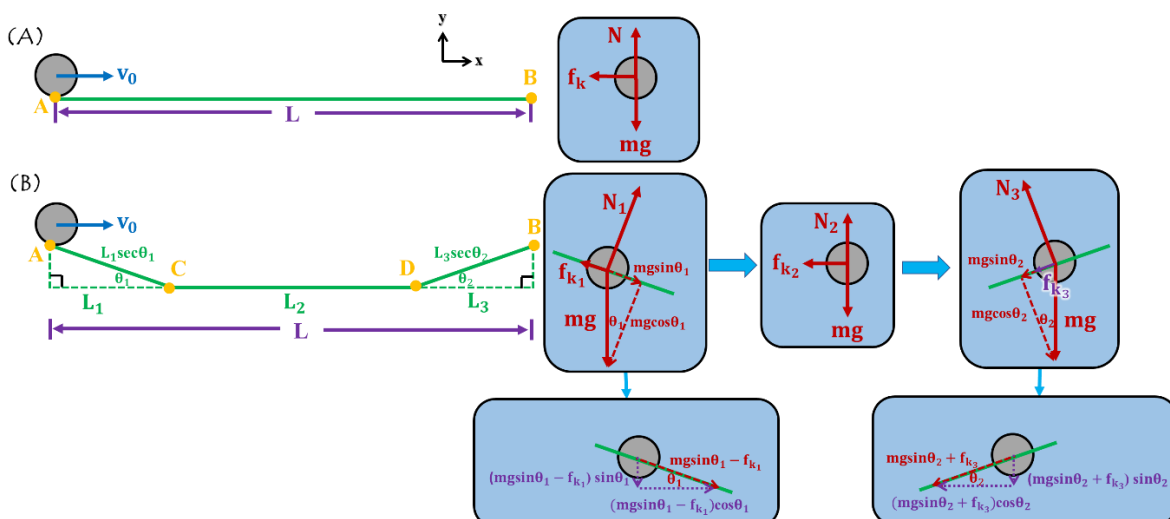


十二、附錄 C(原本在「六、問題與討論」Q₇的想法)

理論上，若考慮地面摩擦力及空氣阻力，但不考慮球的轉動(即當作球未轉動來計算)。

如下圖(A)，在朝右方為 x 軸正向、朝上方為 y 軸正向的座標平面中，一顆質量為 m 、半徑為 r 的鐵球，以初速度 v_0 朝右沿著水平軌道運動，起點與終點的直線距離為 L ，球與地面之間的動摩擦係數為 μ_k (因為球與地面有相對位移，故摩擦力為動摩擦力)，則地面施予球的正向力 $N = mg$ (方向朝上)，摩擦力 $f_k = N\mu_k = mg\mu_k$ (方向朝左)。由 $F_x = ma_x$ ， $f_k = mg\mu_k = ma_x \Rightarrow a_x = g\mu_k$ (方向朝左)為定值，故球作等加速度運動，令球到達終點時的速度為 V (方向朝右)，可列出 $V^2 = v_0^2 - 2g\mu_k L \Rightarrow V = \sqrt{v_0^2 - 2g\mu_k L}$ 。再由

$$V = \sqrt{v_0^2 - 2g\mu_k L} = v_0 + (-g\mu_k)t, \text{ 解 } t \text{ 可得 } t = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2g\mu_k L}}{g\mu_k}。$$



如上圖(B)，在同樣的坐標系中，同一顆球以同樣初速度沿著軌道運動，軌道於鉛直面上高度「先直線下降(傾斜角 $\theta_1 (0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2})$)，再水平前進，最後直線上升(傾斜角 $\theta_2 (0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2})$)」抵達B點，起點與終點之水平高度相同。假設過程中球皆無離開地面(即一開始並非作水平拋射)，因為球與地面有相對位移，故摩擦力為動摩擦力，類似「二、原理」的推導過程，因為球在垂直斜面方向上沒有加速度，故合力為0，可得知 $N_1 = mg\cos\theta_1$ 、 $N_3 = mg\cos\theta_2$ ，但要加入摩擦力的作用，其中 $f_{k1} = N_1\mu_k = mg\mu_k\cos\theta_1$ (方向沿斜面朝左上方)， $f_{k2} = N_2\mu_k = mg\mu_k$ (方向朝左方)， $f_{k3} = N_3\mu_k = mg\mu_k\cos\theta_2$ (方向沿斜面朝左下方)。

我們只需討論x軸的運動即可得到行經 \overline{AC} 段的時間：

由 $F_{x\text{軸合力}} = mg\sin\theta_1\cos\theta_1 - mg\mu_k\cos^2\theta_1 = ma_x \Rightarrow a_x = g\sin\theta_1\cos\theta_1 - g\mu_k\cos^2\theta_1$ 為定值，

可知球做等加速度運動。因此可用x軸的等加速度運動公式得到

$L_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} (g\sin\theta_1\cos\theta_1 - g\mu_k\cos^2\theta_1) t_1^2$ ，其中 t_1 表示行經 \overline{AC} 段的時間。解出

$$t_1 = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2L_1(g\sin\theta_1\cos\theta_1 - g\mu_k\cos^2\theta_1)}}{g\sin\theta_1\cos\theta_1 - g\mu_k\cos^2\theta_1} \text{ (負不合), 取 } t_1 = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2L_1(g\sin\theta_1\cos\theta_1 - g\mu_k\cos^2\theta_1)}}{g\sin\theta_1\cos\theta_1 - g\mu_k\cos^2\theta_1} \text{。在}$$

C點的x軸速度 $v_{xc} = v_0 + (g\sin\theta_1\cos\theta_1 - g\mu_k\cos^2\theta_1) t_1 = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2L_1(g\sin\theta_1\cos\theta_1 - g\mu_k\cos^2\theta_1)}}{g\sin\theta_1\cos\theta_1 - g\mu_k\cos^2\theta_1} = \sqrt{v_0^2 + 2L_1(g\sin\theta_1\cos\theta_1 - g\mu_k\cos^2\theta_1)}$ (方向朝x軸正向)。

在 \overline{CD} 段的運動期間，球所受的合力為 f_{k2} ， $F'_{x\text{軸合力}} = mg\mu_k = ma'_x \Rightarrow a'_x = g\mu_k$ 為

定值，故作等加速度運動，因此所需時間 t_2 滿足 $L_2 = v_{xc} t_2 + \frac{1}{2} (-g\mu_k) t_2^2 \Rightarrow t_2 =$

$$\frac{v_{xc} \pm \sqrt{v_{xc}^2 - 2L_2 g\mu_k}}{g\mu_k} \text{ (因為在D點的x軸速度 } v_{xD} = v_{xc} + (-g\mu_k) t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{v_{xc} - v_{xD}}{g\mu_k} = \frac{v_{xc}}{g\mu_k} -$$

$\frac{v_{xD}}{g\mu_k} < \frac{v_{xC}}{g\mu_k}$ ，故正號不合)，取 $t_2 = \frac{v_{xC} - \sqrt{v_{xC}^2 - 2L_2g\mu_k}}{g\mu_k}$ ，則在 D 點的 x 軸速度 $v_{xD} = v_{xC} +$

$$(-g\mu_k) \frac{v_{xC} - \sqrt{v_{xC}^2 - 2L_2g\mu_k}}{g\mu_k} = \sqrt{v_{xC}^2 - 2L_2g\mu_k} \text{ (方向朝 x 軸正向)}。$$

最後，在上升過程中(\overline{DB} 段)所受之力如附圖所示，我們只需討論 x 軸的運動即可得到行經 \overline{DB} 段的時間：

由 $F''_{x \text{ 軸合力}} = mg\sin\theta_2\cos\theta_2 + mg\mu_k\cos^2\theta_2 = ma''_x \Rightarrow a''_x = g\sin\theta_2\cos\theta_2 + g\mu_k\cos^2\theta_2$ 為定

值，可知球做等加速度運動。因此可用 x 軸的等加速度運動公式得到 $L_3 = v_{xD}t_3 -$

$\frac{1}{2}(g\sin\theta_2\cos\theta_2 + g\mu_k\cos^2\theta_2)t_3^2$ ，其中 t_3 表示行經 \overline{DB} 段的時間。解出

$$t_3 = \frac{v_{xD} \pm \sqrt{v_{xD}^2 - 2L_3(g\sin\theta_2\cos\theta_2 + g\mu_k\cos^2\theta_2)}}{g\sin\theta_2\cos\theta_2 + g\mu_k\cos^2\theta_2} \text{ (因為在 B 點的 x 軸速度 } v_{xB} = v_{xD} - (g\sin\theta_2\cos\theta_2 +$$

$$g\mu_k\cos^2\theta_2)t_3 \Rightarrow t_3 = \frac{v_{xD} - v_{xB}}{g\sin\theta_2\cos\theta_2 + g\mu_k\cos^2\theta_2} = \frac{v_{xD}}{g\sin\theta_2\cos\theta_2 + g\mu_k\cos^2\theta_2} - \frac{v_{xB}}{g\sin\theta_2\cos\theta_2 + g\mu_k\cos^2\theta_2} >$$

$$\frac{v_{xD}}{g\sin\theta_2\cos\theta_2 + g\mu_k\cos^2\theta_2} \text{，故正號不合)，取 } t_3 = \frac{v_{xD} - \sqrt{v_{xD}^2 - 2L_3(g\sin\theta_2\cos\theta_2 + g\mu_k\cos^2\theta_2)}}{g\sin\theta_2\cos\theta_2 + g\mu_k\cos^2\theta_2} \text{，則在 B}$$

點的 x 軸速度 $v_{xB} = v_{xD} - (g\sin\theta_2\cos\theta_2 +$

$$g\mu_k\cos^2\theta_2) \frac{v_{xD} - \sqrt{v_{xD}^2 - 2L_3(g\sin\theta_2\cos\theta_2 + g\mu_k\cos^2\theta_2)}}{g\sin\theta_2\cos\theta_2 + g\mu_k\cos^2\theta_2} = \sqrt{v_{xD}^2 - 2L_3(g\sin\theta_2\cos\theta_2 + g\mu_k\cos^2\theta_2)}$$

(方向朝 x 軸正向)。

綜上所述，乙球由 A 點到達 B 點所需時間為

$$\begin{aligned} T = t_1 + t_2 + t_3 &= \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2L_1(g\sin\theta_1\cos\theta_1 - g\mu_k\cos^2\theta_1)}}{g\sin\theta_1\cos\theta_1 - g\mu_k\cos^2\theta_1} + \frac{v_{xC} - \sqrt{v_{xC}^2 - 2L_2g\mu_k}}{g\mu_k} + \frac{v_{xD} - \sqrt{v_{xD}^2 - 2L_3(g\sin\theta_2\cos\theta_2 + g\mu_k\cos^2\theta_2)}}{g\sin\theta_2\cos\theta_2 + g\mu_k\cos^2\theta_2} \\ &= \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2L_1(g\sin\theta_1\cos\theta_1 - g\mu_k\cos^2\theta_1)}}{g\sin\theta_1\cos\theta_1 - g\mu_k\cos^2\theta_1} + \frac{\sqrt{v_0^2 + 2L_1(g\sin\theta_1\cos\theta_1 - g\mu_k\cos^2\theta_1)} - \sqrt{v_0^2 + 2L_1(g\sin\theta_1\cos\theta_1 - g\mu_k\cos^2\theta_1) - 2L_2g\mu_k}}{g\mu_k} + \\ &\quad \frac{\sqrt{v_0^2 + 2L_1(g\sin\theta_1\cos\theta_1 - g\mu_k\cos^2\theta_1) - 2L_2g\mu_k} - \sqrt{v_0^2 + 2L_1(g\sin\theta_1\cos\theta_1 - g\mu_k\cos^2\theta_1) - 2L_2g\mu_k - 2L_3(g\sin\theta_2\cos\theta_2 + g\mu_k\cos^2\theta_2)}}{g\sin\theta_2\cos\theta_2 + g\mu_k\cos^2\theta_2}。 \end{aligned}$$

到達終點時的 x 軸速率為 $\sqrt{v_{xD}^2 - 2L_3(g\sin\theta_2\cos\theta_2 + g\mu_k\cos^2\theta_2)} =$

$$\sqrt{v_0^2 + 2L_1(g\sin\theta_1\cos\theta_1 - g\mu_k\cos^2\theta_1) - 2L_2g\mu_k - 2L_3(g\sin\theta_2\cos\theta_2 + g\mu_k\cos^2\theta_2)}。$$