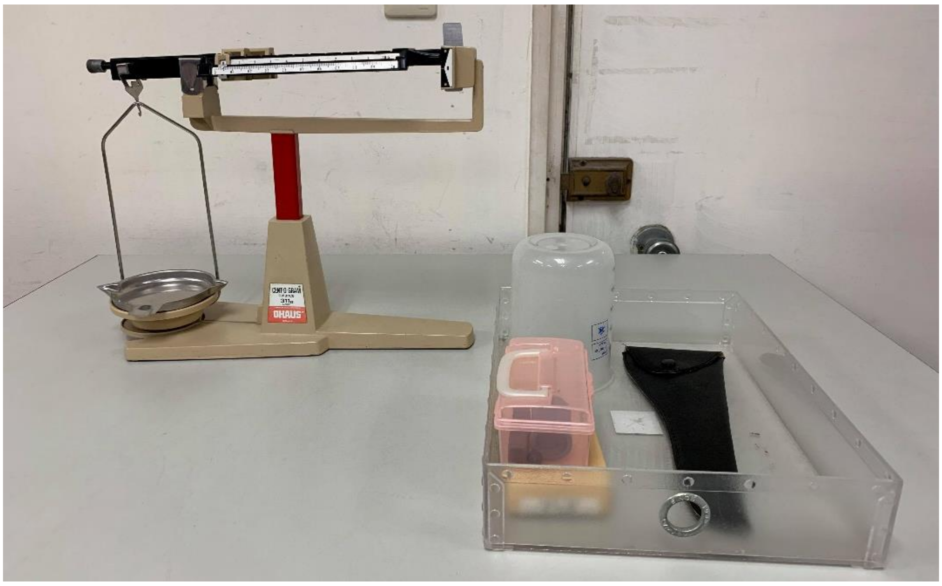
第 108 學年度清華大學普通物理實驗(一)

□預報 或 ☑結報　　課程編號：10810PHYS101010



實驗名稱：基本度量與誤差傳遞

系　級：電機資訊學院學士班 1 年級　組　別：13

學　號：108060018　姓　名：葉承泓

組　員：陳竑廷

實驗日期：108 年 10 月 9 日　補作日期：＿年＿月＿日

◎ 以下為助教記錄區

預報繳交日期	報告成績	助教簽名欄
結報繳交日期		

報告缺失紀錄

六、實驗結果與分析

※測量各待測物的密度：由測量長度及體積計算出待測物之密度

（一）長方體木塊：以游標尺分別測量其長、寬、高，並以三樑天秤測量其質量

表1 長方體木塊的密度測量及誤差傳遞

實驗次數	長度(m)			寬(m)			高(m)			重量(kg)			體積(m^3)	密度($\frac{kg}{m^3}$)	誤差傳遞—面積(m^2)
	測量數據	偏差(m)	偏差平方	測量數據	偏差(m)	偏差平方	測量數據	偏差(m)	偏差平方	測量數據	偏差(kg)	偏差平方			
1	0.05	-0.00016	2.56E-08	0.0128	0.00000	0	0.0119	0.00007	4.9E-09	0.00358	-0.000003	9E-12	0.000007616	470.1	
2	0.0503	0.00014	1.96E-08	0.0127	-0.00010	1E-08	0.01175	-0.00008	6.4E-09	0.003585	0.000002	4E-12	0.000007506	477.6	
3	0.05005	-0.00011	1.21E-08	0.0128	0.00000	0	0.0119	0.00007	4.9E-09	0.00359	0.000007	4.9E-11	0.000007624	470.9	0.000001774
4	0.0503	0.00014	1.96E-08	0.0129	0.00010	1E-08	0.01175	-0.00008	6.4E-09	0.003585	0.000002	4E-12	0.000007624	470.2	誤差傳遞—體積(m^3)
5	0.05015	-0.00001	1E-10	0.0128	0.00000	0	0.01185	0.00002	4E-10	0.003575	-0.000008	6.4E-11	0.000007607	470.0	
平均值	0.05016	-4.16334E-18	1.54E-08	0.0128	-3.46945E-19	4E-09	0.01183	1.73472E-18	4.6E-09	0.003583	-1.73472E-19	2.6E-11	7.59543E-06	471.7548	
平均偏差		0.000112			4E-05			6.4E-05			4.4E-06				0.00000003024
標準差			0.000138744			7.07107E-05			7.58288E-05			5.70088E-06			誤差傳遞—密度(kg/m^3)
平均標準差			6.20484E-05			3.16228E-05			3.39116E-05			2.54951E-06			
標準差百分比			0.123700894			0.247052942			0.286658072			0.071155729			1.908
分析結果	0.05016±0.1237 m			0.0128 ±0.2471 m			0.01183 ±0.2867 m			0.003583 ±0.0712 kg			0.000007595 ±0.00000003024 m^3	471.7548085 ±1.908 kg/m^3	

測量(獲得數據)步驟：

1. 將游標尺歸零(游標零刻度與主尺零刻度重合, 主副尺垂直邊接合)
2. 將木塊長邊置於主、副尺垂直邊之間，主尺上零刻度與游標上零刻度之距離即為木塊長度。
3. 大於 1 mm 的刻度由主尺上直接讀出(若游標零刻度對齊主尺的 x 位置，滿足 $k \le x < k+1$(k 為某一非負整數)，則木塊長邊長度表示法中大於 1 mm 的刻度的部分即讀為 k mm)，小於 1 mm 的刻度由游標上對齊直接讀出(觀察游標副尺上的 20 個刻度中何者對齊主尺上的刻度，將其所代表的數值(下方數字)加上估計值(原本精確到 0.05mm，加上估計值(0.01mm 數量級)後可能表示法為 0.03mm、0.04mm、0.05mm、0.06mm、0.07mm 等等)後乘上 0.01mm，與由主尺得出的 k mm 相加)，即可得到具有 4 位有效位數的木塊長邊長度。
4. 將單位 mm 轉換為 SI 制單位 m(數值除以 1000)
5. 重複步驟 1.~4. 共 5 次，得出 5 筆木塊長邊長度的測量數據，將其紀錄在表 1 中
6. 將測量邊改為木塊寬邊，重複步驟 1.~5.，即可得到 5 筆木塊寬邊長度的測量數據，將其紀錄在表 1 中
7. 將測量邊改為木塊高邊，重複步驟 1.~5.，即可得到 5 筆木塊高邊長度的測量數據，將其紀錄在表 1 中
8. 將三樑天平歸零—理論上應在其基座上找到調整水平的旋鈕，緩慢旋轉使指針指向標記處，此時橫桿即呈現水平狀態。但我們那組的旋鈕似乎因生鏽而轉不動(或是我們力氣實在不夠大)，因此我們改用以下方式來進行水平校正：將前、中、後樑上的砝碼都先移到 0 的位置，發現指針向下偏移，代表砝碼須向左移動。於是我們將前樑上的砝碼 1 格 1 格移動，直到移動 4 格(即有如放上 0.04g 的物品在秤量盤上)時，指針恰好指向標記處，因此我們定這裡為原點(即測量物體質量時，天秤上

標示的質量數值再減掉 0.04g 即為物體實際質量)，表 1 中的數據為已經減去 0.04g 的結果(即物體質量的測量值)。

9. 將長方體木塊(待測物) 放在稱量盤內進行秤量
10. 先大幅度增加，再小範圍調整(可加快測量速度)：先移動後樑的大砝碼，可大概估計木塊的質量所落的範圍，再移動中樑的中型砝碼，漸漸將可能的質量範圍縮小，最後移動前樑的小型砝碼進行微調，使指針精準落在指示線(標記處)上。在實際實驗時，我們發現移動大型砝碼一格，指針就迅速向下偏移了，代表木塊的質量不到大型砝碼移動 1 格所代表的質量(10g)，因此我們改為移動中型砝碼，指針保持指向斜上，直到移動到第 4 格後，指針向下偏移，表示木塊的質量介於中型砝碼移動 3 格至 4 格所代表的質量(3g~4g)之間。接著我們移動小型砝碼(由原點開始移，也就是從第 4 格開始)，發現移動到刻度的 9.9g~10.0g 之間，因此可確定精確值為 9.9g(減去 0.04g 前)，而我的估計值為 0.08g，因此第一筆數據記為 3.58g(已減去 0.04g)。
11. 將單位 g 轉換為 SI 制單位 kg(數值除以 1000)
12. 重複步驟 8.~11. 共 5 次，得出 5 筆木塊質量的測量數據，將其紀錄在表 1 中

數據分析：

1. 將長方體木塊長度的 5 組 x 數據x_1、x_2、x_3、x_4、x_5取算術平均數得到$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5}$；同理，可得到長方體木塊寬度的 5 組 y 數據之$\bar{y}$；長方體木塊高度的 5 組 z 數據之$\bar{z}$；長方體木塊質量的 5 組 m 數據之$\bar{m}$。
2. 再算出各數據的偏差分別為$d_{x_i}=x_i-\bar{x}$、$d_{y_i}=y_i-\bar{y}$、$d_{z_i}=z_i-\bar{z}$、$d_{m_i}=m_i-\bar{m}$，i=1, 2, 3, 4, 5
3. X 數據的偏差平均值為$\overline{d_x}=\frac{d_{x_1}+d_{x_2}+d_{x_3}+d_{x_4}+d_{x_5}}{5}$，同理可得$\overline{d_y}$、$\overline{d_z}$、$\overline{d_m}$；X 數據的平均偏差為$D_x=\frac{|d_{x_1}|+|d_{x_2}|+|d_{x_3}|+|d_{x_4}|+|d_{x_5}|}{5}$，同理可得$D_y$、$D_z$、$D_m$
4. X 數據的偏差平方分別為$d_{x_i}^2$，同理可得$d_{y_i}^2$、$d_{z_i}^2$、$d_{m_i}^2$，i=1, 2, 3, 4, 5。因此 X 數據的偏差平方平均值為$\overline{d_x^2}=\frac{d_{x_1}^2+d_{x_2}^2+d_{x_3}^2+d_{x_4}^2+d_{x_5}^2}{5}$，同理可得$\overline{d_y^2}$、$\overline{d_z^2}$、$\overline{d_m^2}$
5. 因為 x 數據有 5 個(x_1、x_2、x_3、x_4、x_5)，故為有限個，因此 x 數據的標準差$\sigma_x=\sqrt{\frac{d_{x_1}^2+d_{x_2}^2+d_{x_3}^2+d_{x_4}^2+d_{x_5}^2}{4}}$，同理可得$\sigma_y$、$\sigma_z$、$\sigma_m$
6. x 數據的平均標準差為$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{d_{x_1}^2+d_{x_2}^2+d_{x_3}^2+d_{x_4}^2+d_{x_5}^2}{20}}$，同理可得$\sigma_{\bar{y}}$、$\sigma_{\bar{z}}$、$\sigma_{\bar{m}}$
7. x 數據的標準差百分比為$\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\times 100\%$，同理可得$\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\times 100\%$、$\frac{\sigma_{\bar{z}}}{\bar{z}}\times 100\%$、$\frac{\sigma_{\bar{m}}}{\bar{m}}\times 100\%$
8. 由 5 次的(x, y, z)實驗測量數據各自計算所得到的體積V_i分別為$V_i=x_iy_iz_i$，

i=1, 2, 3, 4, 5；其平均值為$\bar{V}=\frac{V_1+V_2+V_3+V_4+V_5}{5}$

9. 由 5 次的(x, y, z, m)實驗測量數據各自計算所得到的密度D_i分別為$D_i=\frac{\mathrm{m_i}}{\mathrm{x_i y_i z_i}}$，

i=1, 2, 3, 4, 5；其平均值為$\bar{D}=\frac{D_1+D_2+D_3+D_4+D_5}{5}$

10. 面積的誤差傳遞：假設面積為 a=xy，則由「乘除的誤差傳遞」公式，因為 x、y 互不干擾(影響)彼此，故互為獨立變數，因此$\bar{a}=\overline{xy}=\bar{x}\times\bar{y}$，且$\left(\frac{\sigma_{\bar{a}}}{\bar{a}}\right)^2=\left(\frac{\sigma_{\overline{xy}}}{\overline{xy}}\right)^2=\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2\Rightarrow\sigma_{\bar{a}}=\bar{x}\bar{y}\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2}$

11. 體積的誤差傳遞：假設體積為 V=xyz=az，則由「乘除的誤差傳遞」公式，因為 x、y、z 互不干擾(影響)彼此，故互為獨立變數，因此 a、z 也互為獨立變數，故$\bar{\mathrm{V}}=\overline{\mathrm{xyz}}=\bar{x}\times\bar{y}\times\bar{z}=\bar{a}\times\bar{z}$，且$\left(\frac{\sigma_{\bar{\mathrm{V}}}}{\bar{\mathrm{V}}}\right)^2=\left(\frac{\sigma_{\overline{\mathrm{xyz}}}}{\overline{\mathrm{xyz}}}\right)^2=\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\bar{z}}}{\bar{z}}\right)^2=\left(\frac{\sigma_{\bar{a}}}{\bar{a}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\bar{z}}}{\bar{z}}\right)^2\Rightarrow\sigma_{\bar{\mathrm{V}}}=\bar{x}\bar{y}\bar{z}\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\bar{z}}}{\bar{z}}\right)^2}=\bar{a}\bar{z}\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{a}}}{\bar{a}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\bar{z}}}{\bar{z}}\right)^2}$

12. 密度的誤差傳遞：假設密度為 D=$\frac{m}{\mathrm{xyz}}=\frac{m}{\mathrm{V}}$，則由「乘除的誤差傳遞」公式，因為 x、y、z、m 互不干擾(影響)彼此，故互為獨立變數，因此 V、m 也互為獨立變數，故$\bar{\mathrm{D}}=\overline{\left(\frac{m}{\mathrm{xyz}}\right)}=\frac{\bar{m}}{\bar{\mathrm{x}}\bar{\mathrm{y}}\bar{\mathrm{z}}}=\frac{\bar{m}}{\bar{\mathrm{V}}}$，且$\left(\frac{\sigma_{\bar{\mathrm{D}}}}{\bar{\mathrm{D}}}\right)^2=\left(\frac{\sigma_{\overline{\left(\frac{m}{\mathrm{xyz}}\right)}}}{\overline{\left(\frac{m}{\mathrm{xyz}}\right)}}\right)^2=\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\bar{z}}}{\bar{z}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\bar{m}}}{\bar{m}}\right)^2=\left(\frac{\sigma_{\bar{\mathrm{V}}}}{\bar{\mathrm{V}}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\bar{m}}}{\bar{m}}\right)^2\Rightarrow\sigma_{\bar{\mathrm{D}}}=\frac{\bar{m}}{\bar{\mathrm{x}}\bar{\mathrm{y}}\bar{\mathrm{z}}}\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\bar{z}}}{\bar{z}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\bar{m}}}{\bar{m}}\right)^2}=\frac{\bar{m}}{\bar{\mathrm{V}}}\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{\mathrm{V}}}}{\bar{\mathrm{V}}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\bar{m}}}{\bar{m}}\right)^2}$

13. 原測量數據的測量值可表示為(x, y, z, m)=($\bar{\mathrm{x}}\pm\sigma_{\bar{\mathrm{x}}}$, $\bar{\mathrm{y}}\pm\sigma_{\bar{\mathrm{y}}}$, $\bar{\mathrm{z}}\pm\sigma_{\bar{\mathrm{z}}}$, $\bar{\mathrm{m}}\pm\sigma_{\bar{\mathrm{m}}}$)，經過四則運算的誤差傳遞後，導出量密度 D 可表示為$\bar{D}\pm\sigma_{\bar{D}}=\frac{\bar{m}}{\bar{\mathrm{x}}\bar{\mathrm{y}}\bar{\mathrm{z}}}\pm\frac{\bar{m}}{\bar{\mathrm{x}}\bar{\mathrm{y}}\bar{\mathrm{z}}}\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\bar{z}}}{\bar{z}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{\bar{m}}}{\bar{m}}\right)^2}$

(二）圓形金屬球：以螺旋測微器測量其直徑(半徑)，並以電子天秤測量其質量

表2 長方體木塊的密度測量及誤差傳遞										
實驗次數	半徑(m)			重量(kg)			體積(m^3)	密度($\frac{kg}{m^3}$)	誤差傳遞—體積(m^3)
	測量數據	偏差(m)	偏差平方	測量數據	偏差(m)	偏差平方			
1	0.0047605	0.0000095	9.025E-11	0.00354	0.00002	2.56E-10	0.0000004519	7834	
2	0.004709	-0.0000420	1.764E-09	0.00352	0.00000	1.6E-11	0.0000004374	8048	
3	0.004761	0.0000100	1E-10	0.0035	-0.00002	5.76E-10	0.0000004520	7743	0.000000002987
4	0.0047645	0.0000135	1.8225E-10	0.00352	0.00000	1.6E-11	0.0000004530	7770	
5	0.00476	0.0000090	8.1E-11	0.00354	0.00002	2.56E-10	0.0000004518	7836	
平均值	0.0047510	-1.73472E-19	4.435E-10	0.00352	-8.67362E-20	2.24E-10	4.49231E-07	7846	
平均偏差		0.0000168			1.28E-05				誤差傳遞—密度(kg/m^3)
標準差			2.35452E-05			1.67332E-05			
平均標準差			1.05297E-05			7.48331E-06			54.8
標準差百分比			0.221631653			0.21235286			
分析結果	0.0047510±0.2216 m			0.00352 ±0.212 kg			0.0000004492 ±0.000000002987 m^3	7846 ±54.8 kg/m^3	

測量(獲得數據)步驟：

1. 螺旋測微器歸零：先旋轉套筒(大轉軸)，使兩鐵砧稍微分開，再轉動末端轉軸(小轉軸)至聽到 2 聲「滴答」為止。接著讀取此時套筒上的刻度，此讀數即為「零位讀數」，可用來修正因零點不精準而導致的誤差。
2. 再次旋轉套筒(大轉軸)，使兩鐵砧分開，將圓形金屬球夾在兩鐵砧之間，接著旋轉套筒(大轉軸)使兩鐵砧靠近，直到兩鐵砧與金屬球將要接觸時，改成旋轉末端轉軸至聽到兩聲「滴答」後即可停止
3. 讀取此時套筒上的讀數，減去零位讀數後即為金屬球的直徑(此時單位為 mm)
4. 將單位 mm 轉換為 SI 制單位 m(數值除以 1000)，再將直徑的測量數據除以 2 得到半徑的數值
5. 重複步驟 1.~4. 共 5 次，得出 5 筆圓形金屬球半徑的測量數據，將其紀錄在表 2 中
6. 將電子天平放置於水平桌面上並按下電源鍵(ON/OFF)開機
7. 將透明水管直立放置於電子天平上
8. 按下歸零鍵(ZERO)將狀態歸零
9. 將圓形金屬球放入透明水管內以防止滾出電子天平，等待螢幕上的數值不再變動(或螢幕左上角出現圓圈圖案)，即可記錄下螢幕的數值(金屬球質量)
10. 重複步驟 7.~9. 共 5 次，得出 5 筆圓形金屬球質量的測量數據，將其紀錄在表 2 中

數據分析：

1. 將圓形金屬球半徑的 5 組 x 數據$\mathrm{x_1}$、$\mathrm{x_2}$、$\mathrm{x_3}$、$\mathrm{x_4}$、$\mathrm{x_5}$取算術平均數得到$\bar{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}}{5}$；同理，可得到圓形金屬球質量的 5 組 m 數據之$\bar{\mathrm{m}}$。
2. 再算出各數據的偏差分別為$\mathrm{d_{x_i}} = \mathrm{x_i} - \bar{\mathrm{x}}$、$\mathrm{d_{m_i}} = \mathrm{m_i} - \bar{\mathrm{m}}$，i=1, 2, 3, 4, 5
3. X 數據的偏差平均值為$\overline{\mathrm{d_x}} = \frac{\mathrm{d_{x_1}+d_{x_2}+d_{x_3}+d_{x_4}+d_{x_5}}}{5}$，同理可得$\overline{\mathrm{d_m}}$；X 數據的平均偏差為$D_\mathrm{x} = \frac{|\mathrm{d_{x_1}}|+|\mathrm{d_{x_2}}|+|\mathrm{d_{x_3}}|+|\mathrm{d_{x_4}}|+|\mathrm{d_{x_5}}|}{5}$，同理可得$D_m$
4. X 數據的偏差平方分別為$\mathrm{d^2_{x_i}}$，同理可得$\mathrm{d^2_{m_i}}$，i=1, 2, 3, 4, 5。因此 X 數據的偏差平方平均值為$\overline{\mathrm{d^2_x}} = \frac{\mathrm{d^2_{x_1}+d^2_{x_2}+d^2_{x_3}+d^2_{x_4}+d^2_{x_5}}}{5}$，同理可得$\overline{\mathrm{d}^2_m}$

5. 因為 x 數據有 5 個(x_1、x_2、x_3、x_4、x_5)，故為有限個，因此 x 數據的標準差$\sigma_x = \sqrt{\frac{d_{x_1}^2+d_{x_2}^2+d_{x_3}^2+d_{x_4}^2+d_{x_5}^2}{4}}$，同理可得$\sigma_m$

6. x 數據的平均標準差為$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{d_{x_1}^2+d_{x_2}^2+d_{x_3}^2+d_{x_4}^2+d_{x_5}^2}{20}}$，同理可得$\sigma_{\bar{m}}$

7. x 數據的標準差百分比為$\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}} \times 100\%$，同理可得$\frac{\sigma_{\bar{m}}}{\bar{m}} \times 100\%$

8. 由 5 次的 x 測量數據各自計算所得到的體積V_i分別為$V_i = \frac{4\pi x_i^3}{3}$，i=1, 2, 3, 4, 5；其平均值為$\bar{V} = \frac{V_1+V_2+V_3+V_4+V_5}{5}$

9. 由 5 次的(x, m)實驗測量數據各自計算所得到的密度D_i分別為$D_i = \frac{m_i}{\frac{4}{3}\pi x_i^3} = \frac{3m_i}{4\pi x_i^3}$，i=1, 2, 3, 4, 5；其平均值為$\bar{D} = \frac{D_1+D_2+D_3+D_4+D_5}{5}$

10. 體積的誤差傳遞：假設體積為 V=$\frac{4}{3}\pi x^3$，則由「有冪次的乘除誤差傳遞」公式：假設已測得之物理量測量值為 y(=$\bar{y} \pm \sigma_{\bar{y}}$)，其平均值為$\bar{y}$，平均標準差為$\sigma_{\bar{y}}$，且 a、b 為常數，則若導出量為 u，且 u=ay^b，則 u=$\bar{u} \pm \sigma_{\bar{u}}$，其中$\bar{u} = a\bar{y}^b$且$\left(\frac{\sigma_{\bar{u}}}{\bar{u}}\right)^2 = b^2\left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2$。故$\bar{V} = \overline{\frac{4}{3}\pi x^3} = \frac{4}{3}\pi\bar{x}^3$，且$\left(\frac{\sigma_{\bar{V}}}{\bar{V}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{\frac{4}{3}\pi x^3}}{\frac{4}{3}\pi x^3}\right)^2 = 3^2 \times \left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 \Rightarrow \sigma_{\bar{V}} = 4\pi\bar{x}^2\sigma_{\bar{x}}$

11. 密度的誤差傳遞：假設密度為 D=$\frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi x^3} = \frac{3m}{4\pi x^3}$，則由「乘除的誤差傳遞」公式，因為 x、m 互不干擾(影響)彼此，故互為獨立變數，因此 V、m 也互為獨立變數，故$\bar{D} = \overline{\left(\frac{m}{V}\right)} = \frac{\bar{m}}{\bar{V}} = \frac{\bar{m}}{\frac{4}{3}\pi\bar{x}^3} = \frac{3\bar{m}}{4\pi\bar{x}^3}$，且$\left(\frac{\sigma_{\bar{D}}}{\bar{D}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{\overline{\left(\frac{m}{V}\right)}}}{\overline{\left(\frac{m}{V}\right)}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{\bar{m}}}{\bar{m}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{V}}}{\bar{V}}\right)^2 \Rightarrow \sigma_{\bar{D}} = \frac{\bar{m}}{\bar{V}}\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{m}}}{\bar{m}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{V}}}{\bar{V}}\right)^2} = \frac{\bar{m}}{\frac{4}{3}\pi\bar{x}^3}\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{m}}}{\bar{m}}\right)^2 + 9\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2} = \frac{3\bar{m}}{4\pi\bar{x}^3}\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{m}}}{\bar{m}}\right)^2 + 9\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2}$

12. 原測量數據的測量值可表示為(x, m)=($\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$, $\bar{m} \pm \sigma_{\bar{m}}$)，經過四則運算以及冪次的誤差傳遞後，導出量密度 D 可表示為$\bar{D} \pm \sigma_{\bar{D}} = \frac{3\bar{m}}{4\pi\bar{x}^3} \pm \frac{3\bar{m}}{4\pi\bar{x}^3}\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{m}}}{\bar{m}}\right)^2 + 9\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2}$。

(三)塑膠水管：以游標尺分別測量其外直(半)徑、內直(半)徑以及長度(高度)，並以電子天秤測量其質量

表3 塑膠水管的密度測量及誤差傳遞

實驗次數	外半徑(m)			內半徑(m)			高(m)			重量(kg)			體積(m^3)	密度($\frac{kg}{m^3}$)
	測量數據	偏差(m)	偏差平方	測量數據	偏差(m)	偏差平方	測量數據	偏差(m)	偏差平方	測量數據	偏差(kg)	偏差平方		
1	0.01305	-0.000025	6.25E-10	0.010025	0.000025	6.25E-10	0.0345	0.00002	4E-10	0.0105	0.00000	1.6E-11	0.000007565	1388
2	0.013075	0.000000	0	0.01005	0.000050	2.5E-09	0.03445	-0.00003	9E-10	0.01048	-0.00002	2.56E-10	0.000007571	1384
3	0.013075	0.000000	0	0.00995	-0.000050	2.5E-09	0.03445	-0.00003	9E-10	0.01052	0.00002	5.76E-10	0.000007787	1351
4	0.0131	0.000025	6.25E-10	0.009975	-0.000025	6.25E-10	0.0345	0.00002	4E-10	0.0105	0.00000	1.6E-11	0.000007816	1343
5	0.013075	0.000000	0	0.01	0.000000	0	0.0345	0.00002	4E-10	0.01048	-0.00002	2.56E-10	0.000007691	1363
平均值	0.013075	0	2.5E-10	0.010000	-3.46945E-19	1.25E-09	0.03448	-1.38778E-18	6E-10	0.01050	0	2.24E-10	7.68596E-06	1366
平均偏差		1E-05			3E-05			2.4E-05			1.28E-05			
標準差			1.76777E-05			3.95285E-05			2.73861E-05			1.67332E-05		
平均標準差			7.90569E-06			1.76777E-05			1.22474E-05			7.48331E-06		
標準差百分比			0.0604642			0.176776695			0.035520443			0.071296825		
分析結果	0.013075±0.0605 m			0.010000 ±0.1768 m			0.03448 ±0.0355 m			0.01050 ±0.0713 kg			0.000007686 ±0.00000004445m^3	1366 ±7.957kg/m^3

誤差傳遞	值
誤差傳遞—外半徑所形成的面積(m^2)	0.0000006495
誤差傳遞—內半徑所形成的面積(m^2)	0.000001111
誤差傳遞—截面積(m^2)	0.000001287
誤差傳遞—體積(m^3)	0.00000004445
誤差傳遞—密度(kg/m^3)	7.957

測量(獲得數據)步驟：

1. 將游標尺歸零(游標零刻度與主尺零刻度重合, 主副尺垂直邊接合)
2. 將塑膠水管直立放於主、副尺垂直邊之間，主尺上零刻度與游標上零刻度之距離即為水管外直徑長度。
3. 大於 1 mm 的刻度由主尺上直接讀出，小於 1 mm 的刻度由游標上對齊直接讀出後，2 者刻度乘上其所代表的長度比例後之總和即為具有 4 位有效位數的水管外直徑長度。
4. 將單位 mm 轉換為 SI 制單位 m(數值除以 1000)，再將直徑的測量數據除以 2 得到水管外半徑的數值
5. 重複步驟 1.~4. 共 5 次，得出 5 筆水管外半徑長度的測量數據，將其紀錄在表 3 中
6. 將測量邊改為水管長(高)，即將水管橫放於主、副尺垂直邊之間，此時主尺上零刻度與游標上零刻度之距離即為水管長度(高度)。重複步驟 1.~5. ，即可得到 5 筆水管長度(高度)的測量數據，將其紀錄在表 3 中
7. 再度將游標尺歸零(游標零刻度與主尺零刻度重合, 主副尺垂直邊接合)
8. 將塑膠水管直立放於主、副尺上方測量內徑的「上夾鉗」外，將主尺與負尺拉開，使「上夾鉗」的兩半分開，直到被水管卡住無法再拉開(此時距離最大)為止。這時主尺上零刻度與游標上零刻度之距離即為水管內直徑長度。
9. 大於 1 mm 的刻度由主尺上直接讀出，小於 1 mm 的刻度由游標上對齊直接讀出後，2 者刻度乘上其所代表的長度比例後之總和即為具有 4 位有效位數的水管內直徑長度。
10. 將單位 mm 轉換為 SI 制單位 m(數值除以 1000)，再將直徑的測量數據除以 2 得到水管內半徑的數值
11. 重複步驟 7.~11. 共 5 次，得出 5 筆水管內半徑長度的測量數據，將其紀錄在表 3 中
12. 將電子天平放置於水平桌面上並按下電源鍵(ON/OFF)開機
13. 按下歸零鍵(ZERO)將狀態歸零
14. 將塑膠水管置於電子天平上，等待螢幕上的數值不再變動(或螢幕左上角出現圓圈圖案)，即可記錄下螢幕的數值(塑膠水管質量)
15. 重複步驟 13.~14. 共 5 次，得出 5 筆水管質量的測量數據，將其紀錄在表 3 中

數據分析：

1. 將水管外半徑長度的 5 組 x 數據x_1、x_2、x_3、x_4、x_5取算術平均數得到$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5}$；同理，可得到水管內半徑長度的 5 組 y 數據之$\bar{y}$；水管長度(高度)的 5 組 z 數據之$\bar{z}$；水管質量的 5 組 m 數據之$\bar{m}$。
2. 偏差、偏差平均值、平均偏差、偏差平方、偏差平方平均值、標準差、平均標準差、標準差百分比的算法與算式、公式結果同實驗(一)數據分析的步驟 2.~7.
3. 由 5 次的(x, y, z)實驗測量數據各自計算所得到的體積V_i分別為$V_i=(\pi x_i^2-\pi y_i^2)\times z_i=\pi(x_i^2-y_i^2)\times z_i$，i=1, 2, 3, 4, 5；其平均值為$\bar{V}=\frac{V_1+V_2+V_3+V_4+V_5}{5}$
4. 由 5 次的(x, y, z, m)實驗測量數據各自計算所得到的密度D_i分別為$D_i=\frac{m_i}{V_i}=\frac{m_i}{\pi(x_i^2-y_i^2)\times z_i}$，i=1, 2, 3, 4, 5；其平均值為$\bar{D}=\frac{D_1+D_2+D_3+D_4+D_5}{5}$
5. 外半徑所形成之面積的誤差傳遞：假設面積為$A_{外}=\pi x^2$，則由「有冪次的乘除誤差傳遞」公式，可得到$\overline{A_{外}}=\overline{\pi x^2}=\pi\times\bar{x}^2$，且$\left(\frac{\sigma_{\overline{A_{外}}}}{\overline{A_{外}}}\right)^2=2^2\times\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2\Rightarrow\sigma_{\overline{A_{外}}}=2\overline{A_{外}}\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}=2\pi\bar{x}\sigma_{\bar{x}}$
6. 內半徑所形成之面積的誤差傳遞：假設面積為$A_{內}=\pi y^2$，則由「有冪次的乘除誤差傳遞」公式，可得到$\overline{A_{內}}=\overline{\pi y^2}=\pi\times\bar{y}^2$，且$\left(\frac{\sigma_{\overline{A_{內}}}}{\overline{A_{內}}}\right)^2=2^2\times\left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2\Rightarrow\sigma_{\overline{A_{內}}}=2\overline{A_{內}}\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}=2\pi\bar{y}\sigma_{\bar{y}}$
7. 總面積(水管截面積)的誤差傳遞：假設面積為$A_{總}=\pi x^2-\pi y^2=A_{外}-A_{內}$，則由「加減的誤差傳遞」公式：假設已測得之物理量測量值為 k(=$\bar{k}\pm\sigma_{\bar{k}}$)及 t(=$\bar{t}\pm\sigma_{\bar{t}}$)，其平均值分別為$\bar{k}$與$\bar{t}$，平均標準差分別為$\sigma_{\bar{k}}$與$\sigma_{\bar{t}}$，則若導出量為 u，且 u=ak−bt，其中 a、b 為常數。則 u=$\bar{u}\pm\sigma_{\bar{u}}$，其中$\bar{u}=a\bar{k}-b\bar{t}$且$\sigma_{\bar{u}}^2=a^2\sigma_{\bar{k}}^2+b^2\sigma_{\bar{t}}^2$。因為 x、y 互不干擾(影響)彼此，故互為獨立變數，因此$A_{外}$、$A_{內}$也互為獨立變數，故可得到$\overline{A_{總}}=\overline{\pi x^2-\pi y^2}=\overline{A_{外}-A_{內}}=\overline{A_{外}}-\overline{A_{內}}=\pi\times\bar{x}^2-\pi\times\bar{y}^2$，且$\sigma_{\overline{A_{總}}}^2=\sigma_{\overline{A_{外}}}^2+\sigma_{\overline{A_{內}}}^2=(2\pi\bar{x}\sigma_{\bar{x}})^2+(2\pi\bar{y}\sigma_{\bar{y}})^2\Rightarrow\sigma_{\overline{A_{總}}}=2\pi\sqrt{\bar{x}^2\sigma_{\bar{x}}^2+\bar{y}^2\sigma_{\bar{y}}^2}$
8. 體積的誤差傳遞：假設體積為 V=$A_{總}\times z=(\pi x^2-\pi y^2)\times z$，則由「乘除的誤差傳

遞」公式，因為 x、y、z 互不干擾(影響)彼此，故互為獨立變數，因此$A_{總}$、z 也互為獨立變數，故$\overline{\mathrm{V}} = \overline{(\pi x^2 - \pi y^2) \times \mathrm{z}} = \overline{A_{總} \times \mathrm{z}} = \overline{A_{總}} \times \bar{z} = (\pi \bar{x}^2 - \pi \bar{y}^2) \times \bar{z}$，且

$$\left(\frac{\sigma_{\overline{\mathrm{V}}}}{\overline{\mathrm{V}}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{\overline{(\pi x^2-\pi y^2)\times \mathrm{z}}}}{\overline{(\pi x^2-\pi y^2)\times \mathrm{z}}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{\overline{A_{總}\times \mathrm{z}}}}{\overline{A_{總}\times \mathrm{z}}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{\overline{A_{總}}}}{\overline{A_{總}}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{\mathrm{z}}}}{\bar{z}}\right)^2 \Rightarrow \sigma_{\overline{\mathrm{V}}} = \overline{\mathrm{V}}\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\overline{A_{總}}}}{\overline{A_{總}}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{\mathrm{z}}}}{\bar{z}}\right)^2} =$$

$$(\pi\bar{x}^2 - \pi\bar{y}^2) \times \bar{z}\sqrt{\left(\frac{2\pi\sqrt{\bar{x}^2\sigma_{\bar{\mathrm{x}}}^2 + \bar{y}^2\sigma_{\bar{\mathrm{y}}}^2}}{\pi\times\bar{x}^2 - \pi\times\bar{y}^2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{\mathrm{z}}}}{\bar{\mathrm{z}}}\right)^2}$$

9. 密度的誤差傳遞：假設密度為 D=$\frac{m}{\mathrm{V}} = \frac{m}{(\pi x^2 - \pi y^2)\times \mathrm{z}}$，則由「乘除的誤差傳遞」公式，因為 x、y、z、m 互不干擾(影響)彼此，故互為獨立變數，因此 V、m 也互為獨立變數，故$\overline{\mathrm{D}} = \overline{\left(\frac{m}{(\pi x^2-\pi y^2)\times \mathrm{z}}\right)} = \overline{\left(\frac{m}{\mathrm{V}}\right)} = \frac{\overline{\mathrm{m}}}{\overline{\mathrm{V}}} = \frac{\overline{m}}{(\pi\bar{x}^2 - \pi\bar{y}^2)\times\bar{z}}$，且$\left(\frac{\sigma_{\overline{\mathrm{D}}}}{\overline{\mathrm{D}}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{\overline{\left(\frac{m}{(\pi x^2-\pi y^2)\times \mathrm{z}}\right)}}}{\overline{\left(\frac{m}{(\pi x^2-\pi y^2)\times \mathrm{z}}\right)}}\right)^2 =$

$$\left(\frac{\sigma_{\overline{\left(\frac{m}{\mathrm{V}}\right)}}}{\overline{\left(\frac{m}{\mathrm{V}}\right)}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{\overline{\mathrm{m}}}}{\overline{\mathrm{m}}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\overline{\mathrm{V}}}}{\overline{\mathrm{V}}}\right)^2 \Rightarrow \sigma_{\overline{\mathrm{D}}} = \overline{\mathrm{D}}\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\overline{\mathrm{m}}}}{\overline{\mathrm{m}}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\overline{\mathrm{V}}}}{\overline{\mathrm{V}}}\right)^2} =$$

$$\frac{\overline{m}}{(\pi\bar{x}^2-\pi\bar{y}^2)\times\bar{z}}\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\overline{\mathrm{m}}}}{\overline{m}}\right)^2 + \left(\frac{(\pi\bar{x}^2-\pi\bar{y}^2)\times\bar{z}\sqrt{\left(\frac{2\pi\sqrt{\bar{x}^2\sigma_{\bar{\mathrm{x}}}^2+\bar{y}^2\sigma_{\bar{\mathrm{y}}}^2}}{\pi\times\bar{x}^2-\pi\times\bar{y}^2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{\mathrm{z}}}}{\bar{\mathrm{z}}}\right)^2}}{(\pi\bar{x}^2-\pi\bar{y}^2)\times\bar{z}}\right)^2}$$

10. 原測量數據的測量值可表示為(x, y, z, m)=($\bar{\mathrm{x}} \pm \sigma_{\bar{\mathrm{x}}}$, $\bar{\mathrm{y}} \pm \sigma_{\bar{\mathrm{y}}}$, $\bar{\mathrm{z}} \pm \sigma_{\bar{\mathrm{z}}}$, $\overline{\mathrm{m}} \pm \sigma_{\overline{\mathrm{m}}}$)，經過四則運算的誤差傳遞後，導出量密度 D 可表示為$\overline{D} \pm \sigma_{\overline{D}} = \frac{\overline{m}}{(\pi\bar{x}^2-\pi\bar{y}^2)\times\bar{z}} \pm$

$$\frac{\overline{m}}{(\pi\bar{x}^2-\pi\bar{y}^2)\times\bar{z}}\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\overline{\mathrm{m}}}}{\overline{m}}\right)^2 + \left(\frac{(\pi\bar{x}^2-\pi\bar{y}^2)\times\bar{z}\sqrt{\left(\frac{2\pi\sqrt{\bar{x}^2\sigma_{\bar{\mathrm{x}}}^2+\bar{y}^2\sigma_{\bar{\mathrm{y}}}^2}}{\pi\times\bar{x}^2-\pi\times\bar{y}^2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{\mathrm{z}}}}{\bar{\mathrm{z}}}\right)^2}}{(\pi\bar{x}^2-\pi\bar{y}^2)\times\bar{z}}\right)^2}\text{。}$$

七、問題與討論

Q1：本實驗中的各項直接測量量和導出量的誤差來源有哪些？

A1：(一)直接測量量

1. 系統誤差：

(1)設備系統誤差：儀器測量精確度後的位數導致誤差，如游標尺只能精準到 0.05mm 的層級、螺旋測微器只能精準到 0.01mm 的層級、三樑天平只能精準到 0.01g 的層級、電子天平也只能精準到 0.01g 的層級，再小的層級的差距

只能以估計的方式，故與實際值之間有誤差的產生

(2)環境系統誤差：例如桌面不水平導致測量質量時的不準確(更多相關討論請見 Q_9)

(3)人為誤差：觀測紀錄者觀測之精確度(人為判斷誤差)，每個觀測者對估計值(位數)的取值不同，是誤差的主要來源之一；另外，眼睛是否平視三樑天平上的指針與標記線，會影響觀測者對於「何時指針對齊標記線」的判斷，可能還沒剛好對齊，但觀測者認為已對齊到，就會記錄下與真實值有差距的數據；此外，每個人對於游標尺副尺上的 20 個刻度中「何者對齊主尺上的刻度」所選擇的不同，也造成紀錄之數據的不同；而儀器(三樑天平、游標尺、螺旋測微器)是否已歸零的人為判斷誤差。

2. 統計誤差(隨機誤差)：測量自然界的物理量時，並不會每次測量的值皆相同，因為其本身有必然的機率(隨機)性會有值上的些微差異，因此我們只能透過計算平均數等方式盡量求出與實際值接近的測量值，但數據大多呈現常態分布，因此不等於平均值的那些測量值會有誤差，此誤差可透過「增加實驗的次數(實驗次數越多，平均值越接近實際值)」以及「統計理論分析」來減少其影響。

(二)導出量(密度)：統計誤差(隨機誤差)：將測量所得到的原始數據放入 Excel 做處理時，Excel 計算時會將小數點後很多位的部分取四捨五入或是捨去(如做除法運算時，若除不盡則會到小數點後某一位四捨五入，而導致與實際值的誤差；又如攻勢中帶入π值時，因為其為無窮不循環小數，故無法精確表達，必須捨去某部分數值，也造成誤差)。

Q_2：增加某一物理量的測量次數，對數據的準確度和偏差會有何影響？

A_2：1. 在統計分析的理論中，多次測量可提高精確度、降低誤差，實驗結果的不確定程度(接近待測物真正的值的程度)也隨之降低。理論上測量次數越多，在透過求算術平均數、標準差等統計理論的分析後，與真實值越接近、數據準確度越高、平均偏差會越小。當測量次數趨近無窮大時，測量值之算術平均數應等於真實值。

2. 以機率分布圖來看：一般而言，某一現象的分布狀態會呈現常態分佈，當測量的樣本數越多時，數據分布會越接近常態分佈，故數據會更接近實際值，及準確度更高、平均偏差值更低。

Q_3：形狀不規則的物體如何獲得測量其體積和密度？請寫出詳細的測量過程。

A_3：1.先測量其質量：將物體放在天平(電子天平、精密天平、三樑天平、等臂天平、……等皆可測量)上測量其質量大小

2.接著測量其體積：因為此物體的形狀不規則，因此較適合使用「排液法」來測量其體積：將物體放入與其互不相溶的液體中，觀察(測量)液面上升的高度，再乘上液面截面積，即可得到物體的體積。

3.由質量及體積所測得的數據，相乘後取平均(或先各取質量與體積的平均值再相乘皆可，詳細說明及推導過程請見 **Q_6**)，即可以得到導出物理量—密度。

Q_4：量金屬圓柱體的高度和直徑時，應該在同一位置量多次，還是不同位置與不同方向都要量？為什麼？

A_4：我認為應在不同位置與不同方向都要量，因為圓柱體實際上並不會是完美的圓柱形，其上會有凹凸不平的區域，因此若只量測單一一個位置的高度/直徑，難免「以偏概全」，可能會測量到較平均值還高的峰值，或還低的谷值。這會使得即使測量次數增大，平均後也無法接近於真正的值(每一次都測量到峰值/谷值，平均後也仍然比實際值還大/小)。因此若在不同位置與不同方向都有量測，則我們比較有可能量到各種高高低低的數值(同時有峰值、介於峰值與谷值之間也有較高較低的值、谷值)，這些平均起來後反而會比較接近圓柱體的平均高度/平均直徑(例如若同時取道峰值與谷值，則兩個平均後反而是中間值，比較接近實際值)。

Q_5：為什麼用直尺量長度多次時，每次要取自直尺不同的位置？

A_5：因為直尺上每刻度之間的寬度可能有些微的差距，因此為了降低這個「測量儀器的不精準」所導致的「設備系統誤差」，我們若從直尺不同的位置測量長度再取平均，將可抵消此誤差(例如若只在同一位置進行測量，則測量值可能皆偏高或皆偏低(因為尺的不精準)，平均起來後與實際值有一段差距；若從直尺不同的位置測量長度再取平均，則偏高及偏低的測量值平均後位於中間，與實際值較接近)。

Q_6：一個長方形物體的長、寬各測十次，計算面積時應以長度平均值與寬度之平均值相乘，或是長、寬一對一相乘後再平均?說明理由。

A_6：

1. 理論計算：因為長、寬互不影響，故互為獨立變數。由$\overline{面積} = \overline{長 \times 寬}$(長、寬一對一相乘後再平均) $= \overline{長} \times \overline{寬}$(長度平均值與寬度之平均值相乘)，可知其實結果是一樣的。

2. 實際數據分析：由「六、實驗結果與分析實驗(一)數據分析第 8. 點」我們計算出 $\overline{長 \times 寬 \times 高}$，又由第 11. 點算出體積的平均值$\bar{V} = \overline{長} \times \overline{寬} \times \overline{高}$，比較 2 者算出的數據後，我們發現竟然一模一樣！同理可知計算長方形面積時 2 種算法應也可以得到相同的值。

Q_7：$\mathbf{x^2}$的標準差利用「$\left(\frac{\sigma_{\overline{xy}}}{\overline{xy}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2$ (其中y以x代入)」和「$\left(\frac{\sigma_{\overline{x^l y^m}}}{\overline{x^l y^m}}\right)^2 = l^2\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + m^2\left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2$ (其中l以2代入、m以0代入)」計算所得的結果有何不同?哪一種是正確的?為什麼?

A_7：1. 若利用$\left(\frac{\sigma_{\overline{xy}}}{\overline{xy}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2$式將 y 以 x 代入，則可得$\left(\frac{\sigma_{\overline{xx}}}{\overline{xx}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 = 2\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{\sigma_{\overline{x^2}}}{\overline{x^2}}\right)^2 = 2\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2$

2. 若利用$\left(\frac{\sigma_{\overline{x^l y^m}}}{\overline{x^l y^m}}\right)^2 = l^2\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + m^2\left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2$式將 l 以 2 代入、m 以 0 代入，則可得到

$$\left(\frac{\sigma_{\overline{x^2y^0}}}{x^2y^0}\right)^2=\left(\frac{\sigma_{\overline{x^2}}}{\overline{x^2}}\right)^2=2^2\left(\frac{\sigma_{\overline{x}}}{\overline{x}}\right)^2+0^2\left(\frac{\sigma_{\overline{y}}}{\overline{y}}\right)^2=4\left(\frac{\sigma_{\overline{x}}}{\overline{x}}\right)^2$$

3. 第 1. 個算法與第 2. 個算法算出來的答案差了 2(常數)倍。其中我認為第 2. 個算法是正確的，因為 x 與 x 這 2 個變數(其實為同一個)互相會干擾(影響)彼此的值，故互不為獨立變數。當變數(x×x)相同時, 誤差會增加(因為兩個誤差同時增長)，因此不能使用「乘除的誤差傳遞」公式(第 1. 個算法)，必須使用「有冪次的乘除誤差傳遞」公式(第 2. 個算法)

Q_8：準確度與精密度的差異為何？

A_8：

1. 準確度：指「實驗值」與待測物理量的「真正值」之差，實驗數據平均值$\bar{x}$跟待測物理量「真正值」的差越小，表示儀器的「準確度」越高。

2. 精密度：指實驗結果「可重複」的程度(重複多次測量，各個結果的差異程度)，平均標準差($\sigma_{\overline{x}}$) 越小，表示精密度越高

Q_9：請一一列舉此實驗所使用的儀器之系統誤差。

A_9：

1. 設備系統誤差：儀器測量精確度後的位數導致設備系統誤差，如

(1) 游標尺只能精準到 0.05mm 的層級

(2) 螺旋側微器只能精準到 0.01mm 的層級

(3) 三梁天平只能精準到 0.01g 的層級

(4) 電子天平也只能精準到 0.01g 的層級

更小層級的差距只能以估計的方式，故與實際值之間有誤差的產生。

2. 環境系統誤差：環境因子的細微變動也會影響測量結果

(1) 游標尺:待測物體受到壓力，因而形變影響長度；環境溫度不同也會熱脹冷縮影響待測物體的長度

(2) 螺旋測微器:待測物體受到壓力，因而形變影響直徑長度；環境溫度不同也會熱脹冷縮影響待測物體的直徑長度

(3) 三梁天平:風吹與桌面震動會導致天平難以平衡；桌面並未水平則會影響測量出來的數值→可透過水平儀及歸零校正回來

(4) 電子天平:風吹與桌面震動導致數值起伏、電子元件本身感應不良或桌面並未水平等環境因素→可透過歸零校正回來

八、心得及建議

繼上次的力學演示實驗後，有一個星期的緩衝期，可以慢慢寫結報以及這個實驗的預報。然而，積了一堆各科作業的我，還要準備微積分第一次小考，根本沒辦法騰出什麼時間來做結報，更不用說預報了……。

因此，一個星期後，我的結報還是連碰都沒碰……。

到了星期四，我終於開始寫結報了，然而這麼一寫，就寫到了星期二……，結果預報就做得很趕。

到了實驗現場，我們開始進行「基本卻繁雜」的基本測量實驗，這次的實驗真的好麻煩啊~~雖然實驗的部分只要量一下數據就結束了(真棒~)，但是後續的數據處理才

是真正決定我們幾點能走出實驗室的大魔王：不太熟悉誤差傳遞的我們2個，最花時間的部分不是在測量數據，反而是算誤差傳遞時，公式中的變數、符號真是繁雜，(我們心中真想趕緊做完這次的實驗，因為隔天就可以放4天連假囉!)我們研究了好久，又問助教後才比較了解該怎麼計算，靠著助教事先傳給我們的附上了公式及表格的Excel(非常非常感謝助教能讓我們早點休息～我的隊友也能順利趕上南友會的專車回家)，才得以在3:53左右結束實驗!!(放假囉~~)

然而最終大魔王就是這份結報啦，誤差傳遞真的好複雜喔(公式也很多，那些方程式我修改到快瘋了)，不過經由這次實驗，我已經把做實驗基本的處理數據的方式有更深的理解了，這雖然複雜，卻是做實驗必須使用到的工具，經由這次實驗，我學會在未來的實驗旅程中會經常使用到的這份工具，那麼我想，我們在放連假前後所花費的時間是非常值得的！(PS:好在我們不需要做其他量血壓、測定輻射粒子的實驗，不然我的隊友可能真的會趕不上車~)

九、參考資料

1. 國立清華大學普通物理實驗室網站—實驗1: 基本量度 (Measuring)‧網址：http://www.phys.nthu.edu.tw/~gplab/exp001.html

2. 熟悉基本度量儀器與數據分析-201709 修訂‧實驗 1 基本度量與誤差傳遞講義‧網址：http://www.phys.nthu.edu.tw/~gplab/file/01Measuring/exp01.pdf

3. 實驗 1 熟悉基本度量儀器與數據分析實驗講義‧編寫者：國立清華大學物理系戴明鳳教授‧編寫日期：2012/9/24‧網址：http://www.phys.nthu.edu.tw/~gplab/file/01Measuring/exp01%20data%20analysis%20&%20%20measuring.pdf

3. 誤差傳遞公式在寫啥...‧Disp BBS‧網址：https://disp.cc/b/163-ahnD

4. 游標尺| mengwen‧東海大學‧網址：https://www.google.com/search?tbm=isch&sxsrf=ACYBGNTwll6Vjf9cD4Wz0TdqhdStLyWpqw%3A1571073174915&sa=1&ei=lqykXbzHN9b7wAPO4q7IDw&q=%E6%B8%B8%E6%A8%99%E5%B0%BA&oq=%E6%B8%B8%E6%A8%99%E5%B0%BA&gs_l=img.3..0l2j0i10l8.4495680.4495680..4496679...0.0..0.47.47.1......0....2j1..gws-wiz-img.pCNrO7N94BE&ved=0ahUKEwi86obUn5zlAhXWPXAKHU6xC_kQ4dUDCAc&uact=5#imgrc=CppO5nXAQzpzhM: