

第 108 學年度清華大學普通物理實驗(一)

☐預報 或 ☒結報 課程編號： 10810PHYS101010

實驗名稱： 演示實驗 C:波動與熱力學篇—蛇擺、節拍器共振實驗

系 級：電機資訊學院學士班 1 年級 組 別： 13

學 號： 108060018 姓 名： 葉承泓

組 員： 陳竑廷

實驗日期： 108 年 12 月 4 日 補作日期： 年 月 日

◎ 以下為助教記錄區

預報繳交日期	報告成績	助教簽名欄
結報繳交日期		
報告缺失紀錄		

一、目的

滴答滴答滴……，時間一分一秒迅速流逝中，伴隨著時鐘下方的單擺來回擺動，永不停息。小時候的記憶，令現在忙碌的我嚮往著，能夠無憂無慮地到公園玩個盪鞦韆，享受悠閒的午後時光。生活中常常可見到單擺的應用，而「蛇擺」又是集結了多個擺長全不相同的單擺而衍生出的物理器材，然而，為什麼蛇擺能夠顯現出蛇在地上行走的圖形呢？這些單擺又是如何構成一隻隻「蛇的腳」呢？就讓我們透過這次的演示實驗來一探究竟它的神秘及令人驚奇之處！

二、實驗器材

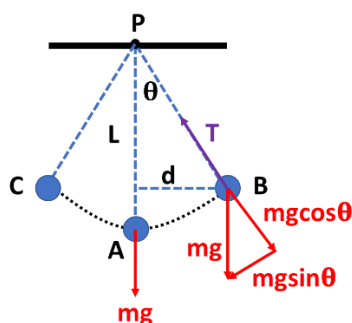
1. 蛇擺(Pendulum Wave)器材 1 組
2. 手機 1 支(拍攝影片用)

三、蛇擺實驗：

(一) 原理

1. 單擺：

如下圖所示，假設有一個單擺，擺錘是體積為零、而質量為 m 的質點，以一質量可忽略、擺長為 L 之擺線懸吊掛於天花板上一點 P 點，將擺錘由 B 點釋放，則其運動模式為對通過 P 點的鉛垂線作往復擺動(B 點(右端最高點)→ A 點→ C 點(左端最高點)→ A 點→ B 點→...(一直重複循環，理論上永無止境))。



接下來來分析其在各個時間點的運動模式：假設在某個時間點 t 時，擺線與鉛錘線的夾角為 θ ($0^\circ \leq \theta < 90^\circ$)。在圖中我們取當擺錘擺到 B 點(右端最高點)時，這樣一來整個擺盪過程中之 θ 值皆小於此時的 θ 值。以下的推導過程之 θ 值為任意滿足 $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ 的值，不一定是在 B 點處：由於力矩的量值可表示為力與其垂直力臂的量值乘積，因此重力對此單擺系統以 P 點為支點、通過 P 點的鉛垂線為轉軸(擺軸)所造成的力矩可表示為 $|\tau| = mgsin\theta \times L$ ，而力矩的量值也可以同時被表示為轉動慣量與角加速度的量值的乘積，即 $|\tau| = I|\alpha|$ ，又因為此處我們假設擺錘為一質點，以半徑 L 對 P 點(支點)做旋轉，而且擺線的質量又可忽略不計，故此系統相對於 P 點

(當作轉動支點)的轉動慣量 $I = mL^2$ ，又 $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ ，故 $\tau = -mgsin\theta \times L$ (

在此取負號是因為力(矩)與位移成相反方向) $= I\alpha = mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$ ，整理後可得

$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$ 。由於當 $\theta \ll 1$ 時， $\sin\theta \approx \theta$ ，因此此方程式可以近似為

$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$ ，此形式符合簡諧運動的方程式型式(當質量為 m 的質點被放

置於一個彈性係數為 k 、質量小到可忽略不計的彈簧上而作來回移動的簡

諧運動時，由於 $F=-kx$ (其中負號表示力與 x 反向)以及 $F=ma=m\frac{d^2x}{dt^2}$ (其中 x

表示距離彈簧平衡點的位移)，可得到簡諧運動的運動關係型式： $\frac{d^2x}{dt^2} =$

$-\frac{k}{m}x$ ，此時其對應的運動週期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ ，故可視其為簡諧運動(也可用

另外一種方式來確認：由於

(1)作用力與位移反向；

(2)作用力與位移的一次方成正比；

(3)作用力與位移的二次微分成正比(即 $F=ma$)，

可說明其為簡諧運動的運動模式)，因而其擺動的週期 $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ，由此方程

式可發現單擺的週期只跟擺長與重力加速度有關，而與擺的質量無關。

2. 蛇擺(又稱為擺波，Pendulum Wave)：

蛇擺是由數個特定擺長的單擺所組成的系統，如下圖所示，假設某蛇擺是由 $(n+1)$ 個特定(但互不相同)擺長的單擺所組成(由右至左依序為擺長最長至擺長最短，將其分別編號為 0、1、2、3、……、 n 號單擺)，其 2 個相鄰單擺之間的時間為 d ，其一個週期(蛇擺開始擺動後，從開始的一直線回到一直線所需的時間)為 Γ ，而由於蛇擺的特殊設計，使最長的單擺(0 號單擺)擺動 N 次、第二長(1 號單擺)的單擺擺動 $N+1$ 次、第三長(2 號單擺)的單擺擺動 $N+2$ 次、……、最短的單擺(n 號單擺)擺動 $N+n$ 次的所需時間皆

為 Γ ，故各個小單擺的週期可寫成 $T_n = \frac{\Gamma}{N+n}$ ，又由於每個單擺間格為 d ，故

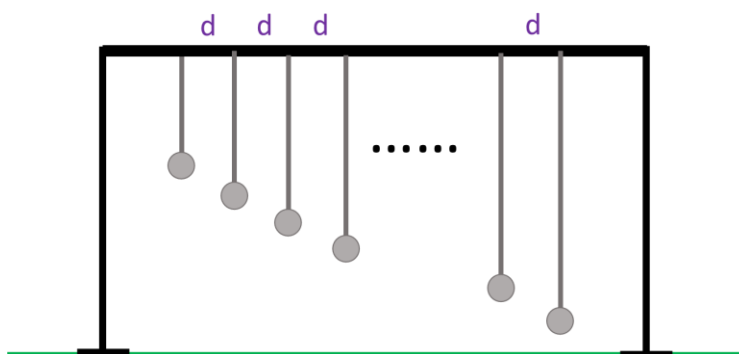
若定 0 號單擺的支點為原點，此點向 n 號單擺的支點的方向延伸出去為 x

軸正向，則因為每個單擺之間的時間為 d ，由 $T_n = \frac{\Gamma}{N+n} = 2\pi\sqrt{\frac{L_n}{g}}$ (其中

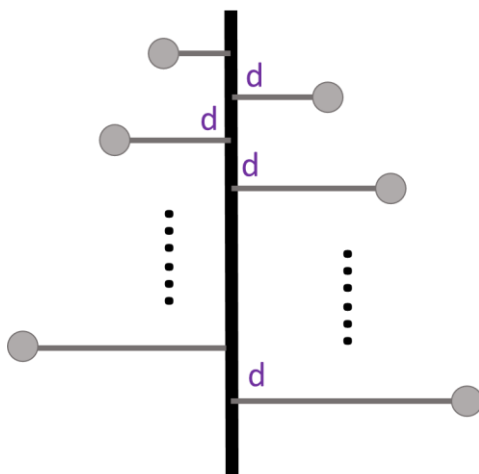
L_n 表示各單擺的擺長)可推得 $L_n = g\left[\frac{\Gamma d}{2\pi(Nd+nd)}\right]^2$ ，此即為我們所觀察到蛇

擺擺錘的連線。

側視圖



俯視圖



由於各單擺皆為小幅度擺動，故可視其為作簡諧運動，又各單擺的擺長經過特別設計(在蛇擺一個週期的時間內，其內的單擺分別擺動了 $N \sim (N+n)$ 次)，故蛇擺在運動時其內部單擺擺錘之連線形成一條正弦函數，因此可假設其在位置為 x ，時間為 t 時之位移為 $y(x, t) = A \sin(kx + \omega t + \phi)$ (或也可假設為 $y(x, t) = A \cos(kx + \omega t + \phi)$)，其中 A 表示蛇擺振幅大小，即單擺的震盪幅度大小； k 為波數(wave number)，其值為 $\frac{2\pi}{\lambda}$ ； ω 表示角頻

率，其值為 $\frac{2\pi}{T}$ ； ϕ 表示起始位置(或單擺之間的相位差)，在本實驗中可假設為 0 (因為當時間 t 為零時，所有之單擺一起在同一個相位出發)。因為各單擺的擺長並不相同，故 ω 會隨位置而改變，可將其記作 $\omega(x)$ 。則由於

$$\omega(x) = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{r_d}{N_d+x}} = 2\pi \frac{N_d+x}{r_d}, \text{ 其中 } x=nd。$$

若只考慮 $\omega(x)$ 的影響，則可假設在起始情況下波數 k 為零，因此位移 y 可

$$\text{寫作 } y(x, t) = A \sin \left(2\pi \frac{N_d+x}{r_d} t \right), \text{ 整理後得到 } y(x, t) = A \sin \left(2\pi \left(\frac{t}{r_d} \right) x + \right.$$

$2\pi\left(\frac{N}{T}\right)t$ ，即可得到蛇擺隨位置 x 與時間 t 變化的函數關係。

(二) 實驗步驟(器材用法)

1. 將多條不同擺長的單擺依長度排序固定於同一支架上
2. 擺長微調：將擺線固定在螺絲上，藉由螺絲的轉動來調整擺長。調整至需要的高度後，再以螺帽固定螺絲位置，而能固定單擺至特定的擺長。
3. 推動單擺使各單擺的擺錘皆在同一高度(向位)，並放開使各單擺開始擺動，觀察擺動過程中的波形(橫波)變化

(三) 實驗結果與分析

1. 開始擺動後，出現行進波的形狀(呈現波浪狀，像是扭動的蛇)
2. 行進波的波長隨著時間變化而漸漸變短
3. 進入混亂的狀態，看不出波型的規律，此現象稱為「失真現象」
4. 一段時間後，編號為單數的球與雙數的球分開成兩邊(兩不同向位，向位差接近半個單擺波長)
5. 重複前半周期的狀態，但行進波的方向改變為相反方向
6. 最後回到初始的一直線狀態，完成一個週期的運動循環過程

(四) 單擺在生活中的應用

1. 可用做時鐘下的鐘擺，因為其具有週期性、規律性與等時性，再小幅度擺動時每週期的時間固定且精確
2. 利用子彈打擊位於單擺末端的木塊，可由撞擊後子彈加木塊被單擺擺盪的高度推算出子彈的速率
3. 可以藉由測量單擺擺長及週期，計算出當地的重力加速度量值

四、節拍器實驗：

(一) 原理

在可任意左右方向移動的水平板子上，放置多個節拍器，其擺動頻率皆固定為 f 。在不同時間點將其指針釋放而開始擺動，此時各個節拍器之間指針擺動的相位差皆不為 0。隨著時間的經過，若其中一個節拍器的擺錘向右移動時，由於整個系統所受之外力和量值為 0，故其動量守恆，所以節拍器將水平板子推向左側(也可用牛頓第三運動定律來解釋說明)，而因為水平板子向左側移動，使得其他的節拍器的鐘擺被推向右邊，即與第一個節拍器的擺錘擺動方向相同，有如向右運動的擺錘透過底座將其他的擺錘向右推了一下。透過這樣動作不斷的重複，擺錘間的能量透過木板傳遞，直到所有擺錘擺動為同相位，水平板子也因此左右週期性隨著兩指針的擺動而搖晃。

(二) 實驗步驟(器材用法)

1. 將 2 個節拍器放置於一水平面上，將此平面上方放上平躺著的鋁罐，使鋁罐可以自由滾動。
2. 將兩節拍器上的標示塊皆對準某特定頻率 f
3. 在不同時間點(且相位不同時)開啟節拍器，使其指針擺動。
4. 觀察一段時間後，兩指針的擺動模式

5. 將節拍器個數增加為 3 個、4 個、5 個、.....，並重複上述步驟

(三) 實驗結果與分析

1. 一開始兩指針各自擺動，水平的板子左右不規則搖晃
2. 但過了一段時間後，兩指針的相位差越來越小
3. 最後兩指針同步擺動，水平的板子左右週期性隨著兩指針的擺動而搖晃

(四) 共振在生活中的應用

1. 吉他、鼓等樂器皆利用空腔的共振原理使聲音放大，讓遠處的人能夠聽見音樂
2. 吊橋在某特定頻率的強風吹拂下，可能因結構恰好共振而使得震動的振幅大量增加，而使橋斷裂
3. 颱風天時的窗戶也會因為與風吹拂的頻率產生共振而破裂

五、問題與討論

Q₁：蛇擺的週期和各個單擺的週期有什麼關係？

A₁：蛇擺的週期指的是各個單擺的擺錘所連出來的圖案，重複其規律一次所需花費的時間，也就是理論推導處的 Γ 。而各個單擺的週期除了與 Γ 並不相同之外，他們各自也不彼此相同(因為小幅度擺動的單擺週期為 $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ，其中 π 及 g 為常數，而這幾個單擺的擺線長度皆不相同，因此其週期也會因此而不相同)，由理論推導處可得出：編號 k 號的單擺擺盪週期 $T_k = \frac{\Gamma}{N+k}$ (其中 N 表示編號 0 號的單擺在 Γ 的時間段中擺動的次數)。

Q₂：簡諧運動的「相位(Phase)」在這個演示中扮演什麼角色？

A₂：相鄰單擺之間的相位差是導致蛇擺產生出千變萬化的圖形(例如蛇行走狀圖形(兩相鄰單擺的相位差介於 0 到半個行進波波長之間)或編號為奇數與偶數的單擺各佔一邊(相鄰兩單擺的相位差幾乎為半個行進波波長)，以及其他亂中有序的圖案)的主要原因之一，若所有單擺的擺長皆相等且一開始釋放時的初相位差皆為 0 (即在同一高度同時釋放)，則在整個擺動過程中，他們相位差皆不變，而只會形成單調的一直線擺動圖形，因此相位的差別在蛇擺的實驗裡佔有重要的地位，然而，此處「兩相鄰單擺的相位差」並不完全相同：編號 0 號與編號 1 號單擺之間的相位差，與其他(例如編號 1 號與編號 2 號單擺之間的相位差)相鄰兩單擺的相位差並不會在所有時間下皆相同，因為如果相同的話，他們將不會有「拉開相位差距」或「縮短相位差距」的情況發生，也就是說，他們的擺錘所形成的行進波圖案的波型會固定住，只看得出來它彷彿在行進，但會是同一個波動(波型)，不會隨時間改變其形狀，也因此就沒有蛇擺如此奇特又多元的形狀出現啦~~

Q₃：若將起始振幅加大，會產生什麼結果？

A₃：

理論上(不考慮擺動過程中的能量消耗，即能量損耗假設為 0)當起始振幅加大時(即組成單元的單擺擺盪幅度加大，也就是在一開始釋放各個擺錘前，先將它們搬移到更高的位置再釋放即可達成)，蛇擺的位移 y 的量值會加大，因為 $y(x,t) =$

$A\sin\left(2\pi\left(\frac{t}{\Gamma_d}\right)x + 2\pi\left(\frac{N}{\Gamma}\right)t\right)$ ，當起始振幅 A 加大時 y 會跟著加大，且因為假設能量不損

耗，故 A 的值不隨時間改變而變小，因此其所呈現出來的圖形為原本圖形震動幅度更大後的版本，而其他性質以及物理量不變(例如何時產生編號為奇數與偶數的單擺各佔一邊的圖形)，有如扭動得更劇烈的蛇。

而在實際上，單擺中所儲存的能量會漸漸被各種阻力(如摩擦力、空氣阻力等等)所消耗掉、轉換為熱能散失掉，因此單擺擺盪的幅度(高度)(以及蛇擺的振幅 A)會越來越小，最後當 $A=0$ 時整個系統擺盪停止。因此若當起始振幅加大後，蛇擺(以及組成其之單擺)所具有的能量增加，故其擺動的時間加長，可承受阻力消耗能量的時間比較久才停止下來。

Q4：若將所有的單擺擺長增加或縮短相同長度，又會如何？

A4：若將所有的單擺擺長增加 $h(h>0)$ ，則 $L'_k = L_k + h$ ， $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ ，此時由於 $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ，因此 $T'_k = 2\pi\sqrt{\frac{L'_k}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{L_k+h}{g}}$ ，並無法使得「最長的單擺(0 號單擺)擺動 N 次、第二長(1 號單擺)的單擺擺動 N+1 次、第三長(2 號單擺)的單擺擺動 N+2 次、……、最短的單擺(n 號單擺)擺動 N+n 次的所需時間皆為 Γ 」，故無法形成蛇擺的型態(因為並非等比率放大)，只會呈現出混亂的擺動模式。同理若 $L'_k = L_k - h$ ， $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ ，也是無法形成蛇擺的型態。但若將所有的單擺長度都增加其原長的 m 倍，即 $L'_k =$

$(1+m)L_k$ ， $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ ，則由於 $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow T'_k = 2\pi\sqrt{\frac{L'_k}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{(1+m)L_k}{g}}$ ，此效果將會與原本的蛇擺的圖案幾乎一模一樣(有如等比率放大)。

Q5：證明蛇擺擺動後經過數個週期($m\Gamma$)仍和第一個週期是相同的：

A5：由上方理論推導部分，我們可得知蛇擺的位移 y 與組成其之單擺所在的位置 x 與當時的時間點 t 函數關係為 $y(x, t) = A\sin\left(2\pi\left(\frac{t}{\Gamma_d}\right)x + 2\pi\left(\frac{N}{\Gamma}\right)t\right)$ ，因此當蛇擺擺動經過數個週期(在此假設為 m 個週期)後，其理論上(不考慮實際生活中的能量消耗)之位移函數為

$$\begin{aligned} y(x, t + m\Gamma) &= A\sin\left(2\pi\left(\frac{t + m\Gamma}{\Gamma_d}\right)x + 2\pi\left(\frac{N}{\Gamma}\right)(t + m\Gamma)\right) \\ &= A\sin\left(2\pi\left(\frac{t}{\Gamma_d}\right)x + 2\pi\left(\frac{N}{\Gamma}\right)t + 2\pi m\left(n + N\right)\right) \\ &= A\sin\left(2\pi\left(\frac{t}{\Gamma_d}\right)x + 2\pi\left(\frac{N}{\Gamma}\right)t\right) = y(x, t) \end{aligned}$$

$\therefore y(x, t + m\Gamma) = y(x, t)$ ，其值仍然不變(即其擺動具有可循環性及週期性)。

Q6：在節拍器實驗中，若用厚重的金屬代替底座的水平板子，結果會有何不同？

A6：若底座質量太大時(有如放在水平桌面上)，擺錘擺動的能量並不足以推動底座，也就無法傳遞到另一個擺錘，擺錘將會以各自的相位擺動，不互相影響彼此。

Q7：在節拍器實驗中，使用單、偶數個節拍器，會有什麼不同？

A7：使用偶數個節拍器，通常會出現以「反相」的狀態震盪較長時間的現象，但是否「反相的狀態震盪較長時間」也與擺錘剛開始擺動時的(各物理量)情況而影響。

Q8：在節拍器實驗中，為什麼需要將各個節拍器的頻率調為一致？

A8：因為若有其中兩個節拍器的頻率不一致，則會無法發生共振(因為發生共振的條件之一為必須兩物體振動為同頻率)，也就因此沒有同步的機會(頂多只有在週期的最小公倍數的倍數的時間點才會「彷彿同步」(但其實並不算)。

六、心得及建議

這次演示實驗是這學期最後一個演示實驗了，令我覺得有點感傷。每次的演示實驗都是令人既頭痛(不知道要選哪一個寫比較適合)又期待(可以比做一般實驗還早結束，而且不用寫預報～)的課程，可惜這都將隨著學期的結束而成為一段大學新生活的回憶了……。

這次的演示實驗特別讓我驚訝——除了許多違反常理的物理現象(照到燈光的金屬片竟然會轉動?!保麗龍球竟然能被波動產生器所形成的波影響而排列成特殊的波動形狀(還有清楚的波峰、波谷呢)?!特定擺長的單擺竟然能合在一起形成彷彿蛇在蛇行的規律蠕動?!)以外，還有讓我更加手足無措、不知該如何是好的結報內容：要選擇4個實驗器材研究，再加上看完影片的新的以及想都沒想過、聽都沒聽過的微觀下的熱及溫度到底是些什麼東西。說真的，我上次的演示實驗聽說要寫3樣實驗器材時，就已經寫到快崩潰了，結果這次難道要除了寫4個以外，還要再加上其他支線任務，簡直是Mission impossible 嘛(至少對我來說是這樣子)。幸好後來助教可能感受到我的極度焦慮不安(畢竟這幾週還在第二次月考的尾聲階段，我還有幾場考試要考啊～)，所以宣布減少成只要寫一項實驗就可以了~~~~~看到這訊息時，我真的興奮到整個人都要跳起來了！

然而，我還是寫到了最後一天……。

這次的實驗內容主要是熱力學的原理以及一些波動、共振有關的實驗器材(或玩具)，這些是我高中時比較沒接觸到的部分，也因此覺得這些理論特別難懂，理解起來也很吃力，光蛇擺這一個器材我就研究了好幾小時(可能超過10個小時有吧，還不包括寫進結報的部分)，還好還好，沒有要寫四個器材，不然我這幾天可能真的就不用睡了!!(真是感謝助教的體諒～)

七、參考資料

1. 國立清華大學普通物理實驗室網站—演示實驗&影片 C：波動與熱力學篇 (Demonstrations C) • 網址：
<http://www.phys.nthu.edu.tw/~gplab/exp012.html>
2. 大型蛇擺 • 網址：
<http://phy.tw/%E7%A7%91%E5%AD%B8%E5%AF%A6%E9%A9%97/item/108-2016-06-19-14-26-29>
3. 蛇擺的奧妙 • 作者：蘇子勻 • 網址：
<https://www.shs.edu.tw/works/essay/2015/09/2015093023530815.pdf>
4. [經典] 神奇的物理演示精選 • Kiwi 的物理教室 • 網址：
<http://kiwiphysics.blogspot.com/>
5. 讓我們一起搖擺！擺的同步現象 • 網址：

<http://phy.tw/%E7%A7%91%E5%AD%B8%E5%AF%A6%E9%A9%97/item/136-2016-06-24-08-27-05>

6. 32 個節拍器秩序的形成・網址：

<https://newtalk.tw/news/view/2012-10-03/29771>

7. 天哪！不同時間開始擺動的鐘擺最後都會一致擺動？・網址：

<https://kknews.cc/zh-tw/news/npvmor5.html>

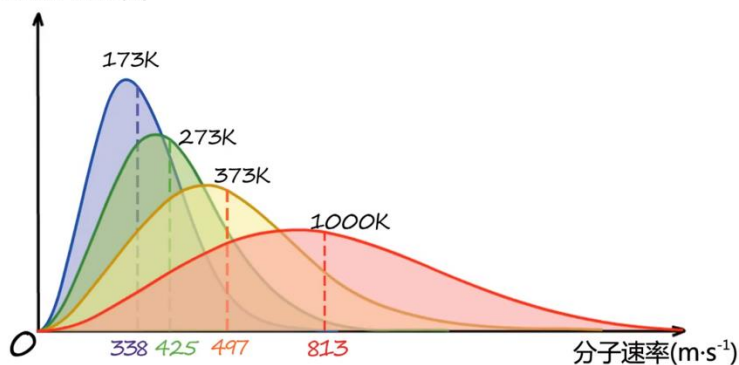
八、Bonus~~~~~

Q₁：熱是什麼？溫度是什麼？請以微觀角度的原子分子來形容。

A₁：

氧氣在不同溫度下的分子速率分布圖

單位速率間隔的分子數佔
總分子數的百分比(%)



- (1) 當環境的溫度與系統的溫度不相同(存在溫度差)時，在環境與系統中移動的能量就是熱，熱能會由溫度高往溫度低的方向流動。熱能傳遞的方式有三種：對流、傳導和熱輻射。其中傳導(導熱)的方式就是分子運動發生碰撞過程，依靠物質的分子、原子和電子的振動、位移和相互碰撞而使熱量傳遞(碰撞時速率大的分子將能量轉移給速率小的分子)，而對流的發生則是因為溫度不同，流體內部分子間隙不同(巨觀上稱為密度不相同)，而導致密度大會下沉，密度小會上升，而引發流體的內部流動，在流動過程中冷熱分子之間也會發生碰撞而導熱。
- (2) 溫度：用來表示冷或熱的一個物理量，表示的是系統分子的平均動能，溫度高的，分子平均動能高(分子運動較為激烈)；而溫度低的分子平均動能低。在熱學中常以凱氏溫度(K)來當作其衡量的單位。

Q₂：看李永樂老師影片：熵到底是什麼？寫 50 字心得。

A₂：「熵」——這個令我覺得深奧的字，竟然在生活周遭處處可見。單看字面上，我還以為會跟火的性質有關，沒想到竟然是表示著自然界的物質所嚮往的方向。物質會傾向「無序」狀態，也就是以巨觀角度看來發生機率最高(微觀角度看來有最多微觀態種類的分布可能)的情況，不過這也滿符合直覺的——我們其實也趨向「熵」多的方向：誰會喜歡人擠人呢？當然是越平均分布在一個空間中越「舒適」啊。不過令我覺得更加驚訝的事情是：「熵」竟然還可以被量化，記作 $S = k \ln(\Omega)$ (其中 S 表示熵、 k 為波爾茲曼

常數，其值約為 $1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ ， Ω 為滿足某巨觀條件下的微觀態個數)。另外，原來宇宙中的熵一直在增加中啊(原來真的有東西不會守恆，而是一直增加下去的)，還好宇宙還正在膨脹中，讓麥克斯韋所提出之理論中的熵上限也一直在增加中，讓我們身處的宇宙不至於「熱寂」。