

第 108 學年度清華大學普通物理實驗(一)

☐預報 或 ☒結報 課程編號： 10810PHYS101010



實驗名稱：演示實驗 B:轉動力學篇—陀螺儀、歐拉盤與快速旋轉的輪胎

系 級：電機資訊學院學士班 1 年級 組 別：13

學 號：108060018 姓 名：葉承泓

組 員：陳竑廷

實驗日期：108 年 11 月 6 日 補作日期： 年 月 日

◎ 以下為助教記錄區

預報繳交日期	報告成績	助教簽名欄
結報繳交日期		
報告缺失紀錄		

一、目的

在日常生活中，我們所見(巨觀)之各種物體的運動方式，其實都可以拆解成 2 種運動模式——移動以及轉動。其中移動運動可以牛頓三大運動定律來闡釋及說明、甚至預測。而轉動的部分則須確定支點(或旋轉軸)位置，考慮物體上各個質點相對於旋轉軸的運動，再用積分的方式得出此物體的轉動模式，而經由理論推導後，我們可以得到類似於「直線運動、等加速度之牛頓第二運動定律公式」的「轉動運動、合力矩為定值之等角加速度公式」，如下表所示：

物理量	直線運動(由牛頓第二運動定律而得)	轉動運動(由物體上各個質點相對於旋轉軸的運動，再用積分的方式得出)	兩物理量之間的關係(其中 r 為旋轉半徑)
(角)位置	x	θ	
(角)位移	Δx	$\Delta \theta$	
(角)速度	\bar{v}	$\bar{\omega}$	$ \bar{v} = \bar{\omega} r$
(角)加速度	\bar{a}	$\bar{\alpha}$	$ \bar{a} = \bar{\alpha} r$
質量/轉動慣量	m	I	$I = \sum m_i r_i^2 = \int r^2 dm$
(角)動量	\bar{p}	\bar{l}	
力(矩)	\bar{F}	$\bar{\tau}$	
牛頓第二運動定律	$F = ma$	$\tau = I\alpha$	
等(角)加速度運動公式	$\bar{v} = \frac{1}{2}(v_0 + v)$	$\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$	
	$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	
	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	
	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$	
移動動能/轉動動能	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}I\omega^2$	

在這次的實驗中，我將透過三個實驗(陀螺儀(Gyroscope)、歐拉盤(Euler Disk)、快速旋轉的飛輪)來研究有關轉動的性質中「進動/章動」，以及「角動量守恆」的例子，讓我們對日常生活中隨處可見卻又違反直覺之物體奇妙的轉動有更深入一層的探討及理解。

二、實驗器材

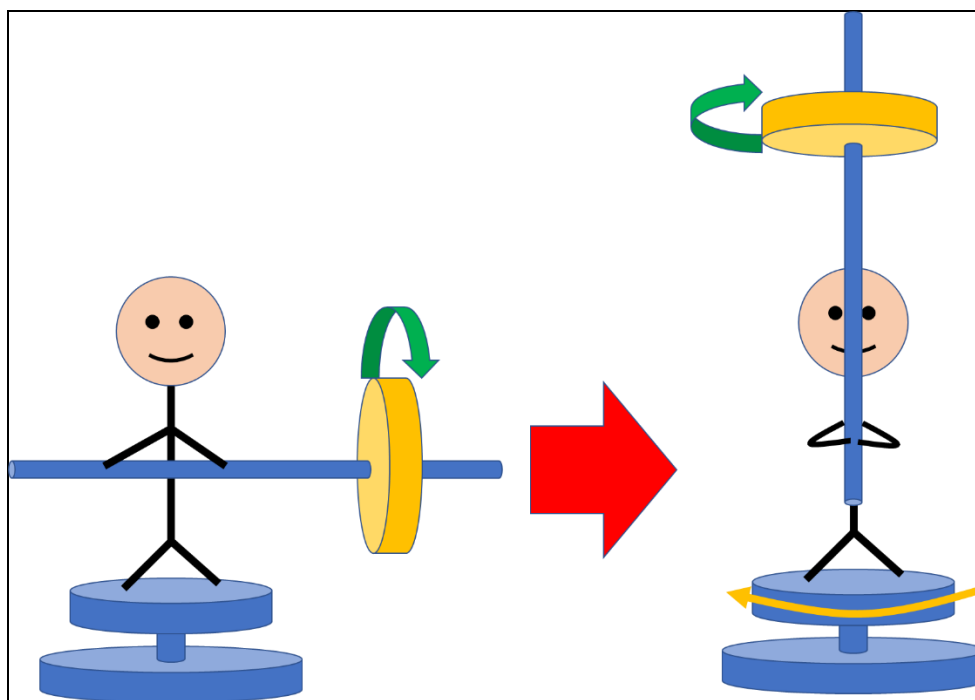
1. 陀螺儀(Gyroscope)器材 1 組
2. 快速旋轉的飛輪器材 1 組
3. 歐拉盤(Euler Disk) 器材 1 組
4. 手機(具有可拍攝慢動作影片的功能)

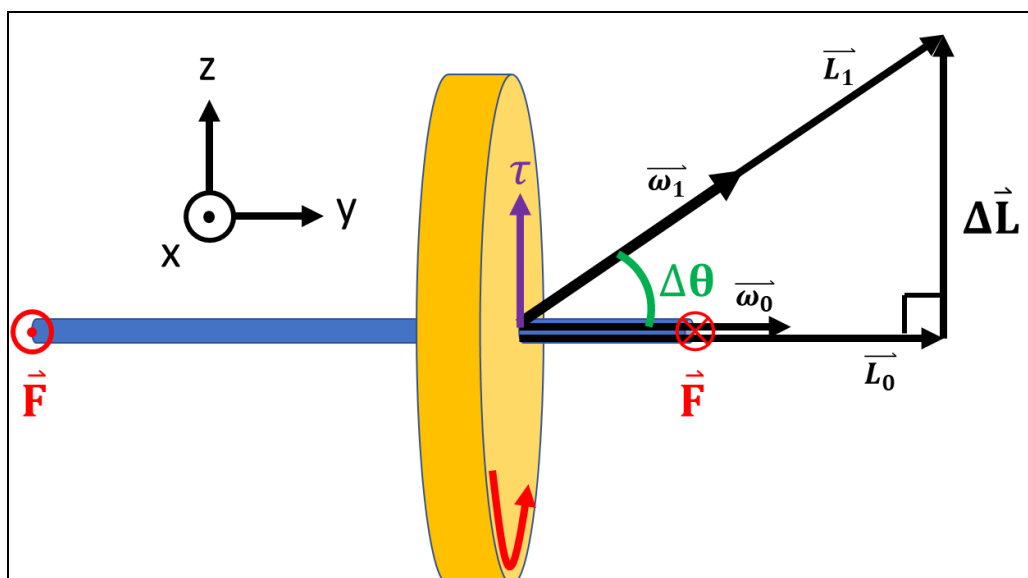
三、實驗甲：與「角動量守恆」有關的實驗—陀螺儀(Gyroscope)或轉動得很快的飛輪：

(一) 原理

1. 角動量守恆：由於 $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ ，其中 $\vec{\tau}$ 為物體所受到之合力矩， \vec{L} 為物體的角動量。當合力矩為0時(即 $\vec{\tau} = \vec{0}$)， \vec{L} 為定值，不隨時間而改變，故稱為角動量守恆。
2. 如下圖所示，有一人站在靜止的旋轉平臺上不動，手裡握著正在旋轉的飛輪(旋轉方向如圖所示)，其轉軸方向(即支架方向)呈水平。因為飛輪繞著水平轉軸轉，因此以支架為轉軸時，由右手定則決定轉動時各項物理量(如角速度、角加速度、角動量)的方向可知飛輪帶有角動量 \vec{L}_0 (方向朝 y 軸正向)，而因為旋轉平臺並無轉動，故整個系統(旋轉平臺+人+支架+飛輪所形成的集合)在鉛垂方向上並沒有角動量(角動量量值為0)。假設旋轉平臺的轉軸上的摩擦力可忽略，則由於作用在整個系統的力只有旋轉平臺轉軸施予的正向力以及系統中各物體的重力，而其作用所產生的力矩皆在 x 軸方向上，並不會影響到 z 軸(鉛錘方向)的角速度(轉速)與角動量，故在 z 軸方向在把飛輪的轉軸從水平扳成垂直的前後，整個系統繞著垂直轉軸(z 軸)的角動量維持不變(即角動量守恆)，其值皆為0。

而就飛輪本身來看，當轉軸為水平時，其角動量方向朝 y 軸正向，z 軸方向並無角動量，當人施力(力矩)於其上，使它的轉軸變成垂直方向(朝 z 軸方向)時，飛輪仍然繼續轉動，但此時就會有 z 軸方向的角動量(量值不為0)；但就整個系統而言，因為 z 軸方向之合力矩為 $\vec{0}$ ，所以角動量應依然為 $\vec{0}$ ，因此整個系統朝向與飛輪轉向相反的方向旋轉，才能抵銷飛輪轉動所造成的 z 軸方向之角動量，使得角動量守恆。





上圖中飛輪繞著 y 軸快速旋轉，因此角速度與角動量也是繞著 y 軸，由右手定則定出其方向皆為朝向 y 軸正向。若飛輪以很小的角速度 ω 繞 x 軸轉動(由右手定則定出方向為 x 軸正向)，則在很短的時間 Δt 後，飛輪的轉軸將轉到新的位置，假設其與水平面之間的很小的夾角為 $\Delta\theta$ ($0^\circ < \Delta\theta < 90^\circ$)，由於系統的總角動量大部分來自飛輪在軸上的轉動，極少部分來自飛輪輪軸的緩慢轉向，故角動量的大小不變，但方向改變。因為輪軸轉動了 $\Delta\theta$ 角度，因此角動量的變化量 ΔL 之量值大小為 $L_0\Delta\theta$ ，又因為力矩為角動量隨時間的變化率，故

$$|\vec{\tau}| = \left| \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} \right| = \frac{L_0 \Delta\theta}{\Delta t} = L_0 \omega$$

考慮方向後，可得到 $\vec{\tau} = \vec{\omega} \times \vec{L}_0$ 。由於 $\vec{\omega}$ 及 \vec{L}_0 的方向皆為水平，故 $\vec{\tau}$ 的方向為鉛直。要產生鉛直方向的力矩，我們的手必須施予輪軸兩個量值相等、方向相反的力，分別作用於飛輪輪軸的兩端，且施力方向為：其中一個朝向 x 軸正向，另一個朝向 x 軸負向。而由牛頓第三運動定律(作用力與反作用力定律)，此時飛輪會給予人的手一個量值相等而方向卻相反的力(也造成量值相等而方向卻相反的力矩)，這個反作用力使得我們及旋轉平臺繞著垂直的 z 軸反向旋轉。

(二) 實驗步驟(器材用法)

1. 實驗者拿著裝有飛輪的輪軸站上旋轉平臺
2. 由另一個人快速旋轉飛輪
3. 實驗者對輪軸施予一端向前、一端朝後的力，使得輪軸成鉛直狀態
4. 觀察站立於摩擦力可忽略不計的旋轉平臺上的實驗者是否仍保持靜止不動的狀態

(三) 實驗結果與分析

1. 即使實驗者想保持住靜力平衡而不旋轉，但當他將飛輪扳向垂直方向的途中，他會在旋轉平臺上開始旋轉
2. 當飛輪越接近垂直時，實驗者會轉動得越快
3. 當實驗者將飛輪扳回水平狀態的過程中，他旋轉的角速率變得越來越小，直到飛輪呈水平時，實驗者回到不轉動的狀態(整個系統回到最一開始的狀態)

狀態)

4. 當實驗者再度將輪軸轉向垂直方向時，又會開始在旋轉平臺上產生角速度，發生與步驟 1. 相同的事

(四) 生活中的應用

1. 芭蕾舞者一開始將手攤開往左右兩邊伸直，並開始旋轉。然後，他將雙手收回，此時會發現他在收回的動作之過程中，其轉速越來越大，而當他又將雙手伸直攤開，其轉速又下降回來，這是因為角動量必須守恆(因為他所受到的力量只有重力與地面所給予的正向力(摩擦力在此理論上忽略不計)，而這兩力又正好通過其質心而不產生力矩(力矩量值為 0)，故角動量守恆)，而手伸直時位於手上的質點與轉動軸(通過舞者質心的鉛直線)之間的距離較手縮回時大，又因為 $|\vec{L}| = I\omega$ ，當手縮回時 I 值變小，故角速度的量值須變大而轉得更快。
2. 公園中也有一種運動器材，是一個可自由旋轉的平臺(平臺面與其支撐架之間幾乎無摩擦)。當人站到上面後，若站上去時腳蹬地板(或手去推旁邊的欄杆)，則會有出轉速 ω_0 ，與第 1. 個芭蕾舞者的例子類似，當我們的手向外伸展或向內縮回時，我們的轉速將會有所變化(向外伸展時轉速變慢；向內縮回時轉速變快)，這也是角動量守恆在生活中應用的常見例子之一。

四、實驗乙：與「進動」、「章動」有關的實驗—歐拉盤(Euler Disk)：

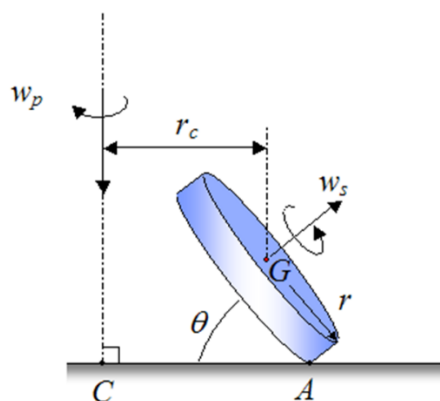
(一) 原理

1. 進動(precession)：以陀螺的進動為例—陀螺快速旋轉時，作用於陀螺質心的重力，會以陀螺與地面之間的接觸點為支點而形成一個力矩。此水平方向的力矩會使得陀螺的轉動軸會繞著經過陀螺與地面接觸點的鉛直線轉動，此現象即稱為「進動」
2. 章動(nutation)：以陀螺的章動為例—陀螺在旋轉時，實際上並不會恰好沿著理論上的(平均)進動路徑做旋轉，而是有如簡諧運動一般，以平均進動路徑為中心，來回搖擺。這個現象即為「章動」
3. 歐拉盤(Euler Disk)有如在光滑平面上旋轉 10 元硬幣，當它在光滑表面上被轉動時，它會開始旋轉(盤面上的質點相對於盤面中心旋轉；整個盤子的質心相對於地面作圓周運動)，但其轉動時間(開始旋轉至轉動結束(即停止下來)的時間)卻能夠比旋轉 10 元硬幣時長。以下將探討歐拉盤之所以隨時間而旋轉加速的原因：
如下圖所示，假設歐拉盤在一光滑水平面上轉動，其中

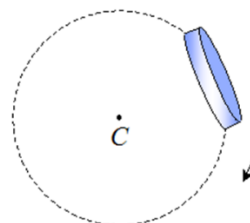
- ω_s 為圓盤上的轉動速度
- ω_p 為整個圓盤的轉動(進動)角速度
- A 點為圓盤上之「圓盤與地面接觸點」
- C 點為圓盤進動的轉軸與水平面的交點
- G 點為圓盤中心點(同時是質心)
- r_c 表示 C 點與 G 點之間的水平距離
- r 為圓盤的半徑
- θ 為圓盤與水平面之間的夾角

點在水平面上所走過的圓形軌跡。

側視圖



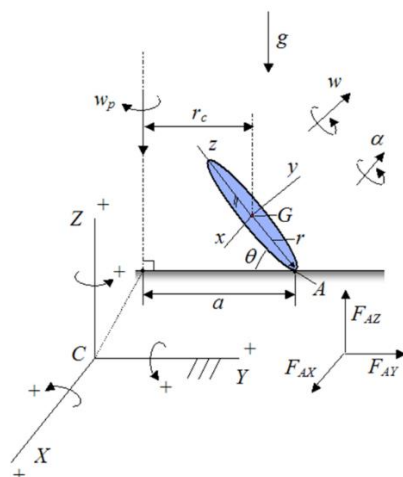
俯視圖



為了簡化問題，我們假設 ω_s 、 ω_p 及 θ 皆為常數(事實上此三個物理量會隨著時間慢慢改變，也使得 θ 隨時間而減小，但因為其隨時間改變的程度小，故將他們視為常數)。另外，我們也假設：

1. 圓盤在水平面上無滑動
2. 圓盤厚度遠小於其半徑
3. 圓盤旋轉到最後時 $r_c = 0$ (因為 θ 隨時間變小使得 A 點在水平面上所走過的圓形軌跡(即俯視圖中的圓形虛線部份)的半徑趨近圓盤的半徑)

因此我們可畫出經過這些假設後的圖形：



其中 x 軸平行於 X 軸，且

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{XYZ 坐標系之原點為 C 點，為固定的坐標系} \\ \text{xyz 坐標系之原點為 G 點，為非固定的坐標系，會隨著圓盤轉動的方向而改變} \\ g \text{ 為重力加速度} \\ \omega \text{ 為圓盤相對於地面的角速度} \\ \alpha \text{ 為圓盤相對於地面的角加速度} \\ F_{AX} \text{ 為作用於圓盤上 A 點的 X 軸方向的力} \\ F_{AY} \text{ 為作用於圓盤上 A 點的 Y 軸方向的力} \\ F_{AZ} \text{ 為作用於圓盤上 A 點的 Z 軸方向的力} \end{array} \right.$$

。而因為圓盤厚度遠小於其半徑，故其厚度可忽略不計。

接著，我們定義 \hat{i} 、 \hat{j} 、 \hat{k} 分別為 X 軸、Y 軸、Z 軸的單位向量(unit vector)，且其方向分別指向 X 軸正向、Y 軸正向、Z 軸正向。則圓盤相對於地面的角速度 $\vec{\omega}$ 滿足

$$\vec{\omega} = (\omega_s \sin \theta) \hat{j} + (\omega_s \cos \theta - \omega_p) \hat{k}$$

而透過向量的微分，圓盤相對於地面的角加速度 $\vec{\alpha}$ 滿足

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d[(\omega_s \sin \theta) \hat{j} + (\omega_s \cos \theta - \omega_p) \hat{k}]}{dt} = \frac{d[(\omega_s \sin \theta) \hat{j}]}{dt} + \frac{d[(\omega_s \cos \theta - \omega_p) \hat{k}]}{dt} \\ &= \frac{d[(\omega_s \sin \theta)]}{dt} \hat{j} + (\omega_s \sin \theta) \frac{d\hat{j}}{dt} + \frac{d[(\omega_s \cos \theta - \omega_p)]}{dt} \hat{k} \\ &\quad + (\omega_s \cos \theta - \omega_p) \frac{d\hat{k}}{dt} \\ &= 0 \hat{j} + (\omega_s \sin \theta) \omega_p \hat{i} + 0 \hat{k} + (\omega_s \cos \theta - \omega_p) \times 0 = \omega_s \omega_p \sin \theta \hat{i} \end{aligned}$$

圓盤上的 A 點之速度 \vec{v}_a 為「整個圓盤的轉動(進動)造成的切線速度(量值為 $(r_c + r \cos \theta) \omega_p$ 」加上「A 點相對於圓盤中心的旋轉之切線速度(量值為 $r \omega_s$)」，因為此兩向量互相平行且方向相反，故 $|\vec{v}_a| = (r_c + r \cos \theta) \omega_p - r \omega_s$ 。因為我們假設圓盤在水平面上無滑動，故 $|\vec{v}_a| = 0$ 。因此 $(r_c + r \cos \theta) \omega_p - r \omega_s = 0 \Rightarrow r \omega_s = (r_c + r \cos \theta) \omega_p$ ，又因為圓盤旋轉到最後時 $r_c = 0$ ，因此可得知 ω_s 與 ω_p 的關係式 $\omega_s = (\cos \theta) \omega_p$ 。

$$\text{再由牛頓第二運動定律可得知} \left\{ \begin{array}{l} \Sigma F_X = F_{AX} = m a_{GX} \\ \Sigma F_Y = F_{AY} = m a_{GY} \\ \Sigma F_Z = F_{AZ} - mg = m a_{GZ} \end{array} \right. , \text{其中}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m \text{ 為圓盤的質量} \\ a_{GX} \text{ 為 G 點的 X 軸方向加速度} \\ a_{GY} \text{ 為 G 點的 Y 軸方向加速度} \\ a_{GZ} \text{ 為 G 點的 Z 軸方向加速度} \end{array} \right. . \text{因為我們假設 } r_c = 0, \text{ 因此 G 點靜止(無運}$$

動)，可得 G 點的加速度量值為 0，因此
$$\begin{cases} F_{AX} = 0 \\ F_{AY} = 0 \\ F_{AZ} = mg \end{cases}。$$

接著，透過歐拉剛體運動方程式：先將以圓盤(視為剛體)質心定為支點的轉動慣量 I 分成平行 x 、 y 、 z 軸方向的量 I_x 、 I_y 、 I_z ，則

$$\begin{cases} \Sigma M_{G_x} = I_{G_x} \alpha_x - (I_{G_y} - I_{G_z}) \omega_y \omega_z \\ \Sigma M_{G_y} = I_{G_y} \alpha_y - (I_{G_z} - I_{G_x}) \omega_z \omega_x, \text{ 其中} \\ \Sigma M_{G_z} = I_{G_z} \alpha_z - (I_{G_x} - I_{G_y}) \omega_x \omega_y \end{cases}$$

$\begin{cases} \Sigma M_{G_x} \text{ 表示施予在圓盤上，以 G 點為轉軸(支點)的 } x \text{ 方向合力矩} \\ I_{G_x}、I_{G_y}、I_{G_z} \text{ 分別為以質心定為支點的轉動慣量所分之平行 } x、y、z \text{ 軸方向的量} \end{cases}$ 。
在此由於圓盤相對於地面的角速度可被沿著 x 、 y 、 z 方向分解為

$$\begin{cases} \omega_x = 0 \\ \omega_y = \omega_s - \omega_p \cos \theta, \text{ 以及圓盤相對於地面的角加速度可被沿著 } x、y、z \text{ 方向} \\ \omega_z = -\omega_p \sin \theta \end{cases}$$

$$\text{分解為} \begin{cases} \alpha_x = \omega_s \omega_p \sin \theta \\ \alpha_y = 0 \\ \alpha_z = 0 \end{cases}, \text{ 因此} \begin{cases} \Sigma M_{G_x} = I_{G_x} \alpha_x - (I_{G_y} - I_{G_z}) \omega_y \omega_z \\ \Sigma M_{G_y} = 0 \\ \Sigma M_{G_z} = 0 \end{cases}, \text{ 其中因為我}$$

們視圓盤厚度極薄，故 $I_{G_x} = I_{G_z} = \frac{1}{4} mr^2$ ， $I_{G_y} = \frac{1}{2} mr^2$ ，又沿著 x 軸方向，以

G 點為支點的力矩總和為 $\Sigma M_{G_x} = F_{AZ} (\cos \theta) \times r = mgr \cos \theta$ ，所以由歐拉剛體運動方程式可得 $mgr \cos \theta = I_{G_x} \alpha_x - (I_{G_y} - I_{G_z}) \omega_y \omega_z$ ，再由

$$\begin{cases} \omega_s = (\cos \theta) \omega_p \\ I_{G_x} = \frac{1}{4} mr^2 \\ I_{G_y} = \frac{1}{2} mr^2 \\ I_{G_z} = \frac{1}{4} mr^2 \\ \alpha_x = \omega_s \omega_p \sin \theta \\ \omega_y = \omega_s - \omega_p \cos \theta \\ \omega_z = -\omega_p \sin \theta \end{cases}, \text{ 得到 } mgr \cos \theta = \frac{1}{4} mr^2 \omega_p^2 \sin \theta \cos \theta, \text{ 因此 } \omega_p = \sqrt{\frac{4g}{r \sin \theta}}。$$

當 $\theta \rightarrow 0$ ， $\sin \theta \rightarrow 0 \Rightarrow \omega_p \rightarrow \infty$ ，這符合實際上當 θ 變小時旋轉速度迅速增加。而在實際上，圓盤 A 點與水平面之間會有相對運動，即滑動(因有摩擦力作用使能量減少)，以及因為並非完全剛體而造成的滾動能量消耗(rolling resistance)，導致與理論所推導出的結果之間有誤差。因為這些能量的消耗，也使得圓盤的重力位能降低，圓盤的中心點(G 點)高度緩緩下降，因而使 θ 變低，導致圓盤進動速度越來越快，當 θ 變得極小時，整個圓盤面將會碰到水平面而導致瞬間停止運動。因此摩擦力及滾動能量消耗越少、越接近剛體的水平面越能接近理論的結果。

另外，即使忽略摩擦力的影響，歐拉盤仍並非角動量守恆(conservation of

angular momentum)，因為在 A 點水平面對圓盤所施予的接觸力(正向力) F_{AZ} 會對位於中心(G 點)的支點(旋轉軸)造成力矩，而使得合力矩不為 0。

(二) 實驗步驟(器材用法)

1. 將鏡子放置於水平桌面上
2. 架設好手機，並設定成拍攝慢動作影片的功能
3. 一人以旋轉 10 元硬幣的方式使歐拉盤從鏡子的中心點開始旋轉
4. 拍攝並觀察歐拉盤的運動行為

(三) 實驗結果與分析

1. 歐拉盤除了本身值點繞著其中心點旋轉以外，其質心也會繞著以通過鏡子中心的鉛直線為轉動軸做旋轉
2. 隨著時間經過，其盤面與鏡面之間的夾角越來越小，質心繞著以通過鏡子中心的鉛直線為轉動軸所做之旋轉的角速度也越來越大(即轉動得越來越快)
3. 其所發出的聲音也隨著時間經過越來越大聲、頻率亦越來越高
4. 最後「丐一丫」地一聲而瞬間停止運動

(四) 生活中的應用

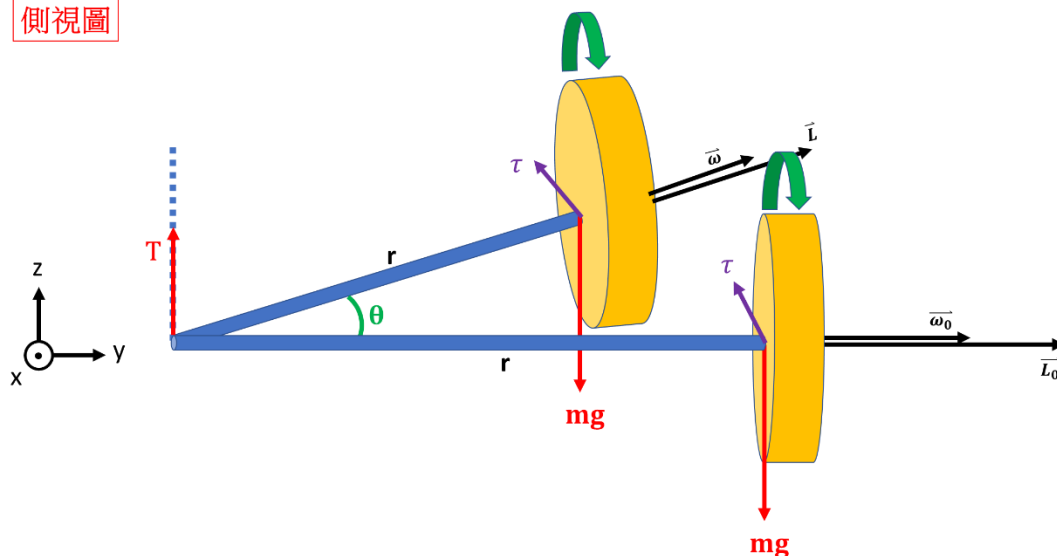
1. 在水平桌面上旋轉 10 元硬幣時，即類似歐拉盤的原理，只是因為歐拉盤有經過特殊設計(例如對稱性佳、圓盤形狀特定、.....)，而且其旋轉時下方為一面幾乎光滑無摩擦力的鏡子，因此歐拉盤的旋轉時間會比一般轉 10 元硬幣的時間還要久。

五、實驗丙：與轉動有關的實驗—快速旋轉的飛輪(輪胎)：

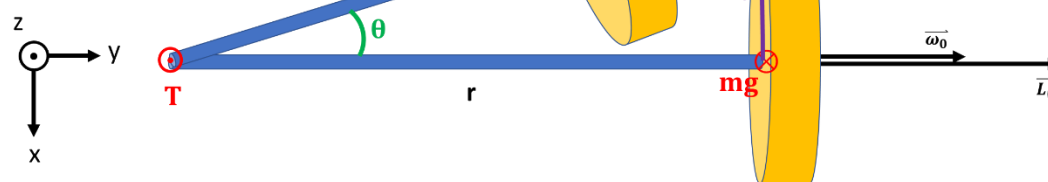
(一) 原理

如下圖所示，有一質量、轉動慣量為 I 的輪胎，其轉軸為長度 r 、質量與轉動慣量可忽略不計的剛體。將一細繩(質量亦可忽略不計)繫於輪胎轉軸的一端，將輪胎轉軸保持水平，並轉動輪胎，使其快速轉動，此時輪胎具有初角速度 $\overline{\omega_0}$ (方向由右手定則可得知朝 y 軸正向)，由於初角動量 $\overline{L_0} = I\overline{\omega_0}$ ，故 $\overline{L_0}$ 與 $\overline{\omega_0}$ 方向相同，皆朝 y 軸正向。由實際實驗我們可觀察到輪胎的質心點會繞著通過「輪軸有綁繫繩的那一端的端點」的鉛直線作圓周運動，因此此點即為轉動的支點。由於輪胎快速旋轉時，作用於輪胎質心的重力，會以輪軸與細繩之間的接觸點為支點而形成一個力矩。此水平方向的力矩會使得輪胎的轉動軸會繞著經過輪軸與細繩之間的接觸點的鉛直線轉動，即為「進動」現象。假設下一瞬間(經過極短時間後)輪胎質心轉動了 θ 角($0^\circ < \theta < 90^\circ$)，且此時角速度為 $\overline{\omega}$ ，角動量為 \overline{L} 。

側視圖



俯視圖

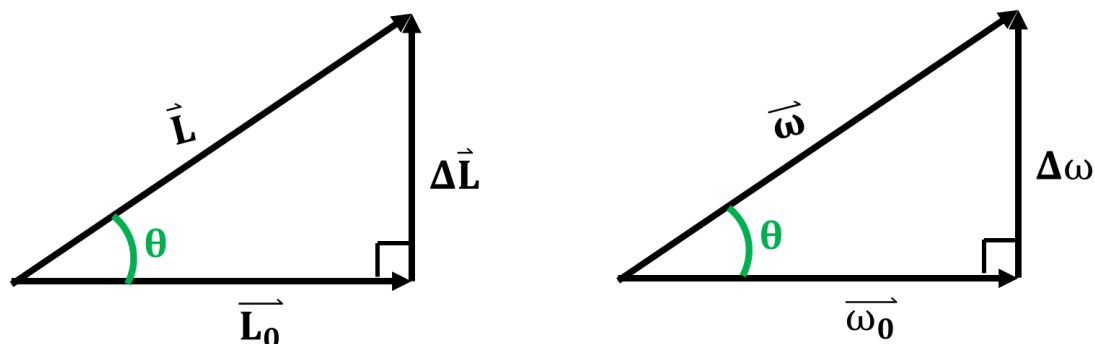


由於張力 T 通過支點(旋轉軸)，故不產生力矩，而作用在整個系統中的外力只有張力與重力 mg ，因為重力作用延伸線不通過支點(旋轉軸)，故會造成力矩 $\vec{\tau}$ (由右手定則可知一開始($t=0$ 時)方向朝 z 軸正向)，滿足 $|\vec{\tau}| = mgr =$

$\left| \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} \right| = \frac{\Delta L}{\Delta t}$ (力矩為角動量隨時間的變化量)，因此 $\Delta \vec{L}$ 方向與 $\vec{\tau}$ 方向相同(皆朝 z 軸

正向)且 $|\Delta \vec{L}| = mgr\Delta t$ ；又 $|\vec{\tau}| = mgr = |\vec{L}\alpha| = I \left| \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} \right|$ ，因此 $\Delta \vec{\omega}$ 方向與 $\vec{\tau}$ 方向相同

(皆朝 z 軸正向)且 $|\Delta \vec{\omega}| = mgrI\Delta t$ ，故我們可得到如下的向量分解圖(此為俯視圖)：



從上圖中可見當時間 $t=\Delta t$ 時(重力所造成的力矩作用了 Δt 單位時間後，此處的 Δt 取一段非常小的時間長) \vec{L} 與 $\vec{\omega}$ 的方向，由右手定則還原輪胎的轉動方

式，我們可得到因為輪胎面垂直 \vec{L} 與 $\vec{\omega}$ 的方向作轉動，故此時輪胎面與 y 軸之間的夾角為 θ 角，又一開始(時間 $t=0$ 時)輪胎面與 y 軸之間的夾角為 0，故輪胎面與 y 軸之間的夾角在 Δt 的時間間隔內轉了 θ 角，此即為 $|\vec{\omega}| (= \frac{\theta}{\Delta t})$ 值，可證明出我們親眼所見之「輪胎質心會繞著通過『輪軸有綁繫繩的那一端的端點的鉛直線』以角速率 ω 作圓周運動，而非向下掉落」。

由圖中可得知在垂直(鉛垂)方向(z 軸)上並沒有角速度及角動量的增加或減少，又鉛垂方向上之初(時間 $t=0$ 時)角速度及初角動量皆為 $\vec{0}$ ，故在整個運動過程中輪胎在鉛直方向的角速度與角動量皆為 $\vec{0}$ 。

接著我們要算當時間 $t=\Delta t$ 時(重力所造成的力矩作用了 Δt 單位時間後)(此處的 Δt 取一段非常小的時間長)，此輪胎所具有的角速度與角動量之間的關係：

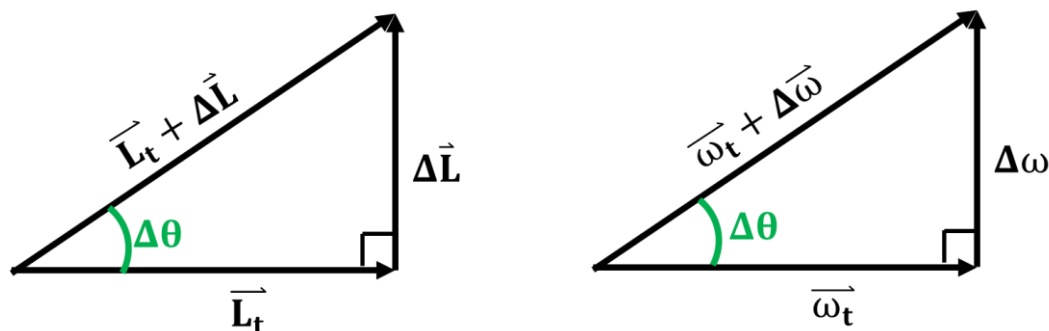
由於 $\vec{\tau} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta \vec{L} = \Delta t \vec{\tau} \Rightarrow \theta = \left| \frac{\Delta \vec{L}}{L_0} \right| = \left| \frac{\Delta t \vec{\tau}}{L_0} \right|$ ，故輪胎進動的角速率 $\omega = \frac{\theta}{\Delta t} = \frac{\left| \frac{\Delta t \vec{\tau}}{L_0} \right|}{\Delta t} = \left| \frac{\vec{\tau}}{L_0} \right| = \frac{\tau}{L_0}$ 。由此式子中可得知，由於重力所造成的力矩 $\vec{\tau}$ 之量值並不隨時間改變(皆為定值 mgr)，故 $\omega \propto \frac{1}{L_0}$ 。

在 $t = t_1 \neq 0$ 時，我們依然可用類似方法求出各時間點之 $\omega_t \propto \frac{1}{L_t}$ ：如下圖

所示，已知在時間 $t = t_1$ 時輪胎的角速率為 ω_t ，角動量為 L_t 。計算當時間 $t=t_1 + \Delta t$ 時(重力所造成的力矩作用了 Δt 單位時間後)(此處的 Δt 取一段非常小的時間長)，此輪胎所具有的角速度 $(\vec{\omega}_t + \Delta \vec{\omega})$ 與角動量 $(\vec{L}_t + \Delta \vec{L})$ 之間的關係：

由於 $\vec{\tau} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta \vec{L} = \Delta t \vec{\tau} \Rightarrow \Delta \theta = \left| \frac{\Delta \vec{L}}{L_t} \right| = \left| \frac{\Delta t \vec{\tau}}{L_t} \right|$ ，故輪胎進動的角速率 $\omega_t = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{\left| \frac{\Delta t \vec{\tau}}{L_t} \right|}{\Delta t} = \left| \frac{\vec{\tau}}{L_t} \right| = \frac{\tau}{L_t}$ 。由此式子中可得知，由於重力所造成的力矩 $\vec{\tau}$ 之量值並不隨時間改變(皆為定值 mgr)，故 $\omega_t \propto \frac{1}{L_t}$ 。即證明出推廣式「進動的角速率與角

動量的大小成反比」。理論上輪胎應保持質心作水平圓周運動而永不落下(因為整個運動過程中輪胎在鉛直方向的角速度與角動量皆為 $\vec{0}$)，但在真實情況下因為輪軸與輪胎間具有摩擦力，會消耗掉輪胎的轉動動能，而使角動量變少，連帶導致角速度值上升，故我們會發現 L_t 隨著時間降低，而 ω_t 卻隨著時間變大。而當能量逐漸被消耗掉後，輪胎面與水平面之間開始產生夾角，且越來越大，最後輪胎的轉動能量被耗盡，此夾角即為 90° ，此時的輪胎即靜止下來，呈現已落下狀態。



(二) 實驗步驟(器材用法)

1. 將一細繩繫於輪胎轉軸的一端
2. 一人拿著細繩的上端(沒有綁在輪軸上的那一端)，並用另外一隻手握在轉軸另一端(沒有綁在細繩上的那一端)將輪胎轉軸保持水平
3. 另一人轉動輪胎，使其快速轉動
4. 放開握在輪胎轉軸上的手，使輪胎可自由轉動
5. 觀察並錄下輪胎轉動的過程

(三) 實驗結果與分析

1. 輪胎並不像我預先設想的那樣會直接倒下來，而是其質心幾乎保持在水平面上作圓周運動，而輪胎上的質點則仍然繞著輪軸旋轉，有如在對抗重力將它向下拉的作用
2. 但輪胎的能量還是會慢慢耗盡而開始沉下來，與水平面之間夾角越來越大，最後仍然抵抗不了重力的作用而掉了下來

(四) 生活中的應用

1. 這個實驗器材常被拿來與陀螺儀做比對(甚至有人直接把他視為陀螺儀的一種)，因為它們兩者之間的性質類似，同樣都有進動、章動的性質，而陀螺儀廣泛地被應用在我們生活周遭，例如 MEMS (微機電) 陀螺儀由於其體積小、功耗低、易於數字化和智能化、成本低、易於批量生產，因此常被用在手機、汽車牽引控制系統、醫療器材等需要大規模生產的設備中。
2. 手機中的 MEMS (微機電) 陀螺儀功能：
 - (1) 遊戲控制：陀螺儀透過對偏轉、傾斜等動作角速度的測量，可以實現用手控制遊戲主角的視野和方向，例如可作為方向盤(變換不同角度傾斜手機)控制飛機
 - (2) 幫助手機攝像頭防抖：按下快門時，測量出手機翻轉的角度，將手抖產生的偏差反饋給圖像處理器，用計算出的結果對鏡頭的抖動方向以及位移作出補償，使照片更加清晰
 - (3) 輔助 GPS 進行慣性導航：在沒有 GPS 信號的隧道、橋樑或高樓附近，陀螺儀會測量運動的方向和速度，將速度乘以時間獲得運動的距離，可精確定位導航
 - (4) 協助用戶界面實現動作感應：使 AR 圖案能夠隨著手機角度調整發生

偏移

(5) 有關手機傾斜的偵測，主要都是靠陀螺儀來實現

六、心得及建議

這次的演示實驗除了直線運動外，還加入了生活中不常研究探討、令我感到驚奇的轉動運動，有好幾個實驗都違背我腦中的直覺：受重力作用的旋轉中輪胎竟然不會倒下來?!魯班鎖要用轉的反而能輕鬆解開?!雖然這次的演示實驗很早就下課了，不過我還是留下來在實驗室稍微多研究了一下，大概 3:00 左右才離開實驗室(好像其實也還滿早的)。因為這次總共要寫三項實驗器材(我原本以為會像上次那樣只要寫一項就好了，而我早已決定好要做旋轉的輪胎了，所以就花了些時間在研究它上面，也就因此沒有費太多心思想要認真研究其他玩具，頂多玩玩其他器材，最後只有研究到原本選好的一項)，所以我又多花了點時間在實驗室。

這次的實驗器材都好難寫啊！看似平常、已被我視為理所當然(如陀螺的進動)的現象，其背後的物理意義卻是如此地複雜及繁瑣，這也是我猶豫已久的原因之一——到底哪一個器材我才能想得出(或上網找到資料後能夠理解)它的原理？最後我選擇了這三個性質雷同的實驗器材，雖然原理上我只能大概知道(認識)，甚至有一些是我的猜測，不過至少讓我看到了一些違背想像的事實(我到現在還是覺得輪胎應該要理所當然的倒下來啊~真的好奇妙喔)，見識到了物理學的高深(我真的看不太懂網路上寫的陀螺儀的原理啊~有一些好像還要用到偏微分之類的)，以及玩玩具發現嶄新事物的樂趣（這才是(演示實驗)最吸引我的地方呀~~）！！！！

七、參考資料

1. 歐拉運動定律・維基百科，自由的百科全書・網址：
<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%AD%90%E6%8B%89%E9%81%8B%E5%8B%95%E5%AE%9A%E5%BE%8B>
2. Euler's Disk・網址：
https://www.real-world-physics-problems.com/eulers-disk.html?fbclid=IwAR1r91t_W2G53gnsj44R5QM1BFNSIHvw2_Gp1tAck1z_xPIKPCrxgUfZeHs
3. 費曼演講集・中文翻譯版
4. 國立清華大學普通物理實驗室網站—演示實驗 B: 轉動力學篇 (Demonstrations B)・網址：
<http://www.phys.nthu.edu.tw/~gplab/exp008.html>
5. 這玩意冷門但很重要：陀螺儀你又知多少・太平洋電腦網・網址：
<http://finance.sina.com/bg/tech/sinacn/20160128/16041406134.html>
6. 陀螺儀 II・YouTube・網址：
<https://www.youtube.com/watch?v=6XGgf0V3zcl>