# 第一次习题课

## 习题讲解、方法提要和内容扩充

助教：邓先涛

2023 年 9 月 9 日

# 重点知识提要

# 重点知识提要

- 前置知识的回顾：高等代数，初等数论和简单的群论知识.
- 几类特殊环的定义：交换环，整环，除环 (体) 和域.
- 环中的特殊元素：可逆元 (单位) 和零因子.

# 第一章习题讲解

### 第一章第 37 题

设 $L$ 是一个环，$a$ 是 $L$ 中的非零元素，若存在非零元素 $b$ 使得 $aba=0$，证明：$a$ 是左零因子或右零因子.

### 方法提要

- 定义考察：零因子的定义.
- 分类讨论：分类假设，增加条件.

### 思维拓展

试构造一个环 $L$，使得存在 $a \in L$，$a$ 是左 (右) 零因子，但 $a$ 不是右 (左) 零因子.

### 证明

- 若 $a$ 是左零因子，则命题证完.
- 若 $a$ 不是左零因子，则 $c=ab\neq 0$，推出 $ca=0$，命题成立.

## 第一章第 38 题

设 $a$ 是幺环 $L$ 中的幂零元，即存在正整数 $n$ 使得 $a^n=0$，证明：$1-a$ 可逆.

## 方法提要

- 元素运算的恒等变换：因式分解.

## 思维拓展

环中的零因子是否总是幂零元？有限环 (只有有限多个元素的环) 中的零因子是否总是幂零元？是举例说明.

## 证明

- 幂零元素意味着 $a^n=0$，即 $1-a^n=1$.
- $1-a^n=(1-a)(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1})$.

### 第一章第 40 题

设 $L$ 是有限环，证明由 $xy=1$ 可以推出 $yx=1$.

### 方法提要

- 有限集对应：有限条件在置换下一一对应.
- 元素运算的恒等变换：元素消去.

### 思维拓展

举出一个具体的无限环的例子，使得该命题不成立.

### 证明

- $xy=1$ 表明 $yL\subset L$ 与 $L$ 元素个数相同.
- 存在 $z\in L$ 使得 $yz=1$，因此 $z=xyz=x$.

## 第一章第 41 题

在幺环 $L$ 中，若元素 $a, b$ 满足 $ab = 1 \neq ba$，证明有无穷多个 $x$ 使得 $ax = 1$.

## 方法提要

- 反证法：无穷多问题的首要考虑方法.
- 元素运算的恒等变换：元素消去.

## 思维拓展

交换幺环 $L$ 的的 $n$ 阶方阵环 $M_n(L)$ 中是否会存在元素 $a, b$ 使得 $ab = 1 \neq ba$.

## 证明

- 设 $x_0 = b, x_1, \cdots, x_n$ 是全部右逆.
- $x_0, x_0 + 1 - x_i a (0 \leq i \leq n)$ 为右逆，多于所假设全部右逆的数量，矛盾.

# 第三章习题讲解

### 第三章第 1 题

证明：环 $R$ 内，$1-ab$ 可逆等价于 $1-ba$ 可逆.

### 方法提要

- 理想的生成元：转化为理想性质的分析.
- 元素运算：由特例运算规律得到启发.

### 思维拓展

设幺环 $R$ 中元素 $a, b, a+b$ 均是可逆元，证明 $a^{-1}+b^{-1}$ 可逆，试求 $(a^{-1}+b^{-1})^{-1}$.

### 证明

- 存在 $c$ 使得 $(1-ab)c=1$.
- 验证 $(1-ba)(1+bca)=1$.

### 第三章第 2 题

设 $R$ 中元素 $u$ 有右逆，证明 $u$ 有多于一个右逆等价于 $u$ 是一个左零因子等价于 $u$ 不是单位.

### 证明

- 前面 41 题已经足够说明该题.
- 第三题也可以用 41 题进行说明.

### 思维拓展

设 $\mathbb{C}$ 是复数域，定义 $R=\mathbb{C}[x]$ 为 $\mathbb{C}$ 上的多项式全体，在多项式加法和数乘下构成 $\mathbb{C}$ 上的无限维线性空间. 设 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(R,R)$ 为 $R$ 的全体线性变换构成的环，加法为线性变换的加法，乘法为线性变换的复合. 多项式求导运算 $D$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(R,R)$ 中的元素，刻画 $D$ 的所有右逆，并说明它没有左逆.

# 问题补充和方法扩张

### 问题 1

设 $G_1$ 和 $G_2$ 之间有单同态 $\phi: G_1 \to G_2$ 和 $\psi: G_2 \to G_1$，那么两群是否同构?

### 简要说明

- 集合论的结果表明两个单同态可以推出集合的等势，这在群同态并不是想当然的.
- 有限群情况下，该问题显然正确，对于无限群试着举出反例.

### 问题 2

含幺环的定义中的加法交换性是否必要，即是否存在满足环定义中除加法交换外的所有条件的结构?

### 简要说明

- 考虑 $(a+b)(1+1)$ 即可.
- 在遇到一些结构或定义时考虑这些定义的合理性是必要的.

## 问题 3

是否存在元素个数为素数的非交换环？任给合数 $n$，是否总是可以构造出一个非交换 $n$ 阶环？

## 简要说明

- 对于素数阶的环，有 $(n\alpha)(m\alpha) = nm\alpha^2 = (m\alpha)(n\alpha)$，因此交换.
- 可以构造非交换的充要条件是 $n$ 有平方因子.

## 问题 4

设 $R$ 为一个交换幺环，$M_n(R)$ 为 $R$ 上的 $n$ 阶矩阵环，试刻画 $M_n(R)$ 中的可逆元.

## 简要说明

- 可逆元是 $\det(A)$ 为 $R$ 中单位的 $n$ 阶矩阵 $A$.
- 知识迁移时需要注意迁移的条件和迁移后的异同处，这里不可冒然认为行列式不等于零.