第六次习题课

方法提要、习题分块讲解和内容扩充

助教:邓先涛

2023年10月23日

重点知识提要

重点知识提要

- ▶ 模同态基本定理: 模同构三定理 (类似于群) 的性质及应用.
- ▶ 模的直和: 模的内直和和外直和的基本概念.
- ▶ 模的生成集与基:模的生成元;有限生成模;自由模.

模的基本概念与应用

第五章第7题

设 M 是左 R 模, 任给 $f \in \text{Hom}_R(R, M)$ 和 $a \in R$, 定义 af(r) = f(ra). 证明: 在该定义下, R 模同态 构成的交换群 $\operatorname{Hom}_R(R,M)$ 是一个左 R 模,并且 $\eta(f)=f(1)$ 给出了模同构 $\operatorname{Hom}_R(R,M)\cong M$.

模的基本概念与应用

模的定义和模同态模同构的概念.

证明

- ▶ 验证模的 4 条性质. 由于 f 自身是模同态,因此 4 条线性相关的分配率和结合律自然满足.
- ▶ 模同构 = 模同态 + 单射 + 満射, 模同态 = 群同态 + R 线性性.

思维拓展

该结论表明作为左 R 模,若 $M \neq 0$,则一定存在非零模同态 $R \rightarrow M$. 那么反过来是否成立? 即作为 左 R 模,如果 $M \neq 0$,那么是否总是存在非零模同态 $M \rightarrow R$? 举例并探究其中的根本原因.

第五章第 12 题: 舒尔引理

设 M_1 和 M_2 是不可约左 R 模,则二者之间的模同态 $\eta: M_1 \to M_2$,要么是零同态要么是模同构. 特别的, $\operatorname{End}_R(M_1)$ 是一个体.

不可约模的定义

思维拓展 1

设 M 是不可约 R 模,任给 $0 \neq m_1 \neq m_2 \neq 0$,有 $M = Rm_1 = Rm_2$,是否总是有同构 $\eta: M \to M, \ \eta(rm_1) = rm_2$.

- 注意到 ker(η) 和 Im(η) 分别是 M₁ 和 M₂
 的子模,而不可约模没有非平凡子模.
- ▶ 在映射复合下, $\operatorname{End}_R(M_1)$ 是一个环.
- ▶ 同构的逆还是同构,因此 $\operatorname{End}_R(M_1)$ 中的每一个元素都有逆元,因此是体.

补充习题

设 F 是域, $R = M_n(F)$ 为 F 的 n 阶矩阵环, I 为 R 的一个极大左理想, 证明: $\operatorname{End}_R(R/I) = F$.

矩阵环上的行列变换

证明

- ightharpoons R 中极大方理想的形式:存在 1 < i < n 使得 I 是所有第 i 列为 0 的矩阵全体构成的集合.
- ▶ $\operatorname{End}_{R}(R/I)$ 中的元素形式: 设 $f: R/I \to R/I$ 为 R 模同构,则 $f(E_n)$ 可以等于 A 的充分必要条 件是 $\{B \in R | BA \in I\} = I$, 推出存在 $\lambda \in F^{\times}$ 使得 $A + I = \lambda E_n + I$. EndB(R/I) 中只有数乘.

思维拓展

将上述命题的域 F 换为整数环 \mathbb{Z} ,能否刻画极大理想 I,并给出自同态环 $\operatorname{End}_{B}(R/I)$ 的刻画?

第五章第 19 题

任给正整数 n, 讨论 \mathbb{Z} 模 $\mathbb{Z}/(n)$ 何时可以写作两个非平凡子模的直和.

ℤ 模的子模是子群和中国剩余定理

思维拓展

不可分解模和不可约模有什么联系和区别?能 否举出一个不是域的环 R 使得其上的不可约子 模等价于不可分解子模? (半单模的性质)

- ▶ $n = p^e$ 为素数方幂时,不可分解. 这是因为 素数幂阶循环群的子群总是相互包含.
- ▶ $n = p_1^{e_1} \cdots p_m^{e_m}$ 为不同素数方幂乘积时,可分解. 这是由中国剩余定理直接得到.
- $lacksquare \mathbb{Z}/(n)=(\overline{p_1^{e_1}})\oplus (\overline{p_2^{e_2}\cdots p_m^{e_m}})$

自由模的性质

自由模的性质

- ▶ 自由模的定义: 若 R 模 M 有一组基,则称 M 为自由 R 模. 若基是 n 元集,则 $M \cong R^n$.
- ▶ 自由模的泛性质: 设 S 为自由 R 模的一个基,S' 为 R 模 M' 的一个子集,则任给集合之间的一个映射 $\psi: S \to S'$,总可以提升为 $\psi: M \to M'$ 为一个 R 模同态.
- ▶ 交换环上的有限生成自由模: 设 R 为交换幺环,则 R 上自由模 M 的任意两组基有相同基数.

第五章第 24 题

任意 R 模 M 必是某个自由 R 模的同态像.

佐恩引理和自由模的泛定义.

思维拓展

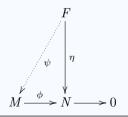
域上的模都是自由模.

- ▶ 利用佐恩引理得到 M 的生成元集 S.
- ▶ 以 S 中元素为角标的未定元集 $x_s(s \in S)$. 定义自由模 $F = \bigoplus_{s \in S} Rx_s$.
- ▶ 定义 $f: F \to M$ 为 $f(x_s) = s$ 提升得到的满同态,即得到命题.

补充习题: 彭老师课件 11 页 12 题

设 M 是一个有限生成 R 模, $\phi: M \to R^n$ 的满的 R 模同态, 则 $ker(\phi)$ 是有限生成的.

应用教材 173 定理 6 的交换图:



- ▶ 存在 $\psi: R^n \to M$ 使得 $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{R^n}$.
- ▶ 得到 $M = \ker(\phi) \oplus \operatorname{Im}(\psi)$, 其中直和分解的 具体形式为 $x = x - \psi(\phi(x)) + \psi(\phi(x))$.
- ▶ x_1, \dots, x_m 为 M 的生成元, $x_i = x_{i1} + x_{i2}$ 为直和分解.
- ▶ 立刻得到 x_{11}, \dots, x_{n1} 为 $ker(\phi)$ 的生成元.

交换环上的线性代数

环上的线性方程组与环上的矩阵

- ▶ 有限生成自由模的环自同态刻画: $\operatorname{Hom}_{R}(R^{n}, R^{n}) \cong M_{n}(R)$.
- ▶ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 何时是单射: 等价于 $\ker(f) = 0$ 等价于 $A_f x = 0$ 只有零解.
- ▶ 如何刻画交换环上的矩阵的秩?

定义理想 I 的零化理想 $Ann(I) := \{r \in R | ra = 0, \forall a \in I\}$,记 $I_k(A)$ 为矩阵 A 的所有 k 阶子式 生成的理想,称最大的满足 $Ann(I_k(A)) = 0$ 的正整数为 A 的秩,记作 rank(A).

rank(A) = n 当且仅当 $r \cdot det(A) \neq 0$ 对 $\forall 0 \neq r \in R$ 成立.

回顾线性代数

- ▶ A 为域 F 的 n 阶方阵,当 $\operatorname{rank}(A) < n$,不使用域上的除法,如何找到 Ax = 0 的非零解?
- ▶ 设 A 的第 k 行的代数余子式为 A_{ki} ,则 $\sum_{i=1}^{n} x_i A_{ki} = \det(A_k)$,这里 A_k 是将矩阵 A 的第 k 行 换作 (x_1, \dots, x_n) .
- ▶ 设 k 是最大的正整数使得存在 A 的 k 阶子式不为零,则 $k \le n-1$. 通过交换矩阵 A 的行列顺序使得 A 的 k 阶主子式不等于 0.
- ▶ 令 T_i 为 A 前 i 行前 i 列的元素构成的矩阵, t_i 为 T_{k+1} 去掉第 k+1 行第 i 列的代数余子式.
- ▶ 则 $x' = (t_1, \dots, t_{k+1}, 0, \dots, 0)^T$ 是行列变换后的线性方程的非零解.

第五章第 18 题

设 R 是交换幺环, $A \in M_n(R)$,Ax = 0 只有零解当且仅当 rank(A) = n

定义表明: $\operatorname{rank}(A) = n$ 当且仅当 $r \cdot \det(A) \neq 0$ 对 $\forall 0 \neq r \in R$ 成立.

- ▶ 若 Ax = 0 有非零解,记为 x_0 ,则 $A^*Ax_0 = \det(A)x_0 = 0$,存在 $r \neq 0$ 使得 $r \cdot \det(A) = 0$.
- ▶ 若 $\operatorname{rank}(A) < n$, 则 $\operatorname{Ann}(I_n(A)) \neq 0$. 取最大整数使 $\operatorname{Ann}(I_k(A)) = \{0\}$, $0 \neq y \in \operatorname{Ann}(I_{k+1}(A))$.
- ▶ 交换两行或两列不改变方程组有非零解的事实. 不妨设 E 为 k 阶主子矩阵使得 $y \cdot \det(E) \neq 0$.
- ▶ E' 为 k+1 阶主子矩阵, m_i 为 E' 去掉第 k+1 行第 i 列的代数余子式.
- ▶ $x' = (ym_1, \dots, ym_{k+1}, 0 \dots, 0)^T$ 为变换后线性方程组的解.

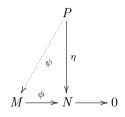
需要思考的几个问题

- ▶ 上述给出了其次方程的解,如何用秩的语言刻画非齐次线性方程组Ax = y 是否有解的问题?
- ▶ 设 n 阶矩阵 $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 定义了自由模同态,A 满足什么条件可以使得 Im(A) 成为自由模? 在该条件下,Im(A) 的秩应该如何通过 A 的性质进行确定?
- ▶ 域上矩阵关于秩的结论有多少可以移植到交换环中?
- ▶ 同样的想法可否用于非交换环上的线性代数?难点在哪里?

投射模的性质

投射模的刻画

▶ 投射模的定义: 称左 R 模是投射模, 若任给 R 模满同态 $\phi: M \to N$ 和 R 模同态 $\eta: P \to N$, 存在 $\psi: P \to M$ 使得下图交换:



▶ 推论: 自由模均为投射模.

第五章第 22 题和 23 题

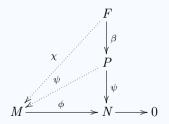
设 $P \neq R$ 模,则 $P \neq P$ 是投射模当且仅当 $P \neq P$ 是某个自由模的直和项.

投射模的定义

证明

- ▶ 设 P 是投射模, 令 φ 为自由模 F 到 P 的 满同态.
- ▶ 存在 $\psi: P \to F$ 使得 $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_P$.
- ► $F = \ker(\phi) \oplus \operatorname{Im}(\psi)$, 其中 $P \cong \operatorname{Im}(\psi)$.

- ▶ 设 F 是自由模, 使得 $F = P \oplus P'$.
- ▶ 设 $\phi: M \to N$ 满同态, $\eta: P \to N$ 模同态.
- ▶ 设 $\beta: F \to P$ 为直和分解同态,有交换图:



▶ 其中 $\psi = \chi \circ i$, 这里 $i: P \to F$ 为嵌入同态.

投射模的等价定义

R 模 P 是投射模当且仅当 P 作为 R 模 M 的商模,总存在 M 的子模 P' 使得 $M = P \oplus P'$.

自由模在模同态中的价值和投射模定义.

- ▶ 反过来, P 总可以作为自由模的商模.
- ▶ 因此 *P* 可以作为自由模的直和项,即可.

证明

- ▶ 设 P 是投射模,P 是 R 模 M 的商模等价于有满的模同态 $\phi: M \to P$.
- ▶ 存在 $\psi: P \to M$ 使得 $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_P$.
- ▶ $M = \ker(\phi) \oplus \operatorname{Im}(\psi)$, 其中 $P \cong \operatorname{Im}(\psi)$.

定理重述

P 是投射模当且仅当每一个形如

$$0 \to A \to B \to P \to 0$$

的短正合列都是分裂正合列.

投射模的等价定义

R 模 P 是投射模当且仅当存在 P 的一个子集 $\{a_i \in P | i \in I\}$ 和集合 $\{f_i \in \operatorname{Hom}_R(P,R) | i \in I\}$ 使得任 给 $x \in P$, x 可以写作 $\sum_{i \in I} f_i(x) a_i$, 这里任给 $x \in P$, $f_i(x)$ 仅有有限个非零.

自由模在模同态中的价值和投射模定义.

- ▶ 设 P 是投射模,存在自由模 $M = P \oplus P'$,令 M 的基为 $\langle x_i | i \in I \rangle$, x_{i1} 为 x_i 在 P 中的分解.
- ▶ 定义 $F_i: M \to R(i \in I)$, $F_i(x_j) = \begin{cases} 1_R, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$, 记 $f_i = F_i|_P$, $\{x_{i1} | i \in I\}$ 和 $\{f_i | i \in I\}$ 即为所求.
- ▶ 反过来, 定义 $\alpha: \bigoplus_{i\in I} R \to P$ 和 $\beta: P \to \bigoplus_{i\in I} R$, $\alpha(\bigoplus_{i\in I} r_i) = \sum_{i\in I} r_i a_i$, $\beta(x) = \bigoplus_{i\in I} f_i(x)$.
- ▶ 验证得到 $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_P$ 表明 $P \in \bigoplus_{i \in I} R$ 的直和项,这意味着 $P \in \mathbb{R}$ 是投射模.

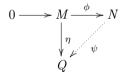
关于投射模的两个不加证明的事实

- ► 若 R 是主理想整环, P 是左 R 模,则 P 是投射模当且仅当 P 是自由模.
 思考:如果取向主理想整环的限制,那么投射模但不是自由模的例子有哪些?特别的,如果 R
 是诺特整环,那么能否举出上述命题的反例?
- ▶ 设 F 是一个域,在 n 阶矩阵环 $M_n(F)$ 上,如果 F^n 在矩阵作用下看作自然的 $M_n(F)$ 模,那么模 F^n 是投射模但不是自由模.
 - 思考:如果取 F 是一般的环,那么上述命题是否成立?试着给出证明.
- ▶ 设 M 和 N 是 R 模, $M \oplus N$ 是投射模当且仅当 M 和 N 是投射模.

内射模的性质

内射模的刻画

▶ 称 R 模 Q 为内射模,若任给 R 模单同态 $\phi: M \to N$ 和 R 模同态 $\eta: M \to Q$,总存在 R 模同 态 $\psi: N \to Q$ 使得下图交换:



▶ 域上的模均是内射模.

第五章第 20 题

 \mathbb{Q} 作为 \mathbb{Z} 模,它的任意一个有限生成子模均是循环模. 由此证明, \mathbb{Q} 不是自由 \mathbb{Z} 模.

Bézout's lemma

一点疑问

为什么在内射模内容中插入该问题的解答?

- ▶ 只需要证明任给二元生成子模是循环模.
- $\blacktriangleright \ \ \Leftrightarrow \ a = \frac{m}{n}, \ \ b = \frac{p}{a}, \ \ I = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}.$
- \bullet $au + bv = \frac{umq + vnp}{nq}$, \coprod $\gcd(mq, np) \mid umq + vnp$.
- ▶ 令 $c = \frac{\gcd(mq, np)}{nq}$,则 $I = c\mathbb{Z}$ 是循环 \mathbb{Z} 模.

第五章第 24 题

有理数域 ℚ 作为 ℤ 是内射模

zorn 引理

- ▶ 设 $I = \{rn | n \in \mathbb{Z}\}$, $\lambda : I \to \mathbb{Q}$ 是 \mathbb{Z} 模同态,则存在 $\Lambda : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ 使得 $\Lambda |_I = \lambda$.
- ▶ $\phi: M \to N$ 是 \mathbb{Z} 模单同态, $\eta: M \to \mathbb{Q}$ 为模同态,则存在 $\eta_0: \phi(M) = M_1 \to \mathbb{Q}$.
- ▶ $x_1 \in N \setminus M_1$, $\diamondsuit I_1 = \{r \in \mathbb{Z} | rx_1 \in M_1\}$.

- ▶ 令 $\lambda_1: I_1 \to \mathbb{Q}$ 定义为 $\lambda_1(r) = \eta(rx_1)$.
- 可建立 Z 模同态 η₁: M₁ + Zx₁ → Q, 定义
 为 η₁(m + rx₁) = η(m) + Λ₁(r), 其中 Λ₁ 为
 λ₁ 的提升.
- ► 在 N 中考察所有子模和映射 (N', η') , 其中 $\eta': N' \to \mathbb{Q}$ 满足 $M_1 \subset N'$, $\eta' \circ \phi = \eta$.
- ▶ 上述定义得到的集合必有极大元 N_M . 根据 第四点性质得到 $N_M = N$.

关于内射模的基本事实

- Q' 使得 $M = Q \oplus Q'$.
- ▶ 设 $Q \in R$ 模, $Q \in A$ 是内射模当且仅当任给左理想 $I \otimes R$ 模同态 $\lambda : I \to Q$, 存在 $A : R \to Q$ 使 得 $\Lambda|_{I}=\lambda$.
- ▶ 设 $Q_i(i \in I)$ 是 R 模, Q_i 均是内射模当且仅当 $\prod_{i \in I} Q_i$ 是内射模 (直和则未必, 试着举例说明)

问题补充和方法扩张

问题 1

教材中证明若 R 是交换环,作为 R 模, $R^n \cong R^m$ 当且仅当 m=n. 如果去掉交换环的条件,该问题是否仍然成立?可否举例说明.

简要说明

- ▶ 在数学学习和数学研究中,去掉一些"多余"条件有时候是一件有意义的事情。
- ► 满足自由模基数不变性质的环称为不变基数环,关于具体的反例和性质,可知乎搜索"有没有环上的自由模秩不固定的例子"。

问题 2

有限生成模的子模是否是有限生成的?自由模的子模是否是自由的?特别的,使得有限生成模的子模总是有限生成的环是怎么样的?使得自由模的子模总是自由的环是怎么样的?

简要说明

- ▶ 将环理解为自身的模,所以使得有限生成模的子模总是有限生成的环是诺特环.
- ▶ 使得自由模的子模总是自由的环是 PID.