第七次习题课

小测讲解、方法提要、习题讲解和内容扩充

助教：邓先涛

2023 年 10 月 30 日

小测讲解

小测第 1 题

设 S 为交换幺环，R 为 S 的子环，若 S 看作 R 模是秩为 n 的自由模，则 S 同构于 $M_n(R)$ 的一个子环.

自由模自同态的刻画

思维拓展

$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ 作为 $\mathbb{Z}$ 自由模同构于 $M_2(\mathbb{Z})$ 上的哪一个子环？$\mathbb{C}$ 作为 $\mathbb{R}$ 自由模同构于 $M_2(\mathbb{R})$ 上哪一个子环？

证明

- 任给 $y \in S$，定义 $f_y(x) = xy$ 是 S 的 R 模自同态.
- 注意到 $\mathrm{End}_R(S) \cong M_n(R)$，因此存在唯一的 A_y 使得 $f_y = A_y$.
- 定义 $\eta : S \to M_n(R)$，$\eta(y) = A_y$.
- $\eta(yz) = A_{yz} = f_{yz} = f_y \circ f_z = A_y \cdot A_z$
- η 是环同态，且 $\eta(y) = 0$ 当且仅当 $y = 0$.
- 误区：$S \cong R^n$(模同构) 嵌入到 $M_n(R)$，对应矩阵的第一行

小测第 2 题第一问

设 $\mathbb{T}(x,y,z)=(x+z,y,y+z)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的一个线性变换，求 $\mathbb{T}$ 的极小多项式 $m(\lambda)$.

线性变换与矩阵的转换

思维拓展

交换环上自由模的线性变换是否可以建立极小多项式的概念？是否有类似的 Hamilton-Cayley 定理？是举例进行探索.

证明

- 取 $\mathbb{R}^3$ 的标准基 e_1,e_2,e_3，得到

$$\mathbb{T}(e_1,e_2,e_3)=(e_1,e_2,e_3)\cdot\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

- 矩阵极小多项式与 $\mathbb{T}$ 的极小多项式相同.
- 特征多项式为 $(\lambda-1)^3$，且 $(\mathbb{T}-\mathbb{I})^2\neq 0$.
- 极小多项式为 $m(\lambda)=(\lambda-1)^3$.

小测第 2 题第 2 问

将 $\mathbb{R}^3$ 作为 $\mathbb{R}[\lambda]$ 模，定义为 $f(\lambda)\cdot v=f(\mathbb{T})v$. 设 $v\in\mathbb{R}^3$，且 $v\neq(x,0,z)^t$，则作为 $\mathbb{R}[\lambda]$-模有模同构 $\mathbb{R}[\lambda]\cdot v\cong\mathbb{R}[\lambda]/(m(\lambda))$.

模同构基本定理

思维拓展

任给 $v\in\mathbb{R}^3$ 作为 $\mathbb{R}[\lambda]$ 模，则 $m(\lambda)\in\mathrm{Ann}(v)$，能否写出集合 $V_i=\{v\in\mathbb{R}^3|(\lambda-1)^i\cdot v=0\}$，其中 $i=0,1,2,3$. 并观察这些子空间的性状.

证明

- 定义 $\eta:\mathbb{R}[\lambda]\to\mathbb{R}[\lambda]\cdot v$，$\eta(f)=f(\lambda)\cdot v$.
- $\ker(\eta)=\mathrm{Ann}(v)=\{f(\lambda)|f(\mathbb{T})(v)=0\}$
- $\mathbb{R}[\lambda]$ 为主理想整环，令 $\ker(\eta)=(g(\lambda))$.
- $m(\lambda)\in\ker(\eta)$，推出 $g(\lambda)\mid m(\lambda)$，即 $g(\lambda)=(\lambda-1)^i(i=1,2,3)$.
- $(\mathbb{T}-\mathbb{I})^2v=(y,0,0)^t\neq0$.
- $\ker(\eta)=(m(\lambda))$，得到命题.

小测第 2 题第 3 问

证明：$\mathbb{R}^3$ 是循环 $\mathbb{R}[\lambda]$ 模.

子模的嵌入同态

思维拓展

设 $\mathbb{T}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性变换，$\mathbb{T}$ 满足什么条件可以使得 $\mathbb{R}^n$ 作为 $\mathbb{R}[\lambda]$ 模是不可约模？$n \geq 3$ 时存在这样的 $\mathbb{T}$ 吗？

证明

- 嵌入 $\mathbb{R}[\lambda] \cdot v \to \mathbb{R}^3$ 是 $\mathbb{R}[\lambda]$ 模同态.
- 嵌入 $\mathbb{R}[\lambda] \cdot v \to \mathbb{R}^3$ 是 $\mathbb{R}$ 线性映射.
- $\mathbb{R}[\lambda] \cdot v$ 是 3 维 $\mathbb{R}$ 线性空间.
- 嵌入是满的且是单的，因此相等.

第六章第 20 题

设 A 为域 F 上的 n 维线性空间 V 上的线性变换，则 V 为循环 $F[\lambda]$ 模当且仅当 A 的特征多项式与极小多项式相等.

主理想整环上有限生成模的分解

思维拓展

试用纯线性代数的语言直接证明该问题. 然后对于线性变换 A，给出一般域上 V 是不可约 $F[\lambda]$ 模的 A 的刻画？

证明

- 设 $V = F[\lambda] \cdot v$，则存在正整数 m 使得 $V =< v, Av, A^2 v, \cdots, A^{m-1} v >$
- $m = n$ 且 $v, Av, \cdots, A^{m-1} v$ 线性无关，立刻得到极小多项式的次数大于等于 n.
- 反之，根据模的分解，设 $V = \oplus_{i=1}^{k} F[\lambda] v_i$，其中 $\mathrm{Ann}(v_i) = (p_i^{e_i}(x))$
- 令 $v = v_1 + \cdots + v_k$，则 $\mathrm{Ann}(v) = (m(\lambda))$
- $v, Av, \cdots, A^{n-1} v$ 线性无关，$V = F[\lambda] v$.

重点知识提要

重点知识提要

- 主理想整环上的有限生成模：扭模与无扭模；有限生成模的秩与自由模.
- 结构定理：主理想整环上的有限生成模两种标准分解.
- 不变量：能够计算标准分解中的初等因子与不变因子.

第六章习题讲解

第六章第 1 题

设 M 是主理想整环 R 上的有限生成模，$x_1, \cdots, x_n$ 是 M 的一组生成元. $y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ 满足 $\gcd(a_1, \cdots, a_n) = 1$，则存在 $y_2, \cdots, y_n$ 使得 $y_1, \cdots, y_n$ 为 M 的生成元.

数学归纳法和主理想整环中的 bezout 引理

证明

- $n = 2$ 的情况：设 $y_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2$，有 $u_1 a_1 + u_2 a_2 = 1$，令 $y_2 = u_2 x_1 - u_1 x_2$ 即可.
- 归纳假设：设 $n \leq k$ 是均成立，$n = k + 1$ 时，令 $y_1 = a_1 x_1 + \cdots + a_k x_k + a_{k+1} x_{k+1}$
- 令 $\gcd(a_1, \cdots, a_k) = p$，$py' = y_1 - a_{k+1} x_{k+1}$，根据 $n \leq k$ 的归纳假设，存在 $y_3, \cdots, y_{k+1}$ 使得 $< y', y_3, \cdots, y_{k+1} > = < x_1, \cdots, x_k >$
- 注意到 $y_1 = py' + a_{k+1} x_{k+1}$ 和 $\gcd(p, a_{k+1}) = 1$，有 $< y_1, y_2 > = < y', x_{k+1} >$.

几个扩展问题

- 上述命题中主理想整环的条件是必要的，试在诺特整环上举出一些“合适”的反例.
- 如果考虑上述 M 是自由模，$x_1,\cdots,x_n$ 是一组基，那么上述命题的条件是否是充要的？
- 即 $y=\sum_{i=1}^n a_i x_i$ 满足 $\gcd(a_1,\cdots,a_n)=1$ 当且仅当有 $y_2,\cdots,y_n$ 使 $y_1,\cdots,y_n$ 为 M 生成元.
- 设 $y_1,\cdots,y_k$ 可以扩充为 $y_1,\cdots,y_k,\cdots,y_n$ 为 M 的生成元的条件应该是怎么样的？

第六章第 3 题

主理想整环 R 上扭模 M 不可约的充要条件是 $M=Rz$，且 $\mathrm{Ann}(z)=(p)$，其中 p 是素元.

主理想整环上素理想为极大理想

思维拓展

写出 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Q}[x]$ 上不可约模的所有等价形式.

证明

- 设 $M=Rz$ 满足题设，任给形如 Rz_0 的子模，其中 $z_0=rz$.
- 讨论 r 是否属于 (p) 得到 Rz_0 是平凡子模.
- 若 M 是不可约的，$z\neq 0$ 有 $M=Rz$.
- $M\cong R/\mathrm{Ann}(z)$，因此 $\mathrm{Ann}(z)$ 是极大理想.

第六章第 4 题

设 M 是主理想整环 R 上的有限生成扭模，M 不能写作非平凡子模的直和当且仅当 $M = Rz$，且 $\mathrm{Ann}(z) = (p^e)$，其中 p 是素元，$e \geq 1$.

有限生成模的标准分解

思维拓展

有限生成模的条件是必要的吗？即任给主理想整环上的扭模，是否也有上述命题成立？证明或举例证否，并探究其中本质原因.

证明

- 前推后：直接由标准分解立刻得到结论.
- 后推前：反设 $M = M_1 \oplus M_2$，$z = z_1 + z_2$.
- 根据 $M = Rz$ 有 $M_i = Rz_i$，令 $z_i = r_i z$.
- $r_1 r_2 z \in M_1 \cap M_2 = 0$ 推出 $p \mid r_1 r_2$.
- 令 $r_1 = p^m r \neq 0$，讨论其中 m 的值.
- $m = 0$，推出 $M_1 = M$.
- $m > 0$，要么 $M_1 = 0$，要么 $\mathrm{Ann}(z) \neq (p^e)$

第六章第 5 题

设 M 主理想整环 R 上的模，N 为 M 的直和项，则 N 是纯子模.

纯子模定义：$ax=z(a\in R, z\in N)$ 在 M 中有解可以推出它在 N 中有解

思维拓展

该命题反过来在有限生成模的前提下也是成立的，见 209 页习题 7.

证明

- 设 $M=N\oplus N'$，$ax=z$ 在 M 中有解为 x_0.
- 令 $x_0=x_1+x_2$，则 $ax_2=z-ax_1\in N\cap N'$.
- 直和表明 $ax_2=0$，推出 $ax_1=z$.

第六章第 6 题

设 M 是主理想整环 R 上的模，N 为其纯子模，则 M 关于 N 的陪集 $x+N$ 中均存在元素 y 使得 $\mathrm{Ann}(\bar{x})=\mathrm{Ann}(y)$，这里 $\bar{x}$ 为 x 在 M/N 中的像.

零化理想的定义及应用

思维拓展

设 M 是主理想整环 R 上的扭模，循环子模 Rz 满足 $\mathrm{Ann}(z)\subset\mathrm{Ann}(x)$ 对一切 $x\in M$ 成立，则 Rz 是 M 的纯子模.

证明

- 令 $\mathrm{Ann}(\bar{x})=\{r\in R|rx\in N\}=(a)$.
- $a\bar{x}=ax\in N$，存在 $x_0\in N$ 使得 $ax_0=ax$.
- 取 $y=x-x_0\in x+N$，令 $\mathrm{Ann}(y)=(b)$.
- $ay=0$ 推出 $a\in(b)$.
- $bx=bx_0\in N$ 推出 $b\in\mathrm{Ann}(\bar{x})=(a)$.

讲义 13 页第 5 题第 1 问

设 $A \in M_n(\mathbb{Z})$ 满足 $\det(A) \neq 0$，M 是由 A 的行向量生成的 $\mathbb{Z}$ 子模. 证明：M 是秩为 n 的自由 $\mathbb{Z}$ 模.

整环上的线性代数

思维拓展

定义 $\mathcal{A} : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ 为 $\mathbb{Z}$ 模同态，给出 $\mathrm{rank}(\mathrm{Im}(\mathcal{A})) = m \leq n$ 的充要条件.

证明

- 定义 $\mathcal{A} : \mathbb{Z}^n \to M$，$\mathcal{A}(v) = vA$.
- 则 $vA = 0$ 有非零解当且仅当 $\det(A) = 0$.
- 因此线性无关元映过去仍然线性无关.

讲义 13 页第 5 题第 2 问

设 $A \in M_n(\mathbb{Z})$ 满足 $\det(A) \neq 0$，M 是由 A 的行向量生成的 $\mathbb{Z}$ 子模. 证明：M 作为 $\mathbb{Z}^n$ 的加法子群，有 $[\mathbb{Z}^n : M] = |\det(A)|$.

主理想整环上矩阵的等价形式

思维拓展

给命题可否推至一般的主理想整环？试在 $\mathbb{Q}[x]$ 中重述该命题并给予证明.

证明

- 存在 $\mathbb{Z}$ 上的可逆矩阵 P 和 Q 使得矩阵 A 可以写作 $PAQ = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n) = B$.
- 有 $|\det(A)| = |d_1 d_2 \cdots d_n|$
- $v = (v_1, \cdots, v_n)Q^{-1}$ 为 $\mathbb{Z}^n$ 关于 M 的一组陪集代表元，其中 $0 \leq v_i \leq d_i - 1$.
- 陪集代表元的数量为 $|\det(A)|$，命题成立.

问题补充和方法扩张

问题 1

设 R 交换幺环，M 是有限生成 R 模，模同态 $\eta: M \to M$ 是满同态时，能否推出 η 是同构？若假定 M 的任意子模均是有限生成的，那么 η 满同态能否推出 η 同构？

简要说明

- 第一个不能，例子就是考虑 $\mathbb{Q}[x_1, \cdots, x_n, \cdots]$ 作为自身的模.
- 第二个能，原因与前面第五次课件提到过的诺特环的证明一样.

问题 2

考虑主理想整环 R 上有限生成模 M 的秩 $\operatorname{rank}(M)$ 的概念 (教材 P184)，任给 M 子模 N，在子模和相应商模上也可定义秩 (子模商模也是有限生成的)，证明 $\operatorname{rank}(M)=\operatorname{rank}(N)+\operatorname{rank}(M/N)$.

简要说明

- 可以证明 $M\cong R^n/M'$ 意味着 $\operatorname{rank}(M)=n-\operatorname{rank}(M')$.
- 考察 $N/\operatorname{tor}(N)=N/N\cap\operatorname{tor}(M)\cong(N+\operatorname{tor}(M))/\operatorname{tor}(M)$ 以及 $M/(N+\operatorname{tor}(M))\cong(M/\operatorname{tor}(M))/((N+\operatorname{tor}(M))/\operatorname{tor}(M))$.
- $\operatorname{rank}(M/N)=\operatorname{rank}(M/(N+\operatorname{tor}(M)))=\operatorname{rank}(M)-\operatorname{rank}(N)$.
- 对于 M 的子模 N_1 和 N_2，可推出 $\operatorname{rank}(N_1+N_2)=\operatorname{rank}(N_1)+\operatorname{rank}(N_2)-\operatorname{rank}(N_1\cap N_2)$.