第五次习题课

方法提要、习题讲解和内容扩充

助教：邓先涛

2023 年 10 月 16 日

重点知识提要

重点知识提要

- Noetherian 环和 Artin 环：Noetherian 环和 Artin 环的定义；Noetherian 环和 Artin 环的基本实例子；Hilbert 基定理.
- 环的直和：环直和的概念；中国剩余定理在环中的形式.
- 模的基本概念：模、子模、商模的定义；模的生成集.
- 注：习题中所提到的环均为交换幺环.

第三章习题讲解

第三章第 32 题

设 $R=\oplus_{i=1}^{r}R_i$ 是内直和，N 为 R 的理想，证明 $N=\oplus_{i=1}^{r}(N\cap R_i)$，其中 $N\cap R_i$ 允许为 0.

理想内直和的定义

思维拓展

外直和与内直和有何区别？对于外直和该问题应当如何刻画？

证明

- 注意到 R_i 已经是直和，因此只需要证明 N 可以写作 $N\cap R_i$ 的和即可.
- 令 $1_R=x_1+\cdots+x_r$，则任给 $a\in N$，可以得到 $a=ax_1+\cdots+ax_n$ 满足条件.
- $\mathbb{Z}/(n)=\oplus_{p|n}\mathbb{Z}/(p^{v_p(n)})$，因此最大幂零理想为 $\oplus_{p|n}(\overline{p})$，单位群 $\oplus_{p|n}\mathbb{Z}/(p^{v_p(n)})^{\times}$.

第四章习题讲解

第四章第 33 题 (i)

诺特环的商环为诺特环.

环同态中理想的对应

思维拓展

从该题出发，举一个是诺特整环但不是 UFD 的例子. 特别的，说明 R_m 都是诺特环.

证明

- 设 R 是诺特环，I 为理想，$R' = R/I$ 是相应的商环. $f\colon R \to R'$ 为自然满同态.
- 任给 J 为 R' 中的理想，则 $f^{-1}(J)$ 是有限生成的.
- J 有限生成，推出 R' 是诺特环.

第四章第 33 题 (ii)

有限多个诺特环的直和还是诺特环.

环的直和中的理想形式

思维拓展

有限多个主理想环的直和是否还是主理想环 (注意不要求整环)?

证明

- 设 R_1 和 R_2 为诺特环，$R = R_1 \oplus R_2$.
- 设 A 为 R 中的理想，定义 A_1 为 A 中第 2 分量为 0 的元素全体，A_2 为 A 中第 1 分量为 0 的元素全体.
- $A = A_1 \oplus A_2$，且 A_i 可以看作 R_i 中的理想，是有限生成的.
- A 是有限生成的.

第四章第 33 题 (iii)

诺特环的分式环为诺特环.

分式环的定义：教材 114 页的定义 5.

思维拓展

设 r 是诺特整环 R 中的非零非单位，证明 r 可以写作有限多个不可约元的乘积.

证明

- 设 R 为诺特环，R' 为关于乘性子集 S 的 R 的分式环，$\sigma: R \to R'$ 为相应的同态.
- 任给 I 为 R' 的理想，$\sigma^{-1}(I)$ 为 R 的理想.
- 注意到分式环的定义，I 与 $\sigma(\sigma^{-1}(I))$ 生成的理想是相同的.
- $\sigma^{-1}(I)$ 是有限生成的，立刻得到 R' 诺特.

第四章第 33 题 (iv)

举例说明诺特环的子环还是诺特环.

希尔伯特基定理：诺特环的多项式环是诺特环.

思维拓展

你能在 $\mathbb{Q}$ 的代数闭包中找到一个子环使得它不是诺特环吗？

证明

- $\mathbb{Q}[x]$ 的子环 $R=\{f(x)|f(0)\in\mathbb{Z}\}$. 可以得到无限理想升链 $(x)\subset(\frac{x}{2})\subset\cdots\subset(\frac{x}{2^n})\cdots$
- $\mathbb{Q}[x,y]$ 的子环 $R=\{f(x,y)|f(0,y)\in\mathbb{Q}\}$. 同样有无限理想升链.

诺特环练习题 1

诺特环 R 中仅有有限多个极小素理想.

诺特环两个等价定义的应用

证明

- 事实 1：任给极小素理想 $\mathfrak{p}$，存在 $r \in R$，使得 $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(r) = \{a \in R | ar = 0\}$.
- 定义 $T = \{\mathrm{Ann}(r) \subset \mathfrak{p} | r \in R\}$ 为 R 中一些理想的集合，记极大元为 $\mathrm{Ann}(y)$.
- 得到 $N = \{a \in R | \exists s \notin \mathfrak{p}, as = 0\} \subset \mathrm{Ann}(y)$，并且 $y \notin N$.
- $\mathrm{Ann}(y)$ 是素理想，由 $\mathfrak{p}$ 极小得 $\mathrm{Ann}(y) = \mathfrak{p}$.
- 事实 2：令 $S = \{\mathrm{Ann}(r) | r \in R\} \cap \mathrm{Spec}(R)$，则 S 是一个有限集.
- 否则，考察 S 中无穷可列素理想 $\mathrm{Ann}(r_i)$. 有相应理想升链 $Rr_1 \subset Rr_1 + Rr_2 \subset \cdots$ 稳定在 $Rr_1 + \cdots + Rr_n$.
- 归纳法证明 $\mathrm{Ann}(r_i)(1 \leq i \leq n)$ 是 S 全部元素. 只需注意 $Rr_{k+1} \cap \sum_{i=1}^{k} Rr_i = \{0\}$.
- 极小素理想作为 S 中的元素只有有限多个.

诺特环练习题 1

诺特环的满自同态一定是自同构.

诺特环两个等价定义的应用

思维拓展

Artin 环是否有类似结论？Artin 环的单自同态是否是自同构，试举例说明.

证明

- 设 $f\colon R \to R$ 是满同态，则 $f^{(n)}$ 作为 f 的复合是满同态，$I_n = \ker(f^{(n)})$ 为 R 中的理想.
- $I_1 \subset I_2 \subset \cdots$ 为理想升链，令其稳定在 I_n.
- 令 $y \in I_1$，满同态意味着存在 $x \in R$ 使得 $f^n(x) = y$.
- $f^{n+1}(x) = 0$ 推出 $x \in I_{n+1} = I_n$，得到 $y = f^{(n)}(x) = 0$.

诺特环练习题 3

设 R 是一个诺特局部环，$\mathfrak{m}$ 是 R 的唯一极大理想，证明 $\cap_{i=1}^{\infty}\mathfrak{m}^i=(0)$.

Nakayama 引理的应用

思维拓展

推广结论：设 R 是诺特环，若 I 是 R 的理想，且含在 R 的每一极大理想中，则 $\cap_{i=1}^{\infty}I^i=(0)$.

证明

- 设 $I=\cap_{i=1}^{\infty}\mathfrak{m}^i$，则 I 有最少个数的生成元，记作 $I=<x_1,\cdots,x_n>$.
- 注意到 $\mathfrak{m}\cdot I=I$，因此存在 $m_k\in\mathfrak{m}$ 使得 $x_1=m_1x_1+\cdots+m_kx_k$，且 $1-m_1$ 可逆.
- 因此若 $x_1\neq 0$，则 I 的生成元减少.
- 综上所述，$I=(0)$.

诺特环练习题 4

设 R 是诺特环，则 R 的每一个非平凡理想都均包含有限多个素理想的乘积.

诺特环第三个等价定义的应用

思维拓展

设 I 为环 R 的理想，称 I不可约，若 $I = I_1 \cap I_2$ 意味着 $I = I_1$ 或 $I = I_2$. 设 R 是诺特环，R 的任何理想均可写作 R 中有限多个不可约理想的交.

证明

- 定义 $S = \{I | I$是不满足题意非平凡理想$\}$.
- 若 S 是空集，则证明完成.
- 若 S 非空，则有极大元记为 I_m. I_m 不是素理想，存在 $ab \in I_m$，且 $a, b \notin I_m$.
- 考察 $I_m + (a)$ 和 $I_m + (b)$ 均不是 S 的元素. 因此 $I_m \supset (I_m + (a))(I_m + (b)) \supset \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n$.

第五章习题讲解

第五章第 1 题

设 M 为左 R 模，$\eta : S \to R$ 为环同态，且 $\eta(1_S) = 1_R$，定义 S 在 M 上的作用 $ax := \eta(a)(x)$，其中 $a \in S, x \in M$，证明 M 是 S 模.

模的定义

证明

直接验证模的四个性质，回顾如下：

- $a(x + y) = ax + ay, a \in S, x, y \in M.$
- $(a + b)x = ax + bx, a, b \in S, x \in M.$
- $(ab)x = a(bx), a, b \in S, x \in M.$
- $1_S x = x, x \in M.$

第五章第 5 题

设 M 是一个有限交换群且 $M \neq 0$，M 是否可能成为左 $\mathbb{Q}$ 模？

证明

- 设 $|M| = m$，则 $mx = x + \cdots + x = 0$.
- 设 $\frac{1}{m}x = y \in M$，则 $my = x = 0$.
- 立刻得到 $M = 0$ 矛盾.

域上的模与整数环上的模

思维拓展

无限交换群是否总可以成为左 $\mathbb{Q}$ 模，可否举例说明可与不可？有无成为 $\mathbb{Q}$ 模的充要条件.

第五章第 10 题

左 R 模不可约当且仅当 M 是非零循环模，且每一个非零元均为生成元.

不可约模的定义：没有非平凡子模.

证明

- M 不可约，任给 $0 \neq m \in M$，有 Rm 为 M 的非零子模，因此 $Rm = M$.
- 设 $I \subset M$ 为 M 的非零子模，则存在 $0 \neq m \in I$ 使得 $M = Rm \subset I \subset M$.

第五章第 11 题

左 R 模 M 是不可约的当且仅当存在 R 的极大左理想 I 使得 $M \cong R/I$ 为模同构.

商模的定义和模同构

证明

- 作为左 R 模，R 的每一个左理想都是 R 的子模.
- 设 $M \cong R/I$，则任给 $0 \neq \bar{x} \in R/I$，有 $Rx + I = R$，因此 $R\bar{x} = R/I$，即是循环模的等价刻画.
- 若 M 不可约，则任给 $0 \neq m \in M$，有 $Rm = M$，定义 $\mathrm{Ann}(m) = \{r \in R | rm = 0\}$ 是极大左理想.
- 定义 $\eta : R \to M$ 为满的模同态，$\eta(r) = rm$，则 $\ker(\eta) = \mathrm{Ann}(m)$.

思维拓展

任给幺环，是否总存在极大左理想？特别的，$\mathbb{R}$(或 $\mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{C}$) 上的 n 阶矩阵环的极大左理想如何刻画？

问题补充和方法扩张

问题 1

设 M 是左 R 模，称 I 为 M 的极大子模，若没有非平凡子模真包含 I. 环 R 的左模 M 是否一定有极大子模？能否举例说明？要是 M 是有限生成模，那么能否证明 M 存在极大子模？

简要说明

- 一般的模未必总是存在极大子模. 一个典型的例子就是 $\mathbb{Q}$ 作为 $\mathbb{Z}$ 模，无极大子模，试证明之.
- 有限生成模总是有极大子模，这里可以有佐恩引理进行证明.

问题 2

诺特环要求每一个理想都是有限生成的，如果 R 是交换幺环，满足 R 的素理想均是有限生成的，那么 R 是否是诺特环？

简要说明

- 答案是肯定的，只需要考虑 R 中所有不是有限生成的理想的集合，就可以发现该集合存在极大元，恰好是 R 的素理想.
- 该问题表明素理想基本上是理想的“组成单位”，很多时候全体素理想的一些性质决定全体理想所具有的的性质.