第六次习题课

方法提要、习题分块讲解和内容扩充

助教：邓先涛

2023 年 10 月 23 日

重点知识提要

重点知识提要

- 模同态基本定理：模同构三定理 (类似于群) 的性质及应用.
- 模的直和：模的内直和和外直和的基本概念.
- 模的生成集与基：模的生成元；有限生成模；自由模.

模的基本概念与应用

第五章第 7 题

设 M 是左 R 模，任给 $f \in \mathrm{Hom}_R(R, M)$ 和 $a \in R$，定义 $af(r) = f(ra)$. 证明：在该定义下，R 模同态构成的交换群 $\mathrm{Hom}_R(R, M)$ 是一个左 R 模，并且 $\eta(f) = f(1)$ 给出了模同构 $\mathrm{Hom}_R(R, M) \cong M$.

模的定义和模同态模同构的概念.

证明

- 验证模的 4 条性质. 由于 f 自身是模同态，因此 4 条线性相关的分配率和结合律自然满足.
- 模同构 $=$ 模同态 $+$ 单射 $+$ 满射. 模同态 $=$ 群同态 $+R$ 线性性.

思维拓展

该结论表明作为左 R 模，若 $M \neq 0$，则一定存在非零模同态 $R \to M$. 那么反过来是否成立？即作为左 R 模，如果 $M \neq 0$，那么是否总是存在非零模同态 $M \to R$? 举例并探究其中的根本原因.

第五章第 12 题：舒尔引理

设 M_1 和 M_2 是不可约左 R 模，则二者之间的模同态 $\eta: M_1 \to M_2$，要么是零同态要么是模同构. 特别的，$\mathrm{End}_R(M_1)$ 是一个体.

不可约模的定义

思维拓展 1

设 M 是不可约 R 模，任给 $0 \neq m_1 \neq m_2 \neq 0$，有 $M = Rm_1 = Rm_2$，是否总是有同构

$$\eta: M \to M, \quad \eta(rm_1) = rm_2.$$

证明

- 注意到 $\ker(\eta)$ 和 $\mathrm{Im}(\eta)$ 分别是 M_1 和 M_2 的子模，而不可约模没有非平凡子模.
- 在映射复合下，$\mathrm{End}_R(M_1)$ 是一个环.
- 同构的逆还是同构，因此 $\mathrm{End}_R(M_1)$ 中的每一个元素都有逆元，因此是体.

补充习题

设 F 是域，$R = M_n(F)$ 为 F 的 n 阶矩阵环，I 为 R 的一个极大左理想，证明：$\mathrm{End}_R(R/I) = F$.

矩阵环上的行列变换

证明

- R 中极大左理想的形式：存在 $1 \le i \le n$ 使得 I 是所有第 i 列为 0 的矩阵全体构成的集合.
- $\mathrm{End}_R(R/I)$ 中的元素形式：设 $f\colon R/I \to R/I$ 为 R 模同构，则 $f(E_n)$ 可以等于 A 的充分必要条件是 $\{B \in R | BA \in I\} = I$，推出存在 $\lambda \in F^{\times}$ 使得 $A + I = \lambda E_n + I$. $\mathrm{End}_R(R/I)$ 中只有数乘.

思维拓展

将上述命题的域 F 换为整数环 $\mathbb{Z}$，能否刻画极大理想 I，并给出自同态环 $\mathrm{End}_R(R/I)$ 的刻画？

第五章第 19 题

任给正整数 n，讨论 $\mathbb{Z}$ 模 $\mathbb{Z}/(n)$ 何时可以写作两个非平凡子模的直和.

$\mathbb{Z}$ 模的子模是子群和中国剩余定理

思维拓展

不可分解模和不可约模有什么联系和区别？能否举出一个不是域的环 R 使得其上的不可约子模等价于不可分解子模？(半单模的性质)

证明

- $n = p^e$ 为素数方幂时，不可分解. 这是因为素数幂阶循环群的子群总是相互包含.
- $n = p_1^{e_1} \cdots p_m^{e_m}$ 为不同素数方幂乘积时，可分解. 这是由中国剩余定理直接得到.
- $\mathbb{Z}/(n) = (\overline{p_1^{e_1}}) \oplus (\overline{p_2^{e_2} \cdots p_m^{e_m}})$

自由模的性质

自由模的性质

- 自由模的定义：若 R 模 M 有一组基，则称 M 为自由 R 模. 若基是 n 元集，则 $M \cong R^n$.
- 自由模的泛性质：设 S 为自由 R 模的一个基，S' 为 R 模 M' 的一个子集，则任给集合之间的一个映射 $\psi : S \to S'$，总可以提升为 $\psi : M \to M'$ 为一个 R 模同态.
- 交换环上的有限生成自由模：设 R 为交换幺环，则 R 上自由模 M 的任意两组基有相同基数.

第五章第 24 题

任意 R 模 M 必是某个自由 R 模的同态像.

佐恩引理和自由模的泛定义.

思维拓展

域上的模都是自由模.

证明

- 利用佐恩引理得到 M 的生成元集 S.
- 以 S 中元素为角标的未定元集 $x_s(s \in S)$. 定义自由模 $F = \bigoplus_{s\in S} Rx_s$.
- 定义 $f\colon F \to M$ 为 $f(x_s) = s$ 提升得到的满同态，即得到命题.

补充习题：彭老师课件 11 页 12 题

设 M 是一个有限生成 R 模，$\phi : M \to R^n$ 的满的 R 模同态，则 $\ker(\phi)$ 是有限生成的.

应用教材 173 定理 6 的交换图：

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[ld, dotted, "\psi"'] \arrow[d, "\eta"] & \\
M \arrow[r, "\phi"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

证明

- 存在 $\psi : R^n \to M$ 使得 $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{R^n}$.
- 得到 $M = \ker(\phi) \oplus \mathrm{Im}(\psi)$，其中直和分解的具体形式为 $x = x - \psi(\phi(x)) + \psi(\phi(x))$.
- $x_1, \cdots, x_m$ 为 M 的生成元，$x_i = x_{i1} + x_{i2}$ 为直和分解.
- 立刻得到 $x_{11}, \cdots, x_{n1}$ 为 $\ker(\phi)$ 的生成元.

交换环上的线性代数

环上的线性方程组与环上的矩阵

- 有限生成自由模的环自同态刻画：$\mathrm{Hom}_R(R^n, R^n) \cong M_n(R)$.
- $f\colon R^n \to R^n$ 何时是单射：等价于 $\ker(f) = 0$等价于 $A_f x = 0$ 只有零解.
- 如何刻画交换环上的矩阵的秩？

  定义理想 I 的零化理想 $\mathrm{Ann}(I) := \{r \in R | ra = 0, \forall a \in I\}$，记 $I_k(A)$ 为矩阵 A 的所有 k 阶子式生成的理想，称最大的满足 $\mathrm{Ann}(I_k(A)) = 0$ 的正整数为 A 的秩，记作 $\mathrm{rank}(A)$.

  $\mathrm{rank}(A) = n$ 当且仅当 $r \cdot \det(A) \neq 0$ 对 $\forall 0 \neq r \in R$ 成立.

回顾线性代数

- A 为域 F 的 n 阶方阵，当 $\mathrm{rank}(A) < n$，不使用域上的除法，如何找到 $Ax = 0$ 的非零解？
- 设 A 的第 k 行的代数余子式为 A_{ki}，则$\sum_{i=1}^{n} x_i A_{ki} = \det(A_k)$，这里 A_k 是将矩阵 A 的第 k 行换作 $(x_1, \cdots, x_n)$.
- 设 k 是最大的正整数使得存在 A 的 k 阶子式不为零，则 $k \leq n-1$. 通过交换矩阵 A 的行列顺序使得 A 的 k 阶主子式不等于 0.
- 令 T_i 为 A 前 i 行前 i 列的元素构成的矩阵，t_i 为 T_{k+1} 去掉第 $k+1$ 行第 i 列的代数余子式.
- 则 $x' = (t_1, \cdots, t_{k+1}, 0, \cdots, 0)^T$ 是行列变换后的线性方程的非零解.

第五章第 18 题

设 R 是交换幺环，$A \in M_n(R)$，$Ax = 0$ 只有零解当且仅当 $\operatorname{rank}(A) = n$

定义表明：$\operatorname{rank}(A) = n$ 当且仅当 $r \cdot \det(A) \neq 0$ 对 $\forall 0 \neq r \in R$ 成立.

证明

- 若 $Ax = 0$ 有非零解，记为 x_0，则 $A^*Ax_0 = \det(A)x_0 = 0$，存在 $r \neq 0$ 使得 $r \cdot \det(A) = 0$.
- 若 $\operatorname{rank}(A) < n$，则 $\operatorname{Ann}(I_n(A)) \neq 0$. 取最大整数使 $\operatorname{Ann}(I_k(A)) = \{0\}$，$0 \neq y \in \operatorname{Ann}(I_{k+1}(A))$.
- 交换两行或两列不改变方程组有非零解的事实. 不妨设 E 为 k 阶主子矩阵使得 $y \cdot \det(E) \neq 0$.
- E' 为 $k+1$ 阶主子矩阵，m_i 为 E' 去掉第 $k+1$ 行第 i 列的代数余子式.
- $x' = (ym_1, \cdots, ym_{k+1}, 0 \cdots, 0)^T$ 为变换后线性方程组的解.

需要思考的几个问题

- 上述给出了其次方程的解，如何用秩的语言刻画非齐次线性方程组$Ax = y$ 是否有解的问题？
- 设 n 阶矩阵 $A : R^n \to R^n$ 定义了自由模同态，A 满足什么条件可以使得 $\mathrm{Im}(A)$ 成为自由模？在该条件下，$\mathrm{Im}(A)$ 的秩应该如何通过 A 的性质进行确定？
- 域上矩阵关于秩的结论有多少可以移植到交换环中？
- 同样的想法可否用于非交换环上的线性代数？难点在哪里？

投射模的性质

投射模的刻画

- **投射模的定义**：称左 R 模是投射模，若任给 R 模满同态 $\phi: M \to N$ 和 R 模同态 $\eta: P \to N$，存在 $\psi: P \to M$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dotted, "\psi"'] \arrow[d, "\eta"] & \\
M \arrow[r, "\phi"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

- **推论**：自由模均为投射模.

第五章第 22 题和 23 题

设 P 是 R 模，则 P 是投射模当且仅当 P 是某个自由模的直和项.

投射模的定义

证明

- 设 P 是投射模，令 ϕ 为自由模 F 到 P 的满同态.
- 存在 $\psi : P \to F$ 使得 $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_P$.
- $F = \ker(\phi) \oplus \mathrm{Im}(\psi)$，其中 $P \cong \mathrm{Im}(\psi)$.

- 设 F 是自由模，使得 $F = P \oplus P'$.
- 设 $\phi : M \to N$ 满同态，$\eta : P \to N$ 模同态.
- 设 $\beta : F \to P$ 为直和分解同态，有交换图：

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[d, "\beta"] \arrow[ddl, dotted, "\chi"'] & \\
 & P \arrow[d, "\psi"] \arrow[dl, dotted, "\psi"'] & \\
M \arrow[r, "\phi"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

- 其中 $\psi = \chi \circ i$，这里 $i : P \to F$ 为嵌入同态.

投射模的等价定义

R 模 P 是投射模当且仅当 P 作为 R 模 M 的商模，总存在 M 的子模 P' 使得 $M = P \oplus P'$.

- 反过来，P 总可以作为自由模的商模.
- 因此 P 可以作为自由模的直和项，即可.

自由模在模同态中的价值和投射模定义.

证明

- 设 P 是投射模，P 是 R 模 M 的商模等价于有满的模同态 $\phi : M \to P$.
- 存在 $\psi : P \to M$ 使得 $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_P$.
- $M = \ker(\phi) \oplus \mathrm{Im}(\psi)$，其中 $P \cong \mathrm{Im}(\psi)$.

定理重述

P 是投射模当且仅当每一个形如

$$0 \to A \to B \to P \to 0$$

的短正合列都是分裂正合列.

投射模的等价定义

R 模 P 是投射模当且仅当存在 P 的一个子集 $\{a_i \in P | i \in I\}$ 和集合 $\{f_i \in \mathrm{Hom}_R(P, R) | i \in I\}$ 使得任给 $x \in P$，x 可以写作 $\sum_{i \in I} f_i(x) a_i$，这里任给 $x \in P$，$f_i(x)$ 仅有有限个非零.

自由模在模同态中的价值和投射模定义.

证明

- 设 P 是投射模，存在自由模 $M = P \oplus P'$，令 M 的基为 $< x_i | i \in I >$，x_{i1} 为 x_i 在 P 中的分解.
- 定义 $F_i : M \to R (i \in I)$，$F_i(x_j) = \begin{cases} 1_R, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$，记 $f_i = F_i|_P$，$\{x_{i1} | i \in I\}$ 和 $\{f_i | i \in I\}$ 即为所求.
- 反过来，定义 $\alpha : \oplus_{i \in I} R \to P$ 和 $\beta : P \to \oplus_{i \in I} R$，$\alpha(\oplus_{i \in I} r_i) = \sum_{i \in I} r_i a_i$，$\beta(x) = \oplus_{i \in I} f_i(x)$.
- 验证得到 $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_P$表明 P 是 $\oplus_{i \in I} R$ 的直和项，这意味着 P 是投射模.

关于投射模的两个不加证明的事实

- 若 R 是主理想整环，P 是左 R 模，则 P 是投射模当且仅当 P 是自由模.

  思考：如果取向主理想整环的限制，那么投射模但不是自由模的例子有哪些？特别的，如果 R 是诺特整环，那么能否举出上述命题的反例？

- 设 F 是一个域，在 n 阶矩阵环 $M_n(F)$ 上，如果 F^n 在矩阵作用下看作自然的 $M_n(F)$ 模，那么模 F^n 是投射模但不是自由模.

  思考：如果取 F 是一般的环，那么上述命题是否成立？试着给出证明.

- 设 M 和 N 是 R 模，$M \oplus N$ 是投射模当且仅当 M 和 N 是投射模.

内射模的性质

内射模的刻画

- 称 R 模 Q 为内射模，若任给 R 模单同态 $\phi: M \to N$ 和 R 模同态 $\eta: M \to Q$，总存在 R 模同态 $\psi: N \to Q$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\eta"] & N \arrow[dl, dotted, "\psi"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

- 域上的模均是内射模.

第五章第 20 题

$\mathbb{Q}$ 作为 $\mathbb{Z}$ 模，它的任意一个有限生成子模均是循环模. 由此证明，$\mathbb{Q}$ 不是自由 $\mathbb{Z}$ 模.

Bézout's lemma

一点疑问

为什么在内射模内容中插入该问题的解答？

证明

- 只需要证明任给二元生成子模是循环模.
- 令 $a=\frac{m}{n}$，$b=\frac{p}{q}$，$I=a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$.
- $au+bv=\frac{umq+vnp}{nq}$，且 $\gcd(mq,np)\mid umq+vnp$.
- 令 $c=\frac{\gcd(mq,np)}{nq}$，则 $I=c\mathbb{Z}$ 是循环 $\mathbb{Z}$ 模.

第五章第 24 题

有理数域 $\mathbb{Q}$ 作为 $\mathbb{Z}$ 是内射模

zorn 引理

证明

- 设 $I=\{rn|n\in\mathbb{Z}\}$，$\lambda: I\to\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Z}$ 模同态，则存在 $\Lambda:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$ 使得 $\Lambda|_I=\lambda$.
- $\phi: M\to N$ 是 $\mathbb{Z}$ 模单同态，$\eta: M\to\mathbb{Q}$ 为模同态，则存在 $\eta_0:\phi(M)=M_1\to\mathbb{Q}$.
- $x_1\in N\setminus M_1$，令 $I_1=\{r\in\mathbb{Z}|rx_1\in M_1\}$.
- 令 $\lambda_1: I_1\to\mathbb{Q}$ 定义为 $\lambda_1(r)=\eta(rx_1)$.
- 可建立 $\mathbb{Z}$ 模同态 $\eta_1: M_1+\mathbb{Z}x_1\to\mathbb{Q}$，定义为 $\eta_1(m+rx_1)=\eta(m)+\Lambda_1(r)$，其中 Λ_1 为 λ_1 的提升.
- 在 N 中考察所有子模和映射 (N',η')，其中 $\eta': N'\to\mathbb{Q}$ 满足 $M_1\subset N'$，$\eta'\circ\phi=\eta$.
- 上述定义得到的集合必有极大元 N_M. 根据第四点性质得到 $N_M=N$.

关于内射模的基本事实

- 设 Q 是 R 模，Q 是内射模当且仅当 Q 作为某个 R 模 M 的子模存在直和补，即存在 M 的子模 Q' 使得 $M = Q \oplus Q'$.
- 设 Q 是 R 模，Q 是内射模当且仅当任给左理想 I 及 R 模同态 $\lambda : I \to Q$，存在 $\Lambda : R \to Q$ 使得 $\Lambda|_I = \lambda$.
- 设 $Q_i (i \in I)$ 是 R 模，Q_i 均是内射模当且仅当 $\prod_{i \in I} Q_i$ 是内射模. (直和则未必，试着举例说明)

问题补充和方法扩张

问题 1

教材中证明若 R 是交换环，作为 R 模，$R^n \cong R^m$ 当且仅当 $m = n$. 如果去掉交换环的条件，该问题是否仍然成立？可否举例说明.

简要说明

- 在数学学习和数学研究中，去掉一些“多余”条件有时候是一件有意义的事情.
- 满足自由模基数不变性质的环称为不变基数环，关于具体的反例和性质，可知乎搜索“有没有环上的自由模秩不固定的例子”.

问题 2

有限生成模的子模是否是有限生成的？自由模的子模是否是自由的？特别的，使得有限生成模的子模总是有限生成的环是怎么样的？使得自由模的子模总是自由的环是怎么样的？

简要说明

- 将环理解为自身的模，所以使得有限生成模的子模总是有限生成的环是诺特环.
- 使得自由模的子模总是自由的环是 PID.