n 维向量习题课

例1　设向量组I：$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 与向量组II：$\beta_1,\cdots,\beta_n$ 的秩相同，且向量组II可由向量组I线性表示，证明向量组I与向量组II等价.

设 $r(I)=r(II)=s$，$\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{is}$ 为向量组I的极大无关组，
$\beta_{j1},\cdots,\beta_{js}$ 为向量组II的极大无关组.

由题设 $\beta_{j1},\cdots,\beta_{js}$ 可由 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{is}$ 线性表示，设表示式为

$$\begin{pmatrix}\beta_{j1}\\ \vdots\\ \beta_{js}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1s}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{s1} & \cdots & a_{ss}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{i1}\\ \vdots\\ \alpha_{is}\end{pmatrix},$$

设 $A=\begin{pmatrix}\alpha_{i1}\\ \vdots\\ \alpha_{is}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}\beta_{j1}\\ \vdots\\ \beta_{js}\end{pmatrix}$，$K=(a_{ij})_{s\times s}$，则 $B=KA.$ $\Rightarrow r(K)=s.$

由 $s=r(B)=r(KA)\le r(K)$ 知：$r(K)\ge s$，但显然有 $r(K)\le s$,

即 K 为可逆阵，故有 $A=K^{-1}B$，即 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{is}$ 可由 $\beta_{j1},\cdots,\beta_{js}$ 线性表示，从而 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{is}$ 与 $\beta_{j1},\cdots,\beta_{js}$ 等价.

由极大无关组与原向量组的等价性得 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 等价.

注：1. 两向量组的秩相同，不能断言两向量组等价，但附加一定的条件后可以等价. 因此要注意：向量组的等价仅由秩相等是不够的，这一点与矩阵等价不一样.

2. 在例1中，因为 m 与 n 不一定相同，但两向量组的秩相等，故取极大无关组来做. 实际上，此题若不利用极大无关组是很难证出来的. 因此，在讨论向量组的问题时，可取其极大无关组为讨论对象.

例2 设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关且向量组$\beta_1,\cdots,\beta_s$可由其线性表示为

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1s} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{s1} & k_{s2} & \cdots & k_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \\ \alpha_s \end{pmatrix},$$

设 $K=(k_{ij})_{s\times s}$， 证明$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ $r(K)=s$.

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性相关 $\Leftrightarrow$ $r(K)<s$.

练习

已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则线性无关的向量组为 $\underline{(C).}$.

(A) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1;$

(B) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1;$

(C) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1;$

(D) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1.$

对 $(A), K=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}, r(K)=3;$ 对 $(B), K=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\-1&0&0&1\end{pmatrix}, r(K)=3;$

对 $(C), K=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\-1&0&0&1\end{pmatrix}, r(K)=4;$ 对 $(D), K=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&-1\\-1&0&0&1\end{pmatrix}, r(K)=3.$

例3　设向量组(I)与(II)等价，其中

(I) $\alpha_1=(1,\ 3,\ 0,\ 5),\ \alpha_2=(1,\ 2,\ 1,\ 4),\ \alpha_3=(1,\ 1,\ 2,\ 3);$

(II) $\beta_1=(1,\ -3,\ 6,\ -1),\ \beta_2=(a,\ 0,\ b,\ 2).$

求 a,b 的值.

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\3&2&1\\0&1&2\\5&4&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

故 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，$\alpha_1,\alpha_2$ 为一极大无关组且 $\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$;故只需考察 α_1,α_2 与 β_1,β_2 之间的相互表示问题. 由于

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \vdots\ \beta_1\ \beta_2)=\left(\begin{array}{cc:cc}1&1&1&a\\3&2&-3&0\\0&1&6&b\\5&4&-1&2\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cc:cc}1&1&1&a\\0&-1&-6&-3a\\0&0&0&b-3a\\0&0&0&2-2a\end{array}\right),$$

若α_1,α_2与β_1,β_2等价，则有

$$r(\alpha_1,\alpha_2)=r(\beta_1,\beta_2)=r(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)=2.$$

故$\begin{cases} b-3a=0, \\ 2-2a=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1, \\ b=3. \end{cases}$

当$a=1,b=3$时，

$$(\alpha_1\ \ \alpha_2 \ \vdots\ \beta_1\ \ \beta_2)\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & \vdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \vdots & -6 & -3 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & -5 & -2 \\ 0 & 1 & \vdots & 6 & 3 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

易知α_1,α_2是$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$的一个极大无关组，故$\beta_1,\beta_2$可由$\alpha_1,\alpha_2$线性表示. 显然$\beta_1,\beta_2$也是$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$的一个极大无关组，故$\alpha_1,\alpha_2$也可由$\beta_1,\beta_2$线性表示.

从而当$a=1,b=3$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2$等价.

例4 设矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 经过初等行变换得到矩阵 B，且

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组。

（并将其余向量用这个极大无关组线性表示.）

显然 $r(B)=3$，故 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3.$

因为 B 是由 A 经初等行变换得到的，也就是将向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 按"列摆行变换"得到的，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为一个极大无关组. 又因为

$$A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)\xrightarrow{\text{行变换}} B \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故 $\alpha_4=-2\alpha_1+6\alpha_2-5\alpha_3.$

例5　设 $\alpha_1=(1,\ 0,\ 2)$, $\alpha_2=(2,\ 0,\ -3)$, $\alpha_3=(1,\ 2,\ 1)$.

(1) 任一向量$\beta=(a,\ b,\ c)$ 能否由向量 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ 线性表示?

(2) 证明你的结论.

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -7 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，从而构成 R^3 的一组基，因此任给向量 $\beta=(a,b,c)$ 都可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.