Metoda Simpsona obliczania przybliżonej wartości całki wielomianu reprezentowanego w bazie Legendre'a

Piotr Wilczyński - IiAD MN gr.3

Grudzień 2021

1 Wstęp

Treść zadania:

40. Metoda Simpsona obliczania przybliżonej wartości całki $\int_a^b w_n(x)dx$, gdzie w_n jest wielomianem reprezentowanym w bazie wielomianów Legendre'a

$$w_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k L_k(x).$$

Uwaga. Nie należy sprowadzać wielomianu w_n do postaci naturalnej! Do obliczania wartości wielomianu w_n należy wykorzystać związek rekurencyjny spełniany przez wielomiany Legendre'a.

Zadanie polega na obliczeniu wartości całki, w której funkcją podcałkową jest wielomian reprezentowany w bazie Legendre'a.

Rozwiązaniem jest program w MATLABie, który będzie wyznaczał wartość danej całki.

2 Program

Program został podzielony na dwie funkcje:

1. `legendreValue(A, x)`
2. `simpsonIntegral(A, x)`

Aby móc policzyć całkę, musimy najpierw umieć wyznaczać wartość wielomianu w danym punkcie x $w_n(x)$. Będziemy to robić przy użyciu funkcji o nazwie `legendreValue(A, x)`.

2.1 Wyznaczanie $w_n(x)$

Będziemy korzystać z algorytmu Clenshawa, który może służyć do obliczania wartości wielomianów ortogonalnych, jakimi są wielomiany Legendre'a.

Wiemy, że:

$$w_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k L_k(x)$$

gdzie $a_k \in \mathbb{R}$ jest współczynnikiem, a $L_k(x)$ - k-tym wielomianem Legendre'a.

Zanim skorzystamy z samego algorytmu, powinniśmy wcześniej wyznaczyć potrzebne nam później współczynniki α_k, β_k i γ_k.

Wiemy, że wielomiany Legendre'a spełniają:

$$L_0(x) = 1,\ \ L_1(x) = x$$

$$(k+1)L_{k+1}(x) = (2k+1)xL_k(x) - kL_{k-1}(x), \ \ k = 1, 2, \ldots, n-1$$

Przekształcając powyższą równość otrzymujemy:

$$L_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1}xL_k(x) - \frac{k}{k+1}L_{k-1}(x), \ \ k = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$L_k(x) = \frac{2k-1}{k}xL_{k-1}(x) - \frac{k-1}{k}L_{k-2}(x), \ \ k = 2, 3, \ldots, n \tag{1}$$

Potrzebujemy takiej postaci, aby obliczyć wcześniej wspomniane współczynniki. Przy założeniu $L_{-1}(x) = 0$ mamy zależność:

$$L_k(x) = (\alpha_k x - \beta_k x)L_{k-1}(x) - \gamma_k L_{k-2}(x) \ \ k = 1, 2, \ldots, n \tag{2}$$

Z (1) i (2) możemy wywnioskować, że:

$$\alpha_k = \frac{2k-1}{k} \ \ k = 1, 2, \ldots, n$$

$$\beta_k = 0 \ \ k = 1, 2, \ldots, n$$

$$\gamma_k = \frac{k-1}{k} \ \ k = 1, 2, \ldots, n$$

warto zaznaczyć, że dodatkowo $\alpha_0 = L_0(x) = 1$.
Algorytm Clenshawa:

1. Przyjąć $B_{n+1} = 0$ oraz $B_n = a_n$
2. Dla $k = n-1, n-2, \ldots, 1, 0$ obliczyć:

$$B_k = a_k + (\alpha_{k+1}x - \beta_{k+1})B_{k+1} - \gamma_{k+2}B_{k+2}$$

3. Wyznaczyć $w_n(x) = B_0\alpha_0$

Zmodyfikujemy algorytm tak, aby był optymalny i łatwiejszy w implementacji. Po pierwsze nie będziemy potrzebować pamiętać wartości B_k dla każdego k, a jedynie dla dwóch ostatnio wyliczonych. Po drugie MATLAB indeksuje tablice od 1 nie od 0, zatem przesuniemy o jeden indeksy dla współczynników a_k. Oznacza to, że w naszej tablicy `A`, przechowującej współczynniki a_k, element a_k będzie pod indeksem `k+1`. Otrzymamy algorytm:

1. Przyjąć $Bprevprev = 0$ oraz $Bprev = a_{n+1}$
2. Dla $k = n-1, n-2, \ldots, 1, 0$:
$$B = a_{k+1} + (\alpha_{k+1}x - \beta_{k+1})Bprev - \gamma_{k+2}Bprevprev$$
$$Bprevprev = Bprev$$
$$Bprev = B$$
3. Zwrócić $B\alpha_0$

Możemy jeszcze wstawić wyznaczone wzory na współczynniki α_k, β_k i γ_k. Otrzymamy:

1. Przyjąć $Bprevprev = 0$ oraz $Bprev = a_{n+1}$
2. Dla $k = n-1, n-2, \ldots, 1, 0$:
$$B = a_{k+1} + \frac{2k+1}{k+1}xBprev - \frac{k+1}{k+2}Bprevprev$$
$$Bprevprev = Bprev$$
$$Bprev = B$$
3. Zwrócić B

Podsumowując mamy algorytm, który na wejściu otrzymuje (n+1)-elementową tablicę `A` współczynników a_k oraz liczbę rzeczywistą `x`, a zwraca wartość wielomianu w_n w punkcie `x`.

Funkcja napisana w MATLABie implementująca powyższy algorytm znajduję się w pliku legendreValue.m.

2.2 Wyznaczanie $\int_a^b w_n(x)$

Całkę będziemy wyznaczać złożoną metodą Simpsona. Będziemy dzielić przedział całkowania na N równych podprzedziałów, i na każdym z nich stosować Prostą kwadraturę Simpsona. Całość potem zsumujemy, aby uzyskać wartość całki.

W prostej kwadraturze Simpsona na przedziale $[a, b]$ bierzemy 3 węzły: a, b i $\frac{a+b}{2}$. Następnie przez punkty $(a,\ w_n(a))$, $(\frac{a+b}{2},\ w_n(\frac{a+b}{2})$ i $(b,\ w_n(b))$ prowadzimy parabolę i liczymy pod nią pole.

Takie pole można wyrazić jako:

$$S(w_n) = \frac{b-a}{6}(w_n(a) + 4w_n(\frac{a+b}{2}) + w_n(b))$$

Wracając do metody złożonej. Całkujemy przedział $[a, b]$ i dzielimy go na N podprzedziałów: $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, \ldots, N)$ długości $H = \frac{b-a}{N}$, przy czym mamy $x_k = a + kH$ dla $k = 0, \ldots, N$. Sumując wartości otrzymane z kwadratur prostych na podprzedziałach dostajemy:

$$S(w_n) = \sum_{k=1}^{N} \frac{H}{6}(w_n(x_{k-1}) + 4w_n(x_{k-1} + \frac{H}{2}) + w_n(x_k))$$

Co możemy przekształcić do postaci (będzie miała ona lepsze własności numeryczne):

$$S(w_n) = \frac{H}{6}(w_n(a) + w_n(b) + 2\sum_{k=1}^{N-1} w_n(a + kH) + 4\sum_{k=0}^{N-1} w_n(a + kH + \frac{H}{2}))$$

Zaimplementujemy algorytm, który będzie opierał się na powyższym wzorze. Do wyznaczania wartości wielomianu w_n będziemy używali funkcji opisanej w poprzedniej sekcji o nazwie `legendreValue(A,x)`. Algorytm na wejściu przyjmuje liczby rzeczywiste `a` i `b`, granice przedziału całkowania, liczbę rzeczywistą `N`, która określa liczbę podprzedziałów oraz tablicę `A` współczynników a_k. Zwraca natomiast wartość całki $\int_a^b w_n(x)$ wyznaczonej metodą Simpsona.
Algorytm:

1. Przyjąć $val = 0$ i $H = \frac{b-a}{N}$
2. Dla $k = 1, 2, \ldots, N-1$:

   $$val = val + 2valueLegendre(A, a + kH) + 4valueLegendre(A, a + kH + \frac{H}{2})$$

3. Przypisz:

   $$val = \frac{H}{6}(val + valueLegendre(A, a) + valueLegendre(A, b) +$$

   $$4valueLegendre(A, a + \frac{H}{2}))$$

4. Zwróć val

Implementacja algorytmu znajduje się w pliku simpsonIntegral.m.

3 Obsługa programu

Aby otrzymać wartość całki Simpsona, gdzie funkcją podcałkową jest wielomian w_n, będący wielomianem reprezentowanym w bazie wielomianów Legendre'a należy w MATLABie wywołać funkcję `simpsonIntegral(a, b, N, A)`, gdzie
`a` i `b` - granice przedziału całkowania
`N` - liczba podprzedziałów, na które dzielimy przedział $[a, b]$
`A` - tablica współczynników a_k, gdzie współczynnik a_k jest pod indeksem $k + 1$.

4 Przykłady i analiza wyników

Na potrzeby analitycznych obliczeń, będziemy sprowadzać wielomiany w bazie Legendre'a do bazy naturalnej, zatem dla wygody wypiszmy najpierw kilka pierwszych wielomianów z bazy Legendre'a:

$$L_0(x) = 1$$
$$L_1(x) = x$$
$$L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$
$$L_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$
$$L_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$
$$L_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

Przy analizie błędów, będziemy korzystać, z błędu złożonej kwadratury Simpsona, która wynosi:

$$E(f) = -\frac{1}{180 \cdot 2^4} H^4(b - a) f^{(4)}(\mu)$$

dla pewnego $\mu \in (a, b)$

4.1 Przykład 1

Wielomian w bazie Legendre'a: $\frac{4}{3}L_0(x) + L_1(x) + \frac{2}{3}L_2(x)$
Granice przedziału całkowania: $a = -1$, $b = 1$

Analitycznie:

$$\frac{4}{3}L_0(x) + L_1(x) + \frac{2}{3}L_2(x) = \frac{4}{3} + x + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(3x^2 - 1) = x^2 + x + 1$$

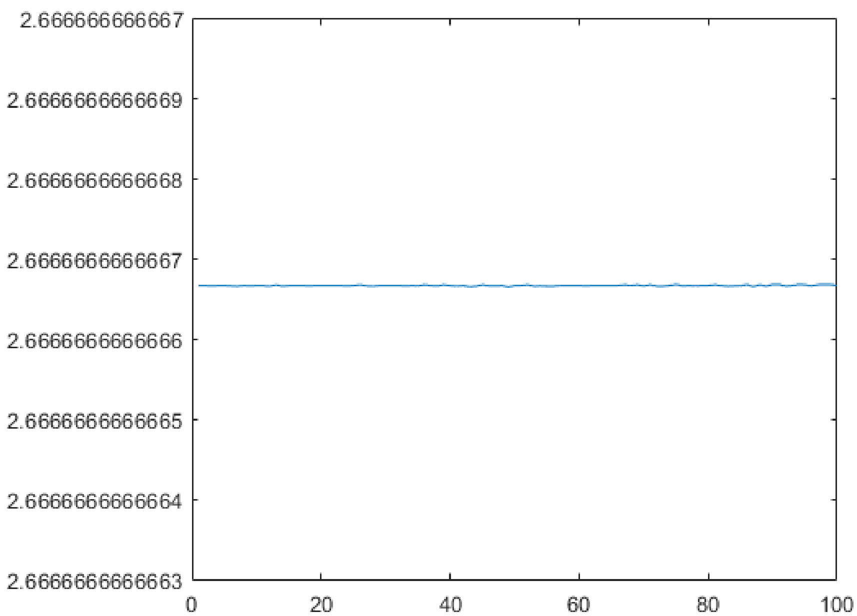
$$\int_{-1}^{1} x^2 + x + 1\, dx = [\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x]_{x=-1}^{x=1} = (\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1) - (\frac{-1}{3} + \frac{1}{2} - 1)$$

$$= \frac{11}{6} - (-\frac{5}{6}) = \frac{16}{6} = 2.(6)$$

Wynik programu dla N = 1:

$$simpsonIntegral(-1, 1, 3, [4/3, 1, 2/3]) = 2.666666666666666$$

Wyniki programu w zależności od N (na osi x wartości N, na osi y wynik funkcji simpsonIntegral(-1,1,N,[4/3, 1, 2/3])):



Błąd nie zależy od wielkości N.

Przewidywany błąd metody Simpsona:

$$E(w_n) = -\frac{1}{180 \cdot 2^4} H^4 (b-a) w_n^{(4)}(\mu) = 0$$

ponieważ w_n jest wielomianem stopnia 2 ($w_n^{(4)}(\mu) = 0$).

Bezwzględny błąd funkcji:

$$2.(6) - 2.666666666666666 \approx 0$$

Zatem względny błąd funkcji również będzie bardzo blisko 0.
Jak widać wynik funkcji nie zmienia się od liczby przedziałów i zawsze podaje dokładną wartość (do epsilona maszynowego). Wszystko się zgadza z przewidywanym błędem.

4.2 Przykład 2

Wielomian w bazie Legendre'a: $L_0(x) + L_1(x) + L_2(x) + L_3(x)$
Granice przedziału całkowania: $a = 0$, $b = 5$

Analitycznie:

$$L_0(x) + L_1(x) + L_2(x) + L_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) + \frac{1}{2}(3x^2 - 1) + x + 1$$
$$= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} + x + 1 = \frac{5}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$
$$\int_0^5 \frac{5}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\, dx = [\frac{5}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x]_{x=0}^{x=5}$$
$$= (\frac{3125}{8} + \frac{125}{2} - \frac{25}{4} + \frac{5}{2}) = \frac{3595}{8} = 449.375$$

Wynik programu dla N = 1:

$$simpsonIntegral(0, 5, 1, [1, 1, 1, 1]) = 449.3749999999999$$

Przewidywany błąd metody Simpsona:

$$E(w_n) = -\frac{1}{180 \cdot 2^4} H^4 (b-a) w_n^{(4)}(\mu) = 0$$

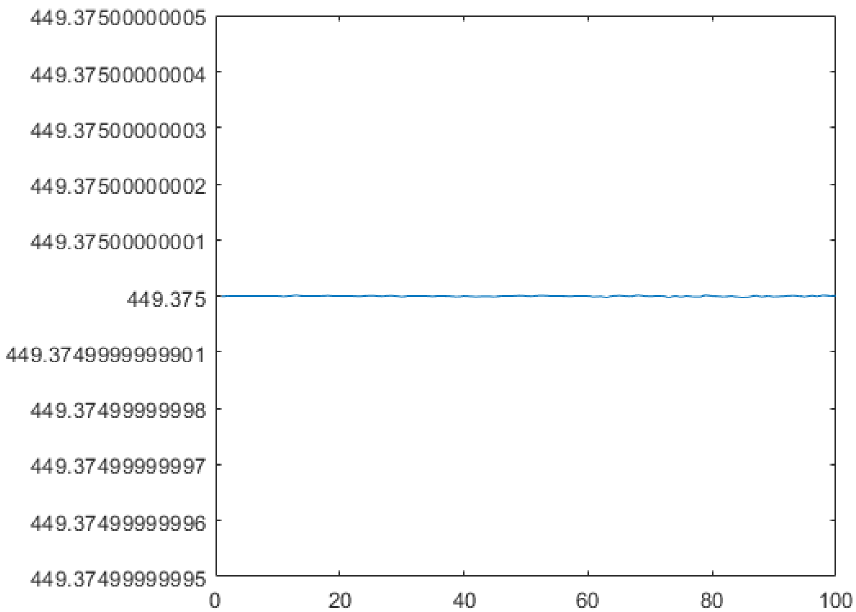
ponieważ w_n jest wielomianem stopnia 3 ($w_n^{(4)}(\mu) = 0$).

Bezwzględny błąd funkcji:

$$449.375 - 449.3749999999999 \approx 0$$

Zatem względny błąd funkcji również będzie bardzo blisko 0.
Wynik funkcji podobnie nie zmienia się w zależności od liczby przedziałów i zawsze podaje wartość bardzo blisko oczekiwanej. Wszystko się zgadza z przewidywanym błędem.

Wyniki programu w zależności od N:



Błąd nie zależy od wielkości N.

4.3 Przykład 3

Wielomian w bazie Legendre'a: $L_3(x) + L_4(x)$
Granice przedziału całkowania: $a = -4$, $b = -1$

Analitycznie:

$$\begin{aligned} L_3(x) + L_4(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) + \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ &= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + \frac{35}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^2 + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\int_{-4}^{-1} \frac{35}{8}x^4 + \frac{5}{2}x^3 - \frac{30}{8}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}\,dx = [\frac{35}{40}x^5 + \frac{5}{8}x^4 - \frac{30}{24}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{8}x]_{x=-4}^{x=-1}$$

$$= (-896+160+80-12-\frac{3}{2})-(-\frac{7}{8}+\frac{5}{8}+\frac{5}{4}-\frac{3}{4}-\frac{3}{8}x) = \frac{-5,356}{8} + \frac{1}{8} = 669.375$$

Wynik programu dla N = 1:

$$simpsonIntegral(0, 5, 1, [1, 1, 1, 1]) = 678.234375$$

Przewidywany błąd metody Simpsona:

$$E(w_n) = -\frac{1}{180 \cdot 2^4} H^4(b-a) w_n^{(4)}(\mu)$$

$$w_n^{(4)}(x) = 35 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} = 3 \cdot 35 = 105$$

$$E(w_n) = -\frac{3 \cdot 105}{180 \cdot 2^4} H^4 = -\frac{7H^4}{64} = -\frac{7 \cdot 3^4}{64 \cdot N^4} = -\frac{567}{64N^4}$$

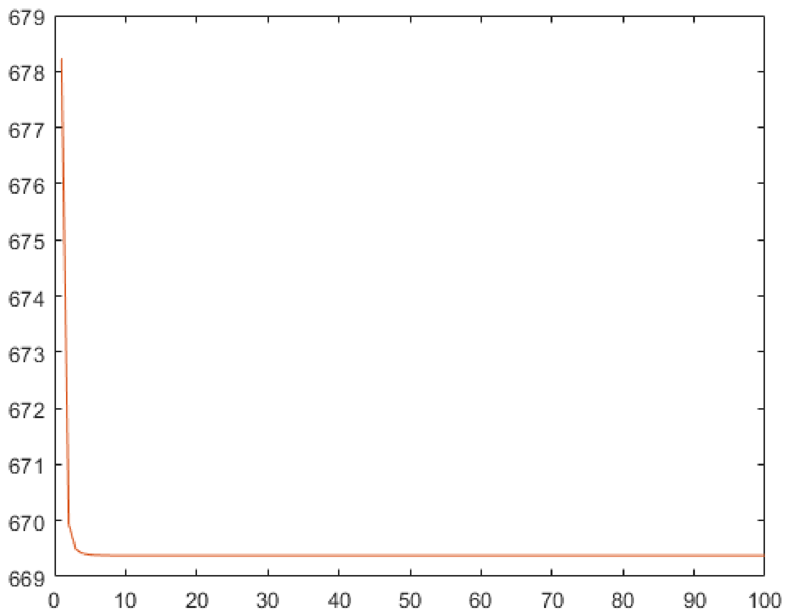
Bezwzględny błąd funkcji dla N = 1:

$$669.375 - 678.234375 = -8.859375 = -\frac{567}{64}$$

Względny błąd funkcji dla N = 1:

$$|\frac{-8.859375}{669.375}| \approx 0.0132353$$

Dla N = 1 błąd funkcji zgadza się z przewidywanym. Błąd powinien zależeć od liczby przedziałów. Im więcej przedziałów, tym błąd mniejszy. Sprawdźmy wyniki funkcji dla $N \in [1, 100]$:



Na wykresie naniosłem dwie linie. Jedna wyznacza wartości obliczone przez funkcje, a druga dokładną wartość powiększoną o przewidywany błąd. Jak widać linie się idealnie pokrywają.

4.4 Przykład 4

Wielomian w bazie Legendre'a: $\frac{8}{63}L_5(x) + \frac{28}{63}L_3(x) + \frac{27}{63}L_1(x)$
Granice przedziału całkowania: $a = -3$, $b = 3$

Analitycznie:

$$\frac{8}{63}L_5(x)+\frac{28}{63}L_3(x)+\frac{27}{63}L_1(x) = \frac{8}{63}\cdot\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)+\frac{28}{63}\cdot\frac{1}{2}(5x^3-3x)+\frac{27}{63}x$$
$$= \frac{(63x^5 - 70x^3 + 15x) + 14(5x^3 - 3x) + 27x}{63} = \frac{63x^5 + 15x - 42x + 27x}{63} = x^5$$
$$\int_{-3}^{3} x^5\,dx = [\frac{x^6}{6}]_{x=-3}^{x=3} = (\frac{3^6}{6}) - (\frac{(-3)^6}{6}) = 0$$

Wynik programu dla N = 1:

$$simpsonIntegral(-3, 3, 1, [0, 27/63, 0, 28/63, 0, 8/63]) = 0$$

Przewidywany błąd metody Simpsona:

$$E(w_n) = -\frac{1}{180\cdot 2^4}H^4(b-a)w_n^{(4)}(\mu)$$
$$w_n^{(4)}(x) = \frac{8}{63}\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot x = \frac{320x}{21}$$
$$E(w_n) = -\frac{6\cdot\frac{320\mu}{21}}{180\cdot 2^4}H^4 = \frac{2\mu}{63}\cdot\frac{6^4}{N^4} = \frac{2592}{63}\cdot\frac{\mu}{N^4}$$

Bezwzględny błąd funkcji dla N = 1:

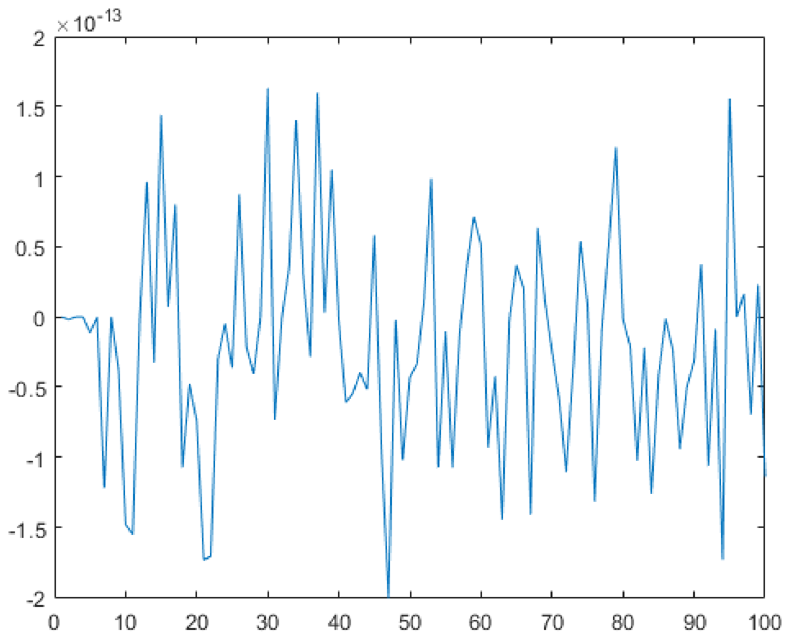
$$0 - 0 = 0$$

Zatem względny błąd będzie również równy 0.

Dla N = 1 błąd funkcji zgadza się z przewidywanym ($\mu = 0 \in (-3, 3)$). Wyznaczmy granice błędu w zależności od N:

$$E_{min} = \frac{2592}{63}\cdot\frac{-3}{N^4} = -\frac{7776}{63N^4}$$
$$E_{max} = \frac{2592}{63}\cdot\frac{3}{N^4} = \frac{7776}{63N^4}$$

Nanieśmy na wykres wartość funkcji simpsonIntegral() dla $N \in [1, 100]$



Jak widać wartość funkcji oscyluje wokół zera. Błąd bezwzględny jest w granicach

$$E_{funkcja} < |2 \cdot 10^{-13}|$$

Błędu bezwzględnego nie można określić, gdyż dostalibyśmy 0 w mianowniku.

Minimalne teoretyczne granice błędu jakie możemy uzyskać dla $N \in [1, 100]$ wynoszą.

$$E_{teoria} < |\frac{7776}{63} \cdot 10^{-8}|$$

Wynika stąd, że wyniki funkcji mieszczą się w teoretycznych granicach błędu.

4.5 Przykład 5

Wielomian w bazie Legendre'a: $8L_5(x) + 8L_4(x)$
Granice przedziału całkowania: $a = 0$, $b = 2$

Analitycznie:

$$8L_5(x) + 8L_4(x) = 63x^5 - 70x^3 + 15x + 35x^4 - 30x^2 + 3$$
$$\int_0^2 63x^5 + 35x^4 - 70x^3 - 30x^2 + 15x + 3\,dx$$
$$= [\frac{21}{2}x^6 + 7x^5 - \frac{35}{2}x^4 - 10x^3 + \frac{15}{2}x^2 + 3x]_{x=0}^{x=2}$$
$$= 672 + 224 - 280 - 80 + 30 + 6 = 572$$

Wynik programu dla N = 1:

$$simpsonIntegral(0, 2, 1, [0, 0, 0, 0, 8, 8]) = 665.3333333333333$$

Przewidywany błąd metody Simpsona:

$$E(w_n) = -\frac{1}{180 \cdot 2^4} H^4 (b - a) w_n^{(4)}(\mu)$$

$$w_n^{(4)}(x) = 63 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x + 35 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7,560x + 840$$
$$E(w_n) = -\frac{7,560\mu + 840}{180 \cdot 2^3} H^4 = -\frac{945\mu + 105}{180} H^4 = -\frac{(63\mu + 7) \cdot 2^4}{12 \cdot N^4}$$
$$= -\frac{4(63\mu + 7)}{3 \cdot N^4}$$

Bezwzględny błąd funkcji dla N = 1:

$$572 - 665.3333333333333 = -93.3333333333333$$

Względny błąd funkcji dla N = 1:

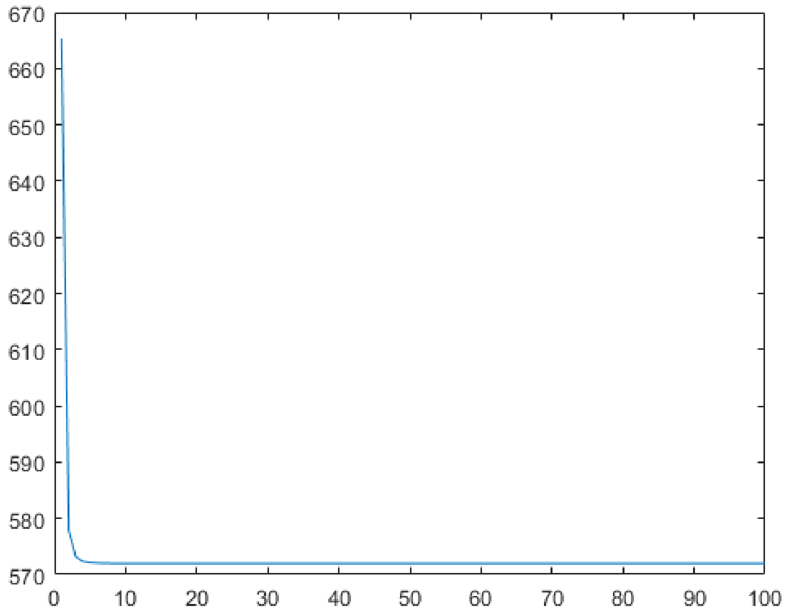
$$|\frac{-93.3333333333333}{572}| \approx 0.16317$$

Teoretyczny błąd dla N = 1:

$$E_1 < |-\frac{4(2 \cdot 63 + 7)}{3}|$$

$$E_1 = |177.(3)|$$

Błąd wyniku funkcji mieści się w tym przedziale. Wyniki funkcji dla $N \in [1, 100]$



Jak widać dla rosnącego N wyniki funkcji dość szybko zbiegają do poprawnego wyniku. Już dla $N = 100$ błąd bezwzględny:

$$E_{100} < |10^{-6}|$$

4.6 Przykład 6

Wielomian w bazie Legendre'a: $L_{10}(x) + L_{11}(x)$
gdzie:

$$L_{10}(x) = \frac{1}{256}(46189x^{10} - 109395x^8 + 90090x^6 - 30030x^4 + 3465x^2 - 63)$$

$$L_{11}(x) = \frac{1}{256}(88179x^{11} - 230945x^9 + 218790x^7 - 90090x^5 + 15015x^3 - 693x)$$

Granice przedziału całkowania: $a = -5$, $b = 10$

Wielomian w bazie naturalnej:

$$\frac{1}{256}(88179x^{11} + 46189x^{10} - 230945x^9 - 109395x^8 + 218790x^7$$

$$+90090x^6 - 90090x^5 - 30030x^4 + 15015x^3 + 3465x^2 - 693x - 63)$$

Z racji na wysoki stopień wielomianu, policzymy jego wartość używając strony wolframalpha.com:

$$\int_{-5}^{10} L_{10}(x) + L_{11}(x) \approx 2.94004 \cdot 10^{13}$$

Wynik programu dla N = 1:

$simpsonIntegral(-5, 10, 1, [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1]) = 8.824921011695194e{+}13$

$$8.824921011695194e + 13 \approx 8.82492e + 13$$

Bezwzględny błąd funkcji:

$$(2.94004 - 8.82492) \cdot 10^{13} = (-5.88488) \cdot 10^{13}$$

Względny błąd funkcji:

$$|\frac{-5.88488 \cdot 10^{13}}{2.94004 \cdot 10^{13}}| \approx 2$$

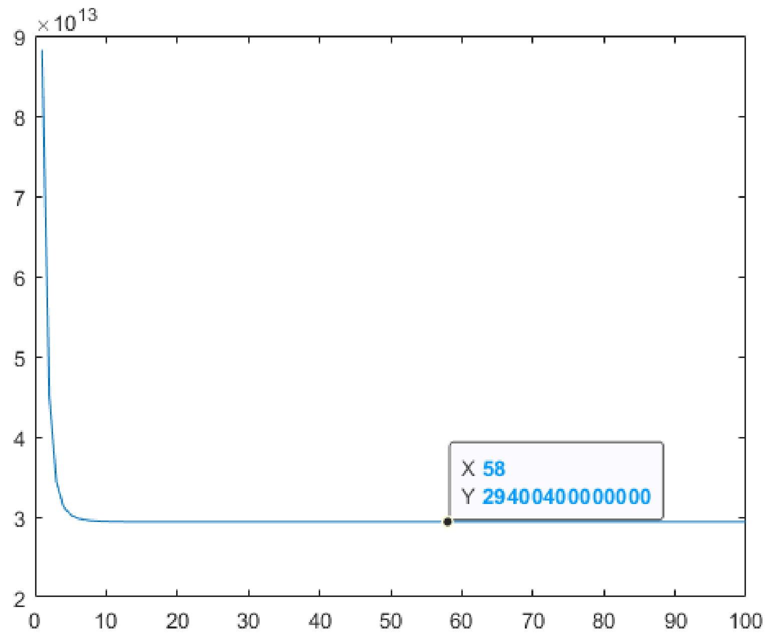
Jak widać rząd wielkości się zgadza, ale dalej jesteśmy dość daleko. Spróbujmy wywołać funkcję dla większych N:

$simpsonIntegral(-5, 10, 10, [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1]) = 2.945936997173750e{+}13$

$simpsonIntegral(-5, 10, 100, [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1]) = 2.940040201227489e{+}13$

Dzieląc przedział (a, b) już na 100 podprzedziałów otrzymujemy lepszą dokładność niż podaje wolfram alpha.

Zobrazujmy zmianę wyniku funkcji w zależności od N:



Już dla $N = 58$ otrzymujemy wynik, podawany przez stronę wolframalpha.com. Dalsze obliczenia nie mają sensu, gdyż musielibyśmy znać dokładniejszą wartość całki, która ręcznie jest trudna do obliczenia.

Jeśli chodzi o analizę błędu, to jest ona dużo bardziej skomplikowana niż w poprzednich przypadkach, zatem w obliczeniach będziemy używać wolframa. Wzór na teoretyczny błąd:

$$E(w_n) = -\frac{1}{180 \cdot 2^4} H^4 (b-a) w_n^{(4)}(\mu)$$

Zajmijmy się maksymalną wartością wartości bezwzględnej z pochodnej na przedziale $(-5, 10)$:

$$w_n^{(4)}(\mu) = \frac{45045}{16}(-1 - 15x + 45x^2 + 255x^3 - 255x^4 - 969x^5 + 323x^6 + 969x^7)$$

$$w_n^{(4)}(\mu) = \frac{45045}{16}(-1 - 15x + 45x^2 + 255x^3 - 255x^4 - 969x^5 + 323x^6 + 969x^7)$$

Wolfram wyliczył, że maksymalna wartość powyższej pochodnej na przedziale $(-5, 10)$ znajduje się w punkcie $\mu \to 10$ i wynosi:

$$\frac{446567542125705}{16}$$

Zatem błąd:

$$E < |\frac{15}{180 \cdot 2^4} H^4 \cdot \frac{446567542125705}{16}|$$

$$E < |\frac{15^5}{180 \cdot 2^4 \cdot N^4} \cdot \frac{446567542125705}{16}|$$

$$E < |\frac{7535827273371271875}{1024 * N^4}| < \frac{8 \cdot 10^{15}}{N^4}$$

Dla $N = 1$, takie ograniczenie błędu nam nic nie daje, ponieważ wynik jest rzędu 10^{13}. Natomiast dla N = 10^4 powinniśmy otrzymać wynik dobry do co jedności. Zatem wynik:

$$simpsonIntegral(-5, 10, 10000, [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1]) = 29400395894567.12$$

powinien być dobry co do jedności. Nie mamy jednak pewności, gdyż w grę mogą wchodzić błędy maszynowe, a nie samej metody (liczby są bardzo duże).

5 Podsumowanie wyników

Jak widzimy na powyższych przykładach numeryczne obliczanie całki złożoną kwadraturą Simpsona, w której funkcją podcałkową są wielomiany w postaci Legendre'a może być całkiem dokładną metodą. Oczywiście im bardziej skomplikowana funkcja i im dłuższe przedziały, tym musimy dzielić przedział całkowania na więcej części, niemniej jednak metoda wydaje się być stabilna. Nie doświadczyliśmy żadnych niespodziewanych wyników.