

# Vizing 定理的基础证明 & Shannon 定理

wibyuan

## 目录

1	前言	2
2	Vizing 定理及其扩展证明	2
2.1	证明思路	2
2.2	归纳设定	2
2.3	构造双色路	3
2.4	构造 Vizing 扇	3
2.5	旋转 Vizing 扇	4
2.6	用双色路导出矛盾	5
2.7	多重图上的拓展表述	7
2.8	扩展表述的证明思路	7
3	Shannon 定理及其证明	8
3.1	证明思路	8

# 1 前言

在[图论基础概念略解](#)中我们没证明这个定理，因为怕太长打断了。

不过现在我们可以证明了。

我查了，大部分中文笔记会略过这个定理的证明，可能是因为太基础了，不过这正好给了我水一篇文章的理由。早知道就把 Brooks 定理的证明单开一篇文章。

## 2 Vizing 定理及其扩展证明

**定理 1** (Vizing 定理). 对于任何一个简单图  $G$ ，如果它的最大度数为  $\Delta(G)$ ，那么它的边染色数  $\chi'(G)$  要么是  $\Delta(G)$ ，要么是  $\Delta(G) + 1$ 。

### 2.1 证明思路

首先，对于任意一个图  $G$ ，由于它的度数最大的点延伸出的  $\Delta(G)$  条边必须染成不同的颜色，所以我们必有  $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ 。

好那么我们尝试构造性地给出一个  $G$  的  $\Delta(G) + 1$  边染色方案。

### 2.2 归纳设定

归纳边界是，0 条边的图  $G$ ，色数  $\chi'(G) = 0 = \Delta(G)$

假设对于任意  $m - 1$  条边的图  $G'$ ，不妨设它存在用不超过  $\Delta(G')$  种颜色进行边染色的方案。

现在，对于  $m$  条边的图  $G$ ，去掉任何一条边  $e = \{x, y\}$ ，设  $G' = G - e$ ，显然去掉一条边之后，边色数不会更大，所以，由归纳假设必然有  $\chi'(G') \leq \Delta(G) + 1$ ，任意选取一个对  $G'$  的色数不超过  $\Delta(G) + 1$  边染色方案。

那么，就有这么一个事实， $x, y$  至多有  $\Delta(G) - 1$  条边已经被染色，这意味着从  $x$  或  $y$  出发，都不可能集齐  $\Delta(G) + 1$  种颜色，此时，我们只需要从  $x$  的邻边中取出任意一种没有被使用的颜色  $\alpha$ ，并从  $y$  的邻边中取出任意一种没有被使用的颜色  $\beta$ 。

如果存在一种取法使得  $\alpha = \beta$ ，即存在一种颜色，使得  $x, y$  都不与这种颜色的边相邻，我们只需要将  $e$  染成这种颜色即可。

否则有  $\alpha \neq \beta$  即  $x$  和  $y$  相邻的边取遍所有  $\Delta(G) + 1$  种颜色。

## 2.3 构造双色路

好的接下来我们考虑从  $x$  出发，考虑仅仅通过颜色为  $\alpha$  和  $\beta$  的边，以及通过这些便能到达的点，形成的一个连通子图  $P$ ，显然这个连通子图，由于它的度数不超过 2，所以  $P$  要么是一条路，要么是一个环。

如果这个连通子图不包含  $y$ ，这就意味着，我们可以把在  $G_1$  内的边染色进行交换，那么  $G'$  的边染色仍然合法，且现在  $x$  也缺失颜色  $\beta$  了，把  $e$  染成颜色  $\beta$  即可。

否则， $P$  必定是一条路，起点为  $x$  终点为  $y$ ，满足它上面的颜色只有  $\alpha$  或  $\beta$  交替。

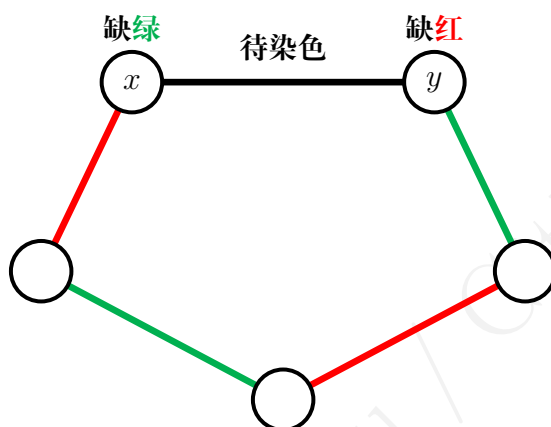


图 1: 如图，途中， $x$  发出的红绿边形成了一条到  $y$  的路径（它必定有偶数条边），此时，不能只对一边反色来达到染色的目的

## 2.4 构造 Vizing 扇

思想是这样的，既然  $e = \{x, y\}$  暂时染不进去，我们去看看  $x$  的其它邻居，看看能不能从那里借颜色。

从  $x$  的邻边中取出任意一种没有被使用的颜色  $\alpha$ ，并从  $y$  的邻边中取出任意一种没有被使用的颜色  $\beta$ 。

不妨设  $y_0 = y$ ，其中  $e = \{x, y_0\}$  这条边还没有染色，那么我们由一开始的定理，我们知道  $x$  旁边一定连着一颜色为  $\beta$  的边，那么假设这条边的另一个端点为  $y_1$ 。

好的现在我们强行把  $e_1 = \{x, y_1\}$  的颜色剥夺，然后把  $e = \{x, y\}$  染成颜色  $\beta$ ，这显然不会破坏（除了被剥夺的边）图的边染色的合法性的。

这个换位逻辑非常有趣，不过它会影响图的边着色，为了方便，我们一个静态的图染色上定义 Vizing 扇，对于一个仅有  $e = \{x, y\}$  未染色，其它边已经完成色数不超过  $\Delta(G) + 1$  的边染色的图  $G$ ，定义 Vizing 扇为  $x$  的邻居序列  $y_0, y_1, \dots, y_k$ ，满足：

1.  $y_0 = y$
2. 假设 Vizing 扇已经构建到了  $y_0, y_1, \dots, y_i$ ，取  $y_i$  的邻边中，没有出现的一个颜色为  $\beta_i$ （这总是可以取到，因为色数有  $\Delta(G) + 1$  种，而  $y_i$  已染色的邻边不超过  $\Delta(G)$  条），如果

$x$  中不存在颜色为  $\beta_i$  的邻边，则称 Vizing 扇的构建因颜色不够而终止；

3. 否则  $x$  中存在一条颜色为  $\beta_i$  的邻边，如果它的另一个端点已经在  $y_1, y_2, \dots, y_{i-1}$  中出现过（显然不可能是  $y_0$  因为它还没染色），则称 Vizing 扇的构建因为出现了重复的顶点而终止；
4. 否则，设这条邻边的另一个端点为  $y_{i+1}$ ，并继续构建 Vizing 扇。

这里 Vizing 扇的构建显式地利用了简单图的性质，而由于  $x$  的度数有限，Vizing 扇的构建也会在有限步以内停止，且原因必然是因为颜色不够或因为出现了重复顶点。

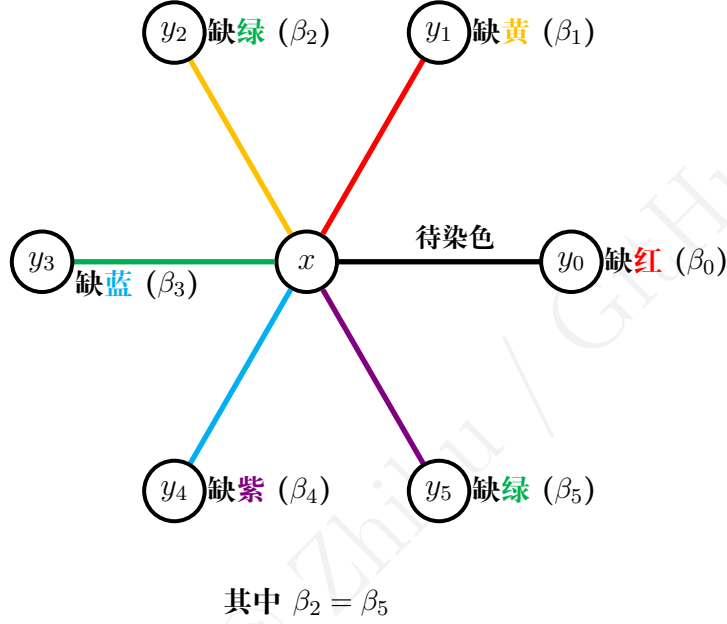


图 2: 如图，以下是因为出现重复顶点而停止的关于  $x$  的 Vizing 扇的典型例子，其中可以看到，由于  $y_0$  缺红，找到了连着红边的  $y_1$ ，然后由于  $y_1$  缺黄，找到了连着黄边的  $y_2$ ，以此类推……最后可以看到，由于  $\beta_2$  和  $\beta_5$  都是绿色，Vizing 扇的构建因为顶点即将重复而停止

## 2.5 旋转 Vizing 扇

更新图的边染色，对于所有 Vizing 扇上的点  $y_0, y_1, \dots, y_k$ 。

我们定义关于全图  $G$  的部分边染色方案  $C_0, C_1, \dots, C_k$ 。

其中  $C_0$  就是我们一开始由归纳得出的那个只有  $\{x, y\}$  没有参与染色的边染色方案。

对于  $1 \leq i \leq k$ ， $C_i$  是在  $C_{i-1}$  的基础上，通过将  $\{x, y_{i-1}\}$  在  $C_i$  中的颜色改成  $\{x, y_i\}$  在  $C_i$  中的颜色，并剥夺  $\{x, y_i\}$  在  $C_i$  中的染色。

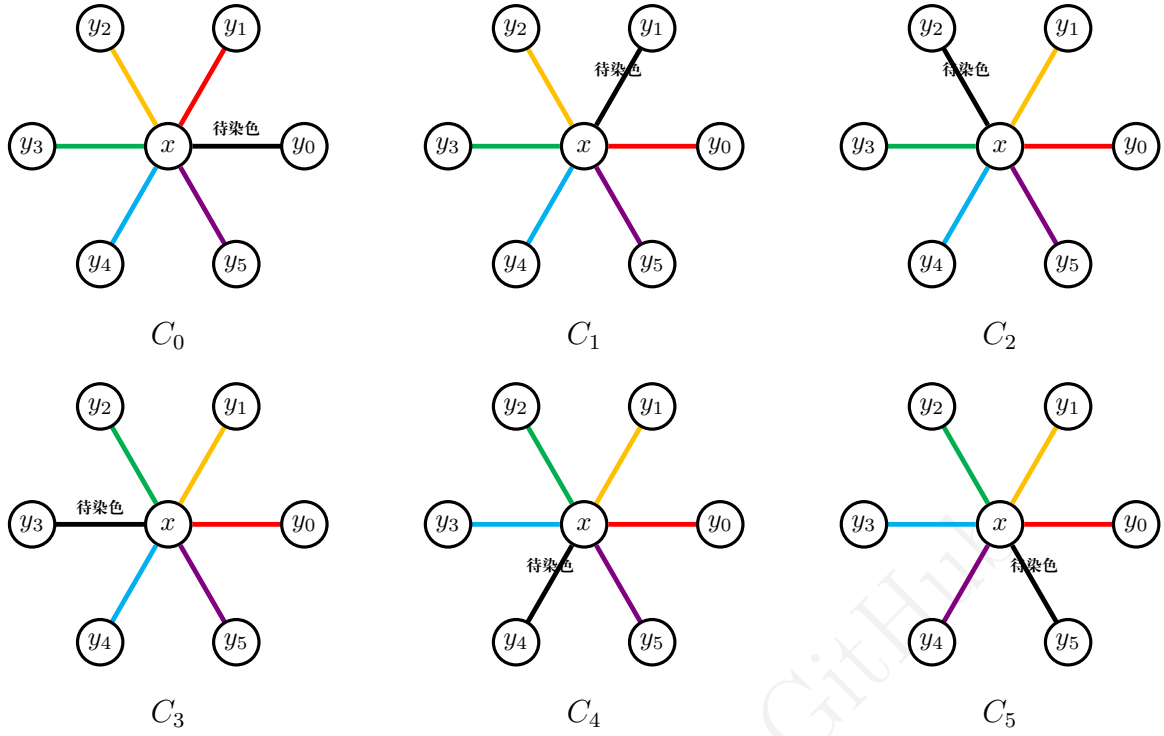


图 3: Vizing 扇的旋转过程  $C_0 \rightarrow C_5$ 。每一轮旋转中, 当前的待染色边  $(x, y_i)$  与顺时针方向的下一条边交换颜色状态, 从而将“缺色空位”沿扇形传递。

可以看到, 对于任意  $C_i$ , 它目前的染色数不超过  $\Delta(G)+1$ , 且有且仅有  $\{x, y_i\}$  未被染色。

如果 Vizing 扇是由于颜色不够而停止的, 则取出  $C_k$  方案, 此时我们发现  $x, y_k$  的邻边都缺失颜色  $\beta_k$ , 将  $\{x, y_k\}$  染色成  $\beta_k$  即可。

否则 Vizing 扇是因为出现了重复顶点而停止的。

## 2.6 用双色路导出矛盾

那么不妨设染色方案  $C_0$  中颜色为  $\beta_k$  的边的另一个端点为  $y_i$  是那个出现在 Vizing 扇中的点, 那么必有  $1 \leq i < k$ , 且  $\beta_{i-1} = \beta_k$ 。

仍然设  $x$  的邻边中未出现的颜色为  $\alpha$ , 由于度数, 这样的颜色总是存在。

我们考虑染色方案  $C_k$ , 此时  $x$  邻边仍然缺失颜色  $\alpha$  且  $y_k$  邻边仍然缺失颜色  $\beta_k$ , 如果它们颜色相同, 直接将  $\{x, y_k\}$  染色成  $\alpha$  即可, 如果在该染色方案中  $x$  到  $y_k$  不存在  $\alpha\beta_k$  双色交替路, 那么直接反色即可进行边染色。

否则, 该染色方案中  $x$  到  $y_k$  存在  $\alpha\beta_k$  双色交替路, 那么连接  $x$  的必然是一条颜色为  $\beta_k$  的边, 在  $C_k$  中, 这条边的另一端点就是  $y_{i-1}$ 。

也就是在  $C_k$  中,  $y_k$  到  $y_{i-1}$  存在一条双色路  $P$ , 它不经过  $x$ , 其上的第一条边和最后一条边颜色都为  $\alpha$ 。

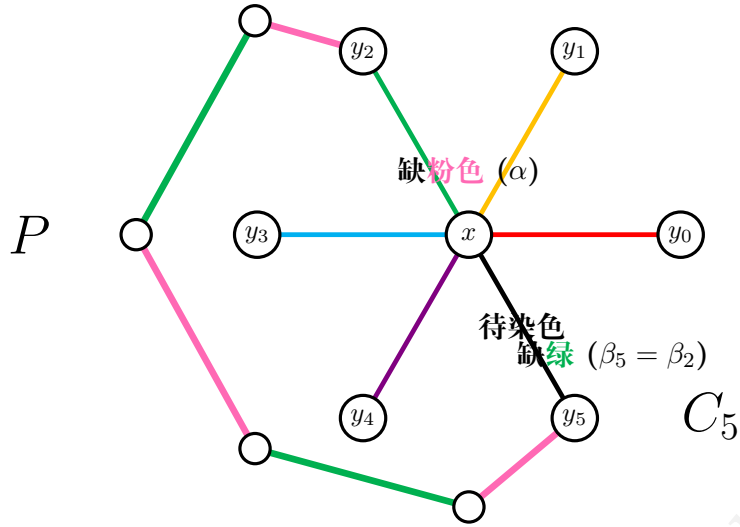


图 4: 如图是  $k = 5$  时候  $C_5$  的一个例子 (此时  $i = 3$ )，考虑  $x$  缺少粉色 ( $\alpha$ )，此时，如果  $y_5$  到  $x$  不存在粉色和  $\beta_5$  (绿色) 交替的路径，那么只需通过反色即可进行边染色，因此必定存在这样的路，而且必定通过  $y_2$ ，也就是说，存在  $y_5$  到  $y_2$  的粉绿交替的路  $P$ 。

再考虑染色方案  $C_{i-1}$  的情况，显然，由于不同的染色方案只会动 Vizing 扇上的边，考虑从  $y_{i-1}$  出发，考虑仅仅通过颜色为  $\alpha$  和  $\beta_k$  的边，以及通过这些边能到达的点，形成的一个连通子图，由于  $P$  的存在，子图从  $y_{i-1}$  可以延伸到  $y_k$  (由边染色的性质，从中间节点无法延伸其它路径)，而且，由于  $y_k$  不存在颜色为  $\beta_k$  的邻边，所以在  $P$  的端点处，无法继续延伸。

因此，所求子图就是  $P$ ，它与  $x$  不连通，我们把  $P$  进行  $\alpha\beta_k$  反色，将  $\{x, y_{i-1}\}$  填色  $\alpha$  即可得到合法的染色方案。

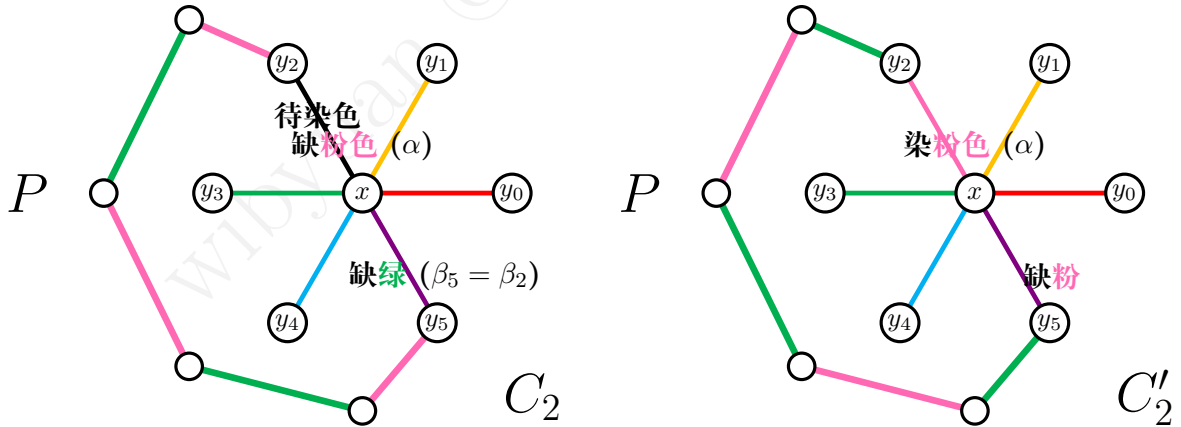


图 5: 如图，那么如果  $P$  存在，在  $C_2$  的时候，我们就可以利用这条  $P$ ，证明从  $y_2$  出发的粉绿交替路径不会到达  $x$ ，因此可以把路径反色，然后得到合法的染色方案。

由于只要归纳假设成立，我们总能构造染色方案使得边色数不超过  $\Delta(G) + 1$ ，因此，我们就证明了对于任意简单图  $G$ ，它的边染色数不超过  $\Delta(G) + 1$ 。

因此对于简单图  $G$ ，我们有  $\chi'(G) \in \{\Delta(G), \Delta(G) + 1\}$

## 2.7 多重图上的拓展表述

对于无向多重图（即无自环，但有重边） $G$ ， $\chi'(G) \geq \Delta(G)$  仍然适用，但  $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$  不再成立。

对于无向多重图，我们有如下的扩展表述，设  $G$  中边的最大重数为  $\mu(G)$ ，则总有  $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$ 。

## 2.8 扩展表述的证明思路

简单图上的 Vizing 定理的证明之所以在多重图上不再成立，一个核心原因就是 Vizing 扇的构建会出问题，具体而言，当我们归纳的时候，如果对  $x$  再次构建  $e_0, e_1, \dots, e_k$  的 Vizing 扇（由于出现重边，这次我们以边来编号），当 Vizing 扇的构建因为出现重复颜色而停止的时候，我们同样进行旋转，比对  $C_k$  和  $C_{i-1}$  的状态。

此时，在逻辑顺下来的时候，其它一切正常，除了一个地方，那就是，如果  $e_k$  是第一个选取缺失颜色重复的点，并且发现缺失颜色恰好是  $e_i$  的颜色（这意味着  $e_k$  和  $e_{i-1}$  选取的缺失颜色重复了），那么如果  $e_k$  和  $e_{i-1}$  是相同两个顶点的多重边，即  $y_{i-1} = y_k$ ，那么  $y_k = y_{i-1}$ ，原本的证明就会出问题。

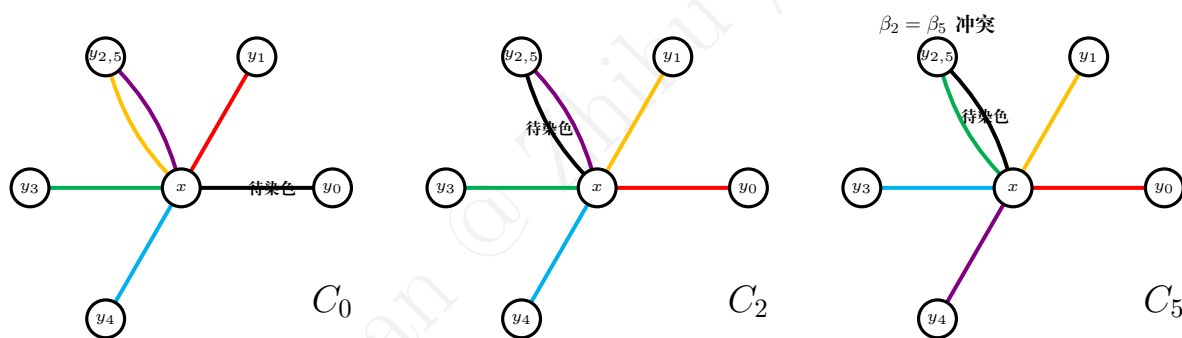


图 6: 重边情形下 Vizing 扇的演化：从  $C_0$  开始，待染色边沿顺时针方向传递。当旋转至  $C_5$  时，由于  $y_2$  与  $y_5$  物理重合，导致缺失颜色  $\beta_2 = \beta_5$ ，构建 Vizing 扇的互异性前提消失，双色路归谬逻辑失效。

简单来讲，原本的证明隐含了这样一个意思： $y_{i-1}$  和  $y_k$  之间能否构建出双色路，分别对应了  $C_{i-1}, C_k$  两种染色方案可否通过简单的变换得到完整染色方案，而当  $y_{i-1} = y_k$  可能发生时，这个逻辑自然走不通了。

当然，我们也发现了诀窍，那就是只要我们总是选取颜色，使得构建边  $e_i$  时，选取的“缺失颜色”与其所有可能的重边都不相同，那么我们总是可以完成 Vizing 扇的构建，并使得这个双色链的证明逻辑有效，那么我们并不关心其它地方有多少重边，我们只希望，如果  $e_k$  是第一个选取缺失颜色重复的点，并且发现缺失颜色恰好是  $e_i$  的颜色，那么  $e_k$  和  $e_{i-1}$  不要是重边。

简而言之，就是在构建 Vizing 扇的时候，新加入一条重边，选取的缺失颜色不要与旧的重边相同。

那么，当我们调高归纳边界，尝试归纳证明  $\chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$  的时候，对于每个点，我们总是有  $\mu(G)$  种颜色选择（即除去至多  $\Delta(G)$  条染色边外的缺失颜色选择），刚好可以让  $x$  在构建 Vizing 扇的时候，新加入一条重边，选取的缺失颜色不会与旧的重边相同。

依照这个思路，即可证明 Vizing 定理在多重图上的扩展。

### 3 Shannon 定理及其证明

**定理 2** (Shannon 定理). 设  $G$  为一个无自环的无向多重图，其最大度数为  $\Delta(G)$ 。则该图的边色数  $\chi'(G)$  始终满足以下不等式：

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \left\lceil \frac{3}{2}\Delta(G) \right\rceil$$

#### 3.1 证明思路

显然  $\chi'(G) \geq \Delta(G)$  仍然成立，之前已经证明了，是因为一个点连接的所有边都要染成不同的颜色。

$\chi'(G) \leq \lfloor 1.5\Delta(G) \rfloor$  我们同样采取归纳证明的策略。

它的证明其实是拿两种边染色策略凑出来的。

归纳边界是对于 0 条边的图， $\chi'(G) = \Delta(G) = 0$ ，刚好满足条件。

归纳假设对于不超过  $m - 1$  条边的图，不等式成立。

好那么对于  $m$  条边的图  $G$ ，我们采取的策略是，任意选取一个有边的点对  $(u, v)$ ，然后将它的多重边（设重数为  $\mu(u, v)$ ）删掉一条边，考虑得到的子图，那么该子图由归纳假设是可以在  $\lfloor 1.5\Delta(G) \rfloor$  条边内染色的。

好现在我们考虑我们的染色策略：

1. 沿用我们的 Vizing 定理的思路，加入这条边，旋转 Vizing 扇，给出足够的宽裕让我们导出双色链，那么这个策略，我们仍然是给出  $\Delta(G) + \mu(u, v)$  的边色数宽裕就够了，总的来说，我们可以在色数不超过  $\max(\lfloor 1.5\Delta(G) \rfloor, \Delta(G) + \mu(u, v))$  的前提下进行染色。
2. 直接计数，注意到如果我们直接对加入的这条边染色，使得  $u, v$  两边延伸出的至多  $d(u) + d(v) - \mu(u, v)$  条边（容斥原理，减去  $(u, v)$  内部边一次）（设  $d(u)$  为  $u$  的度数）都染成不同的颜色，其它不变，那么总的来说，我们可以在色数不超过  $\max(\lfloor 1.5\Delta(G) \rfloor, 2\Delta(G) - \mu(u, v))$  的前提下进行染色（即  $d(u), d(v) \leq \Delta(G)$ ）。

好的，如果我们在  $\mu(u, v) \leq 0.5\Delta(G)$  时采取第一种策略，而在  $\mu(u, v) > 0.5\Delta(G)$  时采取第二种策略，由于染色的数目是整数，我们总是能够在  $\lfloor 1.5\Delta(G) \rfloor$  种颜色内对  $G$  进行边染色。

那么也就归纳证明了 Shannon 定理。