Vizing 定理的基础证明 & Shannon 定理

wibyuan

目录

wibyuan @ Zhihu / GitHub

1　前言

在图论基础概念略解中我们没证明这个定理，因为怕太长打断了。

不过现在我们可以证明了。

我查了，大部分中文笔记会略过这个定理的证明，可能是因为太基础了，不过这正好给了我水一篇文章的理由。早知道就把 Brooks 定理的证明单开一篇文章。

2　Vizing 定理及其扩展证明

定理 1 (Vizing 定理)**.** *对于任何一个简单图 G ，如果它的最大度数为 $\Delta(G)$ ，那么它的边染色数 $\chi'(G)$ 要么是 $\Delta(G)$ ，要么是 $\Delta(G)+1$ 。*

2.1　证明思路

首先，对于任意一个图 G ，由于它的度数最大的点延伸出的 $\Delta(G)$ 条边必须染成不同的颜色，所以我们必有 $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ 。

好那么我们尝试构造性地给出一个 G 的 $\Delta(G)+1$ 边染色方案。

2.2　归纳设定

归纳边界是，0 条边的图 G，色数 $\chi'(G) = 0 = \Delta(G)$

假设对于任意 $m-1$ 条边的图 G' ，不妨设它存在用不超过 $\Delta(G')$ 种颜色进行边染色的方案。

现在，对于 m 条边的图 G ，去掉任何一条边 $e = \{x,y\}$ ，设 $G' = G - e$ ，显然去掉一条边之后，边色数不会更大，所以，由归纳假设必然有 $\chi'(G') \leq \Delta(G)+1$ ，任意选取一个对 G' 的色数不超过 $\Delta(G)+1$ 边染色方案。

那么，就有这么一个事实，x,y 至多有 $\Delta(G)-1$ 条边已经被染色，这意味着从 x 或 y 出发，都不可能集齐 $\Delta(G)+1$ 种颜色，此时，我们只需要从 x 的邻边中取出任意一种没有被使用的颜色 α ，并从 y 的邻边中取出任意一种没有被使用的颜色 β 。

如果存在一种取法使得 $\alpha = \beta$ ，即存在一种颜色，使得 x,y 都不与这种颜色的边相邻，我们只需要将 e 染成这种颜色即可。

否则有 $\alpha \neq \beta$ 即 x 和 y 相邻的边取遍所有 $\Delta(G)+1$ 种颜色。

wibyuan © Zhihu / GitHub

2.3 构造双色路

好的接下来我们考虑从 x 出发，考虑仅仅通过颜色为 α 和 β 的边，以及通过这些便能到达的点，形成的一个连通子图 P ，显然这个连通子图，由于它的度数不超过 2，所以 P 要么是一条路，要么是一个环。

如果这个连通子图不包含 y ，这就意味着，我们可以把在 G_1 内的边染色进行交换，那么 G' 的边染色仍然合法，且现在 x 也缺失颜色 β 了，把 e 染成颜色 β 即可。

否则，P 必定是一条路，起点为 x 终点为 y ，满足它上面的颜色只有 α 或 β 交替。

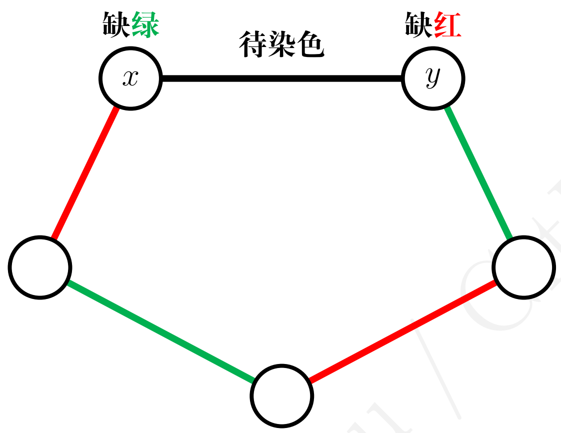

图 1: 如图，途中，x 发出的红绿边形成了一条到 y 的路径（它必定有偶数条边），此时，不能只对一边反色来达到染色的目的

2.4 构造 Vizing 扇

思想是这样的，既然 $e = \{x, y\}$ 暂时染不进去，我们去看看 x 的其它邻居，看看能不能从那里借颜色。

从 x 的邻边中取出任意一种没有被使用的颜色 α ，并从 y 的邻边中取出任意一种没有被使用的颜色 β 。

不妨设 $y_0 = y$ ，其中 $e = \{x, y_0\}$ 这条边还没有染色，那么我们由一开始的定理，我们知道 x 旁边一定连着一条颜色为 β 的边，那么假设这条边的另一个端点为 y_1 。

好的现在我们强行把 $e_1 = \{x, y_1\}$ 的颜色剥夺，然后把 $e = \{x, y\}$ 染成颜色 β ，这显然不会破坏（除了被剥夺的边）图的边染色的合法性的。

这个换位逻辑非常有趣，不过它会影响图的边着色，为了方便，我们在一个静态的图染色上定义 Vizing 扇，对于一个仅有 $e = \{x, y\}$ 未染色，其它边已经完成色数不超过 $\Delta(G) + 1$ 的边染色的图 G ，定义 Vizing 扇为 x 的邻居序列 $y_0, y_1, \cdots, y_k$ ，满足：

1. $y_0 = y$
2. 假设 Vizing 扇已经构建到了 $y_0, y_1, \cdots, y_i$ ，取 y_i 的邻边中，没有出现的一个颜色为 β_i（这总是可以取到，因为色数有 $\Delta(G) + 1$ 种，而 y_i 已染色的邻边不超过 $\Delta(G)$ 条），如果

x 中不存在颜色为 β_i 的邻边，则称 Vizing 扇的构建因颜色不够而终止；

3. 否则 x 中存在一条颜色为 β_i 的邻边，如果它的另一个端点已经在 $y_1, y_2, \cdots, y_{i-1}$ 中出现过（显然不可能是 y_0 因为它还没染色），则称 Vizing 扇的构建因为出现了重复的顶点而终止；

4. 否则，设这条邻边的另一个端点为 y_{i+1} ，并继续构建 Vizing 扇。

这里 Vizing 扇的构建显式地利用了简单图的性质，而由于 x 的度数有限，Vizing 扇的构建也会在有限步以内停止，且原因必然是因为颜色不够或因为出现了重复顶点。

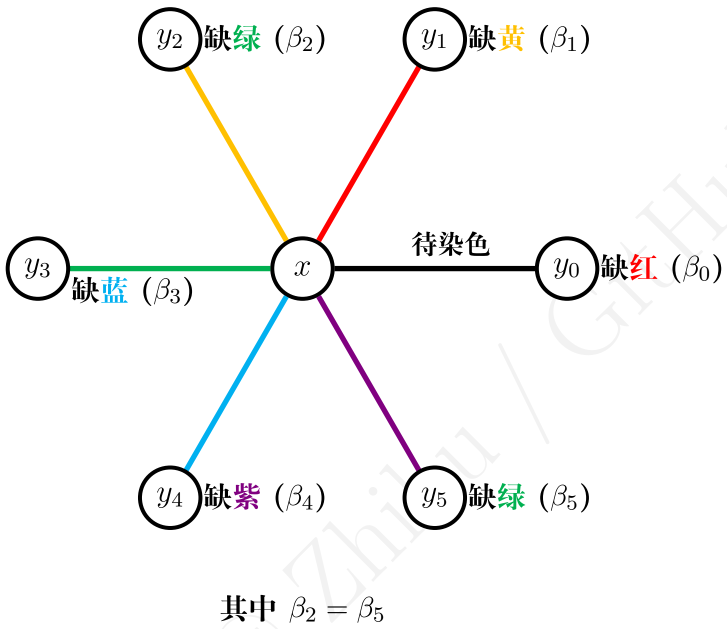

图 2: 如图，以下是因为出现重复顶点而停止的关于 x 的 Vizing 扇的典型例子，其中可以看到，由于 y_0 缺红，找到了连着红边的 y_1，然后由于 y_1 缺黄，找到了连着黄边的 y_2，以此类推……最后可以看到，由于 β_2 和 β_5 都是绿色，Vizing 扇的构建因为顶点即将重复而停止

2.5 旋转 Vizing 扇

更新图的边染色，对于所有 Vizing 扇上的点 $y_0, y_1, \cdots, y_k$ 。

我们定义关于全图的 G 的部分边染色方案 $C_0, C_1, \cdots, C_k$ 。

其中 C_0 就是我们一开始由归纳得出的那个只有 $\{x, y\}$ 没有参与染色的边染色方案。

对于 $1 \le i \le k$ ，C_i 是在 C_{i-1} 的基础上，通过将 $\{x, y_{i-1}\}$ 在 C_i 中的颜色改成 $\{x, y_i\}$ 在 C_i 中的颜色，并剥夺 $\{x, y_i\}$ 在 C_i 中的染色。

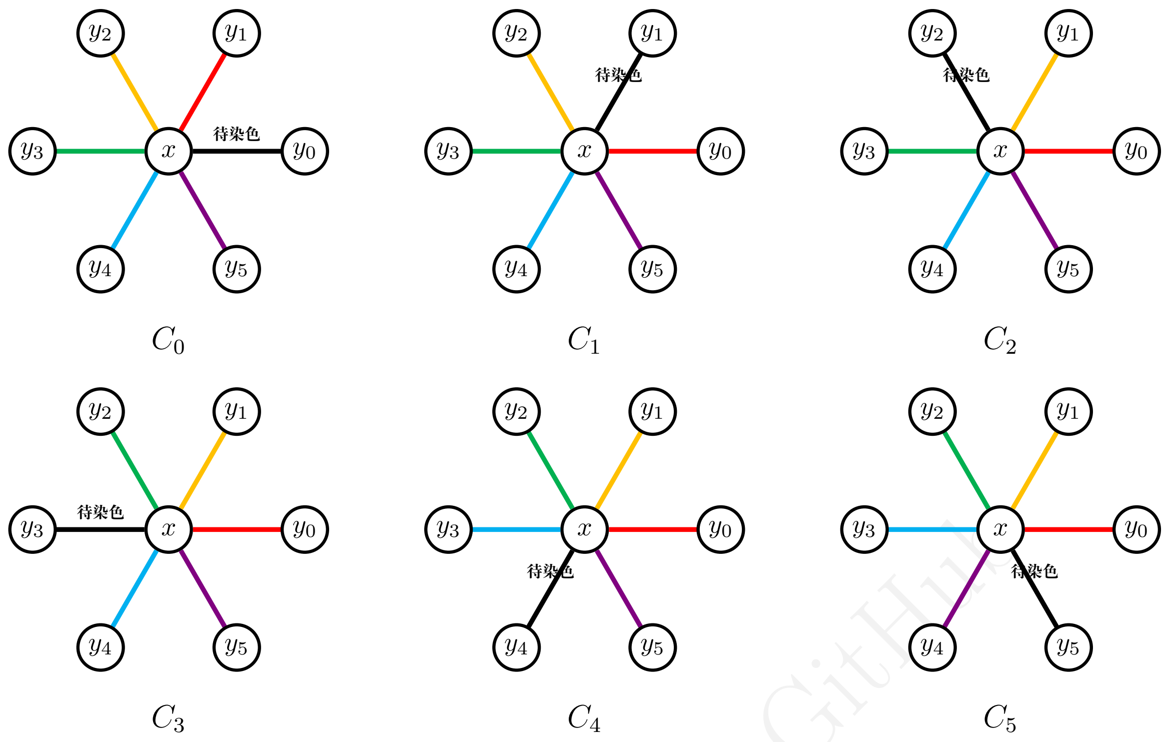

图 3: Vizing 扇的旋转过程 $C_0 \to C_5$。每一轮旋转中，当前的待染色边 (x, y_i) 与顺时针方向的下一条边交换颜色状态，从而将“缺色空位”沿扇形传递。

wibyuan @ Zhihu / GitHub

可以看到，对于任意 C_i ，它目前的染色数不超过 $\Delta(G)+1$ ，且有且仅有 $\{x, y_i\}$ 未被染色。

如果 Vizing 扇是由于颜色不够而停止的，则取出 C_k 方案，此时我们发现 x, y_k 的邻边都缺失颜色 β_k ，将 $\{x, y_k\}$ 染色成 β_k 即可。

否则 Vizing 扇是因为出现了重复顶点而停止的。

2.6 用双色路导出矛盾

那么不妨设染色方案 C_0 中颜色为 β_k 的边的另一个端点为 y_i 是那个出现在 Vizing 扇中的点，那么必有 $1 \le i < k$ ，且 $\beta_{i-1} = \beta_k$ 。

仍然设 x 的邻边中未出现的颜色为 α ，由于度数，这样的颜色总是存在。

我们考虑染色方案 C_k ，此时 x 邻边仍然缺失颜色 α 且 y_k 邻边仍然缺失颜色 β_k ，如果它们颜色相同，直接将 $\{x, y_k\}$ 染色成 α 即可，如果在该染色方案中 x 到 y_k 不存在 $\alpha\beta_k$ 双色交替路，那么直接反色即可进行边染色。

否则，该染色方案中 x 到 y_k 存在 $\alpha\beta_k$ 双色交替路，那么连接 x 的必然是一条颜色为 β_k 的边，在 C_k 中，这条边的另一端点就是 y_{i-1} 。

也就是在 C_k 中，y_k 到 y_{i-1} 存在一条双色路 P ，它不经过 x ，其上的第一条边和最后一条边颜色都为 α 。

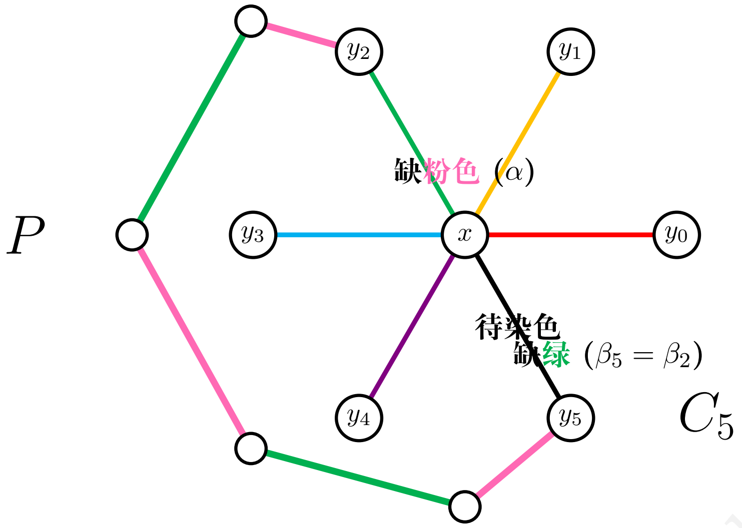

图 4: 如图是 $k = 5$ 时候 C_5 的一个例子（此时 $i = 3$），考虑 x 缺少粉色（α），此时，如果 y_5 到 x 不存在粉色和 β_5（绿色）交替的路径，那么只需通过反色即可进行边染色，因此必定存在这样的路，而且必定通过 y_2，也就是说，存在 y_5 到 y_2 的粉绿交替的路 P。

再考虑染色方案 C_{i-1} 的情况，显然，由于不同的染色方案只会动 Vizing 扇上的边，考虑从 y_{i-1} 出发，考虑仅仅通过颜色为 α 和 β_k 的边，以及通过这些边能到达的点，形成的一个连通子图，由于 P 的存在，子图从 y_{i-1} 可以延伸到 y_k（由边染色的性质，从中间节点无法延伸其它路径），而且，由于 y_k 不存在颜色为 β_k 的邻边，所以在 P 的端点处，无法继续延伸。

因此，所求子图就是 P ，它与 x 不连通，我们把 P 进行 $\alpha\beta_k$ 反色，将 $\{x, y_{i-1}\}$ 填色 α 即可得到合法的染色方案。

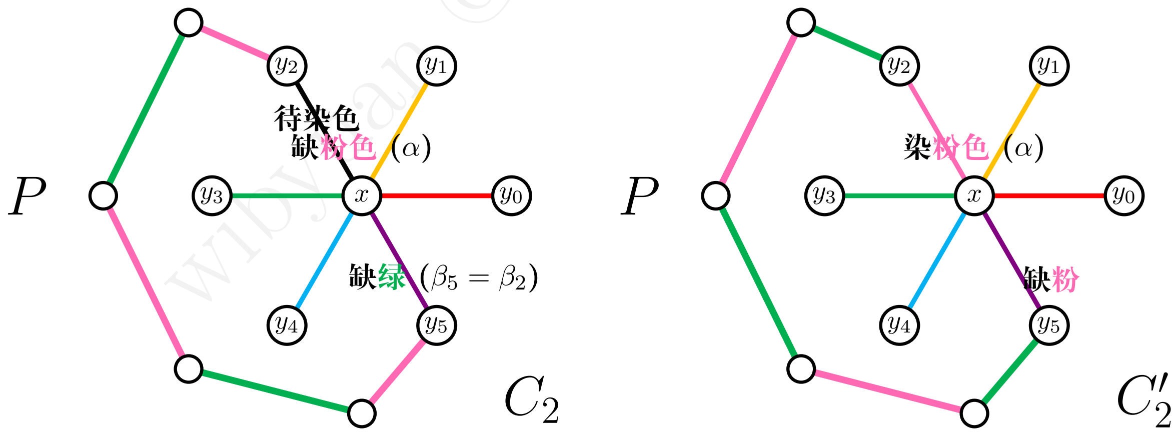

图 5: 如图，那么如果 P 存在，在 C_2 的时候，我们就可以利用这条 P，证明从 y_2 出发的粉绿交替路径不会到达 x，因此可以把路径反色，然后得到合法的染色方案。

由于只要归纳假设成立，我们总能构造染色方案使得边色数不超过 $\Delta(G) + 1$ ，因此，我们就证明了对于任意简单图 G ，它的边染色数不超过 $\Delta(G) + 1$ 。

因此对于简单图 G ，我们有 $\chi'(G) \in \{\Delta(G), \Delta(G) + 1\}$

2.7 多重图上的拓展表述

对于无向多重图（即无自环，但有重边）G ，$\chi'(G) \geq \Delta(G)$ 仍然适用，但 $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ 不再成立。

对于无向多重图，我们有如下的扩展表述，设 G 中边的最大重数为 $\mu(G)$ ，则总有 $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$ 。

2.8 扩展表述的证明思路

简单图上的 Vizing 定理的证明之所以在多重图上不再成立，一个核心原因就是 Vizing 扇的构建会出问题，具体而言，当我们归纳的时候，如果对 x 再次构建 $e_0, e_1, \cdots, e_k$ 的 Vizing 扇（由于出现重边，这次我们以边来编号），当 Vizing 扇的构建因为出现重复颜色而停止的时候，我们同样进行旋转，比对 C_k 和 C_{i-1} 的状态。

此时，在逻辑顺下来的时候，其它一切正常，除了一个地方，那就是，如果 e_k 是第一个选取缺失颜色重复的点，并且发现缺失颜色恰好是 e_i 的颜色（这意味着 e_k 和 e_{i-1} 选取的缺失颜色重复了），那么如果 e_k 和 e_{i-1} 是相同两个顶点的多重边，即 $y_{i-1} = y_k$ ，那么 $y_k = y_{i-1}$ ，原本的证明就会出问题。

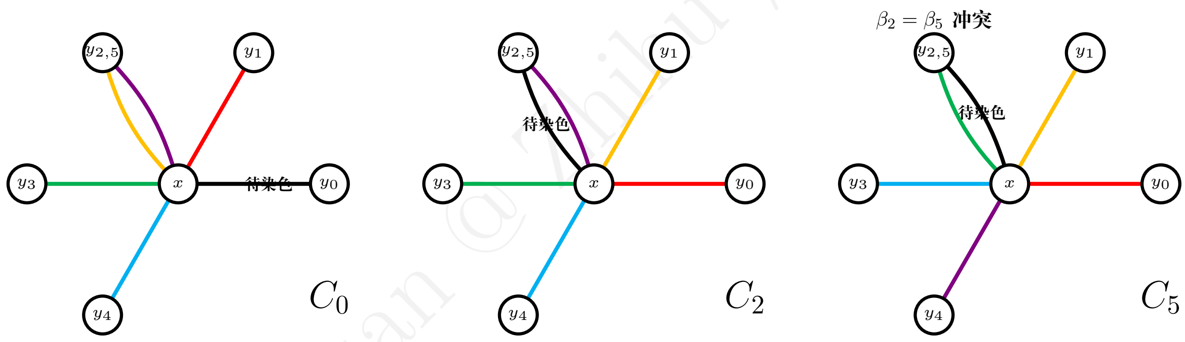

图 6: 重边情形下 Vizing 扇的演化：从 C_0 开始，待染色边沿顺时针方向传递。当旋转至 C_5 时，由于 y_2 与 y_5 物理重合，导致缺失颜色 $\beta_2 = \beta_5$，构建 Vizing 扇的互异性前提消失，双色路归谬逻辑失效。

简单来讲，原本的证明隐含了这样一个意思：y_{i-1} 和 y_k 之间能否构建出双色路，分别对应了 C_{i-1}, C_k 两种染色方案可否通过简单的变换得到完整染色方案，而当 $y_{i-1} = y_k$ 可能发生时，这个逻辑自然走不通了。

当然，我们也发现了诀窍，那就是只要我们总是选取颜色，使得构建边 e_i 时，选取的“缺失颜色”与其所有可能的重边都不相同，那么我们总是可以完成 Vizing 扇的构建，并使得这个双色链的证明逻辑有效，那么我们并不关心其它地方有多少重边，我们只希望，如果 e_k 是第一个选取缺失颜色重复的点，并且发现缺失颜色恰好是 e_i 的颜色，那么 e_k 和 e_{i-1} 不要是重边。

简而言之，就是在构建 Vizing 扇的时候，新加入一条重边，选取的缺失颜色不要与旧的重边相同。

wibyuan @ Zhihu / GitHub

那么，当我们调高归纳边界，尝试归纳证明 $\chi'(G) \le \Delta(G) + \mu(G)$ 的时候，对于每个点，我们总是有 $\mu(G)$ 种颜色选择（即除去至多 $\Delta(G)$ 条染色边外的缺失颜色选择），刚好可以让 x 在构建 Vizing 扇的时候，新加入一条重边，选取的缺失颜色不会与旧的重边相同。

依照这个思路，即可证明 Vizing 定理在多重图上的扩展。

3 Shannon 定理及其证明

定理 2 (Shannon 定理)**.** *设 G 为一个无自环的无向多重图，其最大度数为 $\Delta(G)$。则该图的边色数 $\chi'(G)$ 始终满足以下不等式：*

$$\Delta(G) \le \chi'(G) \le \left\lfloor \frac{3}{2}\Delta(G) \right\rfloor$$

3.1 证明思路

显然 $\chi'(G) \ge \Delta(G)$ 仍然成立，之前已经证明了，是因为一个点连接的所有边都要染成不同的颜色。

$\chi'(G) \le \lfloor 1.5\Delta(G) \rfloor$ 我们同样采取归纳证明的策略。

它的证明其实是拿两种边染色策略凑出来的。

归纳边界是对于 0 条边的图，$\chi'(G) = \Delta(G) = 0$ ，刚好满足条件。

归纳假设对于不超过 $m-1$ 条边的图，不等式成立。

好那么对于 m 条边的图 G ，我们采取的策略是，任意选取一个有边的点对 (u,v) ，然后将它的多重边（设重数为 $\mu(u,v)$ ）删掉一条边，考虑得到的子图，那么该子图由归纳假设是可以在 $\lfloor 1.5\Delta(G) \rfloor$ 条边内染色的。

好现在我们考虑我们的染色策略：

1. 沿用我们的 Vizing 定理的思路，加入这条边，旋转 Vizing 扇，给出足够的宽裕让我们导出双色链，那么这个策略，我们仍然是给出 $\Delta(G) + \mu(u,v)$ 的边色数宽裕就够了，总的来说，我们可以在色数不超过 $\max(\lfloor 1.5\Delta(G) \rfloor, \Delta(G) + \mu(u,v))$ 的前提下进行染色。

2. 直接计数，注意到如果我们直接对加入的这条边染色，使得 u,v 两边延伸出的至多 $d(u) + d(v) - \mu(u,v)$ 条边（容斥原理，减去 (u,v) 内部边一次）（设 $d(u)$ 为 u 的度数）都染成不同的颜色，其它不变，那么总的来说，我们可以在色数不超过 $\max(\lfloor 1.5\Delta(G) \rfloor, 2\Delta(G) - \mu(u,v))$ 的前提下进行染色（即 $d(u), d(v) \le \Delta(G)$ ）。

好的，如果我们在 $\mu(u,v) \le 0.5\Delta(G)$ 时采取第一种策略，而在 $\mu(u,v) > 0.5\Delta(G)$ 时采取第二种策略，由于染色的数目是整数，我们总是能够在 $\lfloor 1.5\Delta(G) \rfloor$ 种颜色内对 G 进行边染色。

那么也就归纳证明了 Shannon 定理。

wibyuan © Zhihu / GitHub