

Methods & Algorithms FS 2023

Aufgabenblatt 4: Lineare Algebra & lineare Diskriminanzanalyse

Die Bearbeitung der Aufgaben ist freiwillig; es erfolgt keine Bewertung.

Aufgabe 1

Gegeben sind folgende Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie rechnerisch und mittels Python, welche Paarungen obiger Vektoren orthogonal sind, d. h. senkrecht aufeinander stehen.

Aufgabe 2

Gegeben ist folgende Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie die Transponierte \mathbf{A}^T und prüfen Sie Ihr Ergebnis mittels Python.
- b) Welche Dimension benötigt ein Vektor \vec{v} für die Matrix-Vektor-Multiplikation $\mathbf{A} \cdot \vec{v}$ und $\mathbf{A}^T \cdot \vec{v}$ für vorbezeichnete Matrix \mathbf{A} ? In welchem der beiden Fälle erfolgt eine Dimensionsreduktion bzw. eine Dimensionserhöhung?
- c) Gegeben sind folgende Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie mittels Python die beiden Matrix-Vektor-Multiplikationen $\mathbf{A} \cdot \vec{u}$ und $\mathbf{A}^T \cdot \vec{v}$.

[Zur Übung können Sie die beiden Matrix-Vektor-Multiplikationen auch selbst berechnen.]

Aufgabe 3

Gegeben sind folgende Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie das dyadische Produkt $\vec{u} \cdot \vec{v}^T$ und kontrollieren Sie Ihr Ergebnis in Python auf zwei unterschiedliche Arten.
- Berechnen Sie den Tensor \mathcal{X} in Python als äusseres Produkt der drei Vektoren $\vec{w} \circ \vec{u} \circ \vec{v}$.

Aufgabe 4

Der Brustkrebs-Datensatz aus dem Paket `sklearn.datasets` beinhaltet 569 Untersuchungsergebnisse, die nach 30 unterschiedlichen Merkmalen entweder als bösartig (M) oder gutartig (B) klassifiziert wurden. Laden Sie zunächst den Datensatz `cancer` wie folgt

```
from sklearn import datasets  
  
cancer = datasets.load_breast_cancer()
```

der u. a. die Teile `cancer.data` (Grösse 569×30) mit den Merkmalswerten sowie `cancer.target` mit den korrekten Klassifikationen (0 oder 1) und `cancer.target_names` mit den korrekten Namen (malignant oder benign) enthält.

- Teilen Sie den Datensatz im Verhältnis 90:10 in Trainings- und Testdaten auf und führen Sie anschliessend mittels linearer Diskriminanzanalyse (LDA) eine Reduktion des Merkmalraumes auf eine Dimension (d.h. $n_{components}=1$) durch.
- Trainieren Sie einen k -Nächste-Nachbarn-Algorithmus für $k \in [1, 10]$ anhand der projizierten Trainingsdaten und führen Sie dann mittels der projizierten Testdaten eine Vorhersage (Klassifikation) durch. Für welche k -Werte lässt sich die beste Treffsicherheit erzielen?
- Visualisieren Sie Ihre Ergebnisse aus b) als Treppenkurve (`plt.step`) in einem Diagramm inklusive Beschriftung und Legende. Zusatzfrage: Wie viele bösartigen Fälle wurden als gutartig und umgekehrt klassifiziert?