

Die Woodall-Vermutung

Seminar zur Diskreten Mathematik
SoSe 2015

Edwin Lock

1 Einleitung

Wir bezeichnen als Graphen ein Paar (V, E) , wobei V eine endliche Knotenmenge und E eine Multimenge gerichteter Kanten ist. Ist X eine Teilmenge von V , so bezeichnen wir mit $\nabla^+(X)$ die Menge der Kanten, die X verlassen. Analog ist $\nabla^-(X)$ die Menge der Kanten, die X betreten. Eine Quellmenge ist eine echte, nicht-leere Teilmenge X von V mit $\nabla^-(X) = \emptyset$. Analog ist eine Senkenmenge eine echte, nicht-leere Teilmenge Y von V mit $\nabla^+(Y) = \emptyset$. Enthält eine Quellmenge X (eine Senkenmenge Y) nur einen Knoten, nennen wir diesen auch Quelle (Senke).

Wir kommen nun zu den beiden zentralen Begriffen der Woodall-Vermutung:

Definition 1 (Schnitt). *Ein **Schnitt** (engl. **cut** oder **dicut**) ist eine Kantenmenge der Form $\nabla^+(X)$, sodass X eine Quellmenge ist. Natürlich ist auch jede Menge $\nabla^-(Y)$ mit einer Senkenmenge Y ein Schnitt.*

Ein Schnitt lässt sich einfach visualisieren (siehe Abbildung 1).

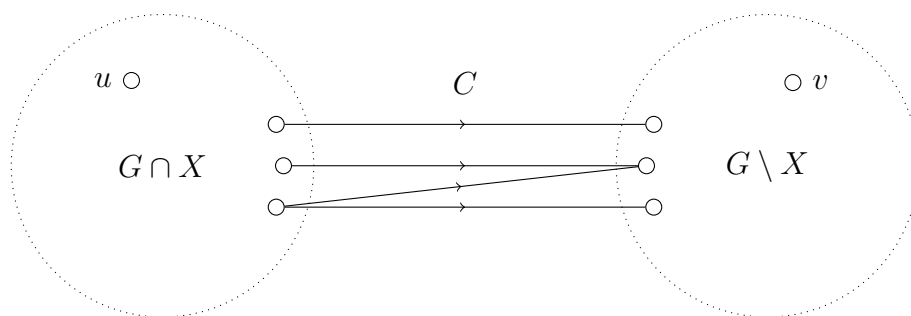


Abbildung 1: Ein durch die Menge X erzeugter Schnitt C .

Definition 2 (Verbund). *Ein **Verbund** (engl. **join** oder **dijoin**) ist eine Menge J von Kanten mit der folgenden Eigenschaft: für jedes Knotenpaar u, v gibt es einen Pfad von u nach v , dessen vorwärtsgerichtete Kanten in J enthalten sind.*

Wir können und wollen den Verbund auch anders charakterisieren.

Lemma 1. *Folgende Aussagen über Verbunde sind äquivalent:*

1. *J ist ein Verbund, wenn es für jedes Knotenpaar u, v einen Pfad von u nach v gibt, dessen vorwärtsgerichtete Kanten in J enthalten sind.*

2. J bildet eine nicht-leere Schnittmenge mit jedem Schnitt, also $J \cap C \neq \emptyset$ für alle Schnitte C .

3. Durch Kantenkontraktion von J entsteht aus G ein stark zusammenhängender Graph.

Beweis. $1 \implies 2$: Sei J ein Verbund von G und sei weiter $C = \nabla^+(X)$ ein beliebiger (gerichteter) Schnitt mit der Quellmenge $X \subset V$. Wir wählen ein Paar u, v von Knoten mit $u \in X$ und $v \in V \setminus X$ (siehe Abbildung 1).

Jeder Pfad von u nach v enthält eine der vorwärtsgerichteten Kanten in C . Nach Annahme gibt es weiter einen Pfad, dessen vorwärtsgerichteten Kanten alle in J enthalten sind. Es folgt, dass mindestens eine Kante aus C auch in J enthalten ist, die Schnittmenge $C \cap J$ also nicht leer ist.

$2 \implies 3$: Nehmen wir zunächst an, dass die Aussage falsch ist. Sei also J ein Verbund mit $J \cap C \neq \emptyset$ für alle Schnitte C von $G = (V, E)$, aber $G' = (V', E')$, der Graph G nach Kontraktion von J , nicht streng zusammenhängend.

Dann gibt es ein Paar u', v' in G' , für das kein gerichteter Pfad von u' nach v' existiert. Wir definieren nun die Menge

$$A' = \{x \in V' \mid \text{es existiert ein gerichteter Pfad von } u' \text{ nach } x.\} \quad (1)$$

Die Menge $V' \setminus A'$ enthält mindestens v' , ist also nicht leer. Wir halten nun zunächst fest, dass alle Kanten zwischen $G \cap A'$ und $G \setminus A'$ von $G \cap A'$ nach $G \setminus A'$ verlaufen müssen, denn sonst gäbe es einen gerichteten Pfad von u' zu einem Knoten in $V' \setminus A'$. Dies ist ein Widerspruch. $C' = \nabla^-(A')$ ist also ein Schnitt von G' .

Wir definieren weiter

$$A = \{u \in V \mid u \in A' \text{ oder } u \text{ ist durch Kontraktion zu einem } u^* \text{ in } G' \text{ geworden.}\}$$

und $V \setminus A = \{v \in V \mid v \in V \setminus A' \text{ oder } v \text{ ist durch Kontraktion zu einem } v^* \text{ in } G' \text{ geworden.}\}$

Wir trennen gewissermaßen die durch Kontraktion verschmolzenen Knoten.

Schließlich zeigen wir, dass auch $C = \nabla^-(A)$ ein Schnitt ist. Nehmen wir hierfür an, es gäbe eine Kante k von $G \cap A$ nach $G \setminus A$. Dann gibt es auch eine Kante von $G' \cap A'$ nach $G' \setminus A'$, denn k verschwindet durch Kontraktion von J nicht - ein Widerspruch. Da die Kanten J sich ausschließlich in $G \cap A$ und $G \setminus A$ befinden, folgt schließlich $J \cap C = \emptyset$, ein Widerspruch zur ursprünglichen Annahme.

$3 \implies 1$: Sei G' der Graph, der aus G durch Kontraktion von J entsteht. Wir wählen ein beliebiges Knotenpaar u, v aus G . Die beiden Knoten, die nach der Kontraktion aus u und v entstehen, nennen wir u' und v' . Da G' stark zusammenhängend ist, gibt es einen gerichteten Pfad p von v' nach u' . Wir tragen nun alle Kanten von p in G ein. In der Regel erzeugt dies keinen Pfad in G . Wir können allerdings die so erhaltene Kantenmenge so durch Kanten aus J ergänzen (also die Löcher flicken), dass wir einen (ungerichteten) Pfad von u nach v erhalten. Da alle aus p entliehenen Kanten nun von u nach v aus gesehen rückwärtsgerichtet sind und die restlichen Kanten aus J stammen, haben wir einen Pfad von u nach v konstruiert, dessen vorwärtsgerichtete Kanten in J liegen. \square

2 Minimale Schnitte und disjunkte Verbundmengen

Wir definieren für beliebige Graphen G :

$$\tau(G) := \min\{|C| \mid C \text{ ist ein Schnitt in } G\}$$

und $\nu(G) := \max\{|D| \mid D \text{ ist eine disjunkte Menge von Verbunden in } G\}.$

Dabei sind zwei Verbunde disjunkt, wenn ihre Kanten jeweils paarweise disjunkt sind. Des Weiteren reicht es offensichtlich, Mengen von minimalen Verbunden auf Maximalität zu untersuchen.

In Lemma 1 haben wir gesehen, dass jeder Schnitt jeden Verbund schneidet, d.h. $C \cap J \neq \emptyset$ für jeden Schnitt C und für jeden Verbund J . Diese Beziehung zwischen Verbunden und Schnitten bauen wir nun aus:

Lemma 2. *Für jeden Graphen gilt $\nu(G) \leq \tau(G)$.*

Beweis. Angenommen, es gelte $\nu(G) > \tau(G)$. Wir haben also mehr Verbunde als Anzahl Kanten im minimalen Schnitt C . Da nun jeder Verbund mindestens eine Kante aus C enthält, müssen nach dem Schubfachprinzip mindestens zwei Verbunde dieselbe Kante aus C enthalten. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass die Verbunde disjunkt sind. \square

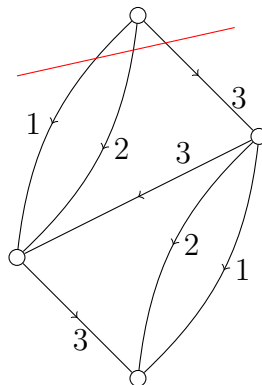
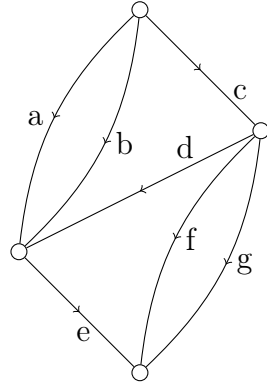


Abbildung 2: Diese Abbildung zeigt einen Schnitt (in rot) und drei Verbunde 1, 2 und 3. Es folgt $\tau = 3$ und $\nu = 3$.

3 Bezug zur linearen Optimierung

Wir können $\nu(G)$ und $\tau(G)$ auch mithilfe von linearen Programmen ausdrücken. Zunächst indexieren wir die Kanten des Graphs mit Kleinbuchstaben und bilden die Menge D aller minimalen Verbunde in G . Sei nun M die Matrix, deren Reihen aus charakteristischen Vektoren zu den minimalen Verbunden besteht (siehe Abbildung 3). Die i -te Reihe steht also für den i -ten Verbund und die j -te Spalte für die Kante des Graphen mit dem j -ten Buchstaben.

Zur Erinnerung: Um ν zu bestimmen, suchen wir eine möglichst große Auswahl von disjunkten Verbunden aus D . Sei also y ein Zeilenvektor der Länge $|D|$. Ist nun $y_i = 1$, so nehmen wir den



a	b	c	d	e	f	g
1	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1

Abbildung 3: Die Matrix zum Graphen aus Abbildung 2.

i -ten Verbund aus D in unsere Auswahl auf. Ziel ist es, möglichst viele Elemente von y gleich 1 zu setzen, ohne dass wir Kanten im Graphen doppelt belegen. Dies erreichen wir durch die Nebenbedingung $yM \leq 1$, denn sind zwei oder mehr Verbunde mit gemeinsamer Kante j gleich 1 gesetzt, ist die Multiplikation von y mit A_j größer oder gleich 2.

Wir erhalten für $\nu(G)$ das lineare Programm

$$\text{maximiere } y1 \text{ unter der Nebenbedingung } y \in \{0, 1\}^{|D|} \text{ und } yM \leq 1.$$

Um $\tau(G)$ zu bestimmen, gehen wir ähnlich vor. Sei x ein Spaltenvektor der Länge $|E|$. Wir suchen einen minimalen Schnitt C in G : korrespondiert nun jedes Element x_i in x mit einer Kante in G , so wollen wir $1x = \sum x_i$ minimieren. Damit C aber ein Schnitt ist, muss C mindestens eine Kante aus jedem Verbund enthalten. Dies können wir durch die Nebenbedingung $Mx \geq 1$ erreichen, denn nur wenn ein Einselement aus x mit einem Einselement in jeder Verbundreihe von M überlappt, ist C wirklich ein Schnitt.

Wir erhalten also für $\tau(G)$ das lineare Programm

$$\text{minimiere } 1x \text{ unter der Nebenbedingung } x \in \{0, 1\}^{|E|} \text{ und } Mx \geq 1.$$

Diese beiden Programme sind dual. Wir können nun Lemma 2 auch auf andere Weise beweisen: Wegen

$$y1 \stackrel{y \geq 0, Mx \geq 1}{\leq} yMx \stackrel{x \geq 0, yM \leq 1}{\leq} 1x$$

folgt sofort $\nu(G) \leq \tau(G)$.

4 Die Woodall-Vermutung

Kommen wir nun zur eigentlichen Vermutung:

Vermutung 1 (Woodall). *Für jeden Graphen gilt $\nu(G) = \tau(G)$.*

Die Aussage wurde bis heute weder bewiesen noch widerlegt. Wir zeigen aber ein Lemma, mit dessen Hilfe wir im Spezialfall $\tau(G) = 2$ auf $\nu(G) = 2$ schließen können.

Lemma 3. *Aus $\tau(G) \geq 2$ folgt $\nu(G) \geq 2$.*

Beweis. Sei G ein Graph mit $\tau(G) = 2$. Der unterliegende ungerichtete Graph U ist 2-fach kantenzusammenhängend. Wäre dies nicht der Fall, gäbe es eine Kante k , für die $U - k$ nicht zusammenhängend wäre. Dann wäre jedoch die gerichtete Kante bezüglich k in G ein Schnitt und damit $\tau(G) = 1$, ein Widerspruch.

Mit dem Satz von Robbins können wir nun wegen des 2-fachen Kantenzusammenhangs die Kanten von G so umorientieren, dass der resultierende Graph H stark zusammenhängend ist. Sei $J = E_G \cap E_H$ die Menge der Kanten, die die gleichgeblieben sind und $\tilde{J} = \{uv \in E_G \mid vu \in E_H\}$ die Menge der Kanten, die umorientiert wurden. Offensichtlich gilt $J \cap \tilde{J} = \emptyset$ und $J \cup \tilde{J} = E_G$.

Wir zeigen nun $J \cap C \neq \emptyset$ und $\tilde{J} \cap C \neq \emptyset$ für beliebige Schnitte C . Sei also C ein beliebiger Schnitt in G mit Quellmenge X . Stellen wir uns den Schnitt wie gewohnt vor, haben wir in G von $G \cap X$ nach $G \setminus X$ nur vorwärtsgerichtete Kanten. Da H aber stark zusammenhängend ist, muss es in H mindestens eine umorientierte Kante aus C geben, die von $G \setminus X$ nach $G \cap X$ verläuft. Andererseits können nicht alle Kanten aus C in H umorientiert sein, da H stark zusammenhängend ist. Es folgt $J \cap C \neq \emptyset$ und $\tilde{J} \cap C \neq \emptyset$, also sind J und \tilde{J} Verbunde. \square

Ist nun $\tau(G) = 2$, folgt mit Lemma 2 $\nu(G) \leq 2$ und mit Lemma 3 $\nu(G) \geq 2$, also $\nu(G) = 2$.

Es sei angemerkt, dass die Woodall-Vermutung dual zum Satz von Lucchesi-Younger [3] ist, der 1978 bewiesen wurde. In diesem Fall bedeutet dual, dass die Begriffe Schnitt und Verbund in der Woodall-Vermutung vertauscht wurden:

Satz 3 (Lucchesi-Younger). *Für jeden Graphen G gilt $\max \{|C| \mid C \text{ ist Menge disjunkter Schnitte von } G\} = \min \{|J| \mid J \text{ ist ein Verbund von } G\}$.*

5 Verallgemeinerung von Woodall

Eine **Kapazitätsfunktion** für einen Graphen G ist eine Funktion $c : E_G \rightarrow \mathbb{N}_0$. Weiter ist eine Menge von Verbunden **c -disjunkt**, wenn jede Kante $k \in G$ höchstens zu $c(k)$ Verbunden gehört.

Mit diesen Definitionen können wir die Woodall-Vermutung zu einer kapazitiven Version erweitern. Wir definieren ν und τ folgendermaßen um:

$$\nu(G, c) := \max\{|D| \mid D \text{ ist eine } c\text{-disjunkte Menge von Verbunden in } G\}$$

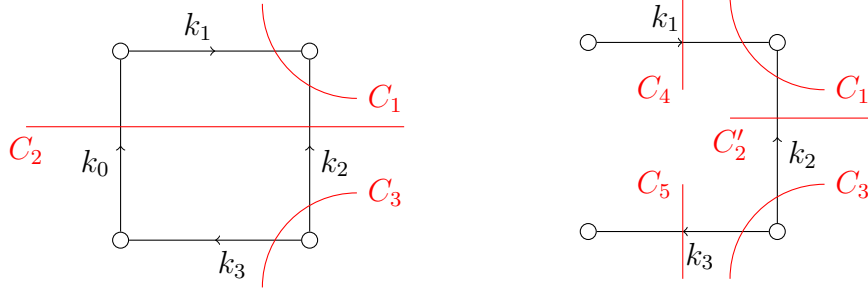
$$\text{und } \tau(G, c) := \min\{c(C) \mid C \text{ ist ein Schnitt von } G\}$$

Schließlich folgt die kapazitive Version der Woodall-Vermutung, die auch als die Edmonds-Giles-Vermutung [4] bekannt ist:

Vermutung 2 (Edmonds-Giles). *Für jeden Graphen und für jede Kapazitätsfunktion c gilt $\nu(G, c) = \tau(G, c)$.*

Ist $c(k) = 1$ für alle $k \in G$, gilt offensichtlich $\nu(G, c) = \nu(G)$ und $\tau(G, c) = \tau(G)$ und es greift die einfache Woodall-Vermutung. Aber nicht nur dieser Fall kann auf den einfachen Fall reduziert werden. Ist generell $c(k) > 0$ für alle k , können wir k durch $c(k)$ parallele, nicht-kapazitive Kanten ersetzen. Für einen so modifizierten Graphen G' gilt $\nu(G, c) = \nu(G')$ und $\tau(G, c) = \tau(G')$, also läuft der Fall wieder auf die einfache Woodall-Vermutung hinaus. Mit anderen Worten: für $c > 0$ ist Vermutung 2 keine echte Verallgemeinerung.

Ist allerdings $c(k) = 0$ für ein k , würde - sofern wir gleich vorgehen - k einfach gelöscht. Dies hat aber möglicherweise Auswirkungen auf die Anzahl Schnitte im Graphen. In Abbildung 4



(a) Die drei Schnitte C_1, C_2 und C_3 in G .

(b) $G - k_0$ enthält fünf Schnitte.

Abbildung 4: Die Kantenlöschung kann den Wert von τ verringern.

besitzt der Graph G mit Kapazitätsfunktion $c(k_i) = i$ beispielsweise drei Schnitte C_1, C_2, C_3 mit den Kapazitäten $c(C_1) = 3, c(C_2) = 2, c(C_3) = 5$. Entfernen wir die Kante k_0 , enthält Graph $G - k_0$ in Abbildung 4b fünf Schnitte C_1, C_2', C_3, C_4, C_5 . Insbesondere gilt $c(C_4) = 1$, also $\tau(G - k, c) = 1$ im Gegensatz zu $\tau(G, c) = 2$. Wir können folglich einen Graphen mit einer solchen Kapazitätsfunktion, die auch $c(k) = 0$ zulässt, nicht in einen einfachen Fall ohne Kapazitäten umwandeln.

Anstatt also k zu löschen, *deaktivieren* wir die Kante lediglich, indem wir sie nicht in die Menge der aktiven Kanten A aufnehmen. Wir gruppieren den nun gänzlich kapazitätenfreien Graph und seine aktive Kantenmenge A und nennen das Paar (G, A) einen **Agraphen**, siehe Feofiloff [1]. Weiter ignorieren wir bei der Bestimmung der Kardinalität eines Schnitts alle inaktiven Kanten und akzeptieren nur Verbunde aus aktiven Kanten. Die neuen Definitionen für ν und τ lauten somit:

$$\nu(G, A) = \max\{|D| \mid D \text{ ist eine disjunkte Menge von Verbunden und } \bigcup D \subseteq A\}$$

und $\tau(G, A) = \min\{|A \cup C| \mid C \text{ ist ein Schnitt}\}.$

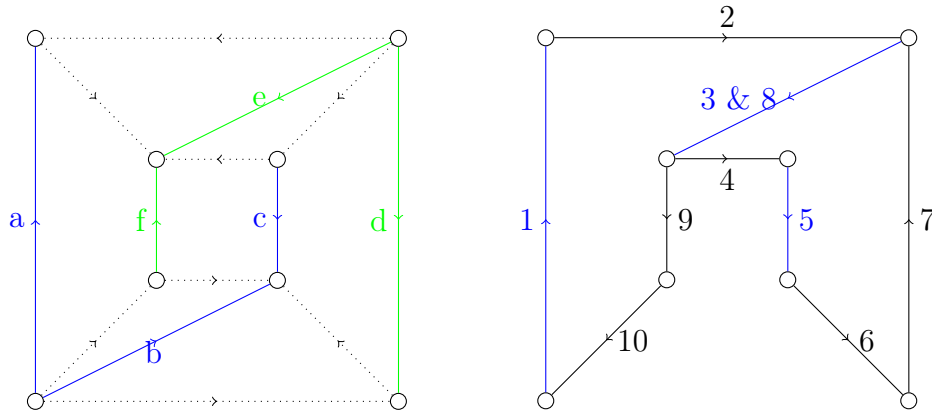
Wir können nun die Edmonds-Giles-Vermutung folgendermaßen äquivalent formulieren:

Vermutung 3 (Edmonds-Giles für Agraphen). *Für jeden Agraphen gilt $\nu(G, A) = \tau(G, A)$.*

6 Ein Beispiel

Betrachten wir den Graphen in Abbildung 5a. Die aktiven Kanten sind durchgängig dargestellt, die inaktiven gestrichelt. Der Graph ist azyklisch und ein minimaler Schnitt ist bspw. $\{a, b\}$. Daraus folgt sofort $\tau(G, A) = 2$. Wollen wir nun $\nu(G, A) = 2$ zeigen, müssen wir zwei Verbunde finden.

Machen wir den Ansatz $J = \{a, c, e\}$ und $\tilde{J} = \{b, d, f\}$. Nach Definition 2 suchen wir nun zwischen jedem Knotenpaar u, v für J und \tilde{J} je einen Pfad, dessen vorwärtsgerichtete Kanten sämtlich in J , bzw. \tilde{J} , enthalten sind. Behandeln wir zuerst den Fall J . Tatsächlich kann man einen Kreis durch alle Knoten des Graphen konstruieren, der alle Kanten $E_G \setminus J$ nur rückwärts durchläuft (siehe Abbildung 5b). Damit ist J ein Verbund. Aus Symmetriegründen folgt dies auch für den Fall \tilde{J} und wir erhalten $\nu(G, A) = 2$.



(a) Zwei Verbunde J (blau) und \tilde{J} (grün). (b) Ein Kreis durch alle Knoten mit den vorwärtsgerichteten Kanten in J (blau).

Abbildung 5: Ein positives Beispiel für den kapazitiven Woodall.

7 Zwei Spezialfälle

Wie wir in Kürze sehen werden, ist die kapazitive Woodall-Vermutung im Allgemeinen falsch. Wir werden aber zunächst Spezialfälle betrachten, für welche die Vermutung bewiesen wurde.

7.1 SP-Graphen

Unser erster Spezialfall geht auf Lee und Wakabayashi [10] zurück. Wir skizzieren den Beweisvorgang, um einen kleinen Einblick zu geben.

Definition 4. Ein Graph G heißt **sp-Graph** (engl. **series-parallel graph**), wenn der unterliegende ungerichtete Graph keinen Unterteilungsgraphen von K_4 enthält.

Wir benötigen noch den Satz von Kuratowski und eine andere Vermutung von Woodall:

Satz 5 (Kuratowski). G ist genau dann planar, wenn er keinen Untergraphen enthält, der Unterteilungsgraph von K_5 oder $K_{3,3}$ ist.

Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind in Abbildung 6 dargestellt.

Lemma 4. K_5 und $K_{3,3}$ enthalten jeweils einen Unterteilungsgraphen von K_4 .

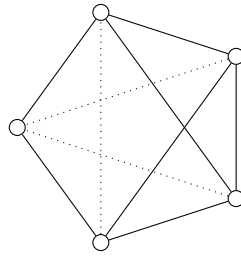
Beweis. Siehe Abbildung 6. □

Vermutung 4 (Woodall). In jedem planaren Graphen ist die Länge des kleinsten Kreises gleich der Kardinalität der maximalen Menge disjunkter Transversalen von Kreisen.

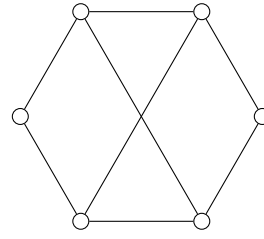
Ohne genau auf den Begriff der Transversalen von Kreisen einzugehen, sei angemerkt, dass eine Transversale jeden Kreis in G schneiden muss, analog zur Tatsache, dass ein Verbund jeden Schnitt schneiden muss.

Wir kommen nun zum Satz von Lee und Wakabayashi:

Satz 6 (Lee und Wakabayashi). Jeder sp-Graph erfüllt die kapazitive Woodall-Bedingung.



(a) K_5 .



(b) $K_{3,3}$.

Abbildung 6: K_5 und $K_{3,3}$ enthalten beide einen (durchgängig gezeichneten) Unterteilungsgraphen von K_4 .

Beweis. Lee und Wakabayashi merken zunächst an, dass die erweiterte Woodall-Vermutung für planare Graphen äquivalent zu Vermutung 4 bezüglich des dualen Graphen ist, sofern dieser auch planar ist. Ein sp-Graph G enthält nach Voraussetzung keinen Unterteilungsgraphen von K_4 , also nach Lemma 4 auch keinen Unterteilungsgraphen K_5 oder $K_{3,3}$. Nach dem Satz von Kuratowski ist G also planar. Weiter ist der duale Graph D zu G auch ein sp-Graph und damit auch planar. Für G sind also die kapazitive Woodall-Vermutung und Vermutung 4 äquivalent. Der Beweis wird schließlich durch einen Beweis von Vermutung 4 abgeschlossen. \square

7.2 QS-zusammenhängende Graphen

Definition 7 (*qs-zusammenhängender Graph*). Wir bezeichnen G als einen **qs-zusammenhängenden Graphen** (engl. **source-sink connected (di)graph**), wenn der Graph keinen gerichteten Kreis enthält und es von jeder Quelle q von G aus einen gerichteten Pfad zu jeder Senke s gibt.

Satz 8. Für jeden qs-zusammenhängenden Graphen ist die kapazitive Woodall-Vermutung wahr.

Beweis. Schrijver [8] beweist einen allgemeineren Satz, aus dem unter anderem als Spezialfälle die Sätze von Menger, Gupta, Frank und natürlich unsere Woodall-Vermutung für qs-zusammenhängende Graphen hervorgehen. Feofiloff und D.H. Younger [9] reduziert das Problem zu einem anderen Satz, um schließlich Satz 8 als Korollar zu erhalten. \square

8 Gegenbeispiele

Das erste bekannte Gegenbeispiel zum kapazitiven Woodall findet sich in Schrijver [5]. Obwohl er unserem positiven Beispiel aus Abschnitt 6 ähnlich ist (siehe Abbildung 5), zeigen wir für Schrijvers Graphen in Abbildung 7:

Behauptung 1. Es gilt $\tau(G, A) = 2$ aber $\nu(G, A) = 1$.

Beweis. Wie in Fig. 5 sind die aktiven Kanten durchgängig und die inaktiven gestrichelt dargestellt. Wir stellen weiter fest, dass jede Senke und jede Quelle einen minimalen Schnitt erzeugt. Es folgt sofort $\tau(G, A) = 2$.

Nehmen wir zunächst $\nu(G, A) = 2$ an. Es gibt also zwei disjunkte Verbunde J und \tilde{J} mit $J \cup \tilde{J} \subseteq A$ im Graphen. Da der Knoten x den Schnitt $\{e, f\}$ erzeugt und J sowie \tilde{J} den Schnitt

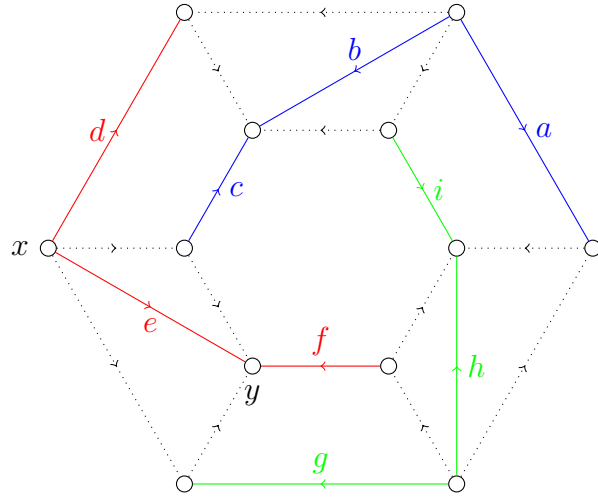


Abbildung 7: Schrijvers Gegenbeispiel (G_1, A_1) .

schneiden, folgt oBdA: $d \in J$ und $e \in \tilde{J}$. Da auch Knoten y einen Schnitt $\{f, g\}$ erzeugt, gehören nach demselben Prinzip e und f zu unterschiedlichen Verbunden. Aus $e \in \tilde{J}$ folgt konkret $f \in J$.

Hieraus sieht man, dass die Kanten der aktiven Pfade im Graphen zwischen J und \tilde{J} alternieren müssen. Aufgrund dieser Einschränkung kommen für J und \tilde{J} nur die vier Möglichkeiten aus Abbildung 8 in Frage:

	J	\tilde{J}
1.	$\{a, c, d, f, g, i\}$	$\{b, e, h\}$
2.	$\{a, c, d, f, h\}$	$\{b, e, g, i\}$
3.	$\{a, c, e, g, i\}$	$\{b, d, f, h\}$
4.	$\{a, c, e, h\}$	$\{b, d, g, i\}$

Abbildung 8: Die vier Möglichkeiten, A in J und \tilde{J} zu partitionieren.

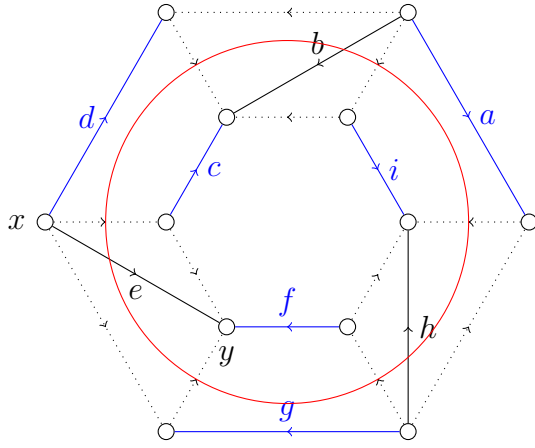
Für jede dieser Möglichkeiten gibt es allerdings einen Schnitt C_i , der entweder J oder \tilde{J} nicht schneidet (siehe Abbildung 9). Es kann somit keine zwei disjunkte Verbunde geben und daher folgt $\nu(G, A) = 1$. \square

Zwei weitere Gegenbeispiele (G_2, A_2) und (G_3, A_3) wurden von Cornuéjols und Guenin [6] gefunden. Wir präsentieren sie ohne Beweis aber in mehreren Darstellungen in Abbildung 10 und 11.

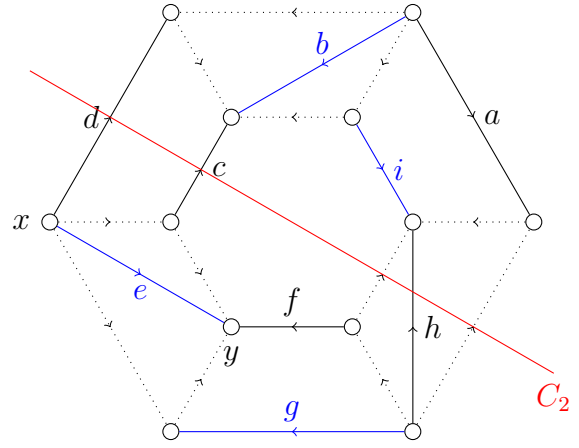
9 Weitere Gegenbeispiele?

In Cornuéjols und Guenin [6] wird indirekt eine ganze Menge von Gegenbeispielen, auch **schlechte** Graphen genannt, definiert.

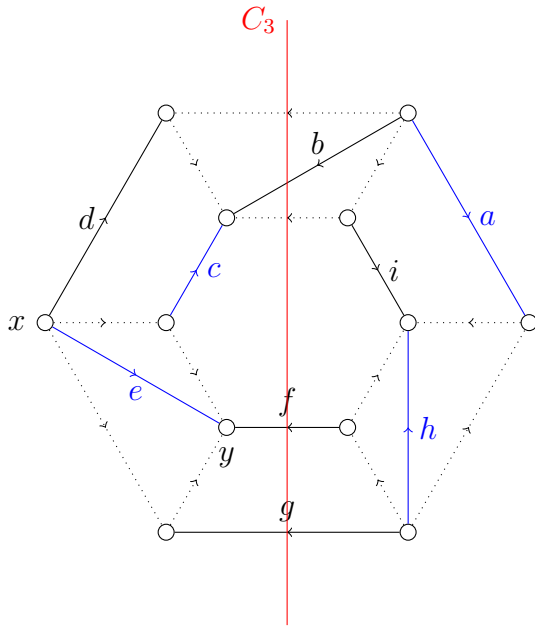
Eine Kante $k = (u, w)$ nennen wir **transitiv**, wenn es einen gerichteten Pfad von u nach w gibt, der nicht k enthält. Einen Graphen T nennen wir transitive Erweiterung von G , wenn T aus G mit zusätzlichen transitiven Kanten entsteht. Setzen wir für diese transitiven Kanten $c_T(k) = 0$ und sonst $c_T(k) = c_G(k)$, folgt $\nu(T, c_T) = \nu(G, c_G)$ und $\nu(T, c_T) = \nu(G, c_G)$, denn zusätzliche transitive Kanten mit Kapazität 0 haben keinen Einfluss auf ν oder τ .



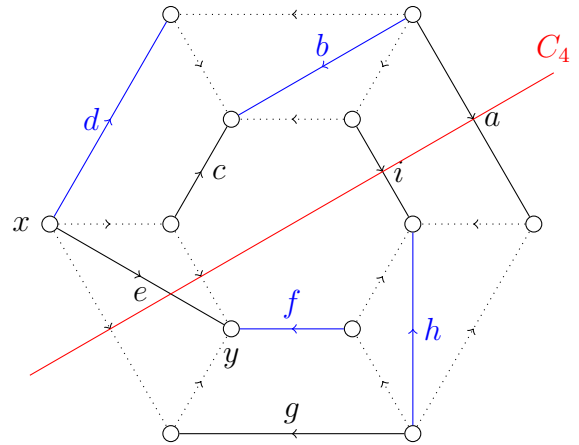
(a) 1. Möglichkeit:
 $J = \{a, c, d, f, g, i\}$



(b) 2. Möglichkeit:
 $\tilde{J} = \{b, e, g, i\}$



(c) 3. Möglichkeit:
 $J = \{a, c, e, h\}$



(d) 4. Möglichkeit:
 $\tilde{J} = \{b, d, f, h\}$

Abbildung 9: Die Schnitte C_i (rot), die entweder J oder \tilde{J} (blau) nicht schneiden.

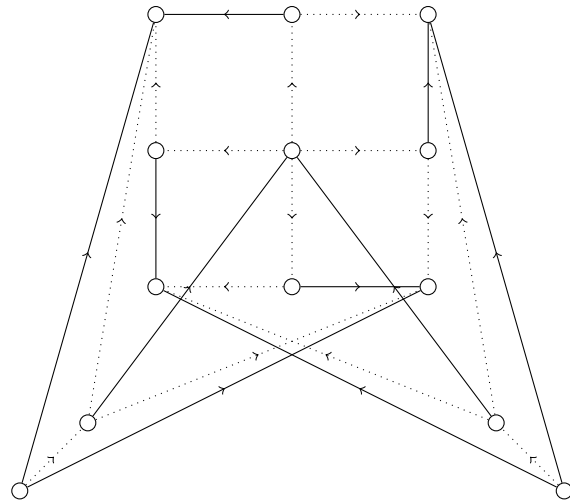
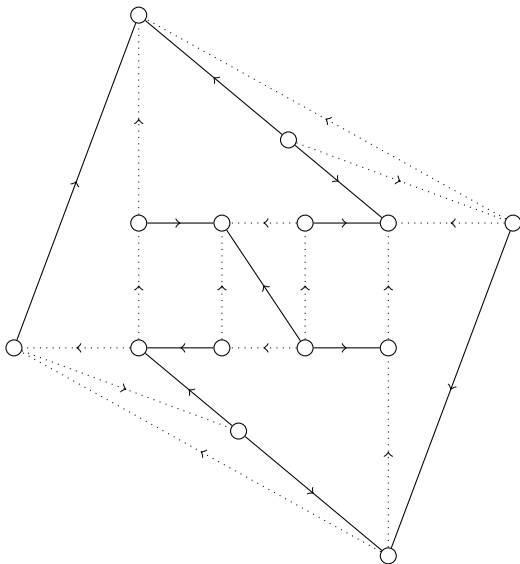
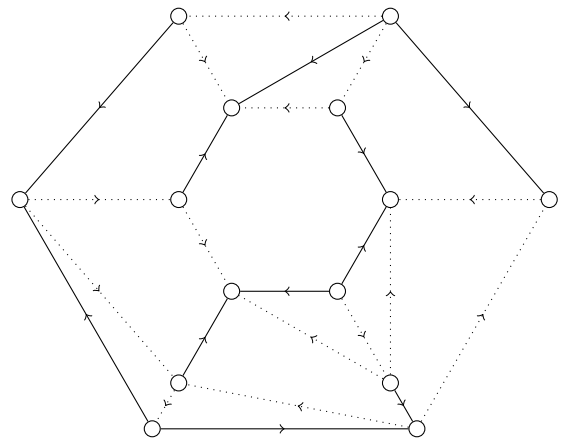


Abbildung 10: (G_2, A_2)



(a) Darstellung aus Feofiloff [1]



(b) Darstellung aus Williams [11]

Abbildung 11: (G_3, A_3)

Ein Graph D lässt sich zu G kontrahieren, wenn eine Kantenmenge $K \subset E_D$ existiert, so dass eine Kantenkontraktion von K den Graphen G erzeugt. Setzen wir $c_D(k) = \tau(D)$ für jedes $k \in K$, folgt wieder $\nu(T, c_T) = \nu(G, c_G)$ und $\nu(T, c_T) = \nu(G, c_G)$.

Lässt sich nun ein Graph G durch Kontraktion und Elimination von transitiven Kanten in eins der drei oben genannten Gegenbeispiele G_i überführen, erweitern wir die Kapazitätsfunktion c von G_i für G so, dass $c(k) = 0$ für alle Kanten aus G , die kontrahiert wurden und $c(k) = \tau(G)$ für alle transitiven Kanten, die nicht in G_i enthalten sind. Offensichtlich ist dieser Graph also ein weiteres Gegenbeispiel für die kapazitive Woodall-Vermutung.

Auf diese Art wird eine ganze Klasse von Gegenbeispielen definiert. Es stellt sich die Frage, ob dies die einzigen Gegenbeispiele sind, oder ob es weitere gibt, die wir noch nicht erfasst haben. Mit anderen Worten wollen wir wissen, ob sich jedes Gegenbeispiel durch Kontraktion und (transitiver) Kantenelimination zu G_1, G_2 oder G_3 reduzieren lässt. Guenin und Williams [7] greift diese Thematik auf und verneint diese Aussage.

10 Reduktion auf Gegenbeispiele mit $\tau = 2$

Die Graphen G_1, G_2, G_3 sind besonders interessant, weil sie minimal schlecht unter Kontraktion und Kantenelimination sind. Jede weitere Operation führt dann zwangsläufig zu einem guten Graphen. Man kann (siehe Guenin und Williams [7] und Williams [11]) nun allgemeiner versuchen, Operationen zusätzlich zur Kontraktion und Kantenelimination so zu definieren, dass einerseits die Menge M aller minimal schlechten Graphen 'klein' ist und andererseits jeder schlechte Graphen auf einen Graphen in M reduzierbar ist.

Die Cornuéjols-Guenin-Margot-Vermutung suggeriert, dass unter den von Guenin und Williams [7] eingeführten Operationen für alle minimal schlechten Graphen $\tau(G, A) = 2$ und $\nu(G, A) = 1$ gilt. In diesem Kontext ist der folgende Satz in Williams [11] besonders interessant:

Satz 9. *Die einzigen 'kleinen', minimal schlechten Agraphen mit $\tau = 2$ sind $(G_1, A_1), (G_2^i, A_2^i)$ und (G_3^i, A_3^i) mit $i = 0, \dots, 8$, wobei die G_*^i durch einfache Umformung aus G_* hervorgehen.*

Literatur

- [1] Feofiloff, P.: *Woodall's conjecture on Packing Dijoins: a survey*, <http://www.ime.usp.br/~pf/dijoins/woodall/survey1-en.pdf>, 12. Mai 2015.
- [2] Woodall, D.R.: *Menger and König systems*, in Y. Alavi and D.R. Lick, editors, *Theory and Applications of Graphs*, Lecture Notes in Mathematics, vol.462, p.620-635. Springer, 1978.
- [3] Lucchesi, C.L. and Younger, D.H.: *A minimax theorem for directed graphs*, Journal of the London Math. Soc. (2), vol.17, pp.369-374, 1978.
- [4] Edmonds, J., and Giles, R.: *A min-max relation for submodular functions on graphs*, Annals of Discrete Mathematics, pp.185-204, 1977.
- [5] Schrijver, A.: *A counterexample to a conjecture of Edmonds and Giles*, Discrete Math., vol.32, pp.213-214, 1980.
- [6] Cornuéjols, G. and Guenin, B.: *A Note on dijoins*, Discrete Mathematics, vol.243, pp.213-216, 2002.
- [7] Williams, A.M. and Guenin, B.: *Advances in packing directed joins*, Electronic Notes in Discrete Mathematics, vol.19, pp.249-255, 2005.
- [8] Schrijver, A.: *Min-max relations for directed graphs*, Annals of Discrete Mathematics, vol.16, pp.261-280, 1982.
- [9] Feofiloff, P. and Younger, D.H.: *Directed cut transversal packing for source-sink connected graphs*, Combinatorica, vol.7, pp.255-263, 1978.
- [10] Wakabayashi, Y. and Lee, O.: *A note on a min-max conjecture of Woodall*, J. Graph Theory, vol.38, pp.36-41, 2001.
- [11] Williams, A.M.: *Packing directed joins*, Master's thesis, University of Waterloo, 2004.