Complementary of Golay Sequences

Widya Eka Pranata
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Bandung

14 Desember 2021

Ringkasan

Golay Sequence adalah barisan yang memuat entri (± 1) dengan fungsi autokorelasi nonperiodik nol. Urutan ini memiliki berbagai aplikasi dalam membangun desain ortogonal dan matriks Hadamard. Dalam tulisan ini akan mengembangkan sebuah algoritma untuk membangun urutan tersebut. Adapun solusi komputasi yang diperoleh dengan menjalankan program dari *Golay Sequence*. Untuk mencari panjang *Golay Sequence* ≥ 10 membutuhkan *high performance computing* karena data yang diproses sangat besar dan membutuhkan waktu yang lama.

1 Pendahuluan

Untuk setiap himpunan dari *complementary sequences* memuat setidaknya dua entri dengan panjang yang sama. Kasus dua barisan ini pertama kali diteliti oleh M. Golay in 1949.

Menurut Livinski *Golay Sequences* adalah dua entri (±1) yang memiliki *zero autocorrelatio*n. Panjang *Golay Sequences* disebut bilangan Golay. Dilambangkan dengan N_a dan N_b himpunan semua pasangan barisan Golay dengan panjang n. *Golay Sequences* ini memiliki berbagai aplikasi dalam membangun desain ortogonal dan matriks Hadamard, S. Kounias, dkk.

2 Pembahasan

Definisi : Misalnya suatu barisan yang didefinisikan, **a** $= (a_0, ..., a_{n-1})$ dengan panjang n dengan entri $\{\pm 1\}$ sehingga didefinisikan barisan complementary $N_{\mathbf{a}}$ dari **a** sebagai berikut ;

$$N_{\mathbf{a}}(j) := \Sigma_{i=0}^{n-j} a_i a_{i+j} \text{ dimana } j \in \{1, 2, ..., n-1\} \tag{1}$$

untuk nilai j lainnya ;

$$N_{\mathbf{a}}(0) := \Sigma_{i=0}^{n-1} a_i^2 \tag{2}$$

Barisan **a** dan **b** dengan panjang n dikatakan *zero autocorrelation* jika :

$$N_{\mathbf{a}}(j) + N_{\mathbf{b}}(j) = 0 \text{ untuk setiap } j \neq 0 \tag{3}$$

atau dengan kata lain, untuk **a** , **b** dikatakan *complementary* pada barisan $a_1, \ldots, a_k$ jika :

$$\Sigma_{i=0}^{k} N_{A_i}(j) = 0, \text{ untuk setiap } j \neq 0 \tag{4}$$

Misalkan untuk setiap barisan **a** dan **b** adalah *Golay Sequences* dengan entri ± 1 **a** $= (a_0, a_1, ..., a_{n-1})$ **b** $= (b_0, b_1, ..., b_{n-1})$ akan dibuktikan :
Untuk barisan **a** :

$$\begin{aligned}
N_a(0) =& \ \Sigma_{i=0}^{n-1} a_i^2 \\
=& \ a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + ... + (a_{n-1})^2 \\
\\
N_a(1) =& \ \Sigma_{i=0}^{n-j} a_i a_{i+j} \\
=& \ \Sigma_{i=0}^{n-1} a_i a_{i+j} \\
=& \ a_0 a_1 + a_1 a_2 + ... + a_{n-2} a_{n-1} \\
\\
N_a(2) =& \ \Sigma_{i=0}^{n-j} a_i a_{i+j} \\
=& \ \Sigma_{i=0}^{n-2} a_i a_{i+j} \\
=& \ a_0 a_2 + a_1 a_3 + ... + a_{n-3} a_{n-1} \\
\\
& \vdots \\
\\
N_a(n-1) =& \ \Sigma_{i=0}^{n-n-1} a_i a_{i+(n-1)} \\
=& \ \Sigma_{i=0}^{1} a_i a_{i+(n-1)} \\
=& \ a_0 a_{n-1}
\end{aligned} \tag{5}$$

Untuk barisan **b** :

$$\begin{aligned}
N_b(0) =& \ \Sigma_{i=0}^{n-1} b_i^2 \\
=& \ b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + ... + (b_{n-1})^2 \\
\\
N_b(1) =& \ \Sigma_{i=0}^{n-j} b_i b_{i+j} \\
=& \ \Sigma_{i=0}^{n-1} b_i b_{i+j} \\
=& \ b_0 b_1 + b_1 b_2 + ... + b_{n-2} b_{n-1} \\
\\
N_b(2) =& \ \Sigma_{i=0}^{n-j} b_i b_{i+j} \\
=& \ \Sigma_{i=0}^{n-2} b_i b_{i+j} \\
=& \ b_0 b_2 + b_1 b_3 + ... + b_{n-3} b_{n-1} \\
\\
& \vdots \\
\\
N_b(n-1) =& \ \Sigma_{i=0}^{n-n-1} b_i b_{i+(n-1)} \\
=& \ \Sigma_{i=0}^{1} b_i b_{i+(n-1)} \\
=& \ b_0 b_{n-1}
\end{aligned} \tag{6}$$

Selanjutnya akan dicari *complementary sequences* dengan menggunakan pemrograman bahasa Python untuk setiap panjang :

1. Untuk $n = 2$
   Pada panjang $n = 2$ menghasilkan sebanyak 8 barisan yang termasuk *Complementary Sequences* brikut

```
Masukan Panjang list : 2
Barisan Complementary
a : (1, 1)
b : (-1, 1)
Barisan Complementary
a : (1, 1)
b : (1, -1)
Barisan Complementary
a : (-1, 1)
b : (1, 1)
Barisan Complementary
a : (-1, 1)
b : (-1, -1)
Barisan Complementary
a : (1, -1)
b : (1, 1)
Barisan Complementary
a : (1, -1)
b : (-1, -1)
Barisan Complementary
a : (-1, -1)
b : (-1, 1)
Barisan Complementary
a : (-1, -1)
b : (1, -1)
```

Gambar 1: Panjang $n = 2$

haril *running* dari program tersebut:

2. Untuk $n = 4$

```
Barisan Complementary
a : (-1, 1, 1, 1)
b : (-1, 1, 1, -1)
Barisan Complementary
a : (-1, 1, 1, 1)
b : (1, -1, 1, -1)
Barisan Complementary
a : (-1, 1, 1, 1)
b : (-1, 1, -1, 1)
Barisan Complementary
a : (-1, 1, 1, 1)
b : (1, -1, -1, -1)
Barisan Complementary
a : (-1, 1, 1, 1)
b : (-1, -1, 1, -1)
Barisan Complementary
a : (-1, 1, 1, 1)
b : (-1, 1, -1, -1)
Barisan Complementary
a : (-1, 1, 1, 1)
b : (-1, -1, -1, -1)
Barisan Complementary
a : (1, -1, 1, 1)
b : (1, 1, 1, -1)
Barisan Complementary
a : (1, -1, 1, 1)
b : (1, 1, -1, 1)
Barisan Complementary
a : (1, -1, 1, 1)
b : (-1, 1, 1, 1)
Barisan Complementary
a : (1, -1, 1, 1)
b : (1, -1, 1, 1)
Barisan Complementary
a : (1, -1, 1, 1)
b : (1, -1, -1, 1)
```

```
Barisan Complementary
a : (1, -1, -1, 1)
b : (1, -1, -1, -1)
Barisan Complementary
a : (1, -1, -1, 1)
b : (-1, -1, -1, 1)
Barisan Complementary
a : (1, -1, -1, 1)
b : (-1, 1, -1, -1)
Barisan Complementary
a : (-1, 1, 1, -1)
b : (1, 1, 1, -1)
Barisan Complementary
a : (-1, 1, 1, -1)
b : (-1, 1, 1, 1)
Barisan Complementary
a : (-1, 1, 1, -1)
b : (1, -1, 1, 1)
Barisan Complementary
a : (-1, 1, 1, -1)
b : (1, -1, -1, 1)
Barisan Complementary
a : (-1, 1, 1, -1)
b : (-1, 1, 1, -1)
Barisan Complementary
a : (-1, 1, 1, -1)
b : (1, -1, 1, -1)
Barisan Complementary
a : (-1, 1, 1, -1)
b : (-1, -1, 1, 1)
Barisan Complementary
a : (-1, 1, 1, -1)
b : (-1, 1, -1, 1)
Barisan Complementary
a : (-1, 1, 1, -1)
b : (1, 1, -1, -1)
```

Gambar 2: Panjang $n = 4$

Untuk menjalankan program pada $n = 10$ membutuhkan waktu yang lebih lama dan spesifikasi PC yang lebih bagus atau *High Performance Computing*. Pada hal ini, penulis menggunakan yang PC dibawah standard sehingga tidak mampu untuk menjalankan program untuk mencari *Cemplementary Sequence* pada panjang $n = 10$ dan seterusnya.S

3 Algoritma

Algoritma 1 Calculate $N_a(0)$

Input: a sequence $\mathbf{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ and the length of the sequence n.
Output: $N_{\mathbf{a}}(0)$

```
j ← 0
if j = 0 then
    N_a ← a_i^2 + a_{n-1}^2
end if
```

Algoritma 2 Calculate $N_b(0)$

Input: b sequence $\mathbf{b} = (b_0, \ldots, b_{n-1})$ and the length of the sequence n.
Output: $N_{\mathbf{b}}(0)$

```
j ← 0
if j = 0 then
    N_a ← b_i^2 + b_{n-1}^2
end if
```

Algoritma 3 Calculate N_a(j)

Input: a sequence $\mathbf{b} = (b_0, \ldots, b_{n-1})$ and the length of the sequence n.
Output: $N_{\mathbf{a}}(j)$

```
j ← 1
if j > 0 then
    N_a ← a_i a_{i+j}
end if
```

Algoritma 4 Calculate N_b(j)

Input: b sequence $\mathbf{b} = (b_0, \ldots, b_{n-1})$ and the length of the sequence n.
Output: $N_{\mathbf{b}}(j)$
  $j \leftarrow 1$
  if $j > 0$ **then**
    $N_b \leftarrow b_i b_{i+j}$
  end if

Algoritma 5 Calculate $N_a + N_b = 0$

Input: N_a, N_b
Output: $N_a =$ Barisan a
Output: $N_b =$ Barisan b
  if $N_a + N_b = 0$ **then**
    print Barisan Complementary
  else
    print Bukan Barisan Complementary
  end if

Algoritma 6 Pseudocode

Declare Entri ± 1
Input : $\mathbf{a} \leftarrow (a_0, a_1, ..., a_{n-1})$
Input : $\mathbf{b} \leftarrow (b_0, b_1, ..., b_{n-1})$

Algoritma 7 Test Algoritma

Input: Tulis Input
Output: Tulis Output
Langkah 1
Langkah 2
Langkah 3
Langkah 4
for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
  Tulis langkah Looping
end for
print output (Tulis outputunya lagi).

4 Kesimpulan

Golay Sequence adalah barisan yang memuat entri (± 1) dengan fungsi autokorelasi nonperiodik nol. Urutan ini memiliki berbagai aplikasi dalam membangun desain ortogonal dan matriks Hadamard. Dalam tulisan ini akan mengembangkan sebuah algoritma untuk membangun urutan tersebut. Adapun solusi komputasi yang diperoleh dengan menjalankan program dari *Golay Sequence*. Untuk mencari panjang *Golay Sequence* ≥ 10 membutuhkan *high performance computing* karena data yang diproses sangat besar dan membutuhkan waktu yang lama. Maka dari itu disarankan untu menjalankan program menggunakan *High Performance Computing*

Pustaka

[1] M. J. E. Golay, Multislit spectroscopy, *J. Opt. Soc. Amer*. **39: 437-444**, (1949).

[2] I. Livinskyi, “Asymptotic Existence Of Hadamard by,” 2012.

[3] R. Craigen, “Notes on sequences, autocorrelation, polynomials and an associated matrix algebra,” **pp. 2–3**, 1991.

[4] C. K. and K. S. S. Kounias, “On Golay Sequences,” *Discret. Math. North-holl.*, **vol. 92, pp. 177–185**, 1991.