12 grudnia 2022 r.

Wiktor Wierzchowski

Obliczanie całek złożoną kwadraturą trapezów

Projekt nr 1

1 Opis metody

Złożona kwadratura trapezów polega na dokonaniu podziału przedziału całkowania $[a, b]$ na m podprzedziałów długości $H = \frac{b-a}{m}$, a następnie wykonaniu na każdym z nich kwadratury prostej.

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{2}(f(x_k) + f(x_{k-1})) \tag{1}$$

gdzie $x_k = a + kH$ to koniec $k-$tego podprzedziału. Wykonanie takiej operacji na m podprzedziałach daje wzór na przybliżenie całki.

$$S(f) = \sum_{j=1}^{m} \frac{x_k - x_{k-1}}{2}(f(x_k) + f(x_{k-1}))$$

2 Opis programu obliczeniowego

Metoda zaimplementowana została przy użyciu przekształconego wzoru aby uniknąc obliczania wartości funkcji dla jednego punktu dwa razy.

$$S(f) = \frac{H}{2}(f(a) + f(b) + 2\sum_{j=1}^{m} f(a + kH))$$

W celu implementacji i przetestowania metody przygotowane zostało 5 funkcji:

dwie pomocnicze: pojedynczePrzyblizenie, kwadraturaTrapezow

dwie napisane na potrzeby testów: KTtest, KTWtest

zaś funkcją przeznaczoną do użytku jest funkcja kwadraturaTrapezowWektorowo.

Na wejściu przyjmuje ona komórkę, gdzie każdy wiersz to pojedyńczy zestaw argumentów, kolejno: funkcja do całkowania, początek przedziału całkowania, koniec przedziału całkowania, początkowa liczba podziałów, dokładność obliczeń. Zwraca natomiast pionowy wektro wyników.

3 Przykłady obliczeniowe

Funkcja została sprawdzona pod następującymi względami:

1. popawności obliczeń,
2. tempo wzrostu liczby podziałów przy żądaniu coraz lepszej dokładności,
3. podatności na błędy przy zaburzeniach wzoru funkcji,
4. podatności na błędy przy zaburzeniach przedziału,
5. podatność na nadużycia warunku stopu,
6. zabezpieczenie przed nadużyciom warunku stopu

Ad.1 Wybrane zostało kilka przykładowych całek oznaczonych i porównano ich wartości wyznaczone analitycznie z wynikami napisanej funkcji. Początkowa liczba podziałów wynosiła 5, a żądana dokładność 0,001.

$f(x)$	przedział całkowania	rozwiązanie przybliżone	rozwiązanie dokładne
$xsin(x)$	$[0, \pi/2]$	1.001	1
$arctan(x)$	$[4, 6]$	2.7417	2.7417
$e^{\sqrt{x}}$	$[1, 2]$	3.4076	3.4075
$x^3 - 4x + 1/x$	$[2, 4]$	36.6933	36.6931

Ad.2 Całkę oznaczoną z funkcji $f(x) = xsin(x)$ na przedziale $[1, 5]$ obliczano z rosnącą każdorazowo o rząd wielkości dokładnością. Początkowa liczba podziałów wynosiła 5.

rządana dokładność	rozwiązanie przybliżone	rozwiązanie dokładne	liczba podziałów
0.1	-2.69086	2.67840	10
0.01	-2.68148	2.67840	20
0.001	-2.67859	2.67840	80
0.0001	-2.67841	2.67840	320
0.00001	-2.67840	2.67840	640

Ad.3 Funkcję $f(x) = xsin(x)$ przybliżono wielomianem interpolacyjnym z różną dokładnością i porównano wartość całki na przedziale $[2, 6]$ z dokładną wartością.

liczba węzłów	względny błąd wyniku
3	5.67
4	6.14
5	6.06
6	4.11

Ad.4 Całkę oznaczoną z funkcji $f(x) = xsin(x)$ obliczano na przedziale $[2, 6]$ z rosnącym odchyleniem od tego przedziału. Początkowa liczba podziałów wynosiła 5, a żądana dokładność 0,001.

względny błąd przedziału	względny błąd wyniku
0.01	0.0162
0.05	0.0544
0.10	0.0361
0.15	0.0583

Ad.5 Wykonano próbę obliczenia całki z funkcji $f(x) = xsin(x)$ na przedziale $[-\pi, 3\pi]$ z początkową liczbą podziałów $m = 2$.
Otrzymano wynik $2.4173e - 15$, czyli 0, podczas gdy poprawna odpowiedź wynosi 12.5663.

Ad.6 Błąd wychwycony w poprzednim teście wynika ze zbyt niskiej, w stosunku do długości przedziału, początkowej liczby podziałów przedziału całkowania. W sytuacji gdy długość pojedyńczego podprzedziału będzie większa od obszaru w którym zachodzi znaczna zmiana wartości funkcji może dojść do spełnienia warunku stopu i zwrócenia błędnego wyniku.

W teście 5 doszło najpierw do pokrycia się tej długości z odstępami między miejscami zerowymi. Stąd wynik. Zwiększenie początkowej liczby podziałów już do 4 uzyskuje wynik 12.5662, a zatem poprawny.

4 Podsumowanie

Przy zachowaniu ostrożnośći w doborze liczby początkowych podziałów przedziału całkowania funkcja poprawnie wyznacza wartości właściwych całek oznaczonych. Metoda zwraca bardzo niepoprawne wyniki przy przybliżaniu funkcji wielomianem interpolacyjnym opartym na do 6 węzłach.