9 stycznia 2023 r.

Wiktor Wierzchowski

Rozwiązywanie układów równań liniowych Ax = b blokową metodą Gaussa-Seidela

Projekt nr 2

1 Opis problemu

Omawiane układy równań liniowcych $Ax = b$ dotyczą przypadków, w których macierz A jest macierzą blokową o wymiarach $(n \times n)$ postaci:

$$\begin{bmatrix} I & A_{12} & 0 \\ A_{12} & -A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{23} & A_{22} \end{bmatrix}$$

gdzie macierze A_{ij} mają wymiary $(p \times p)$, I to macierz jednostkowa i $n = 3p$.

2 Opis metody

Układ równań $Ax = b$ można zapisać w następujący sposób:
todo
gdzie podział wektora x oraz b odpowiada podziałowi macierzy A na bloki. Rozpiszmy teraz ten układ równań:

$$\begin{cases} Ix_1 + A_{12}x_2 + 0x_3 = b_1 \\ A_{12}x_1 + (-A_{22})x_2 + A_{23}x_3 = b_2 \\ 0x_1 + A_{23}x_2 + A_{22}x3 = b_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + A_{12}x_2 = b_1 \\ A_{12}x_1 + -A_{22}x_2 + A_{23}x_3 = b_2 \\ A_{23}x_2 + A_{22}x3 = b_3 \end{cases}$$

Mając do dyspozycji wektor $x^{(k)}$ będący przybliżeniem uzyskanym w poprzednim kroku kolejne przybliżenie $x^{(k+1)}$ obliczane jest przy użyciu wzorów:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = b_1 - A_{12}x_2^{(k)} \\ A_{22}x_2^{(k+1)} = -b_2 + A_{12}x_1^{(k+1)} + A_{23}x_3^{(k)} \\ A_{22}x_3^{(k+1)} = b_3 - A_{23}x_2^{(k+1)} \end{cases}$$

Przy wyznaczaniu $x_2^{(k+1)}$ oraz $x_3^{(k+1)}$ rozwiązywany jest układ równań liniowych z drugiego oraz trzeciego wiersza. Stosowana metoda to eliminacja Gaussa z pełnym wyborem elementu głównego.
Warunkiem zakończenia obliczeń jest uzyskanie błędu bezwzględnego $||x^{(k+1)} - x^{(k)}||$ mniejszego od żądanej dokładności.

3 Opis programu obliczeniowego

Do zaimplementowania opisanej wyżej metody użyte zostały trzy funkcje.

Funkcja pomocnicza GECP implementująca metode eliminacji Gaussa z pełnym wyborem elementu głównego.

Funkcja GSinfo zwracająca poziomy wektor z promieniem spektralnym macierzy iteracji oraz wskaźnikiem uwarunkownia macierzy współczynników. Na wejściu przyjmuje jeden argument, macierz współczynników A. Zwraca zaś poziomy wektor dwuelementowy z promieniem spektralnym macierzy iteracji oraz wskaźnikiem uwarunkownia macierzy współczynników.

Oraz funkcja docelowa blokoweGS implementująca metode Gaussa-Seidela. Na wejściu przyjmuje ona cztery argumenty. Kolejno: macierz współczynników A, wektor wyrazów wolnych b, maksymalną dopuszczaną liczbę iteracji $Nmax$ oraz żądaną precyzję $prec$. Warunkiem stopu jest osiągnięcie różnicy pomiędzy obecnym a kolejnym przybliżeniem mniejszej niż podane $prec$. Zwraca zaś dwukolumnową macierz z rozwiązaniem oraz błędem względnym. Ponadto przy udanym przybliżeniu wypisuje w konsoli liczbę iteracji w jakiej takowe udało się uzyskać oraz przedstawia wykres pokazujący jak malał błąd względny w miarę przybliżania rozwiązania. W przypadku przekroczenia maksymalnej liczby iteracji funkcja zwraca wektor $\begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}$ i nie pokazuje wspomnianego wcześniej wykresu błędu.

4 Przykłady

We wszystkich przykładach użyte zostały wektory wyrazów wolnych b_1 dla macierzy 6×6 oraz b_2 dla macierzy 9×9 o postaci:

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Maksymalna liczba iteracji wyznaczona została na 1000, a wymagana dokładność na 0.001).

Testy dla układów rozbieżnych (nie podaję wartości zwracanych przez funkcję blokoweGS, jej zachowanie w tym przypadku zostało opisane wyżej):

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Promień spektralny macierzy iteracji oraz wskaźnik uwarunkownia macierzy współczynników: $GSinfo(A_1) = \begin{bmatrix} 4.5553 & 9.9796 \end{bmatrix}$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 4 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 0 & 2 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

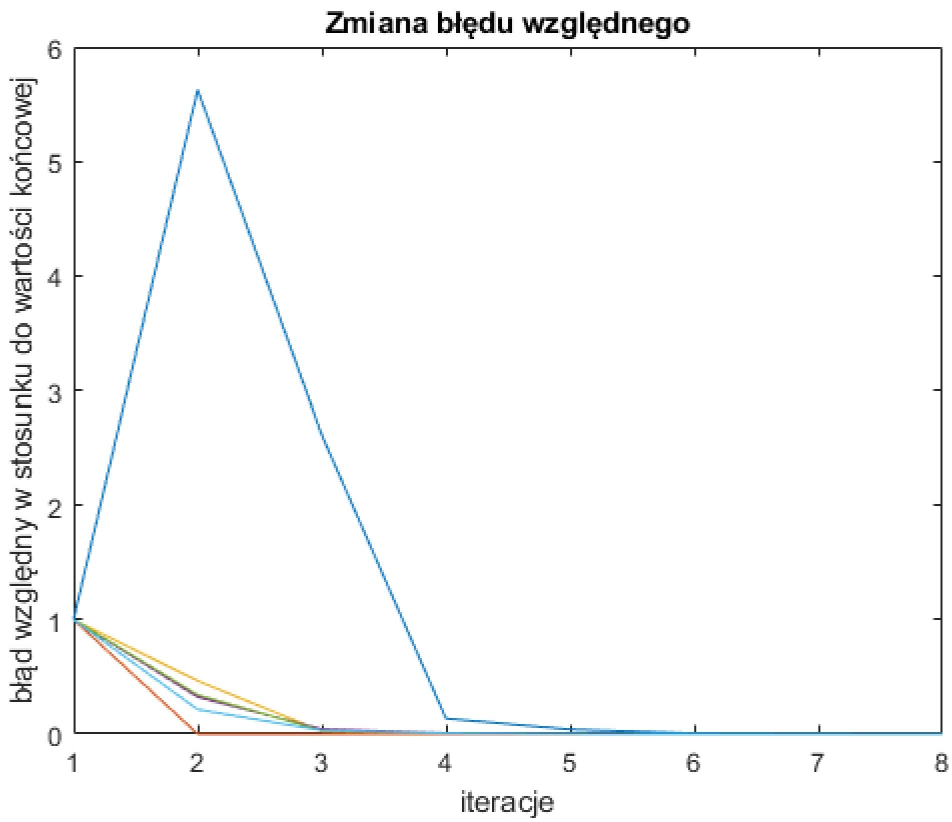
Promień spektralny macierzy iteracji oraz wskaźnik uwarunkownia macierzy współczynników: $GSinfo(A_2) = \begin{bmatrix} 30.3438 & 340.3600 \end{bmatrix}$

Testy dla układów zbieżnych szybko:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 9 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Promień spektralny macierzy iteracji oraz wskaźnik uwarunkownia macierzy współczynników: $GSinfo(B_1) = \begin{bmatrix} 0.2134 & 13.8282 \end{bmatrix}$

Wynik uzyskany w 8 iteracjach: $\begin{bmatrix} 0.1509 \\ 2.0000 \\ 0.8490 \\ 0.8059 \\ -0.5052 \\ -0.5151 \end{bmatrix}$

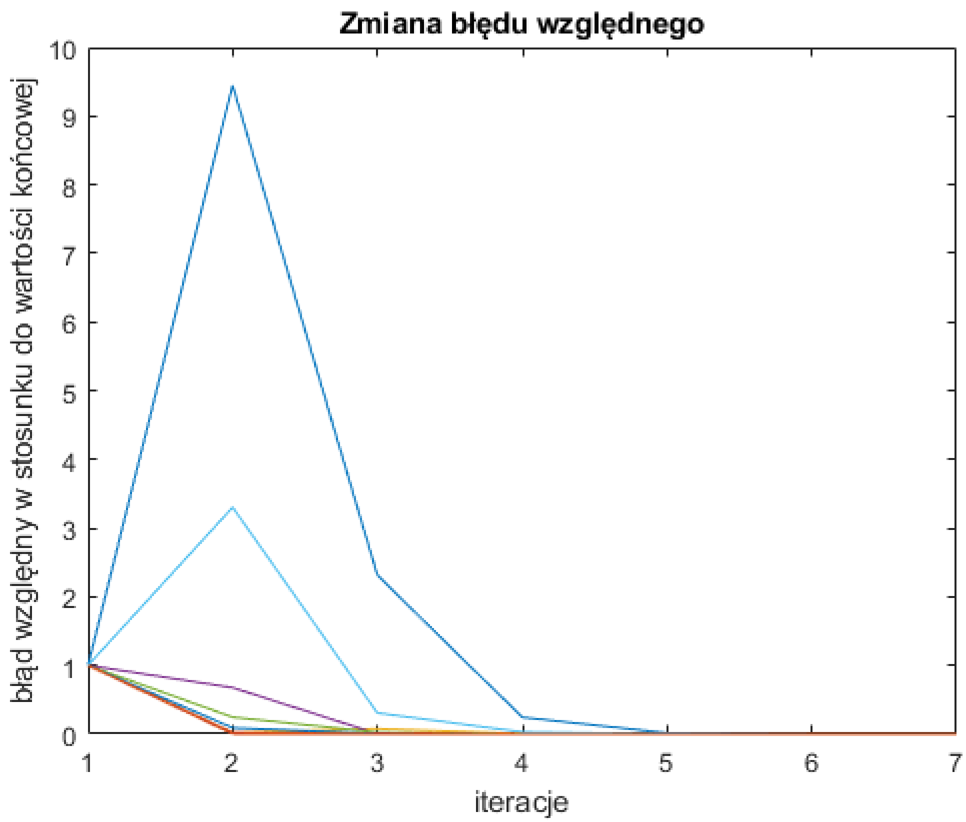
Błąd względny : 

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 1 & 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -9 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -9 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Promień spektralny macierzy iteracji oraz wskaźnik uwarunkownia macierzy współczynników: $GSinfo(B_2) = \begin{bmatrix} 0.1117 & 13.3253 \end{bmatrix}$

Wynik uzyskany w 7 iteracjach: $\begin{bmatrix} 0.0957 \\ 2.0000 \\ 3.0715 \\ 0.7098 \\ 0.9043 \\ -0.0715 \\ -0.5494 \\ -0.9202 \\ 1.0258 \end{bmatrix}$

Błąd względny :



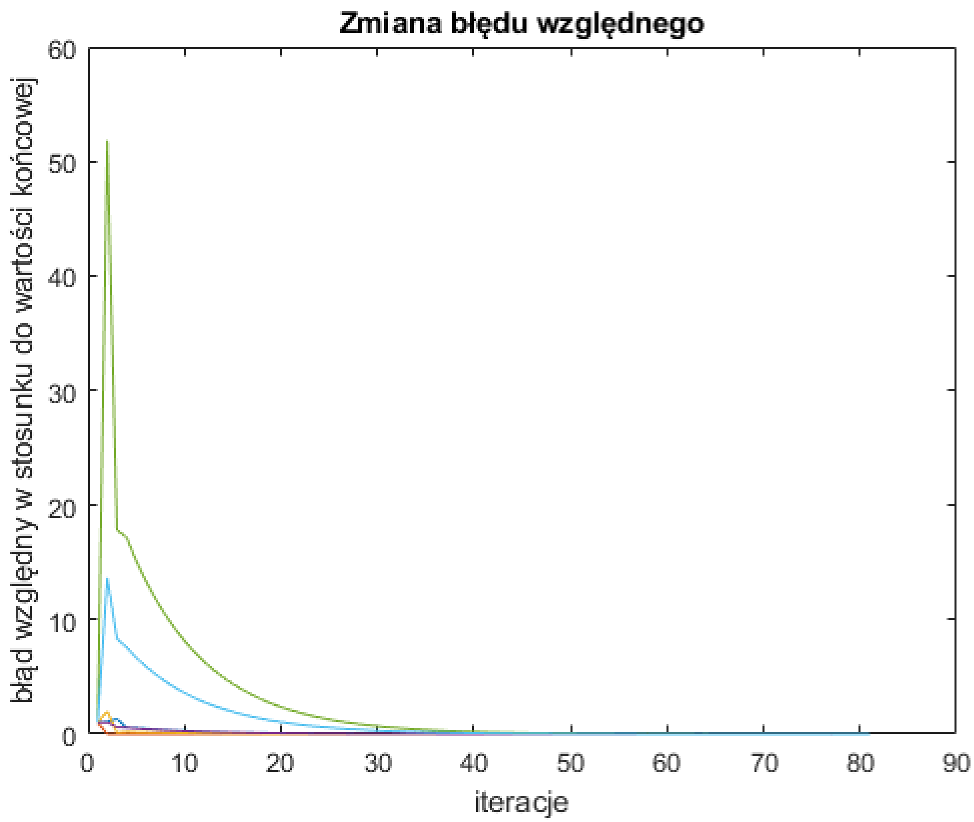
Testy dla układów zbieżnych wolno:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Promień spektralny macierzy iteracji oraz wskaźnik uwarunkownia macierzy współczynników: $GSinfo(C_1) = \begin{bmatrix} 0.5253 & 55.6716 \end{bmatrix}$

Wynik uzyskany w 81 iteracjach: $\begin{bmatrix} -9.8281 \\ 2.0000 \\ 2.0286 \\ 1.7601 \\ 0.0801 \\ -0.1656 \end{bmatrix}$

Błąd względny :



$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -8 & 4 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 8 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 8 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Promień spektralny macierzy iteracji oraz wskaźnik uwarunkownia macierzy współczynników: $GSinfo(C_2) = \begin{bmatrix} 0.7743 & 13.6644 \end{bmatrix}$

Wynik uzyskany w 23 iteracjach: $\begin{bmatrix} 0.4410 \\ 1.7307 \\ 3.2998 \\ -0.1501 \\ 0.4396 \\ 0.8589 \\ 0.7116 \\ -0.6626 \\ -0.8217 \end{bmatrix}$

Błąd względny :