β

Лекция 2

Ортогональность

Содержание лекции:

В настоящей лекции мы подробно обсудим ортогональные системы векторов и методы работы с ними. Будет определено ортогональное дополнение подпространства и ортогональный проектор - те понятия, которыми наиболее часто оперирует геометрия. Мы докажем основные свойства разложения векторов по ортогональным системам, а также сформулируем и решим одну из самых важных задач геометрии - задачу о перпендикуляре.

Ключевые слова:
Ортогональные векторы, теорема Пифагора, ортогональное дополнение, ортогонализация Грама-Шмидта, ортогональный и ортонормированный базис, ортогональная сумма подпространств, ортогональный проектор, задача о перпендикуляре, коэффициенты Фурье, неравенство Бесселя, равенство Парсеваля.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

2.1 Ортогональные векторы

|| Пусть $x, y \in E$. Говорят, что x **ортогонален** y (пишут $x \perp y$), если $\langle x, y \rangle = 0$.

Лемма 2.1. *Пусть $x \perp y_1, y_2, \ldots, y_k$, тогда $x \perp \mathcal{L}\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$.*

►

$$\left\langle \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_i, x \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle y_i, x \rangle .$$

◄

Теорема 2.1. *(Об ортогональности и линейной независимости) Пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ - набор ненулевых попарно ортогональных векторов, тогда $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ - линейно независимый набор.*

►

Рассмотрим нулевую линейную комбинацию

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0, \quad \|x_j\| \neq 0,$$

$$\left\langle \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i, x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle x_i, x_j \rangle = \alpha_j \langle x_j, x_j \rangle = \alpha_j \|x_j\|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_j = 0.$$

◄

Теорема 2.2. *(Пифагора) Пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ - набор ненулевых попарно ортогональных векторов, тогда*

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^2 .$$

►

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} x_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{k} x_i, \sum_{j=1}^{k} x_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{k} \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle x_i, x_i \rangle = \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^2 .$$

◄

|| Говорят, что x **ортогонален подпространству** $L \leq X_E$, если

$$\forall y \in L \quad \langle x, y \rangle = 0.$$

Nota bene Для обозначения данного факта обычно пишут $x \perp L$.

Ортогональным дополнением пространства L называется множество

$$M = \{x \in X : \quad x \perp L\}.$$

Лемма 2.2. *Ортогональное дополнение тоже является подпространством X_E.*
▶
В этом легко убедиться прямой проверкой.
◀

2.2 Ортогональный базис

Теорема 2.3. *Пусть $\{x_j\}_{j=1}^k$ - линейно-независимый набор в евклидовом пространстве X_E, тогда $\{x_j\}_{j=1}^k$ можно преобразовать в ортогональный набор $\{e_j\}_{j=1}^k$.*
▶
Используем процесс ортогонализации Грама-Шмидта:

1. $e_1 = x_1$,
2. $e_2 = x_2 + \alpha_2^1 e_1, \quad e_2 \perp e_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2^1 = -\frac{\langle x_2, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle}$,
3. $e_3 = x_3 + \alpha_3^2 e_2 + \alpha_3^1 e_1, \quad e_3 \perp e_1 \quad e_3 \perp e_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_3^1 = -\frac{\langle x_3, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle}, \quad \alpha_3^2 = -\frac{\langle x_3, e_2\rangle}{\langle e_2, e_2\rangle}$,
4. $\ldots$
5. $e_m = x_3 + \alpha_m^{m-1} e_{m-1} + \ldots + \alpha_m^2 e_2 + \alpha_m^1 e_1, \quad \Rightarrow \quad \alpha_m^j = -\frac{\langle x_m, e_j\rangle}{\langle e_j, e_j\rangle}$.

◀

Nota bene Для $\{x_j\}_{j=1}^k$ процесс ортогонализации не оборвется, то есть все $e_j \neq 0$.
▶
От противного. Пусть

$$e_m = x_m + \alpha_m^{m-1} e_{m-1} + \ldots + \alpha_m^2 e_2 + \alpha_m^1 e_1 = 0,$$

тогда

$$e_m = x_m + \alpha_m^{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_{m-1}^i x_i + \ldots + \alpha_m^2 \sum_{i=1}^{2} \alpha_2^i x_i + \alpha_m^1 x_1 = 1 \cdot x_m + \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i x_i = 0,$$

но это означает, что $\{x_j\}_{j=1}^k$ - линейно зависимый набор. Противоречие.
◀

Nota bene Пусть $\{x_j\}_{j=1}^k$ - линейно независимый набор, а $\{x_j\}_{j=1}^{k+1}$ - линейно-зависимый, тогда $e_{k+1} = 0$.

Nota bene Имеет место следующее неравенство: $\|e_m\| \leq \|x_m\|$

►

Рассмотрим скалярное произведение:

$$\langle e_m, e_m \rangle = \langle x_m, e_m \rangle + 0 + \ldots + 0, \quad \Rightarrow \quad \|e_m\|^2 = \langle x_m, e_m \rangle \leq \|x_m\| \cdot \|e_m\|.$$

◄

Базис $\{e_j\}_{j=1}^n$ евклидова пространства X_E называется

- **ортогональным**, если $\langle e_i, e_{j \neq i} \rangle = 0$.
- **ортонормированным**, если $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

Теорема 2.4. *Любой базис евклидова пространства X_E может быть преобразован к ортонормированному базису.*

►

Ортогонализация Грама-Шмидта с последующей нормировкой.

◄

Лемма 2.3. *Базис $\{e_j\}_{j=1}^n$ в X_E ортонормирован тогда и только тогда, когда*

$$\forall x, y \in X_E : \quad x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^n \eta^j e_j, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \xi^i \eta^i.$$

Nota bene Матрица Грама скалярного произведения ортогональном базисе имеет диагональный вид, а в ортонормированном базисе имеет сид единичной матрицы.

2.3 Ортогональная сумма подпространств

Теорема 2.5. *Пусть L - подпространство линейного пространства X_E и*

$$M = L^\perp = \{x \in X_E : \quad x \perp L\},$$

тогда

$$E = L \dot{+} M \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in X_E \quad \exists! z \in L, \ h \in L^\perp : \quad x = z + h.$$

►

1. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^k$ - ортонормированный базис в L,
2. Дополним $\{e_j\}_{j=1}^k$ до базиса X_E : $\quad \{e_1, e_2, \ldots, e_k; x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n\}$
3. Проведем процесс ортогонализации Грама-Шмидта

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_k; e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_n\},$$

4. $\forall x = \sum_{i=1}^{k} \xi^i e_i + \sum_{i=k+1}^{n} \xi^i e_i = z + h \quad \Rightarrow \quad X_E = L + M.$

5. Пусть $x = h_1 + z_1 = h_2 + z_2$, тогда $h_2 - h_1 = z_1 - z_2$ и
$$\|h_2 - h_1\|^2 = \langle z_1 - z_2, h_2 - h_1 \rangle = 0, \quad \Rightarrow \quad h_2 - h_1 = 0.$$

◄

Nota bene В данном случае прямая сумма $X_E = L \dot{+} M = L \oplus M$ называется также *ортогональной суммой* подпространств L и M.

Nota bene В более общем случае, сумма попрано ортогональных подпространств $L_i \perp L_{j \neq i}$ называется ортогональной суммой подпространств:
$$L = \bigoplus_{i=1}^{s} L_i.$$

2.4 Ортогональный проектор

Ортогональным проектром на подпространство L называется линейный оператор, обладающий следующим свойством:
$$\mathcal{P}_L^{\perp}(x) = z, \quad zx = z + h, \quad z \in L, \quad h \in M = L^{\perp}.$$

Nota bene При этом вектор z называется *ортогональной проекцией* x на L.

Теорема 2.6. *Пусть $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ - ортонормированный базис в X_E. Тогда вид ортогонального проектора в этом базисе:*
$$\mathcal{P}_L^{\perp} x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle e_i, \quad \forall x \in E.$$

►
Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что
$$x = z + h \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_L^{\perp} z = z, \quad \mathcal{P}_L^{\perp} h = 0.$$

Действительно, пусть e_j - элемент базиса, лежащий в L, тогда
$$\mathcal{P}_L^{\perp} e_j = \sum_{i=1}^{k} \langle e_j, e_i \rangle e_i = e_j.$$

Если e_l - элемент базиса, лежащий в M $(k < l \leq n)$, тогда
$$\mathcal{P}_L^{\perp} e_l = \sum_{i=1}^{k} \langle e_l, e_i \rangle e_i = 0.$$

◄

2.5 Задача о перпендикуляре

Задачей о перпендикуляре называется задача об отыскании компонент произвольного вектора x в подпространствах L и M.

Nota bene Алгоритм решения задачи о перпендикуляре:

1. Найти ортонормированный базис $\{e_j\}_{j=1}^k$ подпространства L;
2. Найдем ортогональную проекцию $\mathcal{P}_L^{\perp}x = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i$,
3. Найдем ортогональную проекцию $\mathcal{P}_M^{\perp} = x - \mathcal{P}_L^{\perp}$.

Лемма 2.4. *Имеет место следующее сравнение:*

$$\left\|\mathcal{P}_L^{\perp}x\right\| \leq \|x\|$$

►
Из теоремы Пифагора непосредственно следует, что

$$\left\|\mathcal{P}_L^{\perp}x\right\|^2 + \left\|\mathcal{P}_M^{\perp}x\right\|^2 = \|x\|^2 .$$

◄

Nota bene При $x \in L$ данное неравенство обращается в равенство.

Коэффициенты $\alpha_i = \langle x, e_i \rangle$ ортонормированном базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ пространства X_E называются **коэффициентами Фурье** вектора x относительно этого базиса.

Лемма 2.5. *Справедливо следующее равенство:*

$$\left\|\mathcal{P}_L^{\perp}x\right\|^2 = \sum_{i=1}^k |\langle x, e_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2$$

►
Действительно, прямой проверкой можно убедиться, что

$$\left\|\mathcal{P}_L^{\perp}x\right\|^2 = \left\langle \mathcal{P}_L^{\perp}x, \mathcal{P}_L^{\perp}x \right\rangle = \sum_{i,j=1}^k \langle \langle x, e_i \rangle e_i, \langle x, e_j \rangle e_j \rangle =$$

$$= \sum_{i,j=1}^k \langle x, e_i \rangle \langle x, e_j \rangle \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^k |\langle x, e_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2$$

◄

Лемма 2.6. *(Следствие предыдущих лемм) Неравенство Бесселя:*

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in L.$$

Теорема 2.7. *Система ортонормированных векторов $\{e_i\}_{i=1}^k$ является полной в X_E тогда и только тогда, когда для любого $x \in X_E$ имеет место равенство Парсеваля:*

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2, \quad \alpha_i = \langle e_i, x \rangle, \quad \forall x \in X_E.$$

►

$\Rightarrow$ Очевидно.

$\Leftarrow$ Пусть для любого x выполняется равенство Парсеваля. Предположим, что

$$x = z + h, \quad z = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle e_i, \quad h \perp z,$$

тогда по теореме Пифагора

$$\|x\|^2 = \|z\|^2 + \|h\|^2, \quad \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 + \|h\|^2,$$

откуда следует, что $h = 0$ и система $\{e_i\}_{i=1}^k$ - полная в X_E.

◄