



Лекция 3

Индукцированная евклидова структура

Содержание лекции:

В настоящей лекции мы изучим свойства естественного изморфизма, порожденного метрической формой. Будет введено понятие биортогонального базиса и описан еще один способ разложения произвольного вектора по заданному базису в евклидовом пространстве. Полученные результаты дадут представление о том, какую роль играет введение ортогонального базиса в пространстве.

Ключевые слова:

Индукцированная евклидова структура, теорема Рисса, биортогональный базис, явный вид изморфизма, поднятие и опускание индекса у тензора.

Авторы курса:

Трифанов А. И.

Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:

mathdep.ifmo.ru/geolin

3.1 Изоморфизм X_E и X_E^*

Теорема 3.1. Метрическая форма $g(x, y) = \langle x, y \rangle$ индуцирует естественный изоморфизм $\sigma : X_E \rightarrow X_E^*$ пространств X_E и X_E^* :

$$\forall y \in X_E \quad \tilde{x}(y) = \langle x, y \rangle \quad \tilde{x} = \sigma(x).$$

►

Отображение σ аддитивно:

$$\sigma(x_1 + x_2)(y) = \langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle = \sigma(x_1)(y) + \sigma(x_2)(y) = (\sigma(x_1) + \sigma(x_2))(y).$$

Отображение σ полулинейно:

$$\sigma(\lambda x)(y) = \langle \lambda x, y \rangle = \bar{\lambda} \sigma(x)(y) = (\bar{\lambda} \sigma(x))(y).$$

Докажем инъективность. Пусть $\sigma(x_1) = \sigma(x_2)$, тогда

$$\forall y \in X_E \quad \sigma(x_1)(y) = \sigma(x_2)(y) \Leftrightarrow \langle x_1, y \rangle = \langle x_2, y \rangle \Leftrightarrow \langle x_1 - x_2, y \rangle = 0,$$

и из аксиом скалярного произведения следует, что $x_1 = x_2$. Для завершения доказательства нам необходимо проверить сюръективность отображения σ . Наличие этого свойства доказывается теоремой Рисса.

◀

Теорема 3.2. (Рисс) Для любого $\tilde{x} \in X_E^*$ существует единственный $x \in X_E$, так что

$$\forall y \in X_E \quad \tilde{x}(y) = \langle x, y \rangle.$$

►

Пусть задан $\tilde{x} \neq 0$. Тогда

$$\exists u \in (\ker \tilde{x})^\perp : \quad u \neq 0.$$

Для произвольного $y \in X_E$ рассмотрим следующий вектор:

$$p_y = y - \frac{\tilde{x}(y)}{\tilde{x}(u)} u, \quad p_y \in \ker \tilde{x}.$$

Тогда будем иметь:

$$0 = \langle u, p_y \rangle = \langle u, y \rangle - \frac{\tilde{x}(y)}{\tilde{x}(u)} \|u\|^2,$$

откуда сразу следует, что

$$\tilde{x}(y) = \langle u, y \rangle \frac{\tilde{x}(u)}{\|u\|^2} = \langle x, y \rangle.$$

◀

Nota bene Таким образом, существует обратимое и линейное (с точностью до сопряжения) отображение

$$\sigma^{-1} : X_E^* \rightarrow X_E.$$

Биортогональный базис

Nota bene Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ - базис X_E и $\{f^k\}_{k=1}^n$ - сопряженный ему базис X_E^* . При помощи отображения σ^{-1} "пересадим" векторы базиса $\{f^k\}_{k=1}^n$ в пространство X_E :

$$\sigma^{-1}(f^k) = e^k$$

Лемма 3.1. Наборы $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{e^k\}_{k=1}^n$ обладают следующим свойством:

$$\langle e^k, e_i \rangle = f^k(e_i) = \delta_i^k.$$

|| Базисы $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{e^k\}_{k=1}^n$ называются **биортогональными**.

Nota bene Рассмотрим следующую цепочку преобразований:

$$e_i = \sigma^{-1}(\sigma(e_i)) = \sigma^{-1}\left(\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} f^k\right) = \sum_{k=1}^n \bar{\alpha}_{ik} \sigma^{-1}(f^k) = \sum_{k=1}^n \bar{\alpha}_{ik} e^k$$

Лемма 3.2. Пусть g_{ij} - метрический тензор, тогда $\alpha_{ij} = g_{ij}$



Действительно, прямой проверкой можно убедиться, что

$$g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \langle e^k, e_j \rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \delta_j^k = \alpha_{ij}.$$



Nota bene Таким образом, если G - матрица Грама, тогда $\|\alpha_{ik}\| = \|g_{ik}\| = G$.

Nota bene Прямой проверкой можно убедиться, что

$$e^k = \sum_{i=1}^n \bar{\beta}^{ki} e_i, \quad \|\beta^{ki}\| = G^{-1} = \|g^{ki}\|.$$

3.2 Поднятие и опускание индексов

Nota bene Пусть $x \in X_E$ и имеется два его разложения по биортогональным базисам $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{e^k\}_{k=1}^n$:

$$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i, \quad x = \sum_{k=1}^n \xi_k e^k$$

ИНДУЦИРОВАННАЯ ЕВКЛИДОВА СТРУКТУРА

Лемма 3.3. Имеют место соотношения:

$$\xi^i = \sum_{k=1}^n g^{ik} \xi_k, \quad \xi_k = \sum_{i=1}^n g_{ki} \xi^i.$$

►

Прямой проверкой можно убедиться, что

$$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i = \sum_{i,k=1}^n \xi^i \bar{g}_{ik} e^k = \sum_{k=1}^n \xi_k e^k = x.$$

◄

Nota bene Коэффициенты разложения ξ^i и ξ_k имеют вид:

$$\xi^i = \langle e^i, x \rangle, \quad \xi_k = \langle e_k, x \rangle.$$

Лемма 3.4. Изоморфизм $\sigma : X_E \rightarrow E_X^*$ имеет следующий вид:

$$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i, \quad \sigma(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \xi^i g_{ik} f^k.$$

►

В этом можно убедиться прямой проверкой:

$$\sigma(x) = \sigma \left(\sum_{i=1}^n \xi^i e_i \right) = \sigma \left(\sum_{i=1}^n \xi^i \sum_{k=1}^n \bar{g}_{ik} e^k \right) = \sum_{i,k=1}^n \bar{\xi}^i g_{ik} \sigma(e^k) = \sum_{i,k=1}^n \bar{\xi}^i g_{ik} f^k.$$

◄

Лемма 3.5. Для ортонормированного базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ имеет место:

$$e_i = e^i, \quad \xi_i = \xi^i \quad \Leftrightarrow \quad g_{ik} = \delta_{ik}.$$

|| **Поднятием индекса** называется процедура замены *нижнего индекса на верхний* в соответствии с формулой:

$$\xi^i = \sum_{k=1}^n g^{ik} \xi_k,$$

|| **Опусканием индекса** называется процедура замены *верхнего индекса на нижний* в соответствии с формулой:

$$\xi_k = \sum_{i=1}^n g_{ki} \xi^i.$$

Nota bene Поднятие и опускание индексов у произвольных тензоров производится аналогично описанному для координат векторов. Именно, пусть $\omega \in \Omega_0^p$, тогда $\sigma(\omega) \in \Omega_1^{p-1}$ и получается с помощью следующего преобразования (опускание первого индекса):

$$\tilde{\omega}_{j_1}^{i_2, i_3, \dots, i_p} = g_{j_1 i_1} \omega^{i_1, i_2, \dots, i_p}$$