3.

Любая перестановка представима в виде циклов: $\Leftrightarrow \forall \sigma \in S_n : \sigma = (i_1 \dots i_m)$
Любой цикл разложим на транспозиции $\Leftrightarrow \forall (i_1 \dots i_m) = (i_1, i_2) \dots (i_{m-1}, i_m)$
Таким образом. любая перестановка представима в виде транспозиций
Любая транспозиция представима в виде элементов множества
$\{(1,2);(1,3)\dots(1,n)\} : (a,b) = (1,a)(1,b)(1,a) \implies$
любая перестановка представима в виде элементов заданного множества

Задачи второй трети семестра

1.
- Т. д $\{k_1a_1 + k_2a_2; k_1a_1 - k_2a_2\}$ - ЛНЗ
- Пусть данный набор ЛЗ $\implies \exists p_1, p_2 \neq 0 : p_1(k_1a_1 + k_2a_2) + p_2(k_1a_1 - k_2a_2) = 0$

$$p_1(k_1a_1 + k_2a_2) + p_2(k_1a_1 - k_2a_2) = 0$$
$$k_1p_1a_1 + k_2p_1a_2 + k_1p_2a_1 - k_2p_2a_2 = 0$$
$$a_1(k_1p_1 + k_1p_2) + a_2(k_2p_1 - k_2p_2) = 0$$

- Пользуясь тем, что a_1 и a_2 ЛНЗ делаем вывод, что

$$k_1p_1 + k_1p_2 = 0 \quad \text{и} \quad k_2p_1 - k_2p_2 = 0$$
$$k_1(p_1 + p_2) = 0 \quad \text{и} \quad k_2(p_1 - p_2) = 0$$

- $k_1, k_2 \neq 0 \implies$

$$(p_1 + p_2) = 0 \quad \text{и} \quad (p_1 - p_2) = 0 \implies 2p_1 = 0 \implies \text{противоречие} \implies \text{набор ЛНЗ}$$

2. $a \in A; b \in B; c \in C$

$a < b \Leftrightarrow A \subset B$
$a = b \Leftrightarrow \nexists M : a \in M \;\&\; b \notin M \quad \& \quad \nexists M' : a \notin M' \;\&\; b \in M'$
$a \leq b \Leftrightarrow (a < b$ или $a = b)$
Рефлексинвность: $a = a \implies a \leq a$
Антисимметричность: Если $a < b \implies A \subset B \implies B \not\subset A \implies$
$a \leq b \;\&\; b \leq a \implies a = b$
Транзитивность: $a \leq b \quad \& \quad b \leq c \implies$

- $a < b \;\&\; b = c \implies a < c$
- $a = b \;\&\; b = c \implies a = c$
- $a < b \;\&\; b < c \implies a < c$
- $a = b \;\&\; b < c \implies a < c$

Пусть существует отношение частичного порядка, которое отличается от приведенного выше и образует такие же классы эквивалентности.
$\forall a, b : aR_1b$ или bR_1a или $aR_1b \;\&\; bR_1a$. Если для R_2(новое) отношение между a и b отлично отношения в R_2, то классы эквивалентности по R_2 будут другие.

3. Пусть такой объект существует: $\quad \forall F : F = aD$

   - Рассмотрим случай $m > n \implies$ базисных векторов V^n n штук, тогда хотя бы один из векторов переданных в качестве аргумента D будет линейно зависим от остальных $\implies \forall x_1 \dots x_m : D(x_1 \dots x_m) = 0 \implies$ с помощью D мы можем выразить только нуль-форму $\implies$ противоречие.
   - Рассмотрим случай $m < n \implies$ можем найти детерминант матрицы $A_{n\times m}$, который равен детерминанту A^T, но по предыдущем пункту детерминант матрицы $m\times n$ равен нуль-форме $\implies$ противоречие.

4. - $K_y = (0; y)$ где $y = \frac{1}{n}$
     $g(K_y) = \sup K_y = y = \frac{1}{n}$
     $f(x) = x \implies f(g(K_y)) = y$

   - $K_y = (0; y)$
     $g(K_y) = y$
     $f(x) = x \implies f(g(K_y)) = y$

5.

$$\det(e_1 \dots e_n) = \sum_{i_1 \dots i_n = 1}^{n} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} e_1^{i_1} \dots e_n^{i_n} j;$$

Пусть: $\det(e_1 \dots e_n) = 0 \implies \forall \sigma(\text{перестановка}) : \exists k : e_k^{\sigma(k)} = 0;$

По определению базисных векторов: $\forall k : \exists! \quad i(k) : e_k^{i(k)} = 1$

Рассмотрим: $\sigma(k) = i(k) \implies e_1^{\sigma(1)} \dots e_n^{\sigma(n)} = 1 \implies$ противоречие $\implies \det(e_1 \dots e_n) \neq 0$

6.

$$\sum_{S_n} (-1)^{P(\delta_1 \dots \delta_n)} \sum_{p_1 \dots p_n = 0}^{n} B_{p_1}^{\delta_1} \dots B_{p_n}^{\delta_n} C_1^{p_1} \dots C_n^{p_n}$$

Докажем, что если $\exists i, j : i \neq j$ и $p_i = p_j = k$, то $\quad \exists \delta, \delta' : (-1)^{P(\delta)} \neq (-1)^{P(\delta')}$ такие, что

$$B_{p_1}^{\delta_1} \dots B_{p_n}^{\delta_n} C_1^{p_1} \dots C_n^{p_n} = B_{p_1}^{\delta'_1} \dots B_{p_n}^{\delta'_n} C_1^{p_1} \dots C_n^{p_n}$$

Возьмем произвольную перестановку δ, тогда $\delta' = \delta \cdot \underbrace{(ij)}_{\text{транспозиция}}$

Очевидно, что $\forall \delta : (-1)^{P(\delta)} = 1 : \exists \delta'$. Таким образом, все они взаимно сократятся. Из этого следует, что итерация должна происходить только по перестановкам:

$$\sum_{S_n(\delta)} (-1)^{P(\delta_1 \dots \delta_n)} \sum_{p_1 \dots p_n = 0}^{n} B_{p_1}^{\delta_1} \dots B_{p_n}^{\delta_n} C_1^{p_1} \dots C_n^{p_n} = \sum_{S_n(\delta)} (-1)^{P(\delta_1 \dots \delta_n)} \sum_{S_n(\omega)}^{n} B_{\omega_1}^{\delta_1} \dots B_{\omega_n}^{\delta_n} C_1^{\omega_1} \dots C_n^{\omega_n}$$

Для произвольной перестановки δ из $B^{\delta_1} \dots B^{\delta_n}$ используя коммутативность операции умножения мы можем получить $n!$ различных перестановок множителей, так что их произведения будут равны для каждой перестановки. Таким образом, если мы возьмем произвольную перестановку множителей (назовем ее ω), меняя местами множители мы можем получить:

$$B_{\omega_1}^{\delta_1} \dots B_{\omega_n}^{\delta_n} = B_1^{\delta'_1} \dots B_n^{\delta'_n}, \text{ где}$$
$$\delta' = \delta \cdot \omega^{-1} \implies (-1)^{P(\delta')} = (-1)^{P(\delta)} \cdot (-1)^{P(\omega^{-1})} = (-1)^{P(\delta)} \cdot (-1)^{P(\omega)}$$

Таким образом мы можем вынести общий множитель.

$$\sum_{S_n(\delta)}(-1)^{P(\delta_1\dots\delta_n)}\sum_{S_n(\omega)}^{n}B^{\delta_1}_{\omega_1}\dots B^{\delta_n}_{\omega_n}C^{\omega_1}_1\dots C^{\omega_n}_n=\sum_{S_n(\delta)}(-1)^{P(\delta)}B^{\delta_1}_1\dots B^{\delta_n}_n\sum_{S_n(\omega)}(-1)^{P(\omega)}C^{\omega_1}_1\dots C^{\omega_n}_n$$

7.

Пусть: $A^{-1}=B$. По определению обратной матрицы: $A\cdot B=I$ (identity matrix) $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow (A\cdot B)^i_i=\sum_{k=1}^{n}A^i_kB^k_i=\sum_{k=1}^{n}\delta^i_kA^i_kB^k_i=1,\quad \delta^i_k=\begin{cases}1|i=k\\0|i\neq k\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A^i_i\cdot B^i_i=1\Longrightarrow B^i_i=(A^{-1})^i_i=\frac{1}{A^i_i}$$

8.
- $L=\{f_a|a\in A\}$. Т.д. L - базис $F(A)$

$$M_f=\{f(a)=y_a\mid a\in A \text{ и } y_a\neq 0\}.\ \text{По определению: } |M_f|\neq\infty$$
$$\forall f\in F(A):\ \forall a\in A:\ \exists f_a\in L:\ f(a)=y_a=y_a\cdot f_a(a)=\sum_{a'\in A}f_a(a')y_a$$
$$\text{По определению } L:|L|=|A|\Longrightarrow f(a)=\sum_{a'\in A}f_a(a')y_a=\sum_{g\in L}g(a)\cdot y_a$$

- Пусть существует изоморфизм: $\varphi:F(A)\to G\Longrightarrow\exists\varphi^{-1}:G\to F(A)$ φ^{-1} - также является изоморфизмом
  Из данного определения базиса следует, что существует не единственное представление нуля.
  $$\sum_{x\in A}n_xx=\sum_{x\in A}n'_xx=0_G$$
  $$\varphi^{-1}(\sum_{x\in A}n_xx)=\varphi^{-1}(\sum_{x\in A}n'_xx)=\varphi^{-1}(0_G)=y$$
  Нарушена биективность $\Longrightarrow$ группы не изоморфны.