η

Лекция 6

Матрицы и определители

Содержание лекции:
В настоящей лекции мы начинаем рассматривать один из основных обьектов линейной алгебры - матрицу. Здесь мы введем основные определения, связанные с этим понятием и выведем некоторые интересные свойства и приведем ряд примеров. Исследование матриц по существу составляет основную часть настоящего курса.

Ключевые слова:
Матрица, сумма и произведение матриц, единичная матрица, нильпотентная матрица, обратимая матрица, определитель матрицы, дополнительный минор, элементарные преобразования, транспонированная матрица.

Авторы курса:

Трифанов А.И. Москаленко М.А.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

6.1 Определения

Матрицей договоримся называть прямоугольную таблицу, составленную из элементов некоторого поля K:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m3} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in K,$$

совокупность элементов с фиксированным первым индексом называется **строкой матрицы**, а с фиксированным вторым индексом - **столбцом матрицы** A.

Nota bene Число m определяет, таким образом, число строк матрицы, а n - число ее столбцов. Матрица, у которой $m = n$ называется *квадратной*, в противном случае - *прямоугольной*.

Nota bene Множество $m \times n$ матриц с элементами из поля K будем обозначать $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

Суммой матриц A и B, где $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ называется матрица $C = A + B$, $C \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ такая что:

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}, \quad A = \{a_{i,j}\}, \quad B = \{b_{i,j}\}.$$

Лемма 6.1. *Относительно операции сложения $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ - абелева группа.*

▶

Проверим аксиомы группы:

- ассоциативность следует из определения и проверяется тривиально;
- нейтральный элемент - нулевая матрица $\theta: \quad \theta_{i,j} = 0$;
- противоположный элемент: $\quad \forall A = \{a_{i,j}\} \quad \exists\,(-A) = \{-a_{i,j}\}$.

◀

Произведением матриц $A \in \mathcal{M}_{m,p}(K)$ и $B \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ называется матрица $C = A \cdot B$, $C \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, такая что:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}, \quad A = \{a_{i,k}\}, \quad B = \{b_{k,j}\}.$$

Лемма 6.2. *Операция умножения матриц ассоциативна и некоммутативна.*

Единичной матрицей $E \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ называется матрица, для которой

$$e_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \equiv \delta_{i,j}.$$

Nota bene Пусть $A \in \mathcal{M}_{m,p}(K)$, $B \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ и $E \in \mathcal{M}_{p,p}(K)$, тогда

$$A \cdot E = A, \quad E \cdot B = B.$$

Квадратная матрица N называется **нильпотентной матрицей порядка** k, если

$$N^m = N \cdot \ldots \cdot N = \theta, \quad N^{m-1} \neq \theta.$$

Nota bene Пример нильпотентной матрицы порядка $k = 2$:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ называется **обратимой**, если в $\mathcal{M}_{n,n}(K)$ существуют матрицы B и C, такие что

$$A \cdot B = E = C \cdot A.$$

Лемма 6.3. *На множестве квадратных матриц $\mathcal{M}_{n,n}$ операция умножения индуцирует структуру некоммутативного моноида.*

Теорема 6.1. *Операции сложения и умножения индуцируют на множестве квадратных матриц $\mathcal{M}_{n,n}$ структуру ассоциативного некоммутативного кольца.*

Пример 6.1. Приведем пример одного интересного изоморфизма. Рассмотрим множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ и множество $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ 2×2 вещественных квадратных матриц вида:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Пусть $\sigma : \mathbb{C} \to \mathcal{M}_2$ - отображение со следующими свойствами:

$$\sigma(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma(i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверьте, что σ - гомоморфно, сюрьективно и инъективно.

6.2 Определитель матрицы

Определителем квадратной матрицы A договоримся называть число $\det(A)$, которое ставится ей в соответствие по следующим образом:

1. $\det A_1 = \det(a) = a$;
2. $\det A_2 = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$.

   $\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$

m. $\det A_m = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+j} \cdot a_{i,j} \cdot M_{i,j}$,

где $M_{i,j}$ - **дополнительный минор** элемента $a_{i,j}$ - определитель матрицы A', полученной из матрицы A вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых находится элемент $a_{i,j}$.

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие:

E1. Перестановка строк матрицы;

E2. Произведение всех элементов некоторой строки на число $\lambda \neq 0$;

E3. Поэлементное сложение одной строки с другой, умноженной на число λ.

Лемма 6.4. *Имеют место следующие свойства определителя:*

1. *при элементарном преобразовании (E1) определитель меняет знак;*
2. *общий множитель всех элементов строки может быть вынесен;*
3. *при элементарном преобразовании (E2) определитель сохраняется;*
4. *определитель с двумя одинаковыми строками равен нулю;*
5. *определитель произведения матриц равен произведению их определителей;*

Nota bene Прямой проверкой легко убедиться, что

$$\det(A + B) \neq \det A + \det B.$$

Транспонированием матрицы $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ называется операция $()^T$ в результате которой получается матрица со следующим свойством:

$$A = \{a_{i,j}\}, \quad A^T = \{a'_{i,j}\}, \quad a'_{i,j} = a_{j,i}.$$

Лемма 6.5. *Имеет место свойство:*

$$\det(A^T) = \det(A).$$

Теорема 6.2. *(критерий обратимости матрицы)*

$$\exists\, A^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0.$$