



Лекция 2

Координаты в аффинном пространстве

Содержание лекции:

В настоящей лекции мы вводим в аффинное пространство координаты. Репер, или система координат может быть введена непосредственно применением векторизации аффинного пространства, однако есть более естественный способ это сделать.

Ключевые слова:

Система координат, барицентрическая комбинация, центр тяжести, аффинная независимость, барицентрические координаты.

Авторы курса:

Трифанов А. И.

Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:

mathdep.ifmo.ru/geolin

2.1 Координаты в аффинном пространстве

Системой координат в аффинном пространстве $\mathcal{A} = (S, V, g)$ называется пара $m_o = (O, \{\vec{e}_j\}_{j=1}^n)$, состоящая из произвольно выбранной точки $O \in S$ и произвольно выбранного базиса $\{\vec{e}_j\}_{j=1}^n$ пространства V .

Nota bene При векторизации σ_o пространства относительно точки O координатами точки P будет набор $\{\xi^j\}_{j=1}^n$, такой что

$$P \rightarrow \sigma_o(P) = \overrightarrow{OP} = \sum_{j=1}^n \xi^j \vec{e}_j.$$

Nota bene Пусть $\{\xi^j\}_{j=1}^n$ координаты точек P в системе координат m_o и $\{\eta^j\}_{j=1}^n$ - координаты точки Q в той же системе. Тогда из соотношения

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \vec{v},$$

следует выражение для координат вектора \vec{v} :

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^n (\eta^j - \xi^j) \vec{e}_j.$$

2.2 Барицентрическая комбинация

Барицентрической линейной комбинацией точек $\{P_i\}_{i=1}^k \in \mathcal{A}$ аффинного пространства \mathcal{A} называется выражение вида

$$\sum_{i=1}^k \alpha^i P_i, \quad \text{где} \quad \sum_{i=1}^k \alpha^i = 1 \quad \alpha^i \in \mathbb{R}.$$

Nota bene При векторизации σ_o аффинного пространства барицентрическая линейная комбинация задает точку $P \in S$, чей радиус-вектор равен

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^k \alpha^i \overrightarrow{OP_i}$$

Лемма 2.1. Точка P - результат барицентрической линейной комбинации точек $\{P_i\}_{i=1}^k$ - определена корректно.



Пусть O' - другая точка, тогда

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O'O} + \sum_{i=1}^k \alpha^i \overrightarrow{OP_i} = \sum_{i=1}^k \alpha^i (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP_i}) = \sum_{i=1}^k \alpha^i \overrightarrow{O'P_i},$$

где было использовано свойство $\sum_{i=1}^k \alpha^i = 1$.



Пример 2.1. Центр тяжести системы точек $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$:

$$\text{center}(P_1, P_2, \dots, P_n) = \frac{1}{n} (P_1 + P_2 + \dots + P_n).$$

Nota bene Барицентрическая комбинация $\lambda P + \mu Q$ двух точек P и Q есть точка R , лежащая на прямой PQ , и обладающая свойством

$$\overrightarrow{PR} = \frac{\mu}{\lambda} \overrightarrow{RQ}.$$

Лемма 2.2. Непустое множество $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ является плоскостью тогда и только тогда, когда вместе с любыми двумя различными точками оно содержит проходящую через них прямую.

►

⇐ Утверждение очевидно.

⇒ Пусть \mathcal{P} обладает указанным свойством и $P_0 \in \mathcal{P}$. Покажем, что множество

$$U = \{u \in U : P_0 + u \in \mathcal{P}\} \subset V,$$

является подпространством. Ясно, что $0 \in U$ и если $u \in U$, а $\lambda \in \mathbb{k}$, то $P_0 + \lambda u$ лежит на прямой, проходящей через точки P_0 и $P_0 + u$. Следовательно $\lambda u \in U$. Пусть теперь $u_1, u_2 \in U$ и $\lambda \in \mathbb{k}$, так что $\lambda \notin \{0, 1\}$, тогда точка $P = P_0 + u_1 + u_2$ лежит на прямой, проходящей через точки

$$P_1 = P_0 + \lambda u_1 \in \mathcal{P}, \quad P_2 = P_0 + \frac{\lambda}{\lambda - 1} u_2 \in \mathcal{P},$$

а именно:

$$P = \frac{1}{\lambda} P_1 + \frac{\lambda - 1}{\lambda} P_2 \Rightarrow P \in \mathcal{P}.$$

◀

Аффинная независимость

|| Система точек $\{P_i\}_{i=0}^k$ называется **аффинно-независимой**, если никакую из этих точек нельзя представить в виде барицентрической линейной комбинации остальных.

Лемма 2.3. Система точек $\{P_i\}_{i=0}^k$ аффинно-независима тогда и только тогда, когда система векторов $\{\overrightarrow{P_0 P_i}\}_{i=1}^k$ линейно-независима.

►

⇐ Предположим, что $\{P_i\}_{i=0}^k$ - аффинно-зависима и

$$P_0 = \sum_{i=1}^k \alpha^i P_i, \quad \sum_{i=1}^k \alpha^i = 1,$$

КООРДИНАТЫ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

тогда векторизация относительно точки P_0 дает

$$\vec{0} = \overrightarrow{P_0 P_0} = \sum_{i=1}^k \alpha^i \overrightarrow{P_0 P_i}, \quad \sum_{i=1}^k \alpha^i = 1,$$

и значит система векторов $\{\overrightarrow{P_0 P_i}\}_{i=1}^k$ линейнозависима.

\Rightarrow Предположим, что

$$\sum_{i=1}^k \alpha^i \overrightarrow{P_0 P_i} = \vec{0}.$$

Возможны два случая:

- $\sum_{i=1}^k \alpha^i \neq 0$, тогда без ограничения общности можно считать, что

$$\sum_{i=1}^k \alpha^i = 1 \quad \Rightarrow \quad P = \sum_{i=1}^k \alpha^i P_i \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{P_0 P} = \sum_{i=1}^k \alpha^i \overrightarrow{P_0 P_i} = \vec{0}, \quad \Rightarrow \quad P = P_0.$$

- $\sum_{i=1}^k \alpha^i = 0$, но $\lambda_1 \neq 0$, тогда используем соотношение:

$$\overrightarrow{P_0 P_i} = -\overrightarrow{P_1 P_0} + \overrightarrow{P_1 P_i},$$

получаем линейную комбинацию

$$\alpha^0 \overrightarrow{P_1 P_0} + \sum_{i=2}^k \alpha^i \overrightarrow{P_1 P_i} = \vec{0},$$

в которой

$$\alpha^0 = -\sum_{i=1}^k \alpha^i = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^0 + \sum_{i=2}^k \alpha^i = -\lambda_1 \neq 0,$$

и значит P_1 является барицентрической линейной комбинацией точек $\{P_i\}_{i=1}^k$.

◀

Барицентрические координаты

Теорема 2.1. Пусть $\dim \mathcal{A} = n$ и $\{P_i\}_{i=0}^n$ - аффинно-независимая система точек в \mathcal{A} . Тогда каждая точка $P \in \mathcal{A}$ единственным образом представляется в виде

$$P = \sum_{i=0}^n \xi^i P_i, \quad \sum_{i=0}^n \xi^i = 1.$$

►

Утверждение теоремы можно записать в виде

$$\overrightarrow{P_0 P} = \sum_{i=1}^n \xi^i \overrightarrow{P_0 P_i}, \quad \xi^i \in \mathbb{K}.$$

КООРДИНАТЫ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Отсюда следует, что в качестве $\{\xi^i\}_{i=1}^n$ можно взять координаты вектора $\overrightarrow{P_0P}$ в базисе $\{\overrightarrow{P_0P_i}\}_{i=1}^n$. После этого ξ^0 определяется равенством

$$\xi^0 = 1 - \sum_{i=1}^n \xi^i.$$



|| Совокупность чисел $\xi^0, \xi^1, \dots, \xi^k$ называется **барицентрическими координатами** точки $P \in \mathcal{A}$ относительно системы точек $\{P_i\}_{i=0}^n$.