Лекция 3

Аффинные отображения

Содержание лекции:
В этой лекции мы рассмотрим свойства отображений аффинных пространсв, которые сохраняют аффинную структуру. Эти отображения называются аффинными. Их структура весьма проста, но в приложениях играет исключительно важную роль. Мы приближемся к аффинной геометрии.

Ключевые слова:
Аффиное отбражение, дифференциал, биективность аффинного отображения, изоморфизм аффинных пространств, аффинная зависимость, аффинно-линейная функция, многообразие уровня.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

3.1 Основные определения

Пусть $\mathcal{A} = (S_A, V_A, g_A)$, $\mathcal{B} = (S_B, V_B, g_B)$ - аффинные пространства.

Аффинным отображением пространства $\mathcal{A}$ в пространство $\mathcal{B}$ называется всякое отображение, обладающее свойством

$$\sigma(P + \vec{u}) = \sigma(P) + \varphi(\vec{u}), \quad P \in \mathcal{A}, \quad \vec{u} \in V_A(\Bbbk),$$

где $\varphi : V_A(\Bbbk) \to V_B(\Bbbk)$ - линейное отображение.

Лемма 3.1. *Отображение φ однозначно определяется по σ:*

$$\varphi\left(\overrightarrow{PQ}\right) = \overrightarrow{\sigma(P)\sigma(Q)}$$

▶
Действительно, пусть $Q \in \mathcal{A}$, тогда

$$\sigma(Q) = \sigma\left(P + \overrightarrow{PQ}\right) = \sigma(P) + \varphi\left(\overrightarrow{PQ}\right).$$

◀

Отображение φ называется **дифференциалом** отображения σ и обозначается $d\sigma$.

Пример 3.1. Примеры аффинных преобразований:

1. тождественное преобразование $\varphi = id_S$:

$$id_S\,(P + \vec{v}) = P + \vec{v}$$

2. параллельный перенос $\varphi = t_{\vec{w}}$:

$$t_{\vec{w}}\,(P + \vec{v}) = (P + \vec{w}) + \vec{v}$$

Nota bene Векторизация пространств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ относительно точек O и O' дает:

$$\sigma(\vec{r}) = d\sigma(\vec{r}) + b, \quad b = \overrightarrow{O'\sigma(O)} \in V_B,$$

где $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ - радиус вектор точки $P \in \mathcal{A}$.
▶
Действительно, прямой проверкой можно убедиться, что

$$\sigma(P) = \sigma(O + \overrightarrow{OP}) = \sigma(O) + d\sigma(\overrightarrow{OP}),$$
$$\sigma(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{O'\sigma(O)} + d\sigma(\overrightarrow{OP}) \quad \Rightarrow \quad \sigma(\vec{r}) = d\sigma(\vec{r}) + \vec{b}.$$

◀

Лемма 3.2. *Пусть $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ - аффинное отображение, тогда*

$$\sigma\left(\sum_i \alpha^i P_i\right) = \sum_i \alpha^i \sigma(P_i),$$

для любой барицентрической линейной комбинации системы точек $\{P_i\}_{i=1}^k$.

▶

Векторизация пространства $\mathcal{A}$ дает следующую цепочку равенств:

$$\sigma\left(\sum_i \alpha^i \overrightarrow{OP_i}\right) = \sigma\left(\sum_i \alpha_i \overrightarrow{OP_i}\right) + \vec{b} = \sum_i \alpha_i (d\sigma(\overrightarrow{OP_i}) + b) = \sum_i \alpha_i \sigma(\overrightarrow{OP_i}).$$

◀

3.2 Изоморфизм аффинных пространств

Лемма 3.3. *Аффинное отображение $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ биективно тогда и только тогда, когда его дифференциал биективен.*

▶

Выберем начала отсчета O и O' в $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ так, чтобы $\sigma(O) = O'$. Тогда отображение σ в векторизованной форме будет совпадать со своим дифференциалом $d\sigma$, откуда следует доказательство утверждения.

◀

> **Изоморфизмом аффинных пространств** называется биективное аффинное отображение.

Лемма 3.4. *Аффинные пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.*

▶

При аффинном отображении $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ всякая плоскость $\mathcal{P} = P_0 + U(\Bbbk)$ пространства $\mathcal{A}$ переходит в плоскость $\sigma(\mathcal{P}) = \sigma(P_0) + d\sigma(U)$ пространства $\mathcal{B}$. Если σ - биективно, то $\dim \mathcal{P} = \dim \sigma(\mathcal{P})$.

◀

Лемма 3.5. *При изоморфизме $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ системы точек $\{P_i\}_{i=1}^k$ и $\{\sigma(P_i)\}_{i=1}^k$ афинно зависимы или аффинно независимы одновременно.*

3.3 Аффинно-линейные функции

> **Аффинно-линейной функцией** на аффинном пространстве $\mathcal{A}$ называется отображение $f : \mathcal{A} \to \Bbbk$, обладающее свойством:
>
> $$f(P + \vec{v}) = f(P) + \alpha(\vec{v}), \quad P \in \mathcal{A}, \quad \vec{v} \in V(\Bbbk).$$

Nota bene В векторизованной форме с началом в точке $O \in \mathcal{A}$, аффинно-линейная функция f записывается в виде:

$$f(\vec{r}) = \alpha(\vec{r}) + b, \quad b \in \Bbbk, \quad b = f(O).$$

или в координатах:

$$f(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n) = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi^i + b.$$

Nota bene *Многообразия уровня* $f(P) = c$ аффинно линейной функции представляют собой параллельные гиперплоскости с направляющим подпространством, задаваемым уравнением $df(\vec{v}) = 0$.

Лемма 3.6. *Барицентрические координаты - это аффинно-линейные функции.*

►

Пусть $\{\xi^i\}_{i=0}^n$ - барицентрические координаты относительно системы точек $\{P_i\}_{i=0}^n$. Возьмем точку P_0 за начало отсчета и векторизуем пространство $\mathcal{A}$. Тогда $\{\xi^i\}_{i=1}^n$ - будут координатами относительно базиса $\left\{\overrightarrow{P_0P_i}\right\}_{i=1}^n$. Следовательно, $\{\xi^i\}_{i=1}^n$ - аффинно-линейные функции. Так как $\xi^0 = 1 - \sum_{i=1}^n$, то ξ^0 - также аффинно-линейная функция.

◄