γ

Лекция 3

Изоморфизм линейных пространств.

Содержание лекции:
В настоящей лекции мы обсудим важную концепцию изоморфизма линейных пространств. Изоморфные пространства как алгебраические структуры неотличимы. Мы покажем, что исследование структуры этих пространств можно без потери общности ограничить только некоторыми представителями, а именно координатными пространствами.

Ключевые слова:
Биекция, линейность, изоморфизм, изоморфные пространства, изоморфизм и линейная зависимость, классы изоморфных пространств.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

3.1 Определение изоморфизма

Пусть $X(K)$ и $Y(K)$ - линейные пространства над одним и тем же полем K.

Nota bene Напомним что отображение $\varphi : X \to Y$ между *множествами* X и Y называется **биекцией**, если существует отображение $\psi : Y \to X$, такое что

$$\forall x \in X \quad \psi(\varphi(x)) = x, \quad \forall y \in Y \quad \varphi(\psi(y)) = y,$$

то есть

$$\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_X, \quad \varphi \circ \psi = \mathrm{id}_Y .$$

Лемма 3.1. *Биекция является взаимно-однозначным отображением.*

Отображение $\varphi : X \to Y$ линейного пространства $X(K)$ в линейное пространство $Y(K)$ называется **линейным**, если

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2),$$
$$\forall x \in X, \quad \forall \alpha \in K \quad \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x).$$

Лемма 3.2. *Если $\varphi : X(K) \to Y(K)$ - линейно, тогда*

$$\varphi(0_X) = 0_Y$$

►
Действительно, из свойства линейности и аксиом линейного пространства, имеем:

$$\varphi(0_X) = \varphi(0 \cdot x) = 0 \cdot \varphi(x) = 0_Y.$$

◄

Отображение $\varphi : X \to Y$ линейного пространства $X(K)$ в линейное пространство $Y(K)$ называется **изоморфизмом**, если φ биективно и линейно.

Лемма 3.3. *Пусть $X(K)$ - линейное пространство и $\{e_j\}_{j=1}^n$ - базис $X(K)$, тогда отображение*

$$\varphi : \quad X(K) \to K^n,$$

сопоставляющее каждому вектору $x \in X(K)$ набор его координат в базисе $\{e_j\}_{j=1}^n$ является изоморфизмом.

Лемма 3.4. *Отображение φ^{-1}, обратное изоморфизму φ является изоморфизмом.*
►
По определению, φ^{-1} является биекцией. Таким образом, необходимо доказать только линейность. Пусть $y_1, y_2 \in Y$, тогда

$$\varphi^{-1}(y_1), \varphi^{-1}(y_2) \in X.$$

Из линейности φ следует

$$\varphi\left(\varphi^{-1}(y_1)+\varphi^{-1}(y_2)\right)=\varphi\left(\varphi^{-1}(y_1)\right)+\varphi\left(\varphi^{-1}(y_2)\right)=y_1+y_2.$$

Применим к обеим частям φ^{-1} и получим

$$\varphi^{-1}(y_1+y_2)=\varphi^{-1}(y_1)+\varphi^{-1}(y_2).$$

Пусть теперь $y\in Y$, тогда

$$\varphi\left(\alpha\varphi^{-1}(y)\right)=\alpha\varphi\left(\varphi^{-1}(y)\right)=\alpha y \quad\Rightarrow\quad \varphi^{-1}(\alpha y)=\alpha\varphi^{-1}(y).$$

◀

3.2 Изоморфизм и линейная зависимость

Лемма 3.5. *При изоморфизме линейно-зависимый набор векторов отображается в линейно зависимый набор.*

▶

Пусть $\{x_i\}_{i=1}^n$ - линейно зависимый набор в X, тогда существует нетривиальный набор коэффициентов $\{\alpha^i\}_{i=1}^n$, такой что

$$\sum_{i=1}^n x_i\alpha^i=0_X.$$

Пусть $\varphi:X\to Y$ - изоморфизм, тогда

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i\alpha^i\right)=\sum_{i=1}^n\varphi(x_i)\alpha^i=\sum_{i=1}^n y_i\alpha^i=0_Y,\quad y_i=\varphi(x_i).$$

Так как набор $\{\alpha^i\}_{i=1}^n$ нетривиален, то набор $\{y_i\}_{i=1}^n$ - линейно зависимый.

◀

Лемма 3.6. *При изоморфизме линейнонезависимый набор векторов отображается в линейнонезависимый набор.*

▶

От противного. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^n$ - линейнонезависимы набор, а $\{\varphi(x_i)\}_{i=1}^n$ - линейнозависимый. Но тогда

$$\left\{\varphi^{-1}\left(\varphi(x_i)\right)\right\}_{i=1}^n$$

- линейнозависимый набор. Противоречие.

◀

Лемма 3.7. *При изоморфизме $\varphi : X \to Y$ базис пространства X отображается в базис пространства Y.*

▶

Для доказательства нам достаточно показать, что из полноты набора $\{e_j\}_{j=1}^n$ следует полнота набора $\{\varphi(e_j)\}_{j=1}^n$. Действительно для любого $y \in Y$ имеет место

$$\exists \ \{\alpha^i\}_{i=1}^n : \quad \varphi^{-1}(y) = \sum_{i=1}^n e_i \alpha^i \quad \Rightarrow \quad y = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i)\alpha^i,$$

что и требовалось доказать.

◀

3.3 Изоморфные пространства

> Линейные пространства $X(K)$ и $Y(K)$ называются **изоморфными**, если существует изоморфизм $\varphi : X \to Y$.

Nota bene Тот факт, что пространство $X(K)$ изоморфно пространству $Y(K)$ будем обозначать $X \simeq Y$.

Лемма 3.8. *Изоморфность линейных пространств - отношение эквивалентности.*

▶

Докажем необходимые свойства:

1. рефлексивность ($X \simeq X$):
   тождественное отображение $\mathrm{id}_X : X \to X$ является изоморфизмом;

2. симметричность ($X \simeq Y \Rightarrow Y \simeq X$)
   было доказано, что обратное отображение также изоморфизм;

3. транзитивность ($X \simeq Y, \quad Y \simeq Z \quad \Rightarrow \quad X \simeq Z$) пусть $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Y \to Z$ соответствующие изоморфизмы, тогда $\psi \circ \varphi$ - изморфизм и $X \simeq Z$.

◀

Nota bene Полученное отношение эквивалентности порождает классы эквивалентности изоморфных пространств.

Лемма 3.9. *Чтобы пространства $X(K)$ и $Y(K)$ были изоморфны необходимо и достаточно чтобы их размерности совпадали:*

$$X(K) \simeq Y(K) \quad \Leftrightarrow \quad \dim_K X = \dim_K Y.$$

▶

$\Rightarrow$ Пусть $X(K) \simeq Y(K)$, тогда образом базиса пространства X будет некоторый базис пространства Y. В силу биективности изоморфизма, количества векторов в

соответствующих наборах будут совпадать.
$\Leftarrow$ Если $\dim_K X = \dim_K Y$, тогда $X \simeq K^n$ и $Y \simeq K^n$. В силу симметричности и транзитивности мы получим $X \simeq Y$.
◄

Nota bene Таким образом, каждый класс эквивалентности изоморфных пространств содержит линейные пространства одинаковой размерности. Типичными представителями данных классов являются "арифметические" пространства столбцов:

$$[n = 1] \leftrightarrow K^1, \quad [n = 2] \leftrightarrow K^2, \quad \dots, \quad [n = m] \leftrightarrow K^m$$

Nota bene Выберем базис в каждом из пространств X и Y:

$$\{e_j\}_{j=1}^n \in X, \quad \{f_j\}_{j=1}^n \in Y, \quad e_j \leftrightarrow f_j \quad \forall j.$$

Изоморфизм между X и Y устанавливается следующим соответствием:

$$x = \sum_{i=1}^n e_i \alpha^i \quad \leftrightarrow \quad y = \sum_{i=1}^n f_i \alpha^i.$$