ϵ

Лекция 5

Структура евклидова пространства

Содержание лекции:
В настоящей лекции мы кратко обсудим структуру и объекты евклидова пространства. Будут введены понятия, минимально необходимые для построения евклидовой геометриии. Более близкое знакомство нас ждет в будущем, а пока познакомимся с основами...

Ключевые слова:
Вещественное линейное пространство, скалярное произведение, евклидово пространство, метрический тензор, матрица Грама, длина вектора, неравенство Шварца, ортогональные векторы, ортогональный базис, ортогональность вектора и подпространства, ортогональное дополнение, ортогональная проекция, ортогональный проектор, задача о перпендикуляре.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

5.1 Скалярное произведение

Вещественным будем называть линейное пространство, заданное над полем $\mathbb{R}$.

Скалярным произвежением называется отображение

$$g : X(\mathbb{R}) \times X(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle,$$

обладающее следующими свойствами:

1. симметричность: $\forall x, y \in X(\mathbb{R}) \quad \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$,
2. билинейность: $\forall x, y, z \in X(\mathbb{R}) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \langle x + \alpha y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \alpha\langle y, z\rangle$,
3. положительность: $\forall x \in X(\mathbb{R}) \quad \langle x, x\rangle \geq 0, \quad \langle x, x\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$.

Отображение g при этом называется метрической формой, а пара $E(\mathbb{R}) = (X(\mathbb{R}), g)$ - **евклидовым пространством**.

Nota bene Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ - базис пространства $X(\mathbb{R})$ и $x, y \in X(\mathbb{R})$, тогда

$$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^n \eta^j e_j,$$

и вычисление скалярного произведения дает

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \xi^i e_i, \sum_{j=1}^n \eta^j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi^i \eta^j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi^i \eta^j g_{ij}.$$

Набор элементов $g_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$ называется **метрическим тензором**. Матрицу коэффициентов $G = \|g_{ij}\|$ называют **матрицей Грама**.

5.2 Длина и угол

Длиной вектора $x \in E(\mathbb{R})$ называется величина

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Лемма 5.1. *(неравенство Шварца) Для любых $x, y \in E(\mathbb{R})$ имеет место неравенство:*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

▶
Рассмотрим билинейную форму, с параметром λ:

$$\|\lambda x + y\|^2 = \langle \lambda x + y, \lambda x + y\rangle = \langle \lambda x, \lambda x\rangle + \langle \lambda x, y\rangle + \langle y, \lambda x\rangle + \langle y, y\rangle =$$
$$= |\lambda|^2 \|x\|^2 + \lambda\left(\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle\right) + \|y\|^2 \geq 0.$$

Используем свойство $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ и преобразуем выражение

$$|\lambda|^2 \|x\|^2 + 2\lambda \langle x, y\rangle + \|y\|^2 \geq 0.$$

Тогда $D/4 = |\langle x, y\rangle|^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0.$

◀

Лемма 5.2. *Неравенство Шварца превращается в равенство тогда и только тогда, когда x и y линейнозависимы.*

▶

Пусть $y = \alpha x$, тогда

$$|\langle x, \alpha x\rangle| \leq \|x\| \|\alpha x\|, \quad \Rightarrow \quad |\alpha| \|x\|^2 \leq |\bar{\alpha}| \|x\|^2, \quad |\bar{\alpha}| = |\alpha|.$$

Пусть $|\langle x, y\rangle| = \|x\| \|y\|$, тогда

$$D/4 = |\langle x, y\rangle| = \|x\| \|y\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \neq 0: \quad \|\lambda x + y\|^2 = 0,$$
$$\Leftrightarrow \quad \lambda x + y = 0.$$

◀

Nota bene Назовем углом между векторами величину θ, если

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}.$$

5.3 Ортогональность

> Два ненулевых вектора x и y называются **ортогональными**, если их скалярное произведение равно нулю:
>
> $$\langle x, y\rangle = 0, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0.$$

Nota bene Обычно используется обозначение $x \perp y$.

Nota bene Набор ненулевых векторов $\{x_i\}_{i=1}^k$ называется ортогональным, если все векторы набора попарно ортогональны:

$$\langle x_i, x_{j\neq i}\rangle = 0.$$

Лемма 5.3. *Всякий ортогональный набор является линейно-независимым.*

▶

Рассмотрим нулевую линейную комбинацию

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0,$$

$$\left\langle \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i, x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle x_i, x_j\rangle = \alpha_j \langle x_j, x_j\rangle = \alpha_j \|x_j\|^2 = 0,$$

но $\|x_j\| \neq 0$ и значит $\alpha_j = 0, \forall j$.

◀

Ортогональным базисом называется полный набор ортогональных векторов.

5.4 Ортогональное дополнение

Говорят, что x **ортогонален линейному подпространству** $L \leq E$, если

$$x \perp L \quad \Leftrightarrow \quad x \perp y, \quad \forall y \in L.$$

Лемма 5.4. *Следующее множество является подпространством $E(\mathbb{R})$.*

$$L^{\perp} = \{x \in E(\mathbb{R}) : \quad x \perp L\}.$$

▶

Прямой проверкой убеждаемся, что $L^{\perp}$ замкнуто относительно операций в $E(\mathbb{R})$.

◀

Подпространство $L^{\perp}$ называется **ортогональным дополнением** пространства L.

Nota bene Пространства L и $L^{\perp}$ - евклидовы.

Лемма 5.5. *Пусть $L(\mathbb{R}) \leq E(\mathbb{R})$, тогда имеет место разложение:*

$$E(\mathbb{R}) = L(\mathbb{R}) \oplus L^{\perp}(\mathbb{R}),$$

где соответствующая сумма является прямой.

▶

В силу определения ортогонального дополнения, необходимо проверить только тривиальность пересечения L и $L^{\perp}$:

$$z \in L \cap L^{\perp} \quad \Leftrightarrow \quad z \in L, z \in L^{\perp} \quad \Rightarrow \quad \langle z, z \rangle = \|z\|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0.$$

◀

5.5 Ортогональная проекция

Nota bene Напомним, что разложение $E = L \oplus L^{\perp}$ дает

$$\forall x \in E \quad \exists! y \in L, z \in L^{\perp} : \quad x = y + z.$$

Компоненты вектора x в подпространствах L и $L^{\perp}$ называются **ортогональными проекциями** вектора x, а соответствующие линейные отображения:

$$\mathcal{P}_L^{\perp} x = y, \quad \mathcal{P}_{L^{\perp}}^{\perp} x = z$$

называются **ортогональными проекторами** на подпространства L и $L^{\perp}$.

Nota bene Будем использовать следующие обозначения:

$$y = x_L, \quad z = x_L^\perp$$

для ортогональных проекций, для их длин такие:

$$\|y\| = \text{Пр}_L^\perp x, \quad \|z\| = \text{Пр}_{L^\perp}^\perp x.$$

Пример 5.1. Рассмотрим задачу о нахождении ортогональной проекции вектора x на подпространство L, базисом которого является набор $\{y_i\}_{i=1}^k$. Имеем следующее разложение:

$$x = y + z = \sum_{i=1}^{k} \xi^i y_i + z, \quad y_i \perp z.$$

Построим скалярные произведения вектора x последовательно с векторами y_j:

$$\sum_{i=1}^{k} \xi^i \langle y_i, y_j \rangle = \langle x, y_j \rangle, \quad j = 1 \dots k.$$

Получившаяся система имеет единственное решение $\{\xi_0^i\}_{i=1}^k$, из которого определяются проекции y и z:

$$y = \sum_{i=1}^{k} \xi_0^i y_i, \quad z = x - y.$$

Nota bene Если базис $\{y_i\}_{i=1}^k$ является ортонормированным, тогда

$$\xi_0^j = \langle x, y_j \rangle, \quad x_j = \langle x, y_j \rangle y_j, \quad y = \sum_{i=1}^{k} \langle x, y_i \rangle y_i.$$
