Лекция 1

Пространства: метрические, ...

Содержание лекции:
С настоящей лекции мы начнем изучать структуры на линейном пространстве, которые лежат в основе построения геометрии. Понятие метрики (расстояния) является одним из ключевых для целого ряда областей и приложений математики. Мы систематически исследуем геометрические свойства линейного пространства, введя в него скалярное произведение, которое индуцирует на нем и норму и метрику.

Ключевые слова:
Метрическое пространство, расстояние, норма, нормированное пространство, скалярное произведение, вещественное и комплексное евклидово пространство, метрическая форма, метрический тензор, пространство Минковского, неравенство Шварца.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

1.1 Метрическое и нормированное пространства

Метрическим пространством M называется некоторое множество, на котором определено отображение $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$, обладающее следующими свойствами (аксиомами):

1. $\rho(x,y) \geq 0, \quad \rho(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y;$
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x);$
3. $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z).$

Nota bene Отображение ρ называется **расстоянием**.

Пример 1.1. Пусть $M = \mathbb{R}^n$

1. $\rho(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y, \\ 0 & x = y; \end{cases}$
2. $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\xi^i - \eta^i\right)^2};$
3. $\rho(x,y) = \sup_{i=1\ldots n} \left|\xi^i - \eta^i\right|;$

Нормированным пространством называется линейное пространство $X(\mathbb{R})$, наделенное отображением $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, обладающим следующими свойствами:

1. $\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0;$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \alpha \in \mathbb{R};$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Пример 1.2. Пусть $X = \mathbb{R}^n$, тогда

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |\xi^i|^p}, \quad \|x\|_m = \max_{i=1\ldots n} \left|\xi^i\right|$$

Лемма 1.1. *Любое нормированное пространство может быть метризовано:*

$$\rho(x,y) = \|x - y\|.$$

►
Произвести проверку аксиом метрического пространства.
◄

1.2 Евклидово пространство

Линейное пространство $X(\mathbb{R})$ называется **вещественным евклидовым пространством**, если на $X \times X$ задано отображение $g(x,y) = \langle x, y\rangle$, обладающее следующими свойствами:

1. $\langle x, y\rangle$ - билинейная форма;
2. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ - симметричная форма;
3. $\langle x, x\rangle \geq 0, \quad \langle x, x\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$

Nota bene Отображение g при этом называется **метрической формой** или **скалярным произведением**.

Линейное пространство X над $\mathbb{C}$ называется **комплексным евклидовым пространством**, если на нем задана метрическая форма $g(x,y) = \langle x, y\rangle$ со следующими свойствами

1. $\langle x, \alpha y_1 + \beta y_2\rangle = \alpha \langle x, y_1\rangle + \beta \langle x, y_2\rangle$ - линейность по второму аргументу;
2. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ - эрмитовость;
3. $\langle x, x\rangle \geq 0, \quad \langle x, x\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$

Nota bene Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ - базис евклидова пространства X. Пусть также $x, y \in X$, так что

$$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^n \eta^j e_j.$$

Рассмотрим скалярное произведение $\langle x, y\rangle$:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i,j=1}^n \bar{\xi}^i \eta^j \langle e_i, e_j\rangle = \bar{\xi}^i \eta^j g_{ij}.$$

Совокупность чисел $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ называется **метрическим тензором**:

1. $g_{ji} = \bar{g}_{ij}$;
2. $\bar{\xi}^i \xi^j g_{ij} \geq 0, \quad \bar{\xi}^i \xi^j g_{ij} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \xi^i = 0, \quad \forall i.$

Матрица $G = \|g_{ij}\|$, удовлетворяющая приведенным выше условиям, называется **положиетльно определенной**.

Nota bene *Псевдоевклидовым* называется просранство X, в котором метрическая форма удовлетворяет более слабому условию

$$g(x,y) = 0 \quad \forall y \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Элемент x, такой что $g(x,x) = 0$ называется *изотропным.*

Пример 1.3. (Пространство Минковского) Пусть $X = \mathbb{R}^4, \quad x = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)^T$ и

$$\langle x, y \rangle = \xi^0\eta^0 - \xi^1\eta^1 - \xi^2\eta^2 - \xi^3\eta^3.$$

Рассмотрим вектор $x = \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}^T$, тогда

$$\langle x, x \rangle = 1 - 1/3 - 1/3 - 1/3 = 0,$$

и значит x - нулевой вектор ($x \neq 0$, но $g(x,x) = 0$).

1.3 Неравенство Шварца

Лемма 1.2. *Евклидово пространство может быть нормировано:*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

►
Проверка первых двух аксиом нормы проводится непосредственно:

$$\sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0,$$
$$\sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Проверка последней аксиомы сводится к проверке утверждения

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle\,,$$

которое составляет утверждение теоремы о *неравенстве Шварца*.
◄

Теорема 1.1. *(Неравенство Шварца) Имеет место следующее соотношение между скалярным произведением и порождаемой им нормой*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|\,.$$

►
Рассмотрим билинейную форму, с параметром λ:

$$\|\lambda x + y\|^2 = \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle =$$
$$= \langle \lambda x, \lambda x \rangle + \langle \lambda x, y \rangle + \langle y, \lambda x \rangle + \langle y, y \rangle =$$
$$= |\lambda|^2 \|x\|^2 + \lambda \left(\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle \right) + \|y\|^2 \geq 0.$$

1. Пусть $X = X(\mathbb{R})$, тогда $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ и выражение преобразуется в

   $$|\lambda|^2 \|x\|^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \geq 0.$$

   Тогда $D = 4\,|\langle x, y \rangle|^2 - 4\,\|x\|^2 \, \|y\|^2 \leq 0$ и теорема доказана.

2. Пусть $X = X(\mathbb{C})$, тогда $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ и расмотрим

$$\langle x, y\rangle = e^{i\varphi} \left|\langle x, y\rangle\right|, \quad \varphi = \arg\langle x, y\rangle\,.$$

Определим вектор $z = e^{-i\varphi}x$, тогда

$$\langle z, y\rangle = e^{-i\varphi}\langle x, y\rangle = r = \left|\,\langle x, y\rangle\,\right| \in \mathbb{R},$$
$$\langle z, z\rangle = e^{-i\varphi}\left\langle x, e^{-i\varphi}x\right\rangle = \langle x, x\rangle\,.$$

Далее применим результат первого доказательства

◄

Лемма 1.3. *Неравенство Шварца обращается в точное равенство, когда x и y - линейно зависимые векторы.*

►

Пусть $y = \alpha x$, тогда

$$\left|\langle x, \alpha x\rangle\right| \le \|x\|\,\|\alpha x\|\,, \quad \Rightarrow \quad |\alpha|\,\|x\|^2 \le |\bar{\alpha}|\,\|x\|^2\,, \quad |\bar{\alpha}| = |\alpha|\,.$$

Пусть $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\,\|y\|$, тогда

$$D/4 = |\langle x, y\rangle| = \|x\|\,\|y\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\lambda \ne 0: \quad \|\lambda x + y\|^2 = 0,$$
$$\Leftrightarrow \quad \lambda x + y = 0.$$

◄

Nota bene Также имеют место следующие неравенства:

$$\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|\,, \quad \|x + y\| \ge \left|\|x\| - \|y\|\right|.$$