1. Вычислить предел функции

1.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[4]{\sin x}-\sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[4]{\cos y}-\sqrt[3]{\cos y}}{\sin^2 y}=\lim_{y\to 0}\frac{(\cos y)^{\frac{1}{4}}(1-(\cos y)^{\frac{1}{12}})}{\sin^2 y}=\lim_{y\to 0}\frac{1\cdot(1-(1-\frac{y^2}{2})^{\frac{1}{12}})}{\sin^2 y}=$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{y^2}{2}\frac{1}{12}}{y^2}=\frac{1}{24}$$

2.

$$\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{1-\mathrm{ctg}(\pi x)}{\ln(\mathrm{tg}(\pi x))}=\lim_{x\to\frac{1}{4}}-\frac{1-\mathrm{ctg}(\pi x)}{\ln(\mathrm{ctg}(\pi x))}$$
$$t=1-\mathrm{ctg}(\pi x)$$
$$\lim_{t\to 0}-\frac{t}{\ln(1-t)}=-\frac{x}{-x}=1$$

3.

$$\lim_{x\to\infty}x^2(4^{\frac{1}{x}}-4^{\frac{1}{x+1}})=\lim_{x\to\infty}x^2 4^{\frac{1}{x+1}}(4^{\frac{1}{x(x+1)}}-1)=\lim_{x\to\infty}x^2 1\cdot(\frac{1}{x+1}\ln 4)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\ln 4=\ln 4$$

4.

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}\ln(1+(\cos x-1))}=\lim_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}(\cos x-1)}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\frac{x^2}{2}}=\sqrt{e}$$

5.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\cos(\frac{2\pi}{3}-x)}{\sqrt{3}-2\cos x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{\sqrt{3}-2\cos(y+\frac{\pi}{6})}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos y-\sin y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{\sqrt{3}(1-\cos y)-\sin y}=$$
$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sqrt{3}\frac{y^2}{2}-y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\sqrt{3}\frac{y}{2}-1}=-1$$

6.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x}\right)^{-x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x(2+\frac{1}{x})}{x}\right)^{-x^2}=\lim_{x\to\infty}(2)^{-x^2}=0$$

7.

$$\lim_{x\to 7}\frac{2x^2-11x-21}{x^2-9x+14}=\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)(x+\frac{3}{2})}{(x-2)(x-7)}=\frac{\frac{17}{2}}{5}=\frac{17}{10}$$

8.

$$\lim_{x\to 7}\frac{2x^2-11x-21}{x^2-9x+14}=\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)(x+\frac{3}{2})}{(x-2)(x-7)}=\frac{17}{5}$$

9.

$$\lim_{x\to 1}(\frac{3}{1-x^3}+\frac{1}{x-1})=\lim_{x\to 1}(\frac{-x^3+3x-2}{(1-x^3)(x-1)})=\lim_{x\to 1}(\frac{(x+2)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)})=1$$

10.

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{7+2x-x^2}-\sqrt{1+x+x^2}}{2x-x^2} = \lim_{x\to 2} \frac{-2(x-2)(x+\frac{3}{2})}{-x(x-2)(\sqrt{7+2x-x^2}+\sqrt{1+x+x^2})} =$$
$$\lim_{x\to 2} \frac{2x+3}{x(\sqrt{7+2x-x^2}+\sqrt{1+x+x^2})} = \frac{7}{4\sqrt{7}}$$

11.

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}} - \sqrt{x^2} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}} - \sqrt{x^2}\frac{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}}+\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}}+\sqrt{x^2}} =$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+|x|}}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}}+\sqrt{x^2}} =$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{|x|}}}{|x|\sqrt{1+\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x}}+1} = \frac{1}{2}$$

12.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\sin x})} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x(1-\cos x)}{x^3(\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\sin x})} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\frac{x^2}{2}}{x^3(\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\sin x})} = \frac{1}{4}$$

13.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos 5x}{\ln\cos 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln 1-(1-\cos 5x)}{\ln 1-(1-\cos 5x)}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(5x)}{1-\cos(4x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{25x^2}{2}}{\frac{16x^2}{2}} = \frac{25}{16}$$

2. Сформулировать с помощью неравенств утверждения и привести примеры

1.

$$\forall\varepsilon>0:\exists\delta>0:\forall x<a:0<|x-a|<\delta:|f(x)|>\varepsilon$$

Пример: $\frac{1}{x}$

2.

$$\forall\varepsilon>0:\exists\delta>0:\forall x:|x|>\delta:f(x)>\varepsilon$$

Пример: $-x$

3.

$$\forall\varepsilon>0:\exists\delta>0:\forall x:x>\delta:|f(x)|>\varepsilon$$

Пример: $-x$

3. Вычислить и доказать по определению

1.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4x-5}{x^2-1}=\lim_{x\to 2}\frac{x+5}{x+1}=\frac{7}{3}$$
$$\forall\varepsilon>0:\exists\delta>0:\forall x:0<|x-2|<\delta:|\frac{x+5}{x+1}-\frac{7}{3}|<\varepsilon$$
$$|\frac{x+5}{x+1}-\frac{7}{3}|=|\frac{3(x+5)-7(x+1)}{x+1}|=|\frac{-4(x-2)}{x+1}|<|4(x-2)|<4\delta \implies \varepsilon=4\delta$$

2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x+\frac{1}{2}}=\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{2x}}=1$$
$$\forall\varepsilon>0:\exists\delta:\forall x:x>\delta:|\frac{x+1}{x+\frac{1}{2}}-1|=|\frac{x+1-\frac{1}{2}-x}{x+\frac{1}{2}}|=|\frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}|<\frac{1}{2}\implies\delta=\frac{1}{2};\quad\varepsilon=\delta$$

4. Бесконечно малые и бесконечно большие

1. ...
2. •

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{2x^2+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\to\infty$$

   • Подходящая функция: $\frac{1}{2}x^3$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{\frac{1}{2}x^3(2x^2+x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{(x^5+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^2})}=1$$

5. Определить точки разрыва и исследовать их характер

1. Разрыв первого рода длины 2 в точке $x=-1$.
2. Устранимые разрывы в точках $x=1; x=-2$
3. Разрывы первого рода длины 1 в точках $\forall x\in\mathbb{Z}$
4. • Разрыв второго рода в $x=0$
   • Скачок длины 2 в $x=1$

6. Выполнить задания

1. • $f(x)=\frac{1}{x}; g(x)=\frac{1}{x}; \varphi(x)=f(x)+g(x)=\frac{2}{x}$ - разрывна в $x_0=0$
   • $f(x)=\frac{x-1}{x}; g(x)=\frac{1}{x}; \varphi(x)=f(x)+g(x)=\frac{x-1}{x}+\frac{1}{x}=1$ - обе функции разрывны в точке $x_0=0$, но константа непрерывна
2. $f(x)=1, g(x)=x; \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{x}$ - функция разрывна в точке 0
3. $sign(x)\big|_{X_1=\{0\}}=0; sign(x)\big|_{X_2=(0;+\infty)}=1$. Очевидно, что она разрывна на $X_1\cup X_2$

7. Выполнить задания

1.

$$\exists\varepsilon \in (0;1] : \forall\delta > 0 : \exists x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon;$$
$$\text{Пусть } x_1 = \sqrt{\pi n}, x_2 = \sqrt{\pi n + \frac{\pi}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}$$
$$|\sqrt{n\pi} - \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}| = |\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{n\pi} + \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}}| \to 0 \implies \forall\delta > 0 : \exists N : \forall n > N : |x_1 - x_2| < \delta$$
$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\sin(n\pi) - \sin(n\pi + \frac{\pi}{2})| > 1 > \varepsilon;$$

2.

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists\delta > 0 : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$
$$|\sin(\sqrt{x_1}) - \sin(\sqrt{x_2})| = |2\sin(\frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}{2})\cos(\frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{2})| < |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| < |x_1 - x_2| < \delta \implies \delta = \varepsilon$$

3.

$$\exists\varepsilon \in (0;2] : \forall\delta > 0 : \exists x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon;$$
$$\text{Пусть } x_1 = \frac{1}{2\pi n}, x_2 = \frac{1}{2\pi n + \pi} \quad n \in \mathbb{N}$$
$$|\frac{1}{2\pi n} - \frac{1}{2\pi n + \pi}| = \frac{\pi}{2\pi n(2\pi n + \pi)} = \frac{1}{2n(2\pi n + \pi)} \to 0 \implies \forall\delta > 0 : \exists N : \forall n > N : |x_1 - x_2| < \delta$$
$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\cos(2\pi n) - \cos(2\pi n + \pi)| > 2 > \varepsilon;$$