



# Лекция 8

## Структура модуля над кольцом

### Содержание лекции:

Настоящей лекцией мы вплотную приближаемся к центральному разделу нашего курса - линейным пространствам. Здесь мы обсудим понятие внешнего закона, дадим определение алгебраической структуры, а также сформулируем самые основные определения, связанные с линейными пространствами и их отображениями.

### Ключевые слова:

Внешний закон композиции, оператор закона, согласованность закона со структурой, действие на структуре, алгебраическая структура, модуль над кольцом, левый (правый)  $R$ -модуль, линейное отображение, мономорфизм, эпиморфизм, ядро и образ линейного отображения, подмодуль, фактор модуль, коядро.

### Авторы курса:

Трифанов А. И.

Москаленко М. А.

### Ссылка на ресурсы:

[mathdep.ifmo.ru/geolin](http://mathdep.ifmo.ru/geolin)

## 8.1 Внешний закон композиции

**Внешним законом композиции** элементов множества  $\Omega$ , называемых множеством операторов закона, и элементов множества  $M$  называется отображение множества  $\Omega \times M$  в  $M$ . Значение

$$(\alpha, x) \mapsto y,$$

называется композицией  $\alpha$  и  $x$  относительно этого закона. Элементы из  $\Omega$  называются **операторами** внешнего закона.

*Nota bene* Как правило, действие оператора  $\alpha \in \Omega$  на элемент  $x \in M$  обозначают одним из указанных способов:

$$\alpha x, \quad \alpha(x), \quad x^\alpha.$$

Иногда мы будем также использовать обозначение  $\alpha \perp x$

*Nota bene* Множество  $\Omega$  операторов внешнего закона на  $M$  может само иметь внутренний закон композиции своих элементов.

---

**Пример 8.1.** На множестве  $\mathbb{Z}$ , наделенном структурой коммутативной группы с операцией  $+$  внешний закон композиции элементов может быть задан следующим образом:

$$\forall z \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (n, z) = nz = z + z + \dots + z,$$

с оператором внешнего закона  $n \in \mathbb{N}$ .

---

Пусть  $M$  - множество, наделенное внутренним и внешним законами композиции. Говорят, что внешний закон композиции **согласован** с внутренним законом, если

$$\forall x, y \in M, \quad \alpha \in \Omega, \quad \alpha(x \circ y) = \alpha(x) \circ \alpha(y).$$

Говорят, что алгебраическая структура  $\Omega$  **действует на** алгебраической структуре  $M$ , если каждый элемент  $\alpha \in \Omega$  является оператором внешнего закона на  $M$  и для любой пары элементов из  $\alpha, \beta \in \Omega$  имеет место согласованное действие:

$$(\alpha * \beta)(x) = \alpha(\beta(x)), \quad \forall x \in M.$$

Говорят, что имеет место **согласованное действие**  $\Omega$  на  $M$ , если

$$(\alpha * \beta)(x \circ y) = \alpha(\beta(x \circ y)) = \alpha(\beta x \circ \beta y) = \alpha(\beta x) \circ \alpha(\beta y).$$

---

**Пример 8.2.** Внешний закон композиции, описанный в предыдущем примере согласован со структурой коммутативной группы  $(\mathbb{Z}, +)$ :

$$n(z_1 + z_2) = nz_1 + nz_2.$$

## СТРУКТУРА МОДУЛЯ НАД КОЛЬЦОМ

Если при этом множество  $\mathbb{N}$  обладает алгебраической структурой мультипликативного моноида  $(\mathbb{N}, \cdot)$ , Тогда

$$(n \cdot m)(z_1 + z_2) = nmz_1 + nmz_2.$$

---

**Пример 8.3.** Пусть  $X$  - произвольный моноид и  $x \in X$ . Для всякого  $n \in \mathbb{N}$  определим действие оператора  $n$  как

$$(n, x) = x \cdot x \cdot \dots \cdot x \equiv x^n.$$

В частности,

$$x^0 = e, \quad x^1 = x, \quad x^2 = x \cdot x, \quad \dots$$

Далее, на множестве  $X$  можно определить внутренний закон следующим образом:

$$x^n \cdot x^m \equiv x^{n+m}, \quad (x^n)^m \equiv x^{nm}.$$

---

**Алгебраической структурой** на множестве  $M$  называется всякая структура, определяемая в  $M$  одним или несколькими внутренними законами композиции элементов из  $M$  и одним или несколькими внешними законами композиции из областей операторов  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$ , согласованных с внутренними законами.

---

**Пример 8.4.** Рассмотрим алфавит  $A = \{p, q\}$  и множество  $L$  всех формальных сумм элементов  $A$  с коммутативной операцией "+". Тогда произвольный элемент  $L$  имеет вид

$$p + p + \dots + p + q + \dots + q$$

Пусть  $\mathbb{Z}$  множество операторов внешнего закона на  $L$ , согласованных с внутренним законом  $L$ :

$$\begin{aligned} n(p + q) &= np + nq, n \in \mathbb{Z}, \\ (n + m)(p + q) &= n(p + q) + m(p + q), \\ (nm)p &= n(mp). \end{aligned}$$

Множество комбинаций  $L$ , наделенное алгебраической структурой коммутативного внутреннего закона и внешнего закона с множеством операторов из кольца  $\mathbb{Z}$  называется **модулем над кольцом**.

---

## 8.2 Модуль над кольцом

**Левым  $R$ -модулем (или левым модулем над кольцом  $R$ )** называется абелева группа  $(G, +)$  с заданной бинарной операцией  $R \times G \rightarrow G$ , записываемой как  $(\alpha, x) \rightarrow \alpha x$  и согласованной действующей на групповой структуре на  $G$ :

L1. Действие кольца группе:

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in R, \quad \forall x \in G \\ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x). \end{aligned}$$

L2. Согласованное действие:

$$\forall \alpha \in R, \quad \forall x_1, x_2 \in G \quad \alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2$$

**Nota bene** Аналогично можно определить структуру **правого  $R$ -модуля**, если определена бинарная операция

$$G \times R \rightarrow G, \quad (x, \alpha) \mapsto x\alpha.$$

Если определены оба отображения, то говорят о **двустороннем  $R$ -модуле**.

---

**Пример 8.5.** Примеры  $R$ -модулей:

- Всякий  $J \trianglelefteq R$  - идеал кольца  $R$  есть  $R$ -модуль.
- Любая абелева группа  $(G, +)$  представляет собой  $\mathbb{Z}$  - модуль, ибо

$$\forall x \in G \quad x + x + x + \dots + x = zx, \quad z \in \mathbb{Z}.$$

- Пусть  $K$ -поле, обозначим за  $K^n$  множество столбиков вида

$$\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)', \quad \xi^i \in K.$$

---

**Гомоморфизмом  $R$ -модулей  $X$  и  $Y$  (или  $R$ -линейным отображением)** называется отображение  $\sigma : X \rightarrow Y$ , такое что:

$$\begin{aligned} \forall x, x_1, x_2 \in X, \quad \forall \alpha \in R \\ \sigma(x_1 + x_2) = \sigma(x_1) + \sigma(x_2), \quad \sigma(\alpha x) = \sigma(x)\alpha. \end{aligned}$$

**Nota bene** Для множества  $R$ -линейных отображений между  $X$  и  $Y$  используют следующее обозначение  $\text{Hom}_R(X, Y)$ .

Гомоморфизм  $\sigma \in \text{Hom}_R(X, Y)$  называется

- **мономорфизмом**, если он инъективен;
- **эпиморфизмом**, если он сюръективен;

**Ядром** линейного отображения  $\sigma \in \text{Hom}_R(X, Y)$  называется подмножество  $X$ , такое что:

$$\ker \sigma = \{x \in X : \sigma(x) = 0\}$$

**Лемма 8.1.** Ядро  $\ker \sigma$  - модуль над кольцом.

**Образом** линейного отображения  $\sigma \in \text{Hom}_R(X, Y)$  называется подмножество  $Y$ , такое что:

$$\text{Im} = \{y \in Y : \exists x \in X \quad \sigma(x) = y\} = \sigma(X).$$

**Лемма 8.2.** Образ  $\text{Im} \sigma$  - модуль над кольцом.

## 8.3 Подмодуль. Фактор-модуль

(1) Подмножество  $L \subseteq X$  называется **подмодулем**  $R$ -модуля  $X$ , если  $L$  замкнуто относительно операций, индуцированных из  $X$ .

(2) Подмножество  $L \subseteq X$  называется **подмодулем**  $R$ -модуля  $X$ , если  $L$  само является  $R$ -модулем относительно операций, индуцированных из  $X$ .

**Лемма 8.3.** Определения (1) и (2) равносильны.

---

**Пример 8.6.** Примеры подмодулей:

- Ядро линейного отображения  $\sigma \in \text{Hom}_R(X, Y)$  является подмодулем в  $X$ ;
- Образ линейного отображения  $\sigma \in \text{Hom}_R(X, Y)$  является подмодулем в  $Y$ ;
- Идеал  $J \trianglelefteq R$  является подмодулем  $R$ -модуля  $R$ ;
- Подмножество  $K^n$  столбиков  $\xi$ , у которых первый элемент  $\xi^1 = 0$ .

---

**Nota bene** На фактор группу  $X/L$  переносится структура  $R$ -модуля, если умножение определить формулой:

$$\alpha(x + L) = \alpha x + L, \quad \forall x \in X.$$

$R$ -модуль  $X/L$  называется **фактор-модулем**  $X$  по  $L$ .

## СТРУКТУРА МОДУЛЯ НАД КОЛЬЦОМ

**Коядром** гомоморфизма  $\sigma \in \text{Hom}_R(X, Y)$  называется множество

$$\text{Coker } \sigma = Y / \text{Im } \sigma.$$

**Лемма 8.4.** *Коядро является фактор модулем  $Y$ .*

**Теорема 8.1.** *Имеет место изоморфизм  $R$ -модулей:*

$$X / \ker \sigma \simeq \text{Im } \sigma.$$