Лекция 5

Сумма и пересечение подпространств

Содержание лекции:
Настоящая лекция посвящена обсуждению операций с подпространствами. Рассматриваемые здесь понятия имеют непосредственное приложение в геометрии. Формулируемое условие единственности разложения произвольного вектора имеет прямое отношение к описанию геометрических объектов и исследованию их свойств. Мы начнем с общих понятий суммы и пересечения линейных подпространств.

Ключевые слова:
Пересечение подпространств, сумма подпротранств, прямая сумма подпространств, компоненты вектора, проекция вектора, дополнение пространства, коразмерность пространства.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

5.1 Сумма и пересечение подпространств

Nota bene Пусть $X(\Bbbk)$ - линейное пространство над некоторым полем $\Bbbk$ и $L_1, L_2 \subset X(\Bbbk)$ - два его собственных подпространства.

Множество L' называется **пересечением подпространств** L_1 и L_2, если

$$L' = \{x \in X : x \in L_1 \wedge x \in L_2\}.$$

Nota bene Тот факт, что множество L' является пересечением подпространств L_1 и L_2 обозначают следующим образом:

$$L' = L_1 \cap L_2.$$

Лемма 5.1. *Множество L' - подпространство $X(\Bbbk)$.*

▶

Докажем замкнутость множества L' относительно линейных операций, индуцированных из $X(\Bbbk)$. Действительно,

$$x, x_1, x_2 \in L' \quad \Rightarrow \quad x, x_1, x_2 \in L_1 \cap L_2 \quad \Rightarrow \quad x, x_1, x_2 \in L_1, \quad x, x_1, x_2 \in L_2.$$

Так как L_1 и L_2 - подпространство, то сразу получаем:

$$x_1 + x_2 \in L_1, \quad x_1 + x_2 \in L_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 \in L_1 \cap L_2 = L',$$
$$x\lambda \in L_1, \quad x\lambda \in L_2 \quad \Rightarrow \quad x\lambda \in L'.$$

◀

Множество L'' называется **суммой подпространств** L_1 и L_2, если

$$L'' = \{x \in X : x = x_1 + x_2,\ x_1 \in L_1,\ x_2 \in L_2\}.$$

Nota bene Тот факт, что множество L' является суммой подпространств L_1 и L_2 обозначают следующим образом:

$$L'' = L_1 + L_2.$$

Лемма 5.2. *Множество $L'' \equiv L_1 + L_2$ - подпространство X.*

▶

Пусть $x, y \in L''$, тогда

$$x = x_1 + x_2, \quad y = y_1 + y_2, \quad x_1, y_1 \in L_1, \quad x_2, y_2 \in L_2,$$
$$x + y = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \quad \Rightarrow \quad x + y \in L'',$$
$$x\lambda = (x_1 + x_2)\lambda = x_1\lambda + x_2\lambda \quad \Rightarrow \quad x\lambda \in L''.$$

◀

Nota bene Определение суммы подпространств, определенное выше не эквивалентно теоретико-множественному объединению L_1 и L_2.

5.2 Теорема о размерностях

Теорема 5.1. *(Грассман) Пусть L_1 и L_2 - подпространства X, тогда*

$$\dim_{\Bbbk} L_1 + \dim_{\Bbbk} L_2 = \dim_{\Bbbk}(L_1 + L_2) + \dim_{\Bbbk}(L_1 \cap L_2)$$

►

Утверждение теоремы эквивалентно следующему. Пусть

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_m\} \text{ - базис } L_1 \cap L_2,$$
$$\{e_1, e_2, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_k\} \text{ - базис } L_1,$$
$$\{e_1, e_2, \ldots, e_m, g_1, \ldots, g_l\} \text{ - базис } L_2,$$

тогда

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_l\} \text{ - базис } L_1 + L_2.$$

Для доказательства достаточно показать, что $\{e_1, \ldots, f_1, \ldots, g_1 \ldots\}$ - ПН и ЛНЗ в $L_1 + L_2$. Действительно, для любого $x \in L_1 + L_2$ имеем:

$$x = x_1 + x_2 = \left(\sum_{i=1}^{m} e_i \alpha_1^i + \sum_{j=1}^{k} f_j \beta_1^j\right) + \left(\sum_{i=1}^{m} e_i \alpha_2^i + \sum_{s=1}^{l} g_s \beta_2^s\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} e_i \left(\alpha_1^i + \alpha_2^i\right) + \sum_{j=1}^{k} f_j \beta_1^j + \sum_{s=1}^{l} g_s \beta_2^s,$$

что доказывает полноту набора. Для доказательства линейной независимости рассмотрим линейную комбинацию:

$$e_1\alpha^1 + \ldots + e_m\alpha^m + f_1\beta^1 + \ldots + f_k\beta^k + g_1\gamma^1 + \ldots + g_l\gamma^l = 0,$$
$$e_1\alpha^1 + \ldots + e_m\alpha^m + f_1\beta^1 + \ldots + f_k\beta^k = -g_1\gamma^1 - \ldots - g_l\gamma^l \equiv z,$$

где $z \in L_1 \cap L_2$ и значит:

$$z = e_1\delta^1 + \ldots + e_m\delta^m.$$

Из определения $z = -g_1\gamma^1 - \ldots - g_l\gamma^l$ следует

$$g_1\gamma^1 + \ldots + g_l\gamma^l + e_1\delta^1 + \ldots + e_m\delta^m = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^1 = \ldots = \gamma^l = \delta^1 = \ldots = \delta^m = 0,$$

откуда имеем $z = 0$ и

$$e_1\alpha^1 + \ldots + e_m\alpha^m + f_1\beta^1 + \ldots + f_k\beta^k = z = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^1 = \cdots = \alpha^m = \beta^1 = \ldots = \beta^k = 0.$$

◄

Nota bene Понятие суммы и пересечения подпространств распространяется на произвольное конечное их число, именно:

$$L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_{\Bbbk} = \{x \in X : \quad x \in L_i, \quad i = 1 \ldots k\},$$
$$L_1 + L_2 + \ldots + L_{\Bbbk} = \{x \in X : \quad x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k, \quad x_i \in L_i\}.$$

То, что это линейные подпространства $X(\Bbbk)$ доказываются аналогично.

5.3 Прямая сумма подпространств. Проекция

Прямой суммой подпространств L_1 и L_2 называется их сумма $\tilde{L}$:

$$\forall x \in \tilde{L} \quad x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in L_1, \quad x_2 \in L_2,$$

когда такое разложение *единственно.*

Nota bene Тот факт, что $\tilde{L}$ является прямой суммой L_1 и L_2 обозначают следующим образом:

$$\tilde{L} = L_1 \dot{+} L_2.$$

Теорема 5.2. *(критерий прямой суммы)*

$$L_1 + L_2 = L_1 \dot{+} L_2 \quad \Leftrightarrow \quad L_1 \cap L_2 = \{0_X\}.$$

▶
$\Rightarrow$ Докажем от противного. Пусть

$$L = L_1 \dot{+} L_2, \quad L_1 \cap L_2 \neq \{0\} \quad \Rightarrow \quad \exists z \in L_1 \cap L_2, \quad z \neq 0,$$
$$x = x_1 + x_2 = x_1 + x_2 + z - z = (x_1 + z) + (x_2 - z).$$

$\Leftarrow$ Докажем от противного. Пусть

$$L_1 \cap L_2 = \{0_X\}, \quad L = L_1 + L_2, \text{ - непрямая сумма}$$
$$x = x_1 + x_2, \quad x = y_1 + y_2 \quad \Rightarrow \quad 0_X = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2),$$
$$x_1 - y_1 = y_2 - x_2 = z \neq 0_X, \quad z \in L_1 \cap L_2.$$

◀

Теорема 5.3. *Линейное пространство $X(\Bbbk)$ является прямой суммой своих подпространств L_1 и L_2 тогда и только тогда, когда эти подпространства дизъюнктны, а сумма их размерностей совпадает с размерностью $X(\Bbbk)$:*

$$X = L_1 \dot{+} L_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} L_1 \cap L_2 = \{0_X\}, \\ \dim_\Bbbk L_1 + \dim_\Bbbk L_2 = \dim_\Bbbk X \end{cases}$$

▶
$\Rightarrow$ Первая часть следует из признака прямой суммы. Вторая - из того что

$$X = L_1 + L_2, \quad \dim_\Bbbk (L_1 \cap L_2) = 0_X$$

$\Leftarrow$ Имеем $\dim (L_1 \cap L_2) = 0$ и значит

$$\dim_\Bbbk L_1 + \dim_\Bbbk L_2 = \dim_\Bbbk (L_1 + L_2) + 0,$$
$$\dim_\Bbbk L_1 + \dim_\Bbbk L_2 = \dim_\Bbbk X,$$
$$\Rightarrow \quad \dim_\Bbbk X = \dim_\Bbbk (L_1 + L_2).$$

Кроме того,

$$\begin{cases} \dim_{\Bbbk} X = \dim_{\Bbbk}(L_1 + L_2), \\ L_1 + L_2 \subset X \end{cases} \quad \Rightarrow \quad X = L_1 + L_2 \quad \Leftrightarrow \quad X = L_1 \dot{+} L_2.$$

◀

Подпространство $L = \dot{+} \sum_{i=1}^{k} L_i$ называется **прямой суммой подпространств** $L_1, L_2, \ldots, L_k$, если единственно разложение

$$\forall x \in L \quad x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k, \quad x_j \in L_j.$$

Лемма 5.3.

$$\sum_{i=1}^{k} L_i = \dot{+} \sum_{i=1}^{k} L_i \quad \Rightarrow \quad L_i \cap L_{j \neq i} = \{0_X\}.$$

▶

Используем нисходящую индукцию. Пусть

$$\sum_{i=1}^{k} L_i = \tilde{L}_{\Bbbk} + L_{\Bbbk}, \quad \tilde{L}_{\Bbbk} = \sum_{i=1}^{k-1} L_i,$$

тогда в силу критерия прямой суммы для двух подпространств будем иметь

$$\tilde{L}_{\Bbbk} + L_{\Bbbk} = \tilde{L}_{\Bbbk} \dot{+} L_{\Bbbk} \quad \Rightarrow \quad \tilde{L}_{\Bbbk} \cap L_{\Bbbk} = \{0_X\}.$$

Таким образом, мы получим

$$L_{\Bbbk} \cap L_{\Bbbk} = \{0_X\}, \quad i = 1 \ldots k-1.$$

Для подпространства $\tilde{L}_{\Bbbk}$ доказательство повторяется.

◀

Теорема 5.4. *Имеет место следующий критерий разложения линейного пространства $X(\Bbbk)$ в прямую сумму подпространств $L_1, L_2, \ldots, L_{\Bbbk}$:*

$$X = \dot{+} \sum_{i=1}^{k} L_i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} L_i \cap L_{j \neq i} = \{0\}, \\ \dim_{\Bbbk} X = \sum_{i=1}^{k} \dim_{\Bbbk} L_i. \end{cases}$$

▶

$\Rightarrow$ следует из предыдущей леммы и теоремы о размерностях.

$\Leftarrow$ используем нисходящую индукцию.

◀

5.4 Проекция вектора на подпространство

Пусть $X = L_1 \dot{+} L_2$, тогда

- x_1, x_2 называются **компонентами** x в L_1 и L_2;
- $x_1 = \mathcal{P}_{L_1}^{||L_2} x$ называется **проекцией** x на L_1 параллельно L_2;
- $x_2 = \mathcal{P}_{L_2}^{||L_1} x$ называется **проекцией** x на L_2 параллельно L_1;
- $\mathcal{P}_{L_1}^{||L_2}$ называется **проектором на подпространство** L_1;
- $\mathcal{P}_{L_2}^{||L_1}$ называется **проектором на подпространство** L_2;
- L_1 называется **дополнением** L_2 до X;
- L_2 называется **дополнением** L_1 до X;

Nota bene Дополнение к заданному подпространству определяется не единственным образом.

Пример 5.1. Контрпример:

$$L_1 = \mathcal{L}\left\{e_1, e_2\right\}, \quad L_2 = \mathcal{L}\left\{e_3 + \alpha e_1 + \beta e_2\right\}, \quad X = L_1 \dot{+} L_2 \quad \forall \alpha, \beta \in \Bbbk.$$

Лемма 5.4. *Размерность дополнения подпространства не зависит от конкретного выбора этого дополнения.*

►

Доказательство следует из определения дополнения и теоремы о размерностях.

◄

Размерность дополнения подпространства L называется его **коразмерностью**:

$$\dim_{\Bbbk} X = n, \quad \dim_{\Bbbk} L = k, \quad \operatorname{codim}_{\Bbbk} L = n - k.$$