δ

Лекция 4

Линейные подпространства

Содержание лекции:
В настоящей лекции мы поговорим о подструктурах линейного пространства - линейных подпространстранствах. Чаще всего приходится иметь дело именно с ними. Подпространства и линейные многообразия играют важную роль в геометрических приложениях линейной алгебры, а также, как будет указано, в теории систем линейных алгебраических уравнений.

Ключевые слова:
Линейное подпространство, линейная оболочка, линейное многообразие, размерность линейного многообразия.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

4.1 Подпространства

Подмножество $L \subset X$ линейного пространства $X(K)$ называется **линейным подпространством пространства** $X(K)$, если оно само является линейным простанством над полем K относительно операций, определенных в X.

Теорема 4.1. *(Критерий линейного подпространства) Для того, чтобы непустое подмножество L линейного пространства $X(K)$ являлось подпространством, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1. $\forall x_1, x_2 \in L \quad x_1 + x_2 \in L$;

2. $\forall \alpha \in K, \quad \forall x \in L \quad \alpha x \in L$.

►
$\Rightarrow$ Пусть L - подпространство линейного пространства $X(K)$, тогда условия (1) и (2) содержатся в его определении.
$\Leftarrow$ Пусть выполняются условия (1) и (2), тогда L - подпространство линейного пространства $X(K)$. Действительно, данное утверждение следует из того, что $X(K)$ само является линейным пространством, а L является его подмножеством, замкнутым относительно операций, индуцированных из $X(K)$.
◄

Пример 4.1. Примеры подпространств:

1. Само X и $\{0\}$ - примеры тривиальных (несобственных) подпространств;

2. Прямая и плоскость, содержащие начало координат - подпространства E_3;

3. Множество симметричных 2×2 матриц - подпространство $\mathbb{C}_2^2$;

4. Множество четных полиномов - подпространство $\mathcal{P}_n$;

Лемма 4.1. *Пусть L - подпространство $X(K)$, тогда*

$$\dim L \leq \dim X.$$

►
Так как L является подмножеством $X(K)$, то любой набор элементов L также содержится и в X. Лемму доказывает выбор базиса L в качестве такого набора.
◄

Лемма 4.2. *Имеет место:*

$$L = X \quad \Leftrightarrow \quad \dim L = \dim X.$$

▶
$\Rightarrow$ Утверждение очевидно.
$\Leftarrow$ Было показано, что для любых двух линейных пространств имеется критерий

$$\dim_K X = \dim_K L \quad \Leftrightarrow \quad X \simeq L,$$

и так как $L \subseteq X$, то отсюда следует, что $L = X$.
◀

Лемма 4.3. *Любой базис подпространства L может быть дополнен до базиса всего пространства $X(K)$.*
▶
Пусть $\{f_i\}_{i=1}^k$ базис L. Применим процедуру прореживания к системе

$$\{f_1, f_2, \dots, f_k; e_1, e_2, \dots, e_n\},$$

где $\{e_j\}_{j=1}^n$ - базис X. В результате получим новый базис пространства X, содержащий в качестве поднабора $\{f_i\}_{i=1}^k$.
◀

Лемма 4.4. *Из произвольного базиса пространства X, вообще говоря, нельзя выбрать базис его подпространства L.*
▶
Лемму доказывает контрпример:

$$X = \mathcal{L}\{e_1, e_2\} \quad L = \mathcal{L}\{e_1 + e_2\}.$$

◀

4.2 Линейная оболочка

> **Линейной оболочкой** системы векторов $x_1, x_2, \dots, x_k$ называется множество $\mathcal{L}\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ всех линейных комбинаций этих векторов:
>
> $$\mathcal{L} = \left\{ x \in X : \quad x = \sum_{i=1}^{k} \alpha^i x_i \right\}.$$

Лемма 4.5. *Линейная оболочка векторов $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ - подпространство X:*

$$\forall y, y_1, y_2 \in \mathcal{L}\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}, \quad \forall \lambda \in K \quad \Rightarrow \quad y_1 + y_2 \in \mathcal{L}, \quad \lambda y \in \mathcal{L}.$$

▶
Так как $y, y_1, y_2 \in \mathcal{L}$, то

$$y = \sum_{i=1}^{k} x_i \alpha^i, \quad y_1 = \sum_{i=1}^{k} x_i \alpha_1^i, \quad y_2 = \sum_{i=1}^{k} x_i \alpha_2^i,$$

и осталось только проверить существование соответствующих линейных комбинаций:

$$y_1 + y_2 = \sum_{i=1}^{k} x_i \alpha_1^i + \sum_{i=1}^{k} x_i \alpha_2^i = \sum_{i=1}^{k} x_i \left(\alpha_1^i + \alpha_2^i\right) \in \mathcal{L},$$

$$y\lambda = \sum_{i=1}^{k} x_i \alpha^i \cdot \lambda = \sum_{i=1}^{k} x_i \alpha^i \lambda \in \mathcal{L}.$$

◀

Лемма 4.6. *(минимальность) Линейная оболочка векторов $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ является наименьшим подпространством X, содержащим эти векторы.*
▶
Всякое линейное пространство, содержащее векторы $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ также должно содержать и все их линейные комбинации, а значит - линейная оболочка $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ - наименьшее из таких подпространств.
◀

Линейная оболочка векторов $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ называется **подпространством, натянутым на данные векторы**.

4.3 Линейное многообразие

Линейным многообразием M, параллельным подпространству L линейного пространства $X(K)$ называется множество

$$M = \{y \in X: \quad y = x_0 + x, \quad x_0 \in X, \quad x \in L\}.$$

Nota bene Линейное подпространство L называется также *несущим подпространством* для многообразия M.

Теорема 4.2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

$$(1) \quad x_0 + L = y_0 + L \quad \Leftrightarrow \quad (2) \quad y_0 \in x_0 + L \quad \Leftrightarrow \quad (3) \quad y_0 - x_0 \in L.$$

►

На протяжении всего доказательства положим $z, z' \in L$.

Импликация (1) ⇒ (2):

$$x_0 + L = y_0 + L \quad \Rightarrow \quad x_0 + z = y_0 + z' \quad \Rightarrow \quad y_0 = x_0 + (z - z') \in x_0 + L.$$

Импликация (2) ⇒ (3):

$$y_0 \in x_0 + L \quad \Rightarrow \quad y_0 = x_0 + z \quad \Rightarrow \quad y_0 - x_0 = z \in L.$$

Импликация (3) ⇒ (1):

$$y_0 - x_0 \in L \quad \Rightarrow \quad y_0 = x_0 + z.$$

Пусть $x \in x_0 + L$, тогда $x = x_0 + z'$, $z' \in L$ и

$$x = x_0 + z' = y_0 + (z' - z) \quad \Rightarrow \quad x_0 + L \subseteq y_0 + L.$$

аналогично для $y \in y_0 + L$.

◄

Nota bene Многообразие M порождается любым своим представителем.

Nota bene Для того, чтобы линейное многообразие M было подпространством необходимо и достаточно, чтобы $x_0 \in L$, то есть, чтобы $M \equiv L$.

Лемма 4.7. *Несущее подпространство линейного многообразия определяется единственным образом:*

$$\forall x_0, y_0 \in X, \quad \forall L, L' \subset X, \quad x_0 + L = y_0 + L' \quad \Rightarrow \quad L = L'$$

►

Из предыдущей теоремы следует:

$$\begin{gathered} x_0 + L = y_0 + L' \quad \Rightarrow \quad x_0 + L = x_0 + L' \quad \Rightarrow \\ \forall x \in L \quad \exists\, y \in L' : \quad x_0 + x = x_0 + y \quad \Rightarrow \quad x = y \quad \Rightarrow \quad L \subseteq L', \\ \forall y \in L' \quad \exists\, x \in L : \quad x_0 + x = x_0 + y \quad \Rightarrow \quad y = x \quad \Rightarrow \quad L' \subseteq L. \end{gathered}$$

◄

Определяют **размерность многобразия** M, параллельного подпространству L

$$\dim M = \dim L.$$

Многообразие M, параллельное L называется:

- **прямой**, если $\dim L = 1$;
- **плоскостью**, если $\dim L = 2$;
- **k-мерной плоскостью**, если $\dim L = k$;
- **гиперплоскостью** $\dim L = \dim X - 1$.