λ

Лекция 11

Геометрия прямых в пространстве

Содержание лекции:
В лекции обсуждаютсся задачи на взаимное расположение друг относительно друга двух прямых, прямой и точки, прямой и плоскости.

Ключевые слова:
Параллельность прямых, условие пересечения, условия скрещивания, угол между прямыми, точка пересечения, ортогональная проекция точки на прямую, расстояние от точки до прямой, растояние между параллельными прямыми, расстояние между скрещивающимися прямыми, параллельность прямой и плоскости, точка пересечения прямой и плоскости, ортогональная проекция прямой на плоскость.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

11.1 Взаимное расположение прямых

Рассмотрим основные варианты расположения прямых в пространстве друг относительно друга. Пусть прямые L_1 и L_2 заданы своими векторными параметрическими уравнениями:

$$L_1: \quad \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{s}_1 \cdot t, \quad L_2: \quad \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{s}_2 \cdot t.$$

1. Условие параллельности прямых L_1 и L_2:
$$\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \vec{0}, \quad (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{s} \neq 0.$$

2. Условие совпадения прямых L_1 и L_2:
$$\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \vec{0}, \quad (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{s} = 0.$$

3. Условие пересечения прямых L_1 и L_2:
$$\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 \neq 0, \quad (\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0.$$

4. Условие скрещивания прямых L_1 и L_2:
$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2) \neq 0.$$

5. Угол между прямыми L_1 и L_2:
$$\varphi = \angle(L_1, L_2) = \angle(\vec{s}_1, \vec{s}_2) \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \left| \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} \right|.$$

6. Точка пересечения прямых L_1 и L_2:
$$Q = L_1 \cap L_2 \quad \Rightarrow \quad Q \in L_1 \quad \text{и} \quad Q \in L_2.$$

Аналогично задаче о точке пересечения прямых на плоскости, будем искать зачения параметров t_1 и t_2, таких что

$$\vec{r}_Q = \vec{r}_1 + \vec{s}_1 \cdot t_1, \quad \vec{r}_Q = \vec{r}_2 + \vec{s}_2 \cdot t_2$$

Приравняем левые части и запишем полученное уравнение в следующем виде:

$$\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = t_1 \cdot \vec{s}_1 - t_2 \cdot \vec{s}_2.$$

Для решения данного уравнения умножим обе его части сначала скалярно на $\vec{s}_1$, а потом скалярно на $\vec{s}_2$. В итоге получим:

$$\begin{cases} (\Delta\vec{r}, \vec{s}_1) = |\vec{s}_1|^2 \cdot t_1 - (\vec{s}_1, \vec{s}_2) \cdot t_2, \\ (\Delta\vec{r}, \vec{s}_2) = (\vec{s}_1, \vec{s}_2) \cdot t_1 - |\vec{s}_2|^2 \cdot t_2. \end{cases}$$

Условие существования решения данной системы - компланарность векторов $\Delta\vec{r}$, $\vec{s}_1$ и $\vec{r}_2$, то есть как раз условие

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0.$$

Далее методом Крамера получаем следующее решение для t_1:

$$t_1 = \frac{(\Delta\vec{r}, \vec{s}_2)(\vec{s}_1, \vec{s}_2) - (\Delta\vec{r}, \vec{s}_1)|\vec{s}_2|^2}{|(\vec{s}_1, \vec{s}_1)|^2 - |\vec{s}_1|^2|\vec{s}_2|^2}.$$

Подставляя полученное решение для t_1 в уравнение для $\vec{r}_Q$, получим искомое выражение.

11.2 Взаимное расположение прямой и точки

Пусть в пространстве заданы прямая L и точка M, рассмотрим основные задачи, возникающие при исследовании их взаимного расположения. Будем полагать, что

$$L: \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s} \cdot t, \quad M \leftrightarrow \vec{r}_M$$

1. Ортогоальная проекция M' точки $M \not\in L$ на прямую L.

$$M' \leftrightarrow \vec{r}_{M'}, \quad \exists\, t': \quad \vec{r}_{M'} = \vec{r}_0 + \vec{s} \cdot t'.$$

   Тогда

$$\vec{r}_{M'} = \vec{r}_M + \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_M, \vec{n})}{|\vec{n}|^2}\vec{n}, \quad \vec{n} = \vec{s} \times [\vec{s} \times (\vec{r}_{M'} - r_0)].$$

2. Расстояние от точки M до прямой L:

$$\rho(M, L) = |\vec{r}_{M'} - \vec{r}_M| = \frac{|(\vec{r}_M - \vec{r}_0, \vec{n})|}{|\vec{n}|}.$$

3. Точка M'', симметричная точке M относительно прямой L.

$$\vec{r}_{M''} = \vec{r}_M + 2 \cdot \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_M, \vec{n})}{|\vec{n}|^2}\vec{n},$$

4. Расстояние между параллельными прямыми L_1 и L_2.

$$L_1: \quad \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{s}_1 \cdot t, \quad L_2: \quad \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{s}_2 \cdot t, \quad \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = 0.$$

   Пользуясь предыдущими результатами, получаем:

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{|(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{n})|}{|\vec{n}|}, \quad \vec{n} = \vec{s} \times [(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{s}].$$

5. Расстояние между скрещивающимися прямыми L_1 и L_2:

$$L_1: \quad \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{s}_1 \cdot t, \quad L_2: \quad \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{s}_2 \cdot t, \quad (\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2) \neq 0..$$

   Аналогичные рассуждения дают

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{|(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2)|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}.$$

11.3 Взаимное расположение прямой и плоскости

Пусть даны прямая L и плоскость $\mathcal{L}$, заданнче уравнениями

$$L: \quad \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{s} \cdot t, \quad \mathcal{L}: \quad (\vec{r}, \vec{n}) = -D.$$

Рассмотрим основные варианты их взаимного расположения:

1. Прямая L лежит в плоскости $\mathcal{L}$:

$$(\vec{s}, \vec{n}) = 0, \quad (\vec{r}_0, n) = -D;$$

2. Прямая L параллельна плоскости $\mathcal{L}$:

$$(\vec{s}, \vec{n}) = 0, \quad (\vec{r}_0, n) \neq -D;$$

3. Прямая L имеет общее положение относительно плоскости $\mathcal{L}$:

$$(\vec{s}, \vec{n}) \neq 0.$$

   Покажем, что в этом случае всегда существует точка пересечения L с плоскостью $\mathcal{L}$. Рассмотрим множество точек, которые принадлежат и прямой и плоскости одновременно, то есть удовлетворяют условиям:

$$\vec{r}_1 : \quad \vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{s} \cdot t_1, \quad \vec{(}\vec{r}_1, \vec{n}) - D.$$

   Подставим первое уравнение во второе, будем иметь:

$$(\vec{r}_0 + \vec{s} \cdot t_1, \vec{n}) = -D, \quad t_1 = \frac{(\vec{r}_0, \vec{n}) - D}{(\vec{s}, \vec{n})}.$$

   Таким образом, в случае общего положения, всегда существует единственная точка пересечения прямой с плоскостью:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{s} \cdot \frac{(\vec{r}_0, \vec{n}) - D}{(\vec{s}, \vec{n})}.$$

4. Проекция L' прямой L на плоскость $\mathcal{L}$.
   Проще всего найти проекцию как результат пересечения двух плоскостей, одна из которых - данная плоскость, а другая - ортогональная ей и содержащая исходную прямую. В результате получаем:

$$(\vec{r}, \vec{n}) = -D, \quad (\vec{r}, \vec{n}_1) = -D_1,$$
$$\vec{n}_1 = \vec{s} \times \vec{n}, \quad D_1 = (\vec{r}_0, \vec{n}_1).$$