



Лекция 13

Гипербола

Содержание лекции:

В этой лекции мы рассмотрим неограниченную кривую второго порядка - гиперболу. Мы применим алгоритм аналитического исследования, обсуждаемый в предыдущей лекции и опишем свойства данной кривой.

Ключевые слова:

Каноническое уравнение гиперболы, рациональные уравнения гиперболы, полярные уравнения гиперболы, касательная к гиперболе, асимптоты гиперболы, директриса гиперболы, директориальное свойство гиперболы.

Авторы курса:

Трифанов А. И.

Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:

mathdep.ifmo.ru/geolin

13.1 Определения

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух заданных точек плоскости есть величина постоянная.

Nota bene Обозначим соответствующие точки через F_1 и F_2 , тогда условие, сформулированное в определении для произвольной точки M эллипса можно записать следующим образом:

$$||F_1M| - |F_2M|| = \text{const.}$$

Вводя краткие обозначения

$$|F_1M| = r_1, \quad |F_2M| = r_2, \quad |F_1F_2| = 2c, \quad \text{const} = 2a, \quad a > 0.$$

получаем

$$|r_1 - r_2| = 2a, \quad c > a,$$

что приводит к двум уравнениям:

$$\begin{aligned} r_1 - r_2 &= 2a, & r_1 > r_2, \\ r_2 - r_1 &= 2a, & r_2 > r_1. \end{aligned}$$

Канонической системой координат для гиперболы называется декартова прямоугольная система координат, центр которой является серединой отрезка, заключенного между точками F_1 и F_2 , которые лежат на оси Ox .

Лемма 13.1. Уравнение гиперболы в канонической системе координат имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{13.1}$$

и называется каноническим уравнением гиперболы.



Подставим в определение гиперболы выражения для r_1 и r_2 :

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}.$$

Для случая $r_1 > r_2$ будем иметь:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(c-x)^2 + y^2} &= 2a \\ (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(c-x)^2 + y^2} + (c-x)^2 + y^2 \\ 4xc &= 4a^2 + 4a\sqrt{(c-x)^2 + y^2} \\ xc - a^2 &= a\sqrt{(c-x)^2 + y^2} \\ x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2) \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(c^2 - a^2)} &= 1 \end{aligned}$$

Заметим, что $b^2 = c^2 - a^2 > 0$, откуда получаем искомое уравнение.

Случай $r_2 > r_1$ рассматривается аналогично.



Лемма 13.2. Всякое уравнение вида (13.1) определяет гиперболу.



Покажем, что из канонического уравнения гиперболы следуют геометрические соотношения, лежащие в основе ее определения. Имеем

$$\begin{aligned} y^2 &= b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right), \\ r_{1,2} &= \sqrt{(x \pm c)^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2 - b^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) x^2 \pm 2xc + a^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{c}{a} x \pm a \right)^2} = \left| \frac{c}{a} x \pm a \right|, \end{aligned}$$

откуда получаем:

$$\begin{aligned} r_1 &= \varepsilon x + a, & r_2 &= \varepsilon x - a, & r_1 &> r_2, \\ r_1 &= -\varepsilon x + a, & r_2 &= -\varepsilon x - a, & r_1 &< r_2. \end{aligned}$$



Рациональными уравнениями гиперболы называются уравнения вида:

$$\begin{aligned} r_1 &= \varepsilon x + a, & r_2 &= \varepsilon x - a, \\ r_1 &= -\varepsilon x + a, & r_2 &= -\varepsilon x - a. \end{aligned}$$

где величина $\varepsilon = c/a$ называется **эксцентриситетом гиперболы**.

Nota bene Гипербола - неограниченная кривая:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} &= 1 + \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow \left| \frac{x}{a} \right| \geq 1 \Rightarrow |x| \geq a, & x &= \pm a & y &= 0, \\ \frac{y^2}{b^2} &= \frac{x^2}{a^2} - 1 \Rightarrow \left| \frac{y}{b} \right| \geq 1 \Rightarrow |y| \geq b, & y &= \pm b & x &= 0, \end{aligned}$$

Nota bene Осевая и центральная симметрии

$$M(x, y) \in H \Rightarrow M_1(x, -y) \in H, \quad M_2(-x, y) \in H, \quad M_3(-x, -y) \in H.$$

Nota bene Точки пересечения с осями координат и вспомогательные точки:

$$A_1(-a, 0), \quad A_2(a, 0), \quad B_1(0, -b), \quad B_2(0, b).$$

Введем ряд определений:

- точки F_1 и F_2 называются **фокусами** гиперболы;
- расстояние $c = |F_1 F_2|/2$ называется **фокусным расстоянием**;
- точки A_1, A_2 называются **вершинами** гиперболы;
- отрезок $A_1 A_2$ ($B_1 B_2$) называется **вещественной (мнимой) осью** гиперболы;
- величина $2a$ ($2b$) называется **длиной вещественной (мнимой) оси**;
- величина $\varepsilon = c/a$ называется **эксцентриситетом** гиперболы;

Nota bene Эксцентриситет ε :

$$a < c \Rightarrow \varepsilon = c/a \Rightarrow \varepsilon \in [1, +\infty).$$

Частные случаи:

1. $\varepsilon = 1 \Rightarrow b = 0$ - лучи из фокусов.
2. $\varepsilon = +\infty \Rightarrow a = 0$ - ось Oy .

Полярными уравнениями гиперболы называются уравнения вида

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \quad p = a - \varepsilon c, \quad r_1 > r_2, \\ \rho &= -\frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \quad p = a - \varepsilon c, \quad r_1 < r_2 \end{aligned}$$

где (ρ, φ) - полярные координаты на плоскости, F_1 - полюс и Ox - полярная ось.

Лемма 13.3. Полярное уравнение гиперболы задает гиперболу.



Из определения следует, что $r_1 = \rho$. Пусть $r_1 > r_2$, тогда:

$$\begin{aligned} r_2^2 &= (r_1 - 2a)^2 = r_1^2 - 4ar_1 + 4a^2, \\ r_2^2 &= r_1^2 + 4c^2 - 4r_1 c \cos \varphi, \end{aligned}$$

откуда после исключения r_2 находим:

$$r_1 = \frac{a^2 - c^2}{a - c \cos \varphi} \Rightarrow \rho = \frac{a - \varepsilon c}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

Случай $r_2 > r_1$ рассматривается аналогично. ◀

Параметрическими уравнениями гиперболы называются уравнения вида

$$x(t) = a \cdot \cosh t, \quad y(t) = b \cdot \sinh t$$

Лемма 13.4. *Параметрические уравнения гиперболы задают гиперболу.*



Имеет место следующее тождество:

$$\frac{x(t)^2}{a^2} - \frac{y(t)^2}{b^2} = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$



13.2 Специальные прямые

|| **Касательной к гиперболе** называется прямая, имеющая с ней одну общую точку.

Лемма 13.5. *Уравнение касательной к эллипсу в точке $M(x_0, y_0)$ имеет вид*

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$



Будем искать уравнение касательной в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t. \end{cases}$$

Подставляя в уравнение эллипса будем иметь:

$$\frac{(x_0 + \alpha t)^2}{a^2} - \frac{(y_0 + \beta t)^2}{b^2} = 1.$$

Точка $M(x_0, y_0)$ является общей точкой искомой прямой и эллипса, поэтому:

$$\frac{2x_0\alpha t + \alpha^2 t^2}{a^2} - \frac{2y_0\beta t + \beta^2 t^2}{b^2} = 0, \quad \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1.$$

Далее будем иметь

$$t \left(\frac{2x_0\alpha + \alpha^2 t}{a^2} - \frac{2y_0\beta + \beta^2 t}{b^2} \right) = 0.$$

При $t = 0$ получаем точку $M(x_0, y_0)$, рассмотрим выражение, стоящее в скобках:

$$\begin{aligned} 2x_0\alpha b^2 + \alpha^2 b^2 t - 2y_0\beta a^2 - \beta^2 a^2 t &= 0, \\ t &= -2 \frac{x_0\alpha b^2 - y_0\beta a^2}{\alpha^2 b^2 - \beta^2 a^2}. \end{aligned}$$

Так как общая точка у эллипса и искомой прямой единственная, то t из последнего выражения также должен быть равен нулю:

$$\begin{aligned} \frac{x_0\alpha b^2 - y_0\beta a^2}{\alpha^2 b^2 - \beta^2 a^2} &= 0, \\ x_0\alpha b^2 - y_0\beta a^2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}. \end{aligned}$$

Перепишывая уравнение касательной в общем вид будем иметь

$$\begin{aligned} y - y_0 &= \frac{\beta}{\alpha}(x - x_0) = \frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}(x - x_0), \\ y_0 a^2(y - y_0) &= x_0 b^2(x - x_0), \quad \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \\ \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} &= 1. \end{aligned}$$



Асимптотой неограниченной кривой называется такая прямая, такая что расстояние от точки кривой до асимптоты стремится к нулю, когда точка кривой уходит на бесконечность.

Теорема 13.1. В канонической системе координат асимптотами гиперболы служат прямые:

$$y = \pm \frac{b}{a}x.$$



Пользуясь симметричностью гиперболы, доказательство можно ограничить только случаем первой четверти: $x \geq 0, y \geq 0$. Найдем расстояние от произвольной точки, лежащей на гиперболе до прямой $bx - ay = 0$:

$$d = \left| \frac{bx - a \cdot b/a \sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = \frac{b \cdot |x^2 - (x^2 - a^2)|}{\sqrt{a^2 + b^2} |x + \sqrt{x^2 - a^2}|} = \frac{ba^2}{\sqrt{a^2 + b^2} |x + \sqrt{x^2 - a^2}|}.$$

Очевидно, что $d \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ и значит прямая из формулировки теоремы является асимптотой.



Директрисами гиперболы называются прямые, параллельные ее мнимой оси и находящиеся на расстоянии a/ε :

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}, \quad \varepsilon > 1.$$

Лемма 13.6. Директориальное свойство: отношение расстояний от каждой точки гиперболы до фокуса и до соответствующей директрисы постоянно и не зависит от выбора точки:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon. \quad (13.2)$$



Для правой ветки имеем:

$$\begin{aligned} r_1 &= a + \varepsilon x, & d_1 &= a/\varepsilon + x & \Rightarrow & r_1/d_1 = \varepsilon, \\ r_2 &= \varepsilon x - a, & d_2 &= x - a/\varepsilon & \Rightarrow & r_2/d_2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Для левой ветки имеем:

$$\begin{aligned} r_1 &= -a - \varepsilon x, & d_1 &= -a/\varepsilon - x & \Rightarrow & r_1/d_1 = \varepsilon, \\ r_2 &= a - \varepsilon x, & d_2 &= -x + a/\varepsilon & \Rightarrow & r_2/d_2 = \varepsilon. \end{aligned}$$



Лемма 13.7. *Всякое геометрическое место точек, удовлетворяющее условию (13.2) есть гипербола.*



Из равенств для правой ветки имеем:

$$r_{1,2} = \sqrt{(x \pm c)^2 + y^2} = \varepsilon \left| x \pm \frac{a}{\varepsilon} \right|,$$

откуда следует, что

$$(x \pm c)^2 + y^2 = (\varepsilon x \pm a)^2,$$

и поэтому

$$(\varepsilon^2 - 1)x^2 - y^2 = c^2 - a^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

