



Лекция 5

Унитарный оператор

Содержание лекции:

В настоящей лекции мы продолжаем рассматривать специального вида операторы в евклидовом пространстве. Унитарный оператор играет ведущую роль при исследовании эволюции любой динамической системы, так как любое преобразование во времени состояния динамической системы описывается непрерывным семейством унитарных операторов. На множестве унитарных операторов можно определить структуру группы, что имеет далеко идущие следствия, обсуждение которых, однако, выходит за рамки нашего курса.

Ключевые слова:

Изометрия, унитарный оператор, определитель унитарного оператора, матрица унитарного оператора, спектральные свойства унитарного оператора, ортогональный оператор, спектральная теорема, диагонализация эрмитовой матрицы.

Авторы курса:

Трифанов А. И.

Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:

mathdep.ifmo.ru/geolin

5.1 Определение унитарного оператора

Лемма 5.1. Пусть $v \in \text{End}_{\mathbb{K}}(X_E)$ - эндоморфизм пространства $X_E(\mathbb{K})$, тогда следующие свойства эквивалентны:

1. изометрия: $\langle vx, vy \rangle = \langle x, y \rangle$;
2. сохранение нормы: $\|vx\| = \|x\|$;
3. свойство сопряженного: $v^\dagger = v^{-1}$



Проверим следующие импликации:

- Опр.(1) \Rightarrow Опр.(2):

$$\|vx\|^2 = \langle vx, vx \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2;$$

- Опр.(2) \Rightarrow Опр.(1):

$$\begin{aligned} \|v(x+y)\|^2 &= \|vx\|^2 + \|vy\|^2 + 2\Re \langle vx, vy \rangle, \\ \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re \langle x, y \rangle \Rightarrow \Re \langle x, y \rangle = \Re \langle vx, vy \rangle \end{aligned}$$

Для \Im аналогично рассматриваем $\|v(x+i \cdot y)\|^2$

- Опр.(1) \Rightarrow Опр.(3):

$$\langle vx, vy \rangle = \langle x, v^\dagger vy \rangle = \langle x, y \rangle \Rightarrow v^\dagger v = \mathcal{I}.$$

- Опр.(3) \Rightarrow Опр.(1):

$$\langle x, y \rangle = \langle x, \mathcal{I}y \rangle = \langle x, v^\dagger vy \rangle = \langle vx, vy \rangle.$$



|| **Унитарным** называется оператор $v \in \text{End}_{\mathbb{K}}(X_E)$, обладающий одним из перечисленных выше свойств (и, как следствие, всем остальными).

Лемма 5.2. Определитель оператора v имеет следующее свойство:

$$|\det v| = 1.$$



Прямой проверкой можно убедиться, что

$$\det \mathcal{I} = \det (v^\dagger v) = \det v^\dagger \det v = \overline{\det v} \cdot \det v = |\det v|^2 = 1.$$



Nota bene Унитарный оператор в вещественном евклидовом пространстве X_E называется **ортогональным** оператором.

5.2 Матрица унитарного оператора

Nota bene Матрицы унитарного и ортогонального операторов имеют свойства:

$$\begin{aligned}\mathbb{C} : \quad v &\leftrightarrow U, \quad \overline{U^T} = U^{-1}; \\ \mathbb{R} : \quad v &\leftrightarrow U, \quad U^T = U^{-1}.\end{aligned}$$

Nota bene В вещественном случае

$$\det v = \det U = \pm 1$$

Лемма 5.3. Пусть $U = \|u_{ik}\|$ - матрица унитарного оператора, тогда:

$$\sum_{j=1}^n \bar{u}_{ij} u_{kj} = \delta_{ik}.$$

Nota bene Столбцы матрицы унитарного оператора ортогональны.

Пример 5.1. Матрица Эйлера - пример ортогональной матрицы:

$$U = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Лемма 5.4. Множество унитарных операторов, действующих на пространстве X_E образует мультипликативную группу:

$$\begin{aligned}U(n) &= \{v : v^\dagger v = \mathcal{I}\}, \quad \dim_{\mathbb{K}} X_E = n. \\ SU(n) &= \{v : v^\dagger v = \mathcal{I}, \quad \det v = 1\}.\end{aligned}$$



Пусть $v_1, v_2 \in U(n)$, тогда $v_1 v_2 \in U(n)$. Действительно:

$$\langle v_1 v_2 x, v_1 v_2 y \rangle = \langle v_2 x, v_2 y \rangle = \langle x, y \rangle.$$



5.3 Спектральные свойства унитарного оператора

Лемма 5.5. Все собственные значения оператора v по модулю равны единице:

$$|\lambda| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = e^{i\chi}.$$



Пусть $vx = \lambda x$, тогда

$$\langle vx, vx \rangle = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = |\lambda|^2 \langle x, x \rangle. \quad \Rightarrow \quad |\lambda| = 1.$$



УНИТАРНЫЙ ОПЕРАТОР

Лемма 5.6. Собственные векторы унитарного оператора, отвечающие различным собственным значениям ортогональны:

$$vx_1 = \lambda_1 x_1, \quad vx_2 = \lambda_2 x_2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad \langle x_1, x_2 \rangle = 0.$$



Убедимся прямой проверкой:

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \langle vx_1, vx_2 \rangle = \bar{\lambda}_1 \lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle = e^{-i\chi_1} e^{i\chi_2} \langle x_1, x_2 \rangle = e^{i(\chi_2 - \chi_1)} \langle x_1, x_2 \rangle.$$

Откуда сразу следует:

$$(e^{i(\chi_1 - \chi_2)} - 1) \langle x_1, x_2 \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle x_1, x_2 \rangle = 0.$$



Лемма 5.7. Любое инвариантное подпространство v является ультраинвариантным.



Для любых $x \in L$ и $y \in L^\perp$ имеем:

$$0 = \langle x, y \rangle = \langle vx, vy \rangle \quad \Rightarrow \quad vx \perp vy \quad \Rightarrow \quad vy \in M.$$



Теорема 5.1. Унитарный оператор является оператором скалярного типа.



Доказательство как для случая эрмитова оператора. ◄

Nota bene Ортогональный оператор, вообще говоря, не является скалярным.

Теорема 5.2. (Спектральная теорема для унитарного оператора) Пусть $v : X_E \rightarrow X_E$ - унитарный оператор и $\{e_j\}_{j=1}^n$ - ОНБ X_E , состоящий из собственных векторов v , тогда:

$$v* = \sum_{j=1}^n e^{i\chi_j} \langle e_j, * \rangle e_j.$$

Лемма 5.8. Любая эрмитова матрица может быть приведена к диагональной форме унитарным преобразованием.

Лемма 5.9. Для любого унитарного оператора v найдется такой самосопряженный оператор φ , что:

$$v = e^{i\varphi}.$$