δ

Лекция 4

Поле комплексных чисел

Содержание лекции:
В данной лекции мы которотко рассмотрим поле комплексных чисел, которое возникает как алгебраичекое замыкание поля $\mathbb{R}$. Обсуждая алгбраические операции с комплексными числами мы заложим основы для использования этих чисел в различных областях математики и ее приложений.

Ключевые слова:
Комплексное число, поле комплексных чисел, алгебраическая форма КЧ, комплексно сопряженное число, тригонометрическая форма КЧ, формула Муавра, показательная форма КЧ.

Авторы курса:

Трифанов А.И. Москаленко М.А.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

4.1 Алгебраическая форма комплексного числа

Комплексным числом называется элемент z декартова произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$z = (a, b), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

снабженного двумя бинарными операциями, *индуцированными* из $\mathbb{R}$:

- $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$;
- $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$;

Nota bene Для множества комплексных чисел имеется специальное обозначение:

$$\mathbb{C} = \{(a, b) : \quad a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Nota bene Имеет место свойство

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2.$$

Теорема 4.1. *Множество $\mathbb{C}$ имеет алгебраическую структуру поля.*

▶

Сначала проверим свойства операции $+$:

1. ассоциативность очевидна в силу ассоциативности $+$ на множестве $\mathbb{R}$;
2. нейтральный элемент $0_{\mathbb{C}} = (0, 0)$, действительно:

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad z + 0_{\mathbb{C}} = z = 0_{\mathbb{C}} + z;$$

3. обратным элементом для $z = (a, b)$ является $(-z) = (-a, -b)$;

Далее, проверим свойства операции $\cdot$:

1. ассоциативность проверяется непостредственно:

$$((a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)) \cdot (a_3, c_3) = (a_1, b_1) \cdot ((a_2, b_2) \cdot (a_3, c_3)).$$

2. нейтральный элемент $1_{\mathbb{C}} = (1, 0)$:

$$1_{\mathbb{C}} \cdot z = (1, 0) \cdot (a, b) = (a, b).$$

3. обратным элементом для $z = (a, b) \neq (0, 0) = 0_{\mathbb{C}}$ является

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{N(z)}, -\frac{b}{N(z)}\right), \quad N(z) = a^2 + b^2.$$

Осталось проверить дистрибутивность введенных операций слева и справа, что проводится непосредственным вычислением:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$$

◀

Лемма 4.1. *Отображение* $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, *заданное формулой* $\sigma(a) = (a, 0)$ *является вложением* $\mathbb{R}$ *в* $\mathbb{C}$.

▶

Покажем, что σ - гомоморфизм:

$$\sigma(a+b) = (a+b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = \sigma(a) + \sigma(b),$$
$$\sigma(ab) = (ab, 0) = (a, 0) \cdot (b, 0) = \sigma(a) \cdot \sigma(b).$$

Далее σ инъективно:

$$\sigma(a) = \sigma(b) \quad \Rightarrow \quad \sigma(a-b) = (0, 0) \quad \Rightarrow \quad a - b = 0.$$

Следовательно σ - вложение.

◀

Алгебраической формой комплексного числа $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ называется представление его в следующем виде:

$$z = a + ib,$$

где символ i называется **мнимой единицей** и обладает свойством $i^2 = -1 \in \mathbb{R}$.

Лемма 4.2. *Отображение* $(a, b) \mapsto a + ib$ *является кольцевым изоморфизмом.*

Nota bene Заметим, что $i' = -i$ также является мнимой единицей, что приводит к автоморфизму $z \mapsto \bar{z}$ поля $\mathbb{C}$, который называется **комплексным сопряжением**.

Пусть $z = a + ib \in \mathbb{C}$ - комплексное число, тогда

- $\Re z \triangleq a$ называется **вещественной частью** числа z;
- $\Im z \triangleq b$ называется **мнимой частью** числа z;
- $\bar{z} = a - ib$ называется числом, **комплексно сопряженным** к z;
- $N(z) \triangleq z\bar{z} = a^2 + b^2$ называется **нормой** комплексного числа z;
- $|z| = \sqrt{N(z)} = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется **модулем** комплексного числа.

4.2 Тригонометрическая форма комплексного числа

Nota bene Пару вещественных чисел (a, b), определяющих комплексное число z, можно интерпретировать как координаты некоторой точки на плоскости, которая называется *комплексной плоскостью.* Координаты на рассматриваемой плоскости - это *вещественная* $\Re$ и *мнимая* $\Im$ оси.

Аргументом комплексного числа z (обозначается $\arg(z)$) называется направленный угол от оси $\Re$ до луча Oz, откладываемый против часовой стрелки с величиной, берущейся по модулю $2\pi k$.

Nota bene Альтернативно паре (a, b) можно использовать пару (ρ, ψ), определяемую следующим образом:

$$a = \rho \cos \psi, \quad b = \rho \sin \psi,$$
$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|, \quad \cos \psi = a/|z|, \quad \sin \psi = b/|z|.$$

Пара (ρ, ψ) отвечает координатам точки z в *полярной системе координат.*

> **Тригонометрической формой** комплексного числа $z \in \mathbb{C}$ называется представление его в следующем виде:
>
> $$z = (\rho \cos \psi, \rho \sin \psi) = \rho(\cos \psi, \sin \psi).$$

Лемма 4.3. *Имеют место свойства:*

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

►
Прямой проверкой убеждаемся, что

$$\rho_1(\cos \psi_1, \sin \psi_1) \cdot \rho_2(\cos \psi_2, \sin \psi_2) = \rho_1 \rho_2(\cos(\psi_1 + \psi_2), \sin(\psi_1 + \psi_2)).$$

◄

Теорема 4.2. *(Формула Муавра) Пусть $z \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}$, тогда*

$$|z^n| = |z|^n, \quad \arg(z^n) = n \cdot \arg(z).$$

►
Доказательство проводится индукцией по n.
◄

Пример 4.1. Найдем решение уравнения

$$z^n = \omega, \quad z, \omega \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Из формулы Муавра следует

$$|z|^n \cdot (\cos(n\psi), \sin(n\psi)) = |\omega| \cdot (\cos \chi, \sin \chi),$$

откуда получаем

$$|z| = \sqrt[n]{|\omega|}^{+}, \quad n\psi = \chi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

И значит

$$z = \sqrt[n]{|\omega|}^{+} \left(\cos \frac{\chi + 2\pi k}{n}, \sin \frac{\chi + 2\pi k}{n} \right)$$

Nota bene Из примера видно, что все решения уравнения лежат на окружности радиуса $r = \sqrt[n]{|\omega|}$ в вершинах *правильного* n - угольника.

Лемма 4.4. *Множество корней уравнения $z^n = 1$ образует мультипликативную абелеву группу.*

►

Пусть S - множество решений данного уравнения. Покажем, что S замкнуто:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1^n = 1, \quad \varepsilon_2^n = 1 \quad \Rightarrow \quad (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^n = 1 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1 \varepsilon_2 \in S.$$

Нейтральным элементом является $\varepsilon_0 = 1_{\mathbb{C}}$.
Обратный элемент к $\varepsilon \in S$ имеет вид $\varepsilon^{-1} = \varepsilon^{n-1}$.

◄

Nota bene Альтернативная форма записи комплексного числа в тригонометрической форме имеет вид:

$$z = \rho \cdot (\cos\psi + i \sin\psi).$$

Показательная форма комплексного числа имеет вид

$$z = \rho \cdot e^{i\psi}, \quad \rho = |z|, \quad \psi = \arg(z), \quad i^2 = -1.$$

Nota bene (формулы Эйлера)

$$\cos\psi = \frac{e^{i\psi} + e^{-i\psi}}{2}, \quad \sin\psi = \frac{e^{i\psi} - e^{-i\psi}}{2i}.$$