Лекция 2

Базис и размерность

Содержание лекции:
Предметом нашего интереса в настоящей лекции будет обсуждение связи между линейной независимостью и полнотой заданного набора векторов. Рассмотрение приведет нас к понятию базиса, а также важным соотношениям между числами векторов в различных наборах, что в свою очередь позволит доказать важнейшее утверждение о независимости числа векторов от выбора базиса и ввести понятие размерности линейного пространства. Оставшуюся часть мы посвятим обсуждению координат векторов в выбранном базисе.

Ключевые слова:
Конечномерное линейное пространство, замещение векторов в полном наборе, базис, процедура прореживания, размерность линейного пространства, координаты вектора в базисе, единственность координат, координаты линейной комбинации.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

2.1 Линейная независимость и полнота

> Линейное пространство $X = X(\Bbbk)$ называется **конечномерным**, если в нем существует конечный и полный набор векторов.

Nota bene Далее под $X(\Bbbk)$ будем понимать именно конечномерное пространство.

Лемма 2.1. *Если набор $\{y_i\}_{i=1}^n$ - полный в $X(\Bbbk)$, тогда линейнозависим набор*

$$\{y_1, y_2, \ldots, y_n; x\} \quad \forall x \in X(\Bbbk),$$

▶
Так как набор $\{y_i\}_{i=1}^n$ - полный, то

$$\forall x \in X \quad \exists \left\{\alpha^i\right\}_{i=1}^n : \quad x = \sum_{i=1}^n y_i \alpha^i.$$

Но тогда из критерия линейной зависимости следует, что $\{y_1, y_2, \ldots, y_n; x\}$ - ЛЗ.
◀

Лемма 2.2. *Пусть $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ - полный набор в $X(\Bbbk)$, тогда*

$$\forall x \in X \quad x \neq 0_X \quad \exists k \in 1 \ldots n : \quad \{y_1, y_2, \ldots, \cancel{y_k}, \ldots y_n; x\} \text{ - полный набор.}$$

▶
Из линейной зависимости набора $\{y_1, y_2, \ldots, y_n; x\}$ следует

$$\exists \left\{\alpha^i\right\}_{i=1}^n : \quad x = \sum_{i=1}^n y_i \alpha^i = \sum_{i=1, i\neq k}^n y_i \alpha^i + y_k \alpha^k \quad \Rightarrow \quad y_k = \left(x - \sum_{i=1, i\neq k}^n y_i \alpha^i\right) \frac{1}{\alpha^k}$$

Тогда для любого $z \in X$ будем иметь

$$\exists \left\{\beta^i\right\}_{i=1}^n : \quad z = \sum_{i=1}^n y_i \beta^i = \sum_{i=1, i\neq k}^n y_i \beta^i + y_k \beta^k = \sum_{i=1, i\neq k}^n y_i \beta^i + \left(x - \sum_{i=1, i\neq k}^n y_i \alpha^i\right) \frac{\beta^k}{\alpha^k}.$$

И лемма доказана.
◀

> Будем называть **процедурой замещения** векторов в полном наборе следующую:
>
> $$\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \to \{y_1, y_2, \ldots, \cancel{y_k}, \ldots y_n; x\}$$

Лемма 2.3. *Число векторов ЛНЗ набора в конечномерном пространстве не превосходит числа векторов полного набора:*

$$\begin{cases} \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \text{ - ЛНЗ набор,} \\ \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \text{ - полный набор} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad n \geq m.$$

►
От противного, пусть $m > n$. Воспользуемся последовательно процедурой замещения векторов в полном наборе $\{y_i\}_{i=1}^n$ векторами набора $\{x_j\}_{j=1}^m$. Будем иметь:

1. $\{y_1, \dots, y_n\} \quad \rightarrow \quad \{y_1, \dots, \cancel{y_k}, \dots; x_1\}$;
2. $\{y_1, \dots; x_1\} \quad \rightarrow \quad \{y_1, \dots, \cancel{y_k}, \dots, \cancel{y_l}, \dots, y_n; x_1, x_2\}$;

   $\dots \quad \dots \quad \dots$

n. $\{y_q; \dots, x_{n-1}\} \quad \rightarrow \quad \{\cancel{y_1}, \dots, \cancel{y_n}; x_1, \dots, x_n\}$;

Построенный набор $\{x_j\}_{j=1}^n$ является полным и значит

$$\forall z \in X \quad \exists \left\{\alpha^j\right\}_{j=1}^n : \quad z = \sum_{j=1}^n x_j \alpha^j \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = \sum_{j=1}^n x_j \alpha^j \quad \Rightarrow \quad \text{ЛЗ!}$$

Таким образом, пришли к противоречию, так как набор $\{x_j\}_{j=1}^m$ - ЛНЗ.
◄

2.2 Базис линейного пространства

‖ **Базисом** в линейном пространстве $X(\Bbbk)$ называется полный ЛНЗ набор.

Пример 2.1. Набор

1. $\{e_i\}_{i=1}^n$ образует базис в $\mathbb{R}^n$;
2. $\{1, t, t^2, \dots, t^{n-1}, t^n\}$ образует базис в $\mathcal{P}_n$
3. $\{e_{ij}\}_{i=1 \dots m}^{j=1 \dots n}$ - образует базис в $\mathcal{M}(m, n, \Bbbk)$.

Лемма 2.4. *В любом конечномерном пространстве существует базис.*
►
Пусть $X(\Bbbk)$ - конечномерное линейное пространство, тогда в нем существует полный набор векторов $\{y_i\}_{i=1}^m$. Если данный набор линейнонезависимый, то лемма доказана, если нет, тогда воспользуемся *процедурой прореживания*:

1. $\{y_1\}$ - ЛНЗ;

2. $\{y_1, y_2\}$ – ЛЗ $\Rightarrow$ $\{y_1, \cancel{y_2}\}$,
   $\{y_1, y_2\}$ – ЛНЗ $\Rightarrow$ $\{y_1, y_2\}$;

3. $\{y_1, \ldots, y_3\}$ – ЛЗ $\Rightarrow$ $\{y_1, \ldots, \cancel{y_3}\}$,
   $\{y_1, \ldots, y_3\}$ – ЛНЗ $\Rightarrow$ $\{y_1, \ldots, y_3\}$;

   ... ...

m. $\{y_1, \ldots, y_m\}$ – ЛЗ $\Rightarrow$ $\{y_1, \ldots, \cancel{y_m}\}$,
   $\{y_1, \ldots, y_m\}$ – ЛНЗ $\Rightarrow$ $\{y_1, \ldots, y_m\}$;

После процедуры прореживания оставшиеся векторы набора все еще образуют полную систему (так как выбрасывались только линейнозависимые векторы) и линейнонезависимы, а значит образуют базис.
◀

Лемма 2.5. *В конечномерном линейном пространстве любой ЛНЗ набор может быть дополнен до базиса.*
▶
Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ - базис $X(\Bbbk)$ и $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ - имеющийся ЛНЗ набор. Воспользуемся процедурой прореживания:

1. $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, e_1\}$ – ЛЗ $\Rightarrow$ $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, \cancel{e_1}\}$,
   $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, e_1\}$ – ЛНЗ $\Rightarrow$ $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, e_1\}$;

2. $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, e_2\}$ – ЛЗ $\Rightarrow$ $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, \cancel{e_2}\}$,
   $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, e_2\}$ – ЛНЗ $\Rightarrow$ $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, e_2\}$;

   ... ...

n. $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, e_n\}$ – ЛЗ $\Rightarrow$ $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, \cancel{e_n}\}$,
   $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, e_n\}$ – ЛНЗ $\Rightarrow$ $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, e_n\}$.

После процедуры остается полный ЛНЗ набор (базис), содержащий векторы набора $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$.
◀

Nota bene Число векторов любого ЛНЗ набора в конечномерном пространстве не превосходит числа базисных векторов этого пространства.

Теорема 2.1. *Количество векторов в двух разных базисах конечномерного линейного пространства одинаково.*
▶
Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^m$ пара базисов в в линейном пространстве $X(\Bbbk)$. Тогда из того, что $\{e_i\}_{i=1}^n$ - полный набор, а $\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^m$ - ЛНЗ, следует что $m \leq n$. С другой стороны $\{e_i\}_{i=1}^n$ - ЛНЗ, а $\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^m$ - полный набор, и тогда $n \leq m$. Значит $m = n$.
◀

Размерностью линейного пространства $X(\Bbbk)$ называется мощность его базиса.

Пример 2.2. Важные частные случаи:

1. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$;
2. $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_n = n + 1$;
3. $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n, \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$;
4. $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}(m, n, \mathbb{R}) = n \cdot m$;
5. $\dim_{\mathbb{R}} C[a, b] = \infty$.

Nota bene Если $\{x_i\}_{i=1}^m$ - ЛНЗ в $X(\Bbbk)$, то $m \leq \dim_{\Bbbk} X$.

Nota bene Чтобы ЛНЗ набор $\{x_i\}_{i=1}^k$ был базисом в $X(\Bbbk)$ необходимо и достаточно выполнение условия $k = \dim_{\Bbbk} X$.

Nota bene Базис в конечномерном линейном пространстве - это ЛНЗ набор *максимального размера.*

2.3 Координаты вектора в базисе

Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ - базис линейного пространства $X(\Bbbk)$. Тогда

$$\exists \left\{\xi^i \in \Bbbk\right\}_{i=1}^n : \quad x = \sum_{i=1}^n e_i \xi^i \quad \forall x \in X.$$

Набор чисел $\{\xi^i\}_{i=1}^n$ называется **координатами** вектора x в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$.

Лемма 2.6. *Координаты любого вектора из $X(\Bbbk)$ в заданном базисе определяются единственным образом.*

▶

Пусть $\{\xi^i\}_{i=1}^n$ и $\left\{\tilde{\xi}^i\right\}_{i=1}^n$ два набора координат вектора x в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$. Тогда:

$$x = e_1 \xi^1 + e_2 \xi^2 + \ldots + e_n \xi^n,$$
$$x = e_1 \tilde{\xi}^1 + e_2 \tilde{\xi}^2 + \ldots + e_n \tilde{\xi}^n.$$

Вычитая второе разложение из первого, будем иметь:

$$e_1 \left(\xi^1 - \tilde{\xi}\right) + e_2 \left(\xi^2 - \tilde{\xi}^2\right) + \ldots + e_n \left(\xi^n - \tilde{\xi}^n\right) = 0$$

В силу ЛНЗ векторов базиса равенство нулю полученной линейной комбинации имеет место только когда $\xi^i = \tilde{\xi}^i$.

◀

Лемма 2.7. *Координаты в базисе* $\{e_k\}_{k=1}^n$ *линейной комбинации векторов* $\{x_i\}_{i=1}^m$ *равны линейным комбинациям соответствующих координат данных векторов. Именно если*

$$x_i = \sum_{k=1}^n e_k \xi_i^k, \quad y = \sum_{i=1}^m x_i \alpha^i,$$

тогда

$$y = \sum_{j=1}^n e_j \eta^j, \quad \Rightarrow \quad \eta^k = \sum_{i=1}^m \xi_i^k \alpha^i.$$

►

$$y = \sum_{i=1}^m x_i \alpha^i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^n e_k \xi_i^k \right) \alpha^i = \sum_{k=1}^n e_k \left(\sum_{i=1}^m \alpha^i \xi_i^k \right) = \sum_{k=1}^n e_k \eta^k.$$

Использование леммы о единственности набора координат вектора в заданном базисе завершает доказательство.

◄