Лекция 7

Преобразование базиса

Содержание лекции:
В настоящей лекции мы обсудим замену базиса в линейном пространстве и связанные с этой заменой преобразования коордиант. Как будет видно, имеются лишь две возможности - ковариантный закон, когда величины преобразуются также как и базисные векторы при переходе, и контравариантный закон - закон противоположный ковариантному. Любой разумный закон движения сопровождается квариантным или контравариантными преобравзованиями наблюдаемых величин.

Ключевые слова:
Матрица перехода, невырожденность матрицы перехода, ковариантные величины, контравариантные величины.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

7.1 Матрица перехода

Nota bene Пусть $X(\Bbbk)$ - линейное пространство и $\{e_j\}_{j=1}^n$, $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n$ - базисы $X(\Bbbk)$:

$$\forall x \in X(\Bbbk), \quad x = \sum_{j=1}^n e_j \xi^j, \quad x = \sum_{k=1}^n \tilde{e}_k \tilde{\xi}^k.$$

В силу того, что оба набора $\{e_j\}_{j=1}^n$ и $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n$ являются базисами, каждый из векторов одного набора единственным образом выражается через векторы другого набора:

$$\tilde{e}_k = \sum_{j=1}^n e_j \tau_k^j.$$

> Набор коэффициентов $\|\tau_k^j\| = T$ образует матрицу, которая называется **матрицей перехода** от старого базиса $\{e_j\}_{j=1}^n$ к новому базису $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n$.

Nota bene Вводя обозначения $E = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$ и $\tilde{E} = [\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_n]$ получаем:

$$\tilde{E} = E \cdot T.$$

Лемма 7.1. *Матрица перехода невырождена:*

$$\det T \neq 0.$$

▶
Набор векторов $\{e_j\}_{j=1}^n$ - ЛНЗ, а значит $\det T \neq 0$.
◀

Nota bene Существует обратная матрица $T^{-1} = S = \|\sigma_i^l\|$, такая что

$$\tilde{E} \cdot T^{-1} = E \quad \text{или} \quad E = \tilde{E} \cdot S.$$

Теорема 7.1. *Пусть $\{f^i\}_{i=1}$ и $\left\{\tilde{f}^l\right\}_{l=1}$ - базисы $X^*(\Bbbk)$, сопряженные соответственно базисам $\{e_j\}_{j=1}^n$ и $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n$, тогда*

$$\tilde{f}^l = \sum_{i=1}^n \sigma_i^l f^i.$$

▶
По определению сопряженных базисов, Имеем

$$\left(\tilde{f}^l, \tilde{e}_k\right) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^l f^i, \sum_{j=1}^n e_j \tau_k^j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i^l \left(f^i, e_j\right) \tau_k^j =$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i^l \delta_j^i \tau_k^j = \sum_{i=1}^n \alpha_i^l \tau_k^i = \delta_k^l \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}^l = \sum_{i=1}^n \sigma_i^l f^i.$$

◀

Nota bene Вводя соответствующие обозначения, получаем:

$$F = \left(f^1, f^2, \ldots, f^n\right)^T \quad \tilde{F} = \left(\tilde{f}^1, \tilde{f}^2, \ldots, \tilde{f}^n\right)^T \quad \tilde{F} = S \cdot F.$$

7.2 Замена координат при замене базиса

Теорема 7.2. *(о замене координат в $X(\Bbbk)$) Преобразование координат вектора X при переходе от базиса $\{e_j\}_{j=1}^n$ к $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n$ имеет вид:*

$$\tilde{\xi}^k = \sum_{j=1}^n \sigma_j^k \xi^j, \quad \text{или} \quad \left(\tilde{\xi}^1, \tilde{\xi}^2, \ldots, \tilde{\xi}^n\right)^T = S \cdot \left(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n\right)^T.$$

►

Прямой проверкой убеждаемся, что

$$\tilde{\xi}^k = \left(\tilde{f}^k, x\right) = \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^k f^i, \sum_{j=1}^n e_j \xi^j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i^k \left(f^i, e_j\right) \xi^j =$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i^k \delta_j^i \xi^j = \sum_{j=1}^n \sigma_j^k \xi^j.$$

◄

Теорема 7.3. *(о замене координат в $X^*(\Bbbk)$) Преобразование координат формы в $X^*(\Bbbk)$ при переходе от базиса $\{f^i\}_{i=1}^n$ к $\left\{\tilde{f}^l\right\}_{l=1}^n$ имеет вид:*

$$\tilde{\eta}_l = \sum_{i=1}^n \eta_i \tau_l^i, \quad \text{или} \quad \left(\tilde{\eta}^1, \tilde{\eta}^2, \ldots, \tilde{\eta}^n\right) = \left(\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n\right) \cdot T.$$

►

$$\tilde{\eta}_l = (y, \tilde{e}_l) = \left(\sum_{i=1}^n \eta_i f^i, \sum_{j=1}^n e_j \tau_l^j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_i \left(f^i, e_j\right) \tau_l^j =$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_i \delta_j^i \tau_l^j = \sum_{i=1}^n \eta_i \tau_l^i.$$

◄

Величины, преобразующиеся при переходе к новому базису так же, как базисные векторы (то есть, с использованием матрицы T), называются **ковариантными** величинами и снабжаются нижними индексами (ковекторы).

Величины, преобразующиеся при переходе к новому базису по обратному закону (то есть, с использованием матрицы S), называются **контравариантными** величинами и снабжаются верхними индексами (векторы).