



Лекция 5

Сумма и пересечение подпространств

Содержание лекции:

Настоящая лекция посвящена обсуждению операций с подпространствами. Рассматриваемые здесь понятия имеют непосредственное приложение в геометрии. Формулируемое условие единственности разложения произвольного вектора имеет прямое отношение к описанию геометрических объектов и исследованию их свойств. Мы начнем с общих понятий суммы и пересечения линейных подпространств.

Ключевые слова:

Пересечение подпространств, сумма подпространств, прямая сумма подпространств, компоненты вектора, проекция вектора, дополнение пространства, коразмерность пространства.

Авторы курса:

Трифанов А. И.

Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:

mathdep.ifmo.ru/geolin

5.1 Сумма и пересечение подпространств

Nota bene Пусть $X(\mathbb{k})$ - линейное пространство над некоторым полем \mathbb{k} и $L_1, L_2 \subset X(\mathbb{k})$ - два его собственных подпространства.

Множество L' называется **пересечением подпространств** L_1 и L_2 , если

$$L' = \{x \in X : x \in L_1 \wedge x \in L_2\}.$$

Nota bene Тот факт, что множество L' является пересечением подпространств L_1 и L_2 обозначают следующим образом:

$$L' = L_1 \cap L_2.$$

Лемма 5.1. Множество L' - подпространство $X(\mathbb{k})$.



Докажем замкнутость множества L' относительно линейных операций, индуцированных из $X(\mathbb{k})$. Действительно,

$$x, x_1, x_2 \in L' \Rightarrow x, x_1, x_2 \in L_1 \cap L_2 \Rightarrow x, x_1, x_2 \in L_1, \quad x, x_1, x_2 \in L_2.$$

Так как L_1 и L_2 - подпространство, то сразу получаем:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \in L_1, \quad x_1 + x_2 \in L_2 &\Rightarrow x_1 + x_2 \in L_1 \cap L_2 = L', \\ x\lambda \in L_1, \quad x\lambda \in L_2 &\Rightarrow x\lambda \in L'. \end{aligned}$$



Множество L'' называется **суммой подпространств** L_1 и L_2 , если

$$L'' = \{x \in X : x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in L_1, \quad x_2 \in L_2\}.$$

Nota bene Тот факт, что множество L'' является суммой подпространств L_1 и L_2 обозначают следующим образом:

$$L'' = L_1 + L_2.$$

Лемма 5.2. Множество $L'' \equiv L_1 + L_2$ - подпространство X .



Пусть $x, y \in L''$, тогда

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2, \quad y = y_1 + y_2, \quad x_1, y_1 \in L_1, \quad x_2, y_2 \in L_2, \\ x + y &= x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \Rightarrow x + y \in L'', \\ x\lambda &= (x_1 + x_2)\lambda = x_1\lambda + x_2\lambda \Rightarrow x\lambda \in L''. \end{aligned}$$



Nota bene Определение суммы подпространств, определенное выше не эквивалентно теоретико-множественному объединению L_1 и L_2 .

5.2 Теорема о размерностях

Теорема 5.1. (Грассман) Пусть L_1 и L_2 - подпространства X , тогда

$$\dim_{\mathbb{K}} L_1 + \dim_{\mathbb{K}} L_2 = \dim_{\mathbb{K}}(L_1 + L_2) + \dim_{\mathbb{K}}(L_1 \cap L_2)$$



Утверждение теоремы эквивалентно следующему. Пусть

$$\begin{aligned} \{e_1, e_2, \dots, e_m\} &- \text{базис } L_1 \cap L_2, \\ \{e_1, e_2, \dots, e_m, f_1, \dots, f_k\} &- \text{базис } L_1, \\ \{e_1, e_2, \dots, e_m, g_1, \dots, g_l\} &- \text{базис } L_2, \end{aligned}$$

тогда

$$\{e_1, e_2, \dots, e_m, f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_l\} - \text{базис } L_1 + L_2.$$

Для доказательства достаточно показать, что $\{e_1, \dots, f_1, \dots, g_1, \dots\}$ - ПН и ЛНЗ в $L_1 + L_2$. Действительно, для любого $x \in L_1 + L_2$ имеем:

$$\begin{aligned} x = x_1 + x_2 &= \left(\sum_{i=1}^m e_i \alpha_1^i + \sum_{j=1}^k f_j \beta_1^j \right) + \left(\sum_{i=1}^m e_i \alpha_2^i + \sum_{s=1}^l g_s \beta_2^s \right) = \\ &= \sum_{i=1}^m e_i (\alpha_1^i + \alpha_2^i) + \sum_{j=1}^k f_j \beta_1^j + \sum_{s=1}^l g_s \beta_2^s, \end{aligned}$$

что доказывает полноту набора. Для доказательства линейной независимости рассмотрим линейную комбинацию:

$$\begin{aligned} e_1 \alpha^1 + \dots + e_m \alpha^m + f_1 \beta^1 + \dots + f_k \beta^k + g_1 \gamma^1 + \dots + g_l \gamma^l &= 0, \\ e_1 \alpha^1 + \dots + e_m \alpha^m + f_1 \beta^1 + \dots + f_k \beta^k &= -g_1 \gamma^1 - \dots - g_l \gamma^l \equiv z, \end{aligned}$$

где $z \in L_1 \cap L_2$ и значит:

$$z = e_1 \delta^1 + \dots + e_m \delta^m.$$

Из определения $z = -g_1 \gamma^1 - \dots - g_l \gamma^l$ следует

$$g_1 \gamma^1 + \dots + g_l \gamma^l + e_1 \delta^1 + \dots + e_m \delta^m = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^1 = \dots = \gamma^l = \delta^1 = \dots = \delta^m = 0,$$

откуда имеем $z = 0$ и

$$e_1 \alpha^1 + \dots + e_m \alpha^m + f_1 \beta^1 + \dots + f_k \beta^k = z = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^1 = \dots = \alpha^m = \beta^1 = \dots = \beta^k = 0.$$



Nota bene Понятие суммы и пересечения подпространств распространяется на произвольное конечное их число, именно:

$$\begin{aligned} L_1 \cap L_2 \cap \dots \cap L_k &= \{x \in X : x \in L_i, \quad i = 1 \dots k\}, \\ L_1 + L_2 + \dots + L_k &= \{x \in X : x = x_1 + x_2 + \dots + x_k, \quad x_i \in L_i\}. \end{aligned}$$

То, что это линейные подпространства $X(\mathbb{K})$ доказываются аналогично.

5.3 Прямая сумма подпространств. Проекция

Прямой суммой подпространств L_1 и L_2 называется их сумма \tilde{L} :

$$\forall x \in \tilde{L} \quad x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in L_1, \quad x_2 \in L_2,$$

когда такое разложение *единственно*.

Nota bene Тот факт, что \tilde{L} является прямой суммой L_1 и L_2 обозначают следующим образом:

$$\tilde{L} = L_1 \dot{+} L_2.$$

Теорема 5.2. (критерий прямой суммы)

$$L_1 + L_2 = L_1 \dot{+} L_2 \quad \Leftrightarrow \quad L_1 \cap L_2 = \{0_X\}.$$



⇒ Докажем от противного. Пусть

$$\begin{aligned} L = L_1 \dot{+} L_2, \quad L_1 \cap L_2 \neq \{0\} &\Rightarrow \exists z \in L_1 \cap L_2, \quad z \neq 0, \\ x = x_1 + x_2 = x_1 + x_2 + z - z &= (x_1 + z) + (x_2 - z). \end{aligned}$$

⇐ Докажем от противного. Пусть

$$\begin{aligned} L_1 \cap L_2 = \{0_X\}, \quad L = L_1 + L_2, \text{ - не прямая сумма} \\ x = x_1 + x_2, \quad x = y_1 + y_2 \Rightarrow 0_X = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2), \\ x_1 - y_1 = y_2 - x_2 = z \neq 0_X, \quad z \in L_1 \cap L_2. \end{aligned}$$



Теорема 5.3. Линейное пространство $X(\mathbb{k})$ является прямой суммой своих подпространств L_1 и L_2 тогда и только тогда, когда эти подпространства дизъюнкты, а сумма их размерностей совпадает с размерностью $X(\mathbb{k})$:

$$X = L_1 \dot{+} L_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} L_1 \cap L_2 = \{0_X\}, \\ \dim_{\mathbb{k}} L_1 + \dim_{\mathbb{k}} L_2 = \dim_{\mathbb{k}} X \end{cases}$$



⇒ Первая часть следует из признака прямой суммы. Вторая - из того что

$$X = L_1 + L_2, \quad \dim_{\mathbb{k}}(L_1 \cap L_2) = 0_X$$

⇐ Имеем $\dim(L_1 \cap L_2) = 0$ и значит

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{k}} L_1 + \dim_{\mathbb{k}} L_2 &= \dim_{\mathbb{k}}(L_1 + L_2) + 0, \\ \dim_{\mathbb{k}} L_1 + \dim_{\mathbb{k}} L_2 &= \dim_{\mathbb{k}} X, \\ \Rightarrow \dim_{\mathbb{k}} X &= \dim_{\mathbb{k}}(L_1 + L_2). \end{aligned}$$

СУММА И ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОДПРОСТРАНСТВ

Кроме того,

$$\begin{cases} \dim_{\mathbb{K}} X = \dim_{\mathbb{K}}(L_1 + L_2), \\ L_1 + L_2 \subset X \end{cases} \quad \Rightarrow \quad X = L_1 + L_2 \quad \Leftrightarrow \quad X = L_1 \dot{+} L_2.$$

◀

Подпространство $L = \dot{+} \sum_{i=1}^k L_i$ называется **прямой суммой подпространств** L_1, L_2, \dots, L_k , если единственно разложение

$$\forall x \in L \quad x = x_1 + x_2 + \dots + x_k, \quad x_j \in L_j.$$

Лемма 5.3.

$$\sum_{i=1}^k L_i = \dot{+} \sum_{i=1}^k L_i \quad \Rightarrow \quad L_i \cap L_{j \neq i} = \{0_X\}.$$

►

Используем индукцию. Пусть

$$\sum_{i=1}^k L_i = \tilde{L}_{\mathbb{K}} + L_{\mathbb{K}}, \quad \tilde{L}_{\mathbb{K}} = \sum_{i=1}^{k-1} L_i,$$

тогда в силу критерия прямой суммы для двух подпространств будем иметь

$$\tilde{L}_{\mathbb{K}} + L_{\mathbb{K}} = \tilde{L}_{\mathbb{K}} \dot{+} L_{\mathbb{K}} \quad \Rightarrow \quad \tilde{L}_{\mathbb{K}} \cap L_{\mathbb{K}} = \{0_X\}.$$

Таким образом, мы получим

$$\tilde{L}_{\mathbb{K}} \cap L_{\mathbb{K}} = \{0_X\}, \quad i = 1 \dots k-1.$$

Для подпространства $\tilde{L}_{\mathbb{K}}$ доказательство повторяется.

◀

Теорема 5.4. *Имеет место следующий критерий разложения линейного пространства $X(\mathbb{K})$ в прямую сумму подпространств L_1, L_2, \dots, L_k :*

$$X = \dot{+} \sum_{i=1}^k L_i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} L_i \cap L_{j \neq i} = \{0\}, \\ \dim_{\mathbb{K}} X = \sum_{i=1}^k \dim_{\mathbb{K}} L_i. \end{cases}$$

►

\Rightarrow следует из предыдущей леммы и теоремы о размерностях.

\Leftarrow Используем индукцию.

◀

5.4 Проекция вектора на подпространство

Пусть $X = L_1 \dot{+} L_2$, тогда

- x_1, x_2 называются **компонентами** x в L_1 и L_2 ;
- $x_1 = \mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2} x$ называется **проекцией** x на L_1 параллельно L_2 ;
- $x_2 = \mathcal{P}_{L_2}^{\parallel L_1} x$ называется **проекцией** x на L_2 параллельно L_1 ;
- $\mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2}$ называется **проектором на подпространство** L_1 ;
- $\mathcal{P}_{L_2}^{\parallel L_1}$ называется **проектором на подпространство** L_2 ;
- L_1 называется **дополнением** L_2 до X ;
- L_2 называется **дополнением** L_1 до X ;

Nota bene Дополнение к заданному подпространству определяется не единственным образом.

Пример 5.1. Контрпример:

$$L_1 = \mathcal{L}\{e_1, e_2\}, \quad L_2 = \mathcal{L}\{e_3 + \alpha e_1 + \beta e_2\}, \quad X = L_1 \dot{+} L_2 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Лемма 5.4. Размерность дополнения подпространства не зависит от конкретного выбора этого дополнения.

►

Доказательство следует из определения дополнения и теоремы о размерностях.

◄

Размерность дополнения подпространства L называется его **коразмерностью**:

$$\dim_{\mathbb{K}} X = n, \quad \dim_{\mathbb{K}} L = k, \quad \text{codim}_{\mathbb{K}} L = n - k.$$