Задачи третей трети семестра

Бугрий Илья

M3134

08.01.2024

1. Задачи третей трети семестра

1) • Любой $P_i \in \{P_i(x_1 ... x_n)\}_{i=1}^n$ однозначно задается набором коэффициентов, который можно представить в виде вектора ξ из арифметического векторного пространства F

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

- Преобразование $P_i(x) \to \widetilde{P}_i(x) \Longleftrightarrow \xi \to \tilde{\xi} \Rightarrow$ все преобразования существующие на данных полиномах, должны существовать на векторах в арифметическом векторном пространстве $\Rightarrow$ мы можем только:
  - Прибавлять к вектору (полиному) другой вектор (полином) $\xi + \xi'$
  - Умножать вектор (полином) на скаляр $\lambda\xi$
- Рассмотрим умножение на скаляр: $\widetilde{P}_i(x) = \lambda \cdot P_i(x)$

$$\forall x \in U : \widetilde{P}_i(x) = \lambda \cdot P_i(x) = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow \text{инвариантность сохраняется} \tag{2}$$

- Рассмотрим сложение с вектором, который однозначно задает полином $P_j \in \{P_i(x_1 ... x_n)\}_{i=1}^n$

$$\forall x \in U : \widetilde{P}_i(x) = P_j(x) + P_i(x) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \text{инвариантность сохраняется} \tag{3}$$

- Пусть $X = \{P_i(x_1 ... x_n)\}_{i=1}^n$
- По определению

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i \tag{4}$$

- Пусть

$$M = \left\{ \xi \in F \mid \forall x \in U : \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i = 0 \right\} \tag{5}$$

- Определим φ как функцию, которая по полиному дает его коэффиценты в F, тогда

$$\varphi(X) \subseteq M \tag{6}$$

- Рассмотрим преобразование из ξ' в m

$$\forall \xi : \xi \in M \ \text{ и } \xi \notin \varphi(X) : \forall \xi' \in \varphi(x) : m = \xi + (-\xi') + \xi' \tag{7}$$

- $$\forall x \in U : \sum_{i=1}^{n} m_i x_i = 0 \tag{8}$$

- Таким образом, мы можем заменить строку из СЛАУ, на другую строку не присутствующую в данной СЛАУ, если такая существует.
- Расмотрим добавление вектора $\xi : \xi \notin M$. По определению M

$$\forall l \in \varphi(X) : \nexists x \in U : \sum_{i=1}^{n} (\xi_i + l_i) x_i = 0 \tag{9}$$

- Рассмотрим удаление строки из СЛАУ

  Пусть $\exists \{P_i(x_1 ... x_n)\}_{i=1}^{n}$ и U, такие что $\exists x \notin U : \forall i \in [1; n-1] : P_i(x) = 0 \ \text{ и } P_n(x) \neq 0 \Rightarrow$ если мы удалим из СЛАУ последний полином, то множество решений изменится $\Rightarrow$ инвариантность не сохраняется.

2)

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(0)} - \sum_{l=1}^{k-1} a_{lj}^{(l-1)} \frac{a_{i1}^{(l-1)}}{a_{ll}^{(l-1)}} \tag{10}$$

3)
- Определим $f_{(a,b)}((c,d)) = (a,b) \cdot (c,d)$
- Покажем линейность: $\forall x, y \in \mathbb{C} : x \cdot y \in \mathbb{C}$
- $$\begin{aligned} f_{(a,b)}(\alpha(c,d)) = f_{(a,b)}((\alpha c, \alpha d)) = (a,b) \cdot (\alpha c, \alpha d) = \\ = (\alpha ac - \alpha bd, \alpha bc + \alpha ad) = \alpha(ac - bd, bc + ad) = \alpha f_{(a,b)}((c,d)) \end{aligned} \tag{11}$$
- $$\begin{aligned} f_{(a,b)}((c_1, d_1) + (c_2, d_2)) = (a,b) \cdot (c_1 + c_2, d_1 + d_2) = \\ = (a(c_1 + c_2) - b(d_1 + d_2), b(c_1 + c_2) + a(d_1 + d_2)) = \\ = (ac_1 - bd_1, bc_1 + ad_1) + (ac_2 - bd_2, bc_2 + ad_2) = \\ = f_{(a,b)}((c_1, d_1)) + f_{(a,b)}((c_2, d_2)) \end{aligned} \tag{12}$$

- Матрица оператора:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{pmatrix} \tag{13}$$

- Смысл оператора: так как $r_1 e^{i\alpha_1} \cdot r_2 e^{i\alpha_2} = r_1 r_2 e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)}$, то умножая на комплексное число (a, b)мы увеличиваем норму числа (c, d) на норму (a, b), а потом поворачиваем вектор отвечающий числу (c, d) на угол вектора, который отвечает числу (a, b)

4)
- $SO(n)$ - это множество поворотов векторов в пространстве $\mathbb{R}^n$ (поворот, есть преобразование, которое сохраняет длину вектора).
- Любой поворот задается осью вращения (двумерной плоскостью) и углом поворота
- В n-мерном пространстве существует $\binom{n}{2}$ независимых (попарно-ортогональных) плоскостей
- Если мы выбрали плоскость поворота, то любый поворот задается одним базовым умноженным на константу
- $\dim SO(n) = \frac{n(n-1)}{2}$

5)
- Матрица, однозначно задающая $g_{\mu\nu}$ в базисе $\{e_1, e_2\}$ выглядит так :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

- Найдем выражение вектора e_1' в базисе $\{e_1, e_2\}$. Для этого найдем проекцию e_1' на $\{e_1, e_2\}$

$$\begin{aligned} \operatorname{proj}_{e_1} e_1' &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \|e_1'\| \left(\frac{e_1}{\|e_1\|}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \|e_1'\| \ e_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} e_1 \\ \operatorname{proj}_{e_2} e_1' &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \|e_1'\| \left(\frac{e_2}{\|e_2\|}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \|e_1'\| \ e_2 = \frac{1}{2} e_2 \end{aligned} \tag{15}$$

$$e_1' = \frac{\sqrt{3}}{2} e_1 + \frac{1}{2} e_2 \tag{16}$$

- Аналогично найдем проекцию e_2' на $\{e_1, e_2\}$

$$\begin{aligned} \operatorname{proj}_{e_1} e_2' &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \|e_2'\| \left(\frac{e_1}{\|e_1\|}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \|e_2'\| \ e_1 = \frac{1}{2} e_1 \\ \operatorname{proj}_{e_2} e_2' &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \|e_2'\| \left(\frac{e_2}{\|e_2\|}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \|e_2'\| \ e_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} e_2 \end{aligned} \tag{17}$$

$$e_2' = \frac{1}{2} e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} e_2 \tag{18}$$

- Найдем матрицу перехода от базиса $\{e_1, e_2\}$ к $\{e'_1, e'_2\}$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \tag{19}$$

- В старом базисе $g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^T \cdot A \cdot b$
- В новом базисе $B^{-1} \cdot x = x' \Rightarrow x = B \cdot x' \Rightarrow g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^T \cdot B^T \cdot A \cdot B \cdot b \Rightarrow$ матрица соответствующая $g'_{\mu\nu}$

$$A' = B^T \cdot A \cdot B = B \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

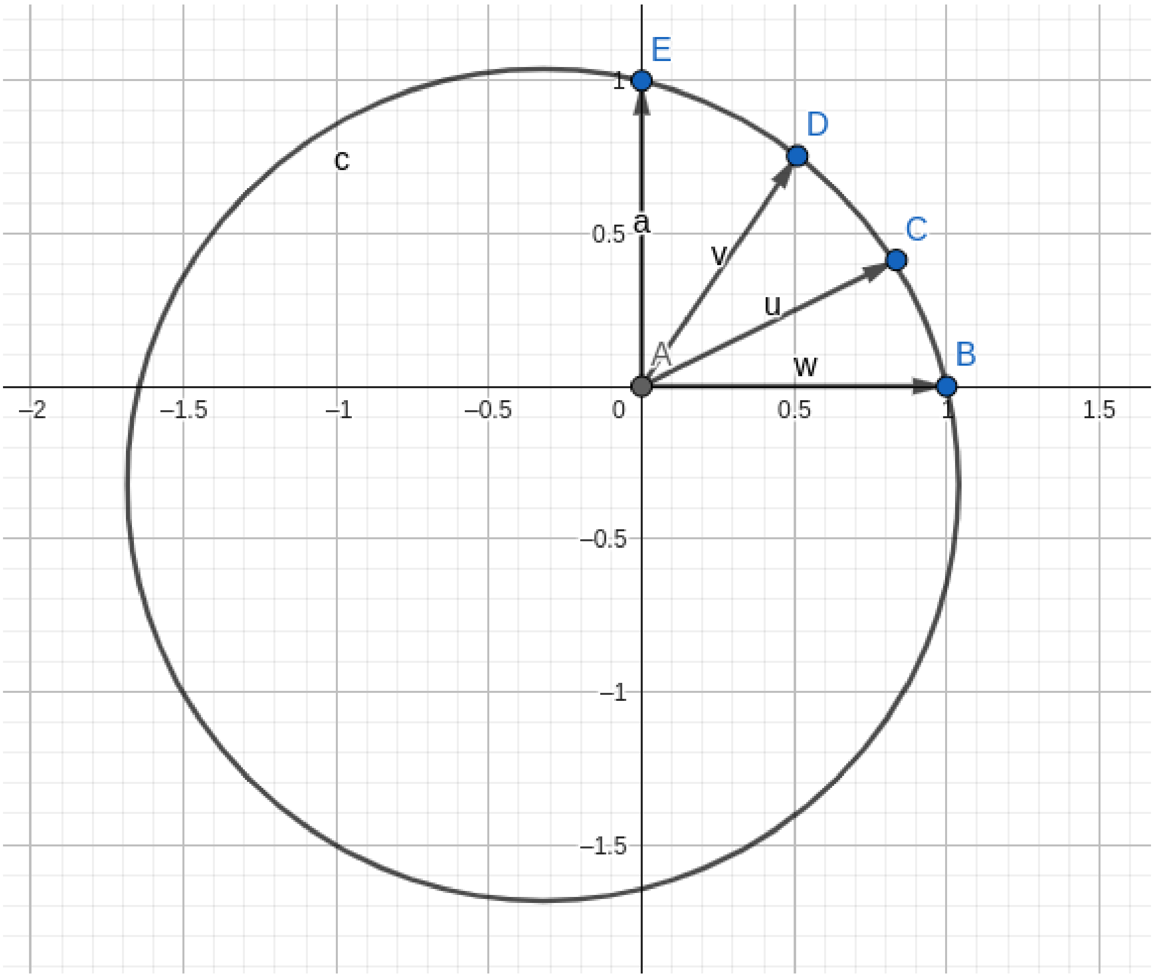
- Чтобы найти третью точку для построения окружности в новом базисе решим уравнение

$$\begin{gathered} g_{\mu\nu}(\alpha e'_1 + e'_2, \alpha e'_1 + e'_2) = 1 \\ \alpha^2 \left(g_{\mu\nu}(e'_1, e'_1) + g_{\mu\nu}(e'_2, e'_2) + 2 \cdot g_{\mu\nu}(e'_1, e'_2) \right) = 1 \\ \alpha^2 \left(2 + \sqrt{3} \right) = 1 \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{1}{2 + \sqrt{3}}} \end{gathered} \tag{21}$$

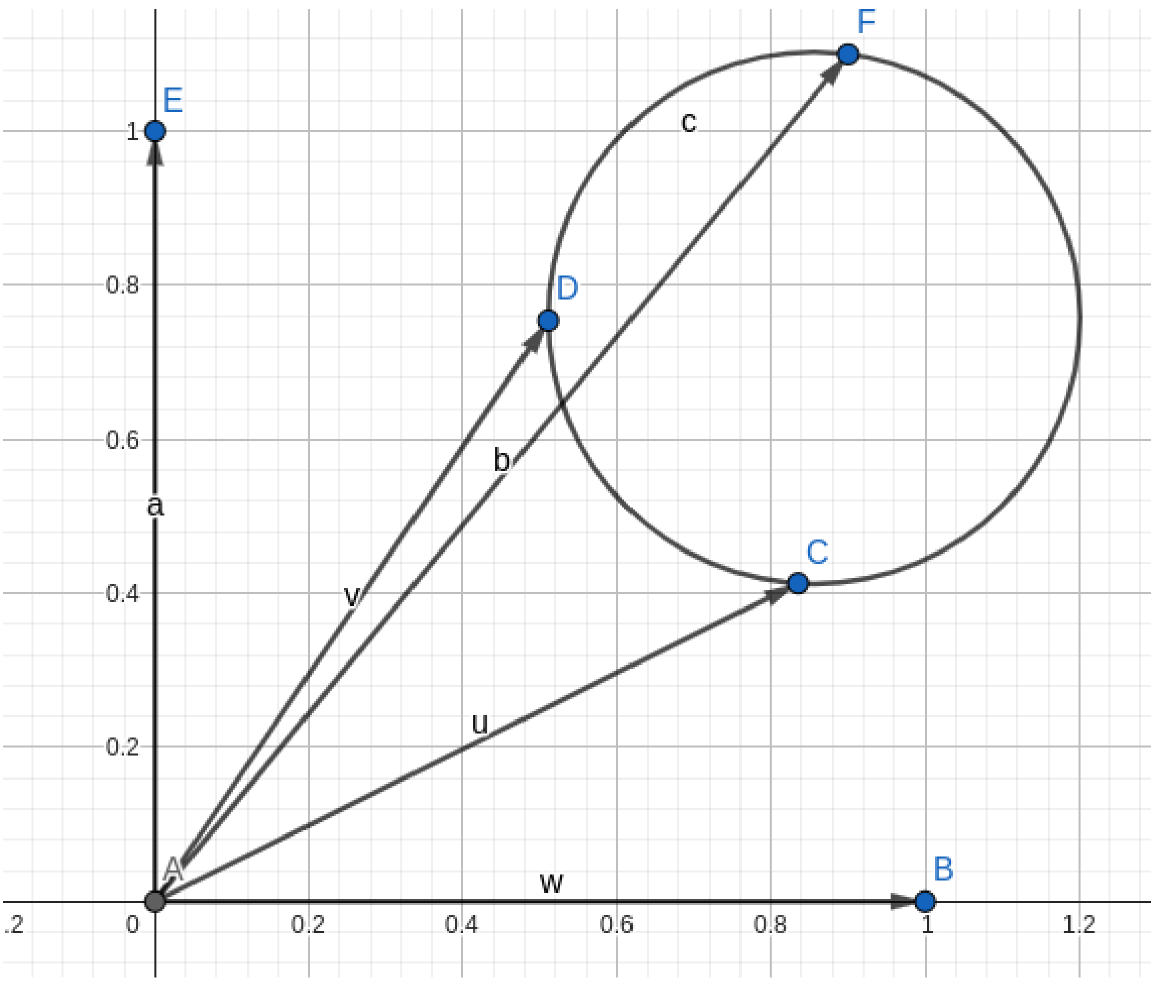
- Найдем координаты вектора $v' = \binom{\alpha}{1}$ в старом базисе

$$v = B \cdot v' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.94 \\ 1.12 \end{pmatrix} \tag{22}$$

- В старом базисе:



- В новом базисе



2. Дополнительные задачи

1) • Покажем, что $M = \{f_a \mid \forall a \in A\}$ есть базис $F(A)$

$$\forall f \in F(A) : \forall x \in A : f(x) = f(x) f_x(x) \quad f_x \in M \tag{23}$$

- Для любого x из области определения f существует образ $\xi = f(x)$, который можно назвать коэффициентом, и существует $f_x \in M$, тогда f на любом значении однозначно выражается через M и коэффициент.

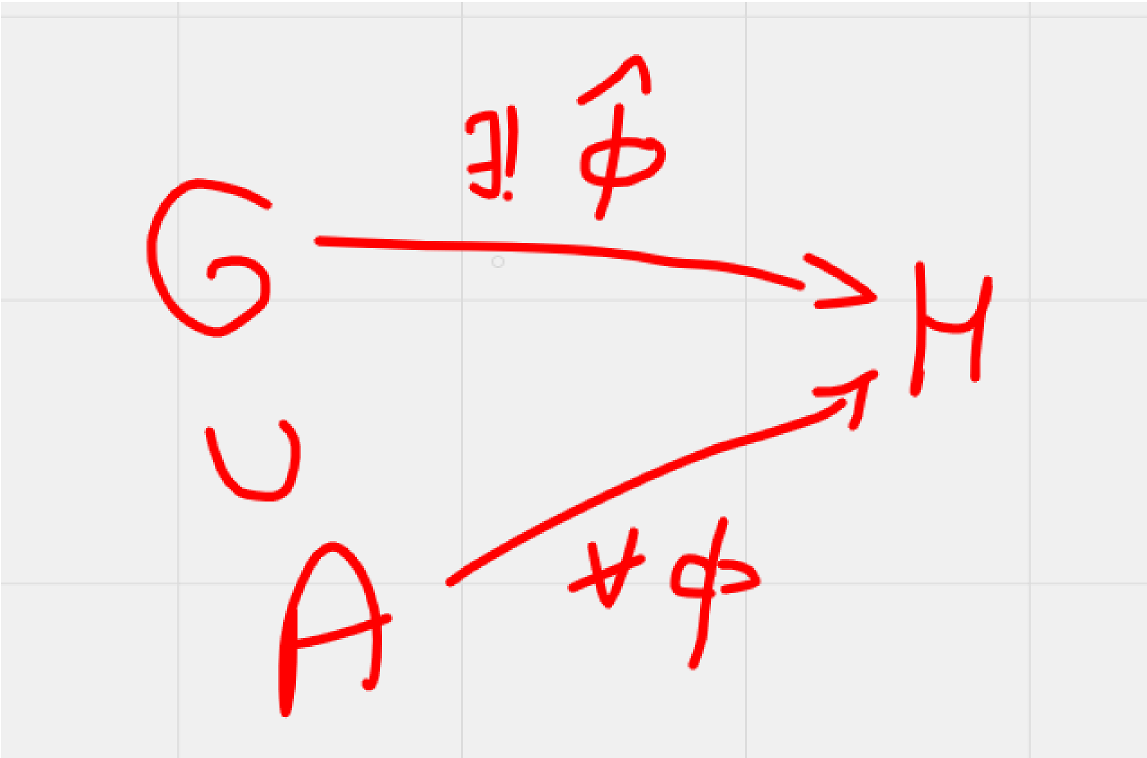
- Докажем универсальное с-во свободной абелевой группы G с базисом $A = \{a_1 ... a_n\}$: Определим искомый гоморфизм как:

$$\hat{\phi}(x \in G) = \hat{\phi}\left(\sum_i n_i a_i\right) = \sum_i n_i \hat{\phi}(a_i) = \sum_i n_i \phi(a_i) \quad n_i \in \mathbb{Z} \tag{24}$$

- Докажем с-во гомоморфизма:

$$
\begin{aligned}
x + y &= \sum_i n_i a_i + \sum_i m_i a_i = \sum_i (n_i + m_i) a_i \\
\hat{\phi}(x+y) &= \sum_i (n_i + m_i)\phi(a_i) = \sum_i n_i \phi(a_i) + \sum_i m_i \phi(a_i) = \hat{\phi}(x) + \hat{\phi}(y)
\end{aligned}
\tag{25}
$$

- Пусть существует другой гомоморфизм $\varphi : G \to H$. По условию он является продолжением ϕ на $G \Rightarrow \forall i : \varphi(a_i) = \phi(a_i) = \hat{\phi}(a_i)$. Но так как любое отображение $f : G \to H$ однозначно задается значениями на $\{a_1 ... a_n\}$, то $\varphi = \hat{\phi}$



- Пусть универсальное свойство выполняется, тогда

$$
\exists ! \hat{\phi} \text{ и } \exists \sum_i n_i \notin \mathbb{Z} : \hat{\phi}\left(\sum_i n_i a_i\right) = \sum_i n_i \phi(a_i) \tag{26}
$$

- Но в H не существует элемента, который можно представить нецелым набором коэффициентов (в группе есть только сложение, а при сложении любых двух элементов группы с целыми коэффициентами получается элемент с целыми коэффициентами) $\Rightarrow$ противоречие

2) • Докажем, что любое преобразование $f \in PSL(2, \mathbb{C})$ не являющееся тождественным, фиксирует не более 2-х точек.

$$\frac{az+b}{cz+d} = z$$
$$cz^2 + (d-a)z - b = 0 \tag{27}$$

- Случай 1: $c \neq 0$. Тогда полином от z (выше) имеет 1 или 2 решения (основная теорема алгебры). $z = \infty$ не является фиксированной точкой, так как $f(\infty) = \frac{a}{c}$
- Случай 2: $c = 0$.
$$(d-a)z - b = 0 \tag{28}$$
  - Случай 2.1: $a = d$ и $b = 0$ приводит к тожедественному преобразованию (не подходит)
  - Случай 2.2: $a = d$ и $b \neq 0 \Rightarrow$ нет корней
  - Случай 2.3: $a \neq d \Rightarrow z = \frac{b}{a-d}$
- Для точек (x_1, x_2, x_3) определим $g \in PSL(2, \mathbb{C})$:
$$g(z) = \frac{z - x_1}{z - x_3} \cdot \frac{x_2 - x_3}{z - x_1} \tag{29}$$
- Прямой проверкой убеждаемся, что $g(x_1) = 0$ и $g(x_2) = 1$ и $g(x_3) = \infty$
- Докажем единственность g: пусть существует $p \in PSL(2, \mathbb{C}) : p \neq g$, которое переводит точки (x_1, x_2, x_3) в $(0, 1, \infty)$. Тогда:
  - $(g^{-1} \circ p) \in PSL(2, \mathbb{C})$ фиксирует точки (x_1, x_2, x_3), но из доказанного выше следует, что любое преобразование из $PSL(2, \mathbb{C})$ фиксирующее более 2 точек является тождественным $\Rightarrow g = p$
  - Аналогичное док-во для $(p \circ g^{-1})$
- Любое $f \in PSL(2, \mathbb{C})$ однозначно задается $x \in \mathbb{C}^4 \Rightarrow PSL(2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^4 \Rightarrow PSL(2, \mathbb{C}) \ncong \mathbb{C}^3$

3)

4) in progress

5) Докажем, что $L \cong M$ iff $|\dim L| = |\dim M|$ (где L, M - линейные пространства)

- $\rightarrow$
  - Пусть φ - изоморфизм $\beta(L) = \{e_i\}_{i=1}^n, \beta(M) = \{e'_i\}_{i=1}^m$ - базисы
  - Изоморфизм сохраняет все свойства, формулируемые в терминах линейных комбинаций $\Rightarrow$ базис переходит в базис
  - Вследствии биективности φ: $|\beta(L)| = |\varphi(\beta(L))| = |\beta(M)|$
- $\leftarrow$

- Определим биекцию $\sigma : \beta(L) \to \beta(M)$
- Определим линейное отображение $\varphi : L \to M$, так что

$$\varphi(l) = \sum_i a_i \sigma(e_i), \tag{30}$$

- $\varphi(L) = \varphi(\operatorname{span}(\beta(L))) = \operatorname{span}(\varphi(\beta(L))) = \operatorname{span}(\sigma(\beta(L))) = \operatorname{span}(\beta(M)) = M$
- φ - изоморфизм, так как разложение по базису единственно, а σ - биективно

1) $n \neq \infty$

- Базис $\mathbb{K}[x]$ - многочленов не выше n, множество

$$\beta = \{x^i\}_{i=0}^n \tag{31}$$

$$|\beta| = n + 1 \tag{32}$$

- Базис $\mathbb{K}^*[x]$

$$\beta^* = \{f^i\}_{i=0}^n : f^i(x_k) = \delta_{ik} \tag{33}$$

- Очевидно $|\beta| = |\beta^*| \Rightarrow \mathbb{K}[x] \cong \mathbb{K}^*[x]$

2) $n = \infty$

- По определению базис $\mathbb{K}[x]$ - счетен, так как $\exists f : f(x^i) = i + 1$
- По определению любые $p(x), \xi(x) \in \mathbb{K}[x]$ представимы в виде суммы $p(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \ldots$ и $\xi(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \ldots$, где отличны от нуля лишь элементы **конечных** множеств $\{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m\}$ и $\{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_l\}$
- Таким образом мы можем построить изоморфизм между $\mathbb{K}[x]$ и множеством функционалов

$$P = \left\{ f_{p(x)} \mid f_{p(x)}(\xi(x)) = \sum_{i=1}^{\max\{m,l\}} \alpha_i \beta_i \quad p(x), \xi(x) \in \mathbb{K}[x] \right\} \tag{34}$$

- По определению $|P| = |\mathbb{K}[x]|$ и $P \subseteq \mathbb{K}^*[x]$
- Рассмотрим функционал $g : g(p(x)) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \alpha_i$, то есть функционал, который представим **бесконечной** последовательностью b_i.
- $\forall p(x) \in \mathbb{K}[x] : g(p(x)) \neq \infty$, так как коффиценты любого полинома с какого-то моменты равны нулю, значит сумма конечна.
- $g \notin P$ так как любой функционал из P представим как конечная последовательность коэффициентов. $g \in \mathbb{K}^*[x]$ по определению

$\Rightarrow P \subset \mathbb{K}^*[x] \Rightarrow |P| < |\mathbb{K}^*[x]| \Rightarrow |\mathbb{K}[x]| < |\mathbb{K}^*[x]| \Rightarrow$ невозможно установить изоморфизм.