Задачи третей трети семестра

Бугрий Илья

M3134

08.01.2024

1. Задачи третей трети семестра

1) - Любой $P_i \in \{P_i(x_1 ... x_n)\}_{i=1}^n$ однозначно задается набором коэффициентов, который можно представить в виде вектора ξ из арифметического векторного пространства F

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

- Преобразование $P_i(x) \to \widetilde{P}_i(x) \Longleftrightarrow \xi \to \tilde{\xi} \Rightarrow$ все преобразования существующие на данных полиномах, должны существовать на векторах в арифметическом векторном пространстве $\Rightarrow$ мы можем только:
  - Прибавлять к вектору (полиному) другой вектор (полином) $\xi + \xi'$
  - Умножать вектор (полином) на скаляр $\lambda\xi$
- Рассмотрим умножение на скаляр: $\widetilde{P}_i(x) = \lambda \cdot P_i(x)$

$$\forall x \in U : \widetilde{P}_i(x) = \lambda \cdot P_i(x) = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow \text{инвариантность сохраняется} \tag{2}$$

- Рассмотрим сложение с вектором, который однозначно задает полином $P_j \in \{P_i(x_1 ... x_n)\}_{i=1}^n$

$$\forall x \in U : \widetilde{P}_i(x) = P_j(x) + P_i(x) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \text{инвариантность сохраняется} \tag{3}$$

- Пусть $X = \{P_i(x_1 ... x_n)\}_{i=1}^n$
- По определению

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i \tag{4}$$

- Пусть

$$M = \left\{ \xi \in F \mid \forall x \in U : \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i = 0 \right\} \tag{5}$$

- Определим φ как функцию, которая по полиному дает его коэффиценты в F, тогда
$$\varphi(X) \subseteq M \tag{6}$$
- Рассмотрим преобразование из ξ' в m
$$\forall \xi : \xi \in M \quad \text{и } \xi \notin \varphi(X) : \forall \xi' \in \varphi(x) : m = \xi + (-\xi') + \xi' \tag{7}$$
- $$\forall x \in U : \sum_{i=1}^{n} m_i x_i = 0 \tag{8}$$
- Таким образом, мы можем заменить строку из СЛАУ, на другую строку не присутствующую в данной СЛАУ, если такая существует.
- Расмотрим добавление вектора $\xi : \xi \notin M$. По определению M
$$\forall l \in \varphi(X) : \nexists x \in U : \sum_{i=1}^{n} (\xi_i + l_i) x_i = 0 \tag{9}$$
- Рассмотрим удаление строки из СЛАУ

  Пусть $\exists \{P_i(x_1 ... x_n)\}_{i=1}^{n}$ и U, такие что $\exists x \notin U : \forall i \in [1; n-1] : P_i(x) = 0$ и $P_n(x) \neq 0 \Rightarrow$ если мы удалим из СЛАУ последний полином, то множество решений изменится $\Rightarrow$ инвариантность не сохраняется.

2) $$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(0)} - \sum_{l=1}^{k-1} a_{lj}^{(l-1)} \frac{a_{i1}^{(l-1)}}{a_{ll}^{(l-1)}} \tag{10}$$

3) Докажем, что $L \cong M$ iff $|\dim L| = |\dim M|$ (где L, M - линейные пространства)
- $\to$
  - Пусть φ - изоморфизм $\beta(L) = \{e_i\}_{i=1}^{n}, \beta(M) = \{e'_i\}_{i=1}^{m}$ - базисы
  - Изоморфизм сохраняет все свойства, формулируемые в терминах линейных комбинаций $\Rightarrow$ базис переходит в базис
  - Вследствии биективности φ: $|\beta(L)| = |\varphi(\beta(L))| = |\beta(M)|$
- $\leftarrow$
  - Определим биекцию $\sigma : \beta(L) \to \beta(M)$
  - Определим линейное отображение $\varphi : L \to M$, так что

$$\varphi(l) = \sum_i a_i \sigma(e_i), \tag{11}$$

- $\varphi(L) = \varphi(\mathrm{span}(\beta(L))) = \mathrm{span}(\varphi(\beta(L))) = \mathrm{span}(\sigma(\beta(L))) = \mathrm{span}(\beta(M)) = M$
- φ - изоморфизм, так как разложение по базису единственно, а σ - биективно

a) $n \neq \infty$

- Базис $\mathbb{K}[x]$ - многочленов не выше n, множество

$$\beta = \{x^i\}_{i=0}^n \tag{12}$$

$$|\beta| = n + 1 \tag{13}$$

- Базис $\mathbb{K}^*[x]$

$$\beta^* = \{f^i\}_{i=0}^n : f^i(x_k) = \delta_{ik} \tag{14}$$

- Очевидно $|\beta| = |\beta^*| \Rightarrow \mathbb{K}[x] \cong \mathbb{K}^*[x]$

b) $n = \infty$

- По определению базис $\mathbb{K}[x]$ - счетен, так как $\exists f : f(x^i) = i + 1$
- По определению любые $p(x), \xi(x) \in \mathbb{K}[x]$ представимы в виде суммы $p(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + ...$ и $\xi(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + ...$, где отличны от нуля лишь элементы **конечных** множеств $\{\alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_m\}$ и $\{\beta_1, \beta_2, ... \beta_l\}$
- Таким образом мы можем построить изоморфизм между $\mathbb{K}[x]$ и множеством функционалов

$$P = \left\{ f_{p(x)} \mid f_{p(x)}(\xi(x)) = \sum_{i=1}^{\max\{m,l\}} \alpha_i \beta_i \quad p(x), \xi(x) \in \mathbb{K}[x] \right\} \tag{15}$$

- По определению $|P| = |\mathbb{K}[x]|$ и $P \subseteq \mathbb{K}^*[x]$
- Рассмотрим функционал $g : g(p(x)) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \alpha_i$, то есть функционал, который представим **бесконечной** последовательностью b_i.
- $\forall p(x) \in \mathbb{K}[x] : g(p(x)) \neq \infty$, так как коффиценты любого полинома с какого-то моменты равны нулю, значит сумма конечна.
- $g \notin P$ так как любой функционал из P представим как конечная последовательность коэффициентов. $g \in \mathbb{K}^*[x]$ по определению $\Rightarrow P \subset \mathbb{K}^*[x] \Rightarrow |P| < |\mathbb{K}^*[x]| \Rightarrow |\mathbb{K}[x]| < |\mathbb{K}^*[x]| \Rightarrow$ невозможно установить изоморфизм.

4) • Определим $f_{(a,b)}((c,d)) = (a,b) \cdot (c,d)$

• Покажем линейность: $\forall x, y \in \mathbb{C} : x \cdot y \in \mathbb{C}$

•
$$\begin{gathered} f_{(a,b)}(\alpha(c,d)) = f_{(a,b)}((\alpha c, \alpha d)) = (a,b) \cdot (\alpha c, \alpha d) = \\ = (\alpha ac - \alpha bd, \alpha bc + \alpha ad) = \alpha(ac - bd, bc + ad) = \alpha f_{(a,b)}((c,d)) \end{gathered} \tag{16}$$

•
$$\begin{gathered} f_{(a,b)}((c_1, d_1) + (c_2, d_2)) = (a,b) \cdot (c_1 + c_2, d_1 + d_2) = \\ = (a(c_1 + c_2) - b(d_1 + d_2), b(c_1 + c_2) + a(d_1 + d_2)) = \\ = (ac_1 - bd_1, bc_1 + ad_1) + (ac_2 - bd_2, bc_2 + ad_2) = \\ = f_{(a,b)}((c_1, d_1)) + f_{(a,b)}((c_2, d_2)) \end{gathered} \tag{17}$$

• Матрица оператора:
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{pmatrix} \tag{18}$$

• Смысл оператора: так как $r_1 e^{i\alpha_1} \cdot r_2 e^{i\alpha_2} = r_1 r_2 e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)}$, то умножая на комплексное число (a,b)мы увеличиваем норму числа (c,d) на норму (a,b), а потом поворачиваем вектор отвечающий числу (c,d) на угол вектора, который отвечает числу (a,b)

5) • $SO(n)$ - это множество поворотов векторов в пространстве $\mathbb{R}^n$ (поворот, есть преобразование, которое сохраняет длину вектора).

• Любой поворот задается осью вращения (двумерной плоскостью) и углом поворота

• В n-мерном пространстве существует $\binom{n}{2}$ независимых (попарно-ортогональных) плоскостей

• Если мы выбрали плоскость поворота, то любый поворот задается одним базовым умноженным на константу

• $\dim SO(n) = \frac{n(n-1)}{2}$

6) • Матрица, однозначно задающая $g_{\mu\nu}$ в базисе $\{e_1, e_2\}$ выглядит так :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

• Найдем выражение вектора e_1' в базисе $\{e_1, e_2\}$. Для этого найдем проекцию e_1' на $\{e_1, e_2\}$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{proj}_{e_1} e_1' &= \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\ \|e_1'\|\ \left(\frac{e_1}{\|e_1\|}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\ \|e_1'\|\ e_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}e_1 \\
\operatorname{proj}_{e_2} e_1' &= \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\ \|e_1'\|\ \left(\frac{e_2}{\|e_2\|}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\ \|e_1'\|\ e_2 = \frac{1}{2}e_2
\end{aligned}
\tag{20}
$$

$$
e_1' = \frac{\sqrt{3}}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 \tag{21}
$$

- Аналогично найдем проекцию e_2' на $\{e_1, e_2\}$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{proj}_{e_1} e_2' &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\ \|e_2'\|\ \left(\frac{e_1}{\|e_1\|}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\ \|e_2'\|\ e_1 = \frac{1}{2}e_1 \\
\operatorname{proj}_{e_2} e_2' &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\ \|e_2'\|\ \left(\frac{e_2}{\|e_2\|}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\ \|e_2'\|\ e_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}e_2
\end{aligned}
\tag{22}
$$

$$
e_2' = \frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2 \tag{23}
$$

- Найдем скалярное произведение:

$$
\begin{aligned}
g(e_1', e_2') &= g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2, \frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2\right) \\
&= g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}e_1, \frac{1}{2}e_1\right) + g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}e_1, \frac{\sqrt{3}}{2}e_2\right) + g\left(\frac{1}{2}e_2, \frac{1}{2}e_1\right) + g\left(\frac{1}{2}e_2, \frac{\sqrt{3}}{2}e_2\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}g(e_1, e_1) + \frac{3}{4}g(e_1, e_2) + \frac{1}{4}g(e_2, e_1) + \frac{\sqrt{3}}{4}g(e_2, e_2) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

$$
\begin{aligned}
g(e_1', e_1') &= g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2, \frac{\sqrt{3}}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2\right) = \\
&= g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}e_1, \frac{\sqrt{3}}{2}e_1\right) + g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}e_1, \frac{1}{2}e_2\right) + g\left(\frac{1}{2}e_2, \frac{\sqrt{3}}{2}e_1\right) + g\left(\frac{1}{2}e_2, \frac{1}{2}e_2\right) = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}+1}{4}
\end{aligned}
\tag{25}
$$

$g(e_2', e_2') = \dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$

- Так как матрица g - является единичной, то матрица перехода будет равна матрице g'

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}+1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}+1}{4} \end{pmatrix} \tag{26}$$

- S^1 в старом базисе.

2. Дополнительные задачи

1) • Докажем универсальное с-во свободной абелевой группы G с базисом $A = \{a_1 ... a_n\}$:

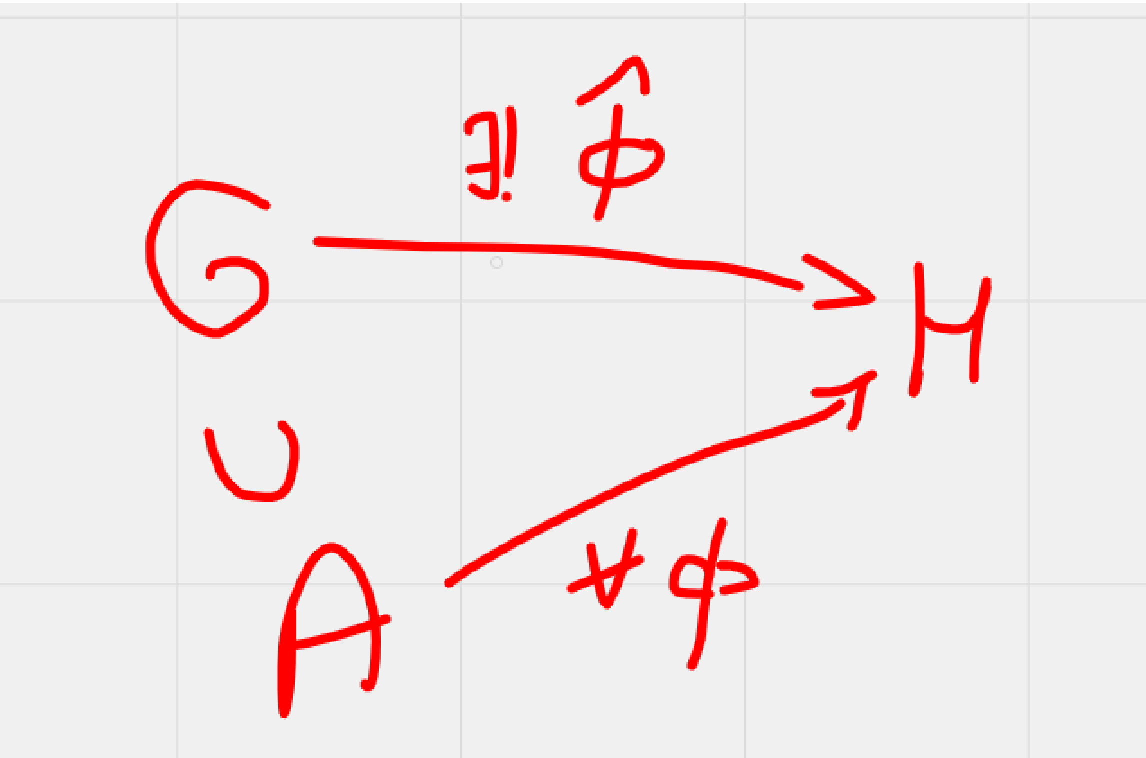
   Определим искомый гоморфизм как:

$$\hat{\phi}(x \in G) = \hat{\phi}\left(\sum_i n_i a_i\right) = \sum_i n_i \hat{\phi}(a_i) = \sum_i n_i \phi(a_i) \quad n_i \in \mathbb{Z} \tag{27}$$

- Докажем с-во гомоморфизма:

$$\begin{gathered} x + y = \sum_i n_i a_i + \sum_i m_i a_i = \sum_i (n_i + m_i) a_i \\ \hat{\phi}(x+y) = \sum_i (n_i + m_i)\phi(a_i) = \sum_i n_i \phi(a_i) + \sum_i m_i \phi(a_i) = \hat{\phi}(x) + \hat{\phi}(y) \end{gathered} \tag{28}$$

- Пусть существует другой гомоморфизм $\varphi : G \to H$. По условию он является продолжением ϕ на $G \Rightarrow \forall i : \varphi(a_i) = \phi(a_i) = \hat{\phi}(a_i)$. Но так как любое отображение $f : G \to H$ однозначно задается значениями на $\{a_1 ... a_n\}$, то $\varphi = \hat{\phi}$



- Пусть универсальное свойство выполняется, тогда

$$\exists!\hat{\phi} \;\text{ и } \exists \sum_i n_i \notin \mathbb{Z} : \hat{\phi}\left(\sum_i n_i a_i\right) = \sum_i n_i \phi(a_i) \tag{29}$$

- Но в H не существует элемента, который можно представить нецелым набором коэффициентов (в группе есть только сложение, а при сложении любых двух элементов группы с целыми коэффициентами получается элемент с целыми коэффициентами) $\Rightarrow$ противоречие

2) - Докажем, что любое преобразование$f \in PSL(2, \mathbb{C})$ не являющееся тождественным, фиксирует не более 2-х точек.

$$\begin{gathered} \frac{az+b}{cz+d} = z \\ cz^2 + (d-a)z - b = 0 \end{gathered} \tag{30}$$

- Случай 1: $c \neq 0$. Тогда полином от z (выше) имеет 1 или 2 решения (основная теорема алгебры). $z = \infty$ не является фиксированной точкой, так как $f(\infty) = \frac{a}{c}$
- Случай 2: $c = 0$.

$$(d-a)z - b = 0 \tag{31}$$

  - Случай 2.1: $a = d$ и $b = 0$ приводит к тожедественному преобразованию (не подходит)
  - Случай 2.2: $a = d$ и $b \neq 0 \Rightarrow$ нет корней
  - Случай 2.3: $a \neq d \Rightarrow z = \frac{b}{a-d}$
- Для точек (x_1, x_2, x_3) определим $g \in PSL(2, \mathbb{C})$:

$$g(z) = \frac{z-x_1}{z-x_3} \cdot \frac{x_2-x_3}{z-x_1} \tag{32}$$

- Прямой проверкой убеждаемся, что $g(x_1) = 0$ и $g(x_2) = 1$ и $g(x_3) = \infty$
- Докажем единственность g: пусть существует $p \in PSL(2, \mathbb{C}) : p \neq g$, которое переводит точки (x_1, x_2, x_3) в $(0, 1, \infty)$. Тогда:
  - $(g^{-1} \circ p) \in PSL(2, \mathbb{C})$ фиксирует точки (x_1, x_2, x_3), но из доказанного выше следует, что любое преобразование из $PSL(2, \mathbb{C})$ фиксирующее более 2 точек является тождественным $\Rightarrow g = p$

- Аналогичное док-во для $(p \circ g^{-1})$

- Любое $f \in PSL(2, \mathbb{C})$ однозначно задается $x \in \mathbb{C}^4 \Rightarrow PSL(2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^4 \Rightarrow PSL(2, \mathbb{C}) \ncong \mathbb{C}^3$

3) - Пусть B - билинейное симметричное скалярное произведение.

- $$\begin{aligned} \forall l, m \in L : l \neq m : B(l+m, l+m) &= B(l, l+m) + B(m, l+m) = \\ &= B(l,l) + B(l,m) + B(m,l) + B(m,m) = \\ &= 2B(l,m) + B(l,l) + B(m,m) \Rightarrow \end{aligned} \tag{33}$$

- $$\begin{aligned} \Rightarrow B(l,m) &= \frac{B(l+m, l+m) - B(l,l) - B(m,m)}{2} = \\ &= \frac{Q(l+m) - Q(l) - Q(m)}{2} \end{aligned} \tag{34}$$

- $$l = m : B(l,l) = \frac{B(2l, 2l) - 2B(l,l)}{2} = \frac{4Q(l) - 2Q(l)}{2} = Q(l) \tag{35}$$