Лекция 7

Геометрия точек и прямых на плоскости

Содержание лекции:
В настоящей лекции рассматриваются общие методы и алгоритмы решения наиболее важных задач на взаимное расположение точек и прямых на плоскости.

Ключевые слова:
Параллельность прямых, совпадение прямых, перпендикулярность прямых, угол между прямыми, точка пересечения прямых, ортогональное проектирование точки на прямую, расстояние от точки до прямой, расположение точки относительно прямой, полуплоскость.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

7.1 Взаимное расположение прямых

Рассмотрим основные варианты расположения прямых на плоскости друг относительно друга. Пусть прямые L_1 и L_2 заданы своими векторными параметрическими уравнениями:

$$L_1: \quad \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{s}_1 \cdot t, \quad L_2: \quad \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{s}_2 \cdot t.$$

1. Условие параллельности прямых L_1 и L_2:

$$\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \quad \text{или} \quad \vec{s}_2 = \gamma \vec{s}_1.$$

2. Условие совпадения прямых L_1 и L_2:

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \parallel \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2.$$

3. Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2:

$$\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0.$$

4. Угол между прямыми L_1 и L_2:

$$\varphi = \angle(L_1, L_2) = \angle(\vec{s}_1, \vec{s}_2) \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \left| \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} \right|.$$

5. Точка пересечения прямых L_1 и L_2:

$$Q = L_1 \cap L_2 \quad \Rightarrow \quad Q \in L_1 \quad \text{и} \quad Q \in L_2.$$

Отсюда следует существование t_1 и t_2, таких что

$$\vec{r}_Q = \vec{r}_1 + \vec{s}_1 \cdot t_1, \quad \vec{r}_Q = \vec{r}_2 + \vec{s}_2 \cdot t_2$$

Приравняем левые части запишем полученное уравнение в следующем виде:

$$\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = t_1 \cdot \vec{s}_1 - t_2 \cdot \vec{s}_2.$$

Для решения данного уравнения умножим обе его части сначала скалярно на $\vec{s}_1$, а потом скалярно на $\vec{s}_2$. В итоге получим:

$$\begin{cases} (\Delta\vec{r}, \vec{s}_1) = |\vec{s}_1|^2 \cdot t_1 - (\vec{s}_1, \vec{s}_2) \cdot t_2, \\ (\Delta\vec{r}, \vec{s}_2) = (\vec{s}_1, \vec{s}_2) \cdot t_1 - |\vec{s}_2|^2 \cdot t_2. \end{cases}$$

Методом Крамера получаем следующее решение для t_1:

$$t_1 = \frac{(\Delta\vec{r}, \vec{s}_2)(\vec{s}_1, \vec{s}_2) - (\Delta\vec{r}, \vec{s}_1)|\vec{s}_2|^2}{|(\vec{s}_1, \vec{s}_1)|^2 - |\vec{s}_1|^2|\vec{s}_2|^2} = \frac{(\Delta\vec{r}, \vec{s}_1^0) - (\Delta\vec{r}, \vec{s}_2^0)\cos\varphi}{|\vec{s}_1|\sin^2\varphi},$$

откуда, в частности, следует, что единственная точка пересечения существует всегда, когда прямые не параллельны. Подставляя полученное решение для t_1 в уравнение для $\vec{r}_Q$, получим искомое выражение.

7.2 Взаимное расположение точки и прямой

Пусть на плоскости заданы прямая L и точка M, рассмотрим основные задачи, возникающие при исследовании их взаимного расположения. Будем полагать, что

$$L: \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s} \cdot t, \quad M \leftrightarrow \vec{r}_M$$

Как уже отмечалось, условие принадлежности точки M прямой L эквивалентно существованию такого параметра t_0, что

$$\vec{r}_M = \vec{r}_0 + \vec{s} \cdot t_0.$$

Рассмотрим другие возможности:

1. Ортогоальная проекция M' точки $M \not\in L$ на прямую L.

$$M' \leftrightarrow \vec{r}_{M'}, \quad \exists\, t': \quad \vec{r}_{M'} = \vec{r}_0 + \vec{s} \cdot t'.$$

   Из определения ортогональной проекции имеем

$$(\vec{r}_{M'} - \vec{r}_M, \vec{s}) = 0 \quad \text{или} \quad (\vec{r}_{M'}, \vec{s}) = (\vec{r}_M, \vec{s}).$$

   Подставим сюда выражение для $\vec{r}_{M'}$:

$$(\vec{r}_0 + \vec{s} \cdot t', \vec{s}) = (\vec{r}_M, \vec{s}) \quad \Rightarrow \quad t' = \frac{(\vec{r}_M - \vec{r}_0, \vec{s})}{|\vec{s}|^2},$$

   и получим ответ в форме

$$\vec{r}_{M'} = \vec{r}_0 + \frac{(\vec{r}_M - \vec{r}_0, \vec{s})}{|\vec{s}|^2} \cdot \vec{s}.$$

2. Расстояние от точки M до прямой L.

$$M \leftrightarrow \vec{r}_M, \quad L: \quad (\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0.$$

   Пусть M' - ортогональная проекция точки M на прямую L, тогда

$$\vec{r}_M - \vec{r}_{M'} = \alpha \cdot \vec{n}, \quad (\vec{r}_{M'} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0$$

   Умножая первое из представленных выражений скалярно на $\vec{n}$ получим:

$$(\vec{r}_M, \vec{n}) - (\vec{r}_{M'}, \vec{n}) = \alpha \cdot |\vec{n}|^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{(\vec{r}_M - \vec{r}_0, \vec{n})}{|\vec{n}|^2}.$$

   Таким образом

$$\vec{r}_M - \vec{r}_{M'} = \frac{(\vec{r}_M - \vec{r}_0, \vec{n})}{|\vec{n}|^2}\vec{n}, \quad \Rightarrow \quad \rho(M, L) = |\vec{r}_M - \vec{r}_{M'}| = \frac{|(\vec{r}_M - \vec{r}_0, \vec{n})|}{|\vec{n}|}.$$

   С другой стороны, действительно

$$\rho(M, L) = \left|\text{Пр}^{\perp}_{\vec{n}}(\vec{r}_M - \vec{r}_0)\right| = (\vec{r}_M - \vec{r}_0, \vec{n}^0).$$

3. Точка M'', симметричная точке M относительно прямой L.

$$\vec{r}_{M''} = \vec{r}_M - 2 \cdot \frac{(\vec{r}_M - \vec{r}_0, \vec{n})}{|\vec{n}|^2}\vec{n},$$

4. Расстояние между параллельными прямыми L_1 и L_2.

$$L_1 : \quad (\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{n}_1) = 0, \quad L_2 : (\vec{r} - \vec{r}_2, \vec{n}_2) = 0, \quad \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2.$$

Пользуясь результатами предыдущей задачи, получаем:

$$\rho(L_1, L_2) = |(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{n}^0)|$$

5. Расположение точек относительно прямой.

$$L : \quad (\vec{r}, \vec{n}) = (\vec{r}_0, \vec{n}), \quad M_1 \leftrightarrow \vec{r}_1, \quad M_2 \leftrightarrow \vec{r}_2$$

Расположены ли точки M_1 и M_2 с одной стороны или с разных сторон относительно прямой L? Рассмотрим произведение

$$\text{Пр}_{\vec{n}}^{\perp}(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \cdot \text{Пр}_{\vec{n}}^{\perp}(\vec{r}_2 - \vec{r}_0) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{n})(\vec{r}_2 - \vec{r}_0, \vec{n}),$$

если оно положительно, то точки лежат по одну сторону прямой. Если отрицательно - по разные.

Nota bene Введем обозначение:

$$L(\vec{r}) = (\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}).$$

Очевидно, что условие $L(\vec{r}) = 0$ соответствует точкам, которые принадлежат прямой. Рассмотрим случай $L(\vec{r}) \neq 0$, когда точки прямой не принадлежат. В этом случае наше условие можно переписать в следующем виде:

$$L(\vec{r}_1) \cdot L(\vec{r}_2) = R(\vec{r}_1, \vec{r}_2).$$

Легко проверить, что функционал R задает на плоскости отношение эквивалентности между точками, именно

$$\vec{r}_1 \sim \vec{r}_2 \quad \Leftrightarrow \quad R(\vec{r}_1, \vec{r}_2) > 0.$$

Множество классов по этому отношению состоит из двух, каждый из которых представляет собой полуплоскость, на которые прямая делит всю плоскость.