

Задачи третьей трети семестра

Бугрий Илья

M3134

08.01.2024

1. Задачи третьей трети семестра

- 1) • Любой $P_i \in \{P_i(x_1 \dots x_n)\}_{i=1}^n$ однозначно задается набором коэффициентов, который можно представить в виде вектора ξ из арифметического векторного пространства F

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

- Преобразование $P_i(x) \rightarrow \tilde{P}_i(x) \iff \xi \rightarrow \tilde{\xi} \Rightarrow$ все преобразования существующие на данных полиномах, должны существовать на векторах в арифметическом векторном пространстве \Rightarrow мы можем только:

- Прибавлять к вектору (полиному) другой вектор (полином) $\xi + \xi'$
- Умножать вектор (полином) на скаляр $\lambda \xi$
- Рассмотрим умножение на скаляр: $\tilde{P}_i(x) = \lambda \cdot P_i(x)$

$$\forall x \in U : \tilde{P}_i(x) = \lambda \cdot P_i(x) = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow \text{инвариантность сохраняется} \quad (2)$$

- Рассмотрим сложение с вектором, который однозначно задает

полином $P_j \in \{P_i(x_1 \dots x_n)\}_{i=1}^n$

$$\forall x \in U : \tilde{P}_i(x) = P_j(x) + P_i(x) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \text{инвариантность сохраняется} \quad (3)$$

- Пусть $X = \{P_i(x_1 \dots x_n)\}_{i=1}^n$
- По определению

$$P(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i \quad (4)$$

- Пусть

$$M = \left\{ \xi \in F \mid \forall x \in U : \sum_{i=1}^n \xi_i x_i = 0 \right\} \quad (5)$$

- Определим φ как функцию, которая по полиному дает его коэффициенты в F , тогда

$$\varphi(X) \subseteq M \quad (6)$$

- Рассмотрим преобразование из ξ' в m

$$\forall \xi : \xi \in M \text{ и } \xi \notin \varphi(X) : \forall \xi' \in \varphi(x) : m = \xi + (-\xi') + \xi' \quad (7)$$

•

$$\forall x \in U : \sum_{i=1}^n m_i x_i = 0 \quad (8)$$

- Таким образом, мы можем заменить строку из СЛАУ, на другую строку не присутствующую в данной СЛАУ, если такая существует.
- Рассмотрим добавление вектора $\xi : \xi \notin M$. По определению M

$$\forall l \in \varphi(X) : \nexists x \in U : \sum_{i=1}^n (\xi_i + l_i) x_i = 0 \quad (9)$$

- Рассмотрим удаление строки из СЛАУ

Пусть $\exists \{P_i(x_1 \dots x_n)\}_{i=1}^n$ и U , такие что $\exists x \notin U : \forall i \in [1; n-1] : P_i(x) = 0$ и $P_n(x) \neq 0 \Rightarrow$ если мы удалим из СЛАУ последний полином, то множество решений изменится \Rightarrow инвариантность не сохраняется.

2)

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(0)} - \sum_{l=1}^{k-1} a_{lj}^{(l-1)} \frac{a_{i1}^{(l-1)}}{a_{l1}^{(l-1)}} \quad (10)$$

3) Докажем, что $L \cong M$ iff $|\dim L| = |\dim M|$ (где L, M - линейные пространства)

• \rightarrow

- Пусть φ - изоморфизм $\beta(L) = \{e_i\}_{i=1}^n, \beta(M) = \{e'_i\}_{i=1}^m$ - базисы
- Изоморфизм сохраняет все свойства, формулируемые в терминах линейных комбинаций \Rightarrow базис переходит в базис

- Вследствии биективности $\varphi : |\beta(L)| = |\varphi(\beta(L))| = |\beta(M)|$

• \leftarrow

- Определим биекцию $\sigma : \beta(L) \rightarrow \beta(M)$
- Определим линейное отображение $\varphi : L \rightarrow M$, так что

$$\varphi(l) = \sum_i a_i \sigma(e_i), \quad (11)$$

- $\varphi(L) = \varphi(\text{span}(\beta(L))) = \text{span}(\varphi(\beta(L))) = \text{span}(\sigma(\beta(L))) = \text{span}(\beta(M)) = M$
- φ - изоморфизм, так как разложение по базису единственно, а σ - биективно

a) $n \neq \infty$

- Базис $\mathbb{K}[x]$ - многочленов не выше n , множество

$$\beta = \{x^i\}_{i=0}^n \quad (12)$$

$$|\beta| = n + 1 \quad (13)$$

- Базис $\mathbb{K}^*[x]$

$$\beta^* = \{f^i\}_{i=0}^n : f^i(x_k) = \delta_{ik} \quad (14)$$

- Очевидно $|\beta| = |\beta^*| \Rightarrow \mathbb{K}[x] \cong \mathbb{K}^*[x]$

b) $n = \infty$

- По определению базис $\mathbb{K}[x]$ - счетен, так как $\exists f : f(x^i) = i + 1$
- По определению любые $p(x), \xi(x) \in \mathbb{K}[x]$ представимы в виде суммы $p(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \dots$ и $\xi(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \dots$, где отличны от нуля лишь элементы **конечных** множеств $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ и $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l\}$
- Таким образом мы можем построить изоморфизм между $\mathbb{K}[x]$ и множеством функционалов

$$P = \left\{ f_{p(x)} \mid f_{p(x)}(\xi(x)) = \sum_{i=1}^{\max\{m,l\}} \alpha_i \beta_i \quad p(x), \xi(x) \in \mathbb{K}[x] \right\} \quad (15)$$

- По определению $|P| = |\mathbb{K}[x]|$ и $P \subseteq \mathbb{K}^*[x]$
- Рассмотрим функционал $g : g(p(x)) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \alpha_i$, то есть функционал, который представим **бесконечной** последовательностью b_i .
- $\forall p(x) \in \mathbb{K}[x] : g(p(x)) \neq \infty$, так как коэффициенты любого полинома с какого-то момента равны нулю, значит сумма конечна.
- $g \notin P$ так как любой функционал из P представим как конечная последовательность коэффициентов. $g \in \mathbb{K}^*[x]$ по определению $\Rightarrow P \subset \mathbb{K}^*[x] \Rightarrow |P| < |\mathbb{K}^*[x]| \Rightarrow |\mathbb{K}[x]| < |\mathbb{K}^*[x]| \Rightarrow$ невозможно установить изоморфизм.

4) • Определим $f_{(a,b)}((c,d)) = (a,b) \cdot (c,d)$

• Покажем линейность: $\forall x, y \in \mathbb{C} : x \cdot y \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f_{(a,b)}(\alpha(c,d)) &= f_{(a,b)}((\alpha c, \alpha d)) = (a,b) \cdot (\alpha c, \alpha d) = \\ &= (\alpha ac - \alpha bd, \alpha bc + \alpha ad) = \alpha(ac - bd, bc + ad) = \alpha f_{(a,b)}((c,d)) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} f_{(a,b)}((c_1, d_1) + (c_2, d_2)) &= (a,b) \cdot (c_1 + c_2, d_1 + d_2) = \\ &= (a(c_1 + c_2) - b(d_1 + d_2), b(c_1 + c_2) + a(d_1 + d_2)) = \\ &= (ac_1 - bd_1, bc_1 + ad_1) + (ac_2 - bd_2, bc_2 + ad_2) = \\ &= f_{(a,b)}((c_1, d_1)) + f_{(a,b)}((c_2, d_2)) \end{aligned} \quad (17)$$

• Матрица оператора:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{pmatrix} \quad (18)$$

• Смысл оператора: так как $r_1 e^{i\alpha_1} \cdot r_2 e^{i\alpha_2} = r_1 r_2 e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)}$, то умножая на комплексное число (a,b) мы увеличиваем норму числа (c,d) на норму (a,b) , а потом поворачиваем вектор отвечающий числу (c,d) на угол вектора, который отвечает числу (a,b)

5) • $SO(n)$ - это множество поворотов векторов в пространстве \mathbb{R}^n (поворот, есть преобразование, которое сохраняет длину вектора).

• Любой поворот задается осью вращения (двумерной плоскостью) и углом поворота

• В n -мерном пространстве существует $\binom{n}{2}$ независимых (попарно-ортогональных) плоскостей

• Если мы выбрали плоскость поворота, то любой поворот задается одним базовым умноженным на константу

$$\dim SO(n) = \frac{n(n-1)}{2}$$

6) • Матрица, однозначно задающая $g_{\mu\nu}$ в базисе $\{e_1, e_2\}$ выглядит так : $A =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

• Найдем выражение вектора e'_1 в базисе $\{e_1, e_2\}$. Для этого найдем проекцию e'_1 на $\{e_1, e_2\}$

$$\text{proj}_{e_1} e'_1 = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \|e'_1\| \left(\frac{e_1}{\|e_1\|}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \|e'_1\| e_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} e_1 \quad (20)$$

$$\text{proj}_{e_2} e'_1 = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \|e'_1\| \left(\frac{e_2}{\|e_2\|}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \|e'_1\| e_2 = \frac{1}{2} e_2$$

$$e'_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} e_1 + \frac{1}{2} e_2 \quad (21)$$

- Аналогично найдем проекцию e'_2 на $\{e_1, e_2\}$

$$\text{proj}_{e_1} e'_2 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \|e'_2\| \left(\frac{e_1}{\|e_1\|}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \|e'_2\| e_1 = \frac{1}{2} e_1 \quad (22)$$

$$\text{proj}_{e_2} e'_2 = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \|e'_2\| \left(\frac{e_2}{\|e_2\|}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \|e'_2\| e_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} e_2$$

$$e'_2 = \frac{1}{2} e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} e_2 \quad (23)$$

- Найдем матрицу перехода от базиса $\{e_1, e_2\}$ к $\{e'_1, e'_2\}$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (24)$$

- В старом базисе $g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^T \cdot A \cdot b$
- В новом базисе $B^{-1} \cdot x = x' \Rightarrow x = B \cdot x' \Rightarrow g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^T \cdot B^T \cdot A \cdot B \cdot b \Rightarrow$ матрица соответствующая $g'_{\mu\nu}$

$$A' = B^T \cdot A \cdot B = B \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

- Чтобы найти третью точку для построения окружности в новом базисе решим уравнение

$$g_{\mu\nu}(\alpha e'_1 + e'_2, \alpha e'_1 + e'_2) = 1$$

$$\alpha^2(g_{\mu\nu}(e'_1, e'_1) + g_{\mu\nu}(e'_2, e'_2) + 2 \cdot g_{\mu\nu}(e'_1, e'_2)) = 1 \quad (26)$$

$$\alpha^2(2 + \sqrt{3}) = 1 \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{1}{2 + \sqrt{3}}}$$

- Найдем координаты вектора $v' = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ в старом базисе

$$v = B \cdot v' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.94 \\ 1.12 \end{pmatrix} \quad (27)$$

2. Дополнительные задачи

- 1) • Докажем универсальное с-во свободной абелевой группы G с базисом $A = \{a_1 \dots a_n\}$:

Определим искомый гомоморфизм как:

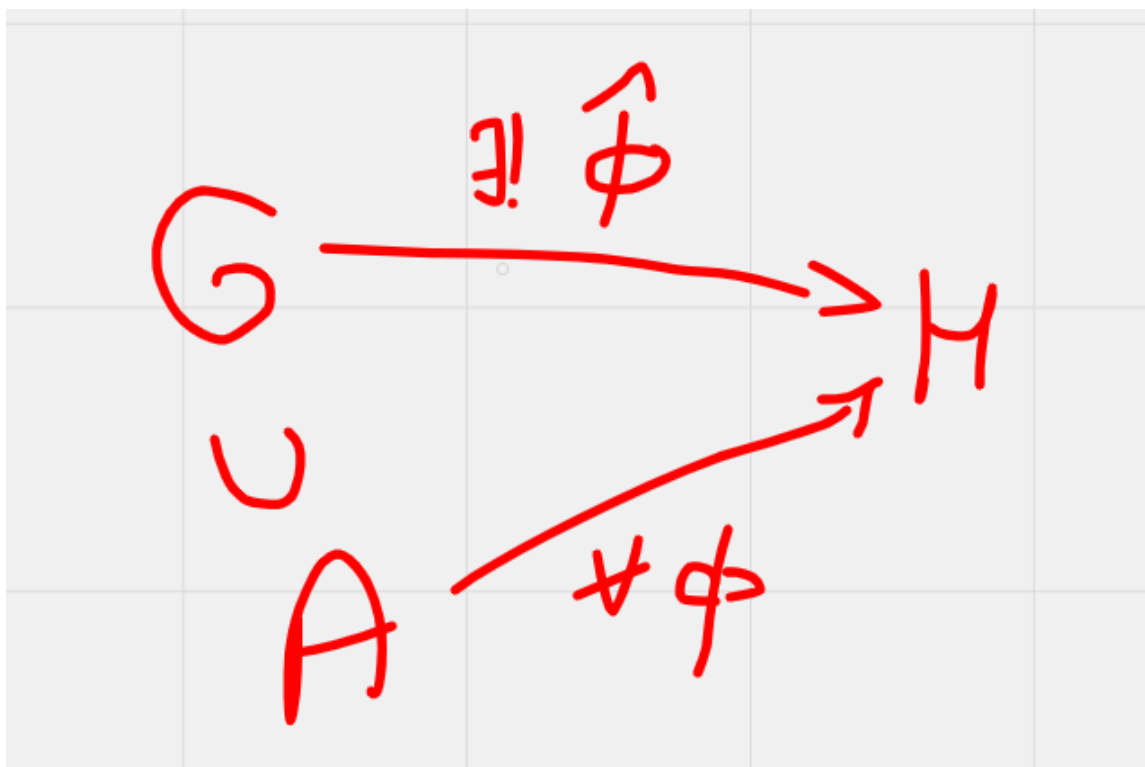
$$\hat{\phi}(x \in G) = \hat{\phi}\left(\sum_i n_i a_i\right) = \sum_i n_i \hat{\phi}(a_i) = \sum_i n_i \phi(a_i) \quad n_i \in \mathbb{Z} \quad (28)$$

- Докажем с-во гомоморфизма:

$$x + y = \sum_i n_i a_i + \sum_i m_i a_i = \sum_i (n_i + m_i) a_i \quad (29)$$

$$\hat{\phi}(x + y) = \sum_i (n_i + m_i) \phi(a_i) = \sum_i n_i \phi(a_i) + \sum_i m_i \phi(a_i) = \hat{\phi}(x) + \hat{\phi}(y)$$

- Пусть существует другой гомоморфизм $\varphi : G \rightarrow H$. По условию он является продолжением ϕ на $G \Rightarrow \forall i : \varphi(a_i) = \phi(a_i) = \hat{\phi}(a_i)$. Но так как любое отображение $f : G \rightarrow H$ однозначно задается значениями на $\{a_1 \dots a_n\}$, то $\varphi = \hat{\phi}$



- Пусть универсальное свойство выполняется, тогда

$$\exists! \hat{\phi} \text{ и } \exists \sum_i n_i \notin \mathbb{Z} : \hat{\phi}\left(\sum_i n_i a_i\right) = \sum_i n_i \phi(a_i) \quad (30)$$

- Но в H не существует элемента, который можно представить нецелым набором коэффициентов (в группе есть только сложение, а при сложении любых двух элементов группы с целыми коэффициентами получается элемент с целыми коэффициентами) \Rightarrow противоречие

- 2) • Докажем, что любое преобразование $f \in PSL(2, \mathbb{C})$ не являющееся тождественным, фиксирует не более 2-х точек.

$$\frac{az + b}{cz + d} = z \quad (31)$$

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0$$

- Случай 1: $c \neq 0$. Тогда полином от z (выше) имеет 1 или 2 решения (основная теорема алгебры). $z = \infty$ не является фиксированной точкой, так как $f(\infty) = \frac{a}{c}$
- Случай 2: $c = 0$.

$$(d - a)z - b = 0 \quad (32)$$

- Случай 2.1: $a = d$ и $b = 0$ приводит к тождественному преобразованию (не подходит)
- Случай 2.2: $a = d$ и $b \neq 0 \Rightarrow$ нет корней
- Случай 2.3: $a \neq d \Rightarrow z = \frac{b}{a-d}$
- Для точек (x_1, x_2, x_3) определим $g \in PSL(2, \mathbb{C})$:

$$g(z) = \frac{z - x_1}{z - x_3} \cdot \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1} \quad (33)$$

- Прямой проверкой убеждаемся, что $g(x_1) = 0$ и $g(x_2) = 1$ и $g(x_3) = \infty$
 - Докажем единственность g : пусть существует $p \in PSL(2, \mathbb{C}) : p \neq g$, которое переводит точки (x_1, x_2, x_3) в $(0, 1, \infty)$. Тогда:
 - $(g^{-1} \circ p) \in PSL(2, \mathbb{C})$ фиксирует точки (x_1, x_2, x_3) , но из доказанного выше следует, что любое преобразование из $PSL(2, \mathbb{C})$ фиксирующее более 2 точек является тождественным $\Rightarrow g = p$
 - Аналогичное док-во для $(p \circ g^{-1})$
 - Любое $f \in PSL(2, \mathbb{C})$ однозначно задается $x \in \mathbb{C}^4 \Rightarrow PSL(2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^4 \Rightarrow PSL(2, \mathbb{C}) \not\cong \mathbb{C}^3$
- 3) • Пусть B - билинейное симметричное скалярное произведение.
- $\forall l, m \in L : l \neq m : B(l + m, l + m) = B(l, l + m) + B(m, l + m) =$

$$= B(l, l) + B(l, m) + B(m, l) + B(m, m) = \quad (34)$$

$$= 2B(l, m) + B(l, l) + B(m, m) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad & \Rightarrow B(l, m) = \frac{B(l+m, l+m) - B(l, l) - B(m, m)}{2} = \\
& = \frac{Q(l+m) - Q(l) - Q(m)}{2}
\end{aligned} \tag{35}$$

$$\bullet \quad l = m : B(l, l) = \frac{B(2l, 2l) - 2B(l, l)}{2} = \frac{4Q(l) - 2Q(l)}{2} = Q(l) \tag{36}$$

