



Лекция 3

Изоморфизм линейных пространств.

Содержание лекции:

В настоящей лекции мы обсудим важную концепцию изоморфизма линейных пространств. Изоморфные пространства как алгебраические структуры неотличимы. Мы покажем, что исследование структуры этих пространств можно без потери общности ограничить только некоторыми представителями, а именно координатными пространствами.

Ключевые слова:

Биекция, линейность, изоморфизм, изоморфные пространства, изоморфизм и линейная зависимость, классы изоморфных пространств.

Авторы курса:

Трифанов А. И.

Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:

mathdep.ifmo.ru/geolin

3.1 Определение изоморфизма

Пусть $X(\mathbb{k})$ и $Y(\mathbb{k})$ - линейные пространства над одним и тем же полем \mathbb{k} .

Nota bene Напомним что отображение $\sigma : X \rightarrow Y$ между множествами X и Y называется **биекцией**, если существует отображение $\psi : Y \rightarrow X$, такое что

$$\forall x \in X \quad \psi(\sigma(x)) = x, \quad \forall y \in Y \quad \sigma(\psi(y)) = y,$$

то есть

$$\psi \circ \sigma = \text{id}_X, \quad \sigma \circ \psi = \text{id}_Y.$$

Лемма 3.1. Биекция является взаимно-однозначным отображением.

Отображение $\sigma : X \rightarrow Y$ линейного пространства $X(\mathbb{k})$ в линейное пространство $Y(\mathbb{k})$ называется **линейным**, если

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in X \quad \sigma(x_1 + x_2) &= \sigma(x_1) + \sigma(x_2), \\ \forall x \in X, \quad \forall \alpha \in \mathbb{k} \quad \sigma(\alpha x) &= \alpha \sigma(x). \end{aligned}$$

Nota bene Если $\sigma : X(\mathbb{k}) \rightarrow Y(\mathbb{k})$ - линейно, тогда

$$\sigma(0_X) = 0_Y$$

Отображение $\sigma : X(\mathbb{k}) \rightarrow Y(\mathbb{k})$ называется **изоморфизмом** линейных пространств $X(\mathbb{k})$ и $Y(\mathbb{k})$, если σ биективно и линейно.

Пример 3.1. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ - базис $X(\mathbb{k})$, тогда отображение

$$\sigma : X(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbb{k}^n,$$

сопоставляющее каждому вектору $x \in X(\mathbb{k})$ набор его координат в базисе $\{e_j\}_{j=1}^n$ является изоморфизмом.

Лемма 3.2. Отображение σ^{-1} , обратное изоморфизму σ является изоморфизмом.



По определению, σ^{-1} является биекцией. Таким образом, необходимо доказать только линейность. Пусть $y_1, y_2 \in Y(\mathbb{k})$, тогда

$$\sigma^{-1}(y_1), \sigma^{-1}(y_2) \in X(\mathbb{k}).$$

Из линейности σ следует

$$\sigma(\sigma^{-1}(y_1) + \sigma^{-1}(y_2)) = \sigma(\sigma^{-1}(y_1)) + \sigma(\sigma^{-1}(y_2)) = y_1 + y_2.$$

Применим к обеим частям σ^{-1} и получим

$$\sigma^{-1}(y_1 + y_2) = \sigma^{-1}(y_1) + \sigma^{-1}(y_2).$$

Пусть теперь $y \in Y$, тогда

$$\sigma(\alpha \sigma^{-1}(y)) = \alpha \sigma(\sigma^{-1}(y)) = \alpha y \quad \Rightarrow \quad \sigma^{-1}(\alpha y) = \alpha \sigma^{-1}(y).$$



3.2 Изоморфизм и линейная зависимость

Лемма 3.3. Пусть $\sigma : X(\mathbb{K}) \rightarrow Y(\mathbb{K})$ - линейное отображение и $\{x_i\}_{i=1}^m$ - ЛЗ набор в $X(\mathbb{K})$, тогда $\{\sigma(x_i)\}_{i=1}^m$ - ЛЗ набор в $Y(\mathbb{K})$.

►

Пусть $\{x_i\}_{i=1}^m$ - ЛЗ набор в $X(\mathbb{K})$, тогда

$$\exists \{\alpha^i\}_{i=1}^m \in \mathbb{K} : \sum_{i=1}^m x_i \alpha^i = 0_X.$$

После отображения σ будем иметь:

$$\sigma \left(\sum_{i=1}^m x_i \alpha^i \right) = \sum_{i=1}^m \sigma(x_i) \alpha^i = 0_Y.$$

Так как набор $\{\alpha^i\}_{i=1}^m$ нетривиален, то набор $\{\sigma(x_i)\}_{i=1}^m$ - линейно зависимый.

◄

Nota bene Образ ЛНЗ набора $\{x_i\}_{i=1}^m$ в этом случае не обязан быть ЛНЗ.

Лемма 3.4. При изоморфизме ЛНЗ набор векторов отображается в ЛНЗ набор.

►

Пусть $\{x_i\}_{i=1}^m$ - ЛНЗ набор, а $\{\sigma(x_i)\}_{i=1}^m$ - ЛЗ, но тогда $\{\sigma^{-1}(\sigma(x_i))\}_{i=1}^m$ - ЛЗ набор.

◄

Лемма 3.5. При изоморфизме полный набор отображается в полный набор.

►

Покажем, что из полноты набора $\{x_i\}_{i=1}^m$ следует полнота набора $\{\sigma(x_i)\}_{i=1}^m$. Действительно для любого $y \in Y(\mathbb{K})$ имеет место

$$\exists \{\alpha^i\}_{i=1}^n : \sigma^{-1}(y) = \sum_{i=1}^n e_i \alpha^i \Rightarrow y = \sum_{i=1}^n \sigma(e_i) \alpha^i,$$

◄

Nota bene Таким образом, при изоморфизме базис пространства $X(\mathbb{K})$ отображается в базис пространства $Y(\mathbb{K})$. Ниже мы покажем, что данное условие является также достаточным для существования изоморфизма между данными пространствами.

3.3 Изоморфные пространства

|| Линейные пространства $X(\mathbb{K})$ и $Y(\mathbb{K})$ называются **изоморфными**, если между ними существует изоморфизм $\sigma : X(\mathbb{K}) \rightarrow Y(\mathbb{K})$.

ИЗОМОРФИЗМ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ.

Nota bene Тот факт, что пространство $X(\mathbb{k})$ изоморфно пространству $Y(\mathbb{k})$ будем обозначать $X(\mathbb{k}) \simeq Y(\mathbb{k})$.

Лемма 3.6. Изоморфность линейных пространств - отношение эквивалентности.



Докажем необходимые свойства:

1. рефлексивность ($X(\mathbb{k}) \simeq X(\mathbb{k})$):
тождественное отображение $\text{id}_X : X \rightarrow X$ является изоморфизмом;
2. симметричность ($X(\mathbb{k}) \simeq Y(\mathbb{k}) \Rightarrow Y(\mathbb{k}) \simeq X(\mathbb{k})$)
было доказано, что обратное отображение также изоморфизм;
3. транзитивность ($X(\mathbb{k}) \simeq Y(\mathbb{k}), Y(\mathbb{k}) \simeq Z(\mathbb{k}) \Rightarrow X(\mathbb{k}) \simeq Z(\mathbb{k})$)
пусть $\sigma : X(\mathbb{k}) \rightarrow Y(\mathbb{k})$ и $\psi : Y(\mathbb{k}) \rightarrow Z(\mathbb{k})$ соответствующие изоморфизмы, тогда $\psi \circ \sigma$ - изморфизм и $X(\mathbb{k}) \simeq Z(\mathbb{k})$.



Nota bene Полученное отношение эквивалентности порождает классы эквивалентности изоморфных пространств.

Лемма 3.7. Чтобы пространства $X(\mathbb{k})$ и $Y(\mathbb{k})$ были изоморфны необходимо и достаточно чтобы их размерности совпадали:

$$X(\mathbb{k}) \simeq Y(\mathbb{k}) \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{k}} X = \dim_{\mathbb{k}} Y.$$



⇒ Пусть $X(\mathbb{k}) \simeq Y(\mathbb{k})$, тогда образом базиса пространства $X(\mathbb{k})$ будет некоторый базис пространства $Y(\mathbb{k})$. В силу биективности изоморфизма, количества векторов в соответствующих наборах будут совпадать.

⇐ Если $\dim_{\mathbb{k}} X = \dim_{\mathbb{k}} Y$, тогда $X \simeq \mathbb{k}^n$ и $Y(\mathbb{k}) \simeq \mathbb{k}^n$. В силу симметричности и транзитивности мы получим $X(\mathbb{k}) \simeq Y(\mathbb{k})$.



Nota bene Таким образом, каждый класс эквивалентности изоморфных пространств содержит линейные пространства одинаковой размерности. Типичными представителями данных классов являются "арифметические" пространства столбцов:

$$[n = 1] \leftrightarrow \mathbb{k}^1, \quad [n = 2] \leftrightarrow \mathbb{k}^2, \quad \dots, \quad [n = m] \leftrightarrow \mathbb{k}^m$$

Nota bene Выберем базис в каждом из пространств $X(\mathbb{k})$ и $Y(\mathbb{k})$:

$$\{e_j\}_{j=1}^n \in X(\mathbb{k}), \quad \{f_j\}_{j=1}^n \in Y(\mathbb{k}), \quad e_j \leftrightarrow f_j \quad \forall j.$$

Изоморфизм между $X(\mathbb{k})$ и $Y(\mathbb{k})$ устанавливается следующим соответствием:

$$x = \sum_{i=1}^n e_i \alpha^i \quad \leftrightarrow \quad y = \sum_{i=1}^n f_i \alpha^i.$$