1 Задача 1. Обязательная часть

1.1 Ограниченная монотонная последовательность

1. Пусть $x_0 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n})$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$

▶

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = c \quad \text{и} \quad \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = c \implies$$

$$\implies \text{(совершим предельный переход) } c = \frac{1}{2}(c + \frac{1}{c})$$

$$2c = c + \frac{1}{c} \implies c = 1$$

◀

2. Докажите, что последовательность $x_1 = \sqrt{3}, x_n = \underbrace{\sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{\dots + \sqrt{3}}}}}_{n}$ сходится и найдите ее предел.

▶

Докажем по индукции, что последовательность возрастает:

$$\text{База: } x_2 - x_1 = \sqrt{3 + \sqrt{3}} - \sqrt{3} > 0 \implies x_2 > x_1$$
$$\text{Переход: Пусть } \forall k < n : x_k > x_{k-1}$$
$$\text{Д-во: } \sqrt{3 + x_k} > \sqrt{3 + x_{k-1}} \implies \sqrt{3 + x_k} > x_k \implies x_{k+1} > x_k$$

Докажем, что последовательность ограничена:

$$\text{База: } x_1 = \sqrt{3} < 3$$
$$\text{Переход: Пусть } \forall k \leq n : x_k < 3$$
$$\text{Докажем: } x_{n+1} < 3$$
$$\text{Возведем в квадрат: } 3 + x_n < 9;$$
$$x_n < 3 \implies 3 + x_n < 6 < 9 \implies x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n} < 3$$

Найдем предел:

$$\lim_{x\to\infty} x_n = c \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty} x_{n+1} = c \implies \text{предельный переход}$$
$$\implies c = \sqrt{3 + c} \implies c^2 = 3 + c \implies c^2 - c - 3 = 0$$
$$c_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}, \text{т.к. последовательность возрастает}$$
$$\text{и первый член больше нуля, то: } \lim_{x\to\infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

◀

3. $a_n = \frac{3}{2}$ и $a_n = \sqrt{3a_{n-1} - 2}$

▶ Докажем по индукции, что последовательность убывает:

$$\text{База: } x_2 - x_1 = \frac{3}{2} - \sqrt{3\frac{3}{2} - 2} = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{2}} > 0 \implies x_1 > x_2$$
$$\text{Переход: Пусть } \forall k \leq n : x_k < x_{k-1}$$
$$\text{Д-во: } a_n < a_{n-1} \implies \sqrt{3a_n - 2} < \sqrt{3a_{n-1} - 2} \implies a_{n+1} < a_n$$

Последовательность ограничена снизу нулем.

$$\lim_{x\to\infty} x_n = c \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty} x_{n+1} = c \implies \text{предельный переход}$$
$$\implies c = \sqrt{3c-2} \implies c^2 - 3c + 2 = 0$$
$$c_{1,2} = \frac{3\pm 1}{2} \implies c_1 = 2, c_2 = 1$$

Послед. убывает и ее превый член меньше 2 $\implies \lim\limits_{x\to\infty} x_n = 1$ ◀

1.2 Число e

1. Вычислите пределы последовательностей

   a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{n(1+\frac{1}{n})}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{(1+\frac{1}{n})}\right)^n = \dfrac{1}{e}$

   b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^2$

   c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{n+100} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{100} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n\frac{1}{2}}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{100} = e^{\frac{1}{2}}\cdot 1 = \sqrt{e}$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,\underbrace{9\cdots 9}_{n}{}^{10^n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)^{10^n} = \lim\limits_{k\to+\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)^k = \lim\limits_{k\to+\infty}\left(\frac{k-1}{k}\right)^k = \lim\limits_{k\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{k}{k-1}\right)^k} =$
   $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}\left(1-\frac{1}{k-1}\right)} = \frac{1}{e}$

1.3 Критерий Коши

1. $x_n = \frac{n+1}{3n-2}$

   $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{3n-2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(3-\frac{2}{n}\right)} = \dfrac{1}{3} \implies$ последовательность сходится $\implies x_n$- фундаментальна

2. Доказать, что последовательность расходится

   (a) $x_n = 0.2^{(-1)^n n} = \left(\frac{2}{5}\right)^{(-1)^n n}$

   $$\text{Последовательность расходится, если она не фундаментальна} \implies \tag{1}$$
   $$\implies \exists\varepsilon : \forall N : \exists n \geq N \text{ и } \exists p > 0 : |x_n - x_{n+p}| \geq \varepsilon \tag{2}$$

   Пусть $p = 1; \varepsilon = 1$

   Если n - четно: $\left|\left(\dfrac{5}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{2}{5}\right)^n\right| \geq \varepsilon = 1$т.к.

   $\dfrac{5}{2} > 1 \implies$ монотонно возрастает;

   $\dfrac{2}{5} < 1 \implies$ монотонно убывает

   Пусть $p = 1; \varepsilon = 1$

   Если n - нечетно: $\left|\left(\dfrac{5}{2}\right)^{n} - \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1}\right| \geq \varepsilon = 1$т.к.

   $\dfrac{5}{2} > 1 \implies$ монотонно возрастает;

   $\dfrac{2}{5} < 1 \implies$ монотонно убывает

(b) $x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу, что и исходная последовательность $\pm\infty$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \text{все четные элементы } x_n$$

$$b_n = -\left(1 + \frac{1}{n}\right) \text{все нечетные элементы } x_n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e \text{ и } \lim_{n\to\infty} a_n = -e \implies x_n\text{- расходится}$$

1.4 Теорема Штольца

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}}(1^p + \cdots + n^p) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

   $a_n = \dfrac{1}{n^{p+1}}$

   $b_n = 1^p + \cdots + n^p$

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{n^{p+1} - (n-1)^{p+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{n^{p+1} - (n^{p+1} - (p+1)(n^p)\cdots(-1)^{p+1})} = \frac{1}{p+1} = \lim_{n\to\infty} x_n$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n = 1 + a + 2a^2 + \cdots + na^n}{na^{n+1}}$

   $a_n = 1 + a + 2a^2 + \cdots + na^n \quad b_n = na^{n+1}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{na_n}{na^{n+1} - (n-1)a^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a - (1 - \frac{1}{n})} = \lim\limits_{n\to\infty}$

   $= \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

2 Задача 2. Пределы простые

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{1+2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

   $$a_n = \frac{1}{1+2n}, \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

   $$b_n = -\frac{1}{1+2n}, \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

   $$a_n \geq x_n \geq b_n \implies \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-2)^n}{1+2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

   $a_n = \dfrac{2}{1+2n}, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

   $b_n = -\dfrac{2}{1+2n}, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$

   Если последовательность сходится к A, то все ее подпоследовательности сходятся к A

   a_n и b_n – подпоследовательности x_n но их пределы неравны $\implies$ x_n расходится

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + 4^{n+2}} = \lim\limits_{n\to\infty} (4^n)^{\frac{1}{n}} (\frac{1}{4^n} + 16)^{\frac{1}{n}} = 4$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + 4^{n+2}n} = \lim\limits_{n\to\infty} (4^n n)^{\frac{1}{n}} (\frac{1}{4^n n} + 16)^{\frac{1}{n}} = 4n^{\frac{1}{n}} = 4$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + 4^{n+2}n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} (4^n n^2)^{\frac{1}{n}} (\frac{1}{4^n n^2} + 16)^{\frac{1}{n}} = 4n^{2^{\frac{1}{n}}} = 4$

6. $\lim\limits_{n\to-\infty}\sqrt[n]{1+4^{n+2}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[-n]{1+4^{2-n}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{16}{4^n}}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$

7. $\lim\limits_{n\to-\infty}\sqrt[n]{1+4^{n+2}n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[-n]{1-4^{2-n}n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{16}{4^n}n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$

8. $\lim\limits_{n\to-\infty}\sqrt[n]{1+4^{n+2}n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[-n]{1+4^{2-n}n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{16}{4^n}n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$

3 Задача 3. Сходимость

1. $\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}&\text{Пусть}\quad A\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{N} - \text{предел последовательности}\quad x_n.\\&\text{Пусть } \varepsilon=\min\{\lceil A\rceil - A; A-\lfloor A\rfloor\}\\&\forall n: x_n\notin(A-\varepsilon;\varepsilon+A)\end{aligned}$$

2. $\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}&\text{Пусть}\quad A\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z} - \text{предел последовательности}\quad x_n.\\&\text{Пусть } \varepsilon=\min\{\lceil A\rceil - A; A-\lfloor A\rfloor\}\\&\forall n: x_n\notin(A-\varepsilon;\varepsilon+A)\end{aligned}$$

3. $\mathbb{Q}$

$$\text{Пусть } x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n; \lim_{n\to\infty}x_n=e\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Q}$$

4. $\mathbb{C}$ Очевидно, что к вещественной части предела комплексной последовательности сходится последовательность из вещественных частей последовательностей. Аналогично и с мнимой частью предела.

$$\text{Пусть: } \exists\{x_n\}\to A\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}: A=(a,b), \text{где } b\neq 0$$
$$\forall x\in\{x_n\}: x=(x;0)\in\mathbb{C}\implies\{\underbrace{\Im x_n}_{\text{мнимая часть}}\}\to 0\neq b\implies .$$

4 Задача 4. Норм.

(a) $\mathcal{N}:\mathbb{R}_N^N\to\mathbb{R}$

(b) $\forall M\in\mathbb{R}_N^N:\mathcal{N}(M)\geq 0$

(c) $\mathcal{N}(M)=0\iff M=0_{N\times N}$

(d) $\forall M\in\mathbb{R}_N^N\forall\lambda\in\mathbb{R}:\mathcal{N}(\lambda M)=|\lambda|\mathcal{N}(M)$

(e) $\forall M_1,M_2\in\mathbb{R}_N^N:\mathcal{N}(M_1+M_2)\leq\mathcal{N}(M_1)+\mathcal{N}(M_2)$

1. $\mathcal{N}(M)=0\implies\exists M\neq 0_{N\times N}:\mathcal{N}(M)=0\implies$ противоречие с (c)

2. $\mathcal{N}(M)=det(M);\exists M:det(M)<0\implies\mathcal{N}(M)<0\implies$ противоречит (b)

3. $\mathcal{N}(M)=det^2(M);$

$$A=\begin{bmatrix}3&6\\2&4\end{bmatrix}\neq 0_{2\times 2};\quad det(A)=0\implies\text{противоречие с (c)}$$

4. $\mathcal{N}(M) = \sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{N}(m_j^i)$

$$\exists M : \forall i,j : m_j^i < 0 : \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(m_j^i) < 0 \implies \text{противоречие с (b)}$$

5. $\mathcal{N}(M) = \sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{N}(m_j^i)^2$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; \quad \mathcal{N}(A) = 1; \quad \mathcal{N}(A+A) = 4 \implies$$
$$\implies \mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(A) < \mathcal{N}(A+A) \implies \text{противоречие с (e)}$$

6. $\mathcal{N}(M) = \sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{N}(m_j^i)^3$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; \quad \mathcal{N}(A) = \frac{1}{2}; \quad \mathcal{N}(A+A) = 4 \implies$$
$$\implies \mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(A) < \mathcal{N}(A+A) \implies \text{противоречие с (e)}$$

7. $\mathcal{N}(M) = \sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{N}\sqrt{(m_j^i)^2} = \sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{N}|(m_j^i)|$ - является нормой.

   a $\forall a_1 \dots a_{N\times N} \in \mathbb{R} : |a_1| + \dots + |a_{N\times N}| \in \mathbb{R}$

   b $\forall a_1 \dots a_{N\times N} \in \mathbb{R} : |a_1| + \dots + |a_{N\times N}| \geq 0$

   c $\forall a_1 \dots a_{N\times N} \in \mathbb{R} : |a_1| + \dots + |a_{N\times N}| = 0 \longleftrightarrow \forall i \in \{1 \dots N \times N\} : a_i = 0$

   d $\forall a_1 \dots a_{N\times N} \in \mathbb{R} \quad \& \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} : |\lambda a_1| + \dots + |\lambda a_{N\times N}| = |\lambda||a_1| + \dots + |\lambda||a_{N\times N}| = |\lambda|(|a_1| + \dots + |a_{N\times N}|)$

   e $\forall a_1 \dots a_{N\times N} \in \mathbb{R} \quad \& \quad \forall b_1 \dots b_{N\times N} \in \mathbb{R} : |(|a_1| + \dots + |a_{N\times N}|) + (|b_1| + \dots + |b_{N\times N}|)| \leq |(|a_1| + \dots + |a_{N\times N}|)| + |(|b_1| + \dots + |b_{N\times N}|)|$

8. $\mathcal{N}(M) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{N}(m_j^i)^2}$ - является нормой.

   a $\forall a_1 \dots a_{N\times N} \in \mathbb{R} : \sqrt{(a_1)^2 + \dots + (a_{N\times N})^2} \in \mathbb{R}$

   b $\forall b \in \mathbb{R} : \sqrt{b} \geq 0$

   c $\forall a_1 \dots a_{N\times N} \in \mathbb{R} : \sqrt{(a_1)^2 + \dots + (a_{N\times N})^2} = 0 \implies (a_1)^2 + \dots + (a_{N\times N})^2 = 0 \longleftrightarrow \forall i \in \{1 \dots N \times N\} : a_i = 0$

   d $\forall a_1 \dots a_{N\times N} \in \mathbb{R} \quad \& \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} : \sqrt{(\lambda a_1)^2 + \dots + (\lambda a_{N\times N})^2} = \sqrt{(\lambda)^2(a_1)^2 + \dots + (\lambda)^2(a_{N\times N})^2} = \sqrt{(\lambda)^2((a_1)^2 + \dots + (a_{N\times N})^2)} = |\lambda|\sqrt{(a_1)^2 + \dots + (a_{N\times N})^2}$

   e $\forall a_1 \dots a_{N\times N} \in \mathbb{R} \quad \& \quad \forall b_1 \dots b_{N\times N} \in \mathbb{R} : \sqrt{(a_1)^2 + \dots + (a_{N\times N})^2} + \sqrt{(b_1)^2 + \dots + (b_{N\times N})^2} \geq \sqrt{(a_1)^2 + \dots + (a_{N\times N})^2 + (b_1)^2 + \dots + (b_{N\times N})^2}$

9. $\mathcal{N}(M) = \prod\limits_{i=1}^{N}\prod\limits_{j=1}^{N}(m_j^i)$

$$\text{Пусть} \forall i,j \in \{1 \cdots N\}, \text{где} N - \text{нечетное} : a_j^i \in A_N^N < 0 \implies \mathcal{N}(A) < 0$$
$$\implies \text{противоречие с (b)}$$

10. $\mathcal{N}(M) = \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{N} (m_j^i)^2$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; \quad \mathcal{N}(A) = \frac{1}{256}; \quad \mathcal{N}(A+A) = 1 \implies$$

$$\implies \mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(A) < \mathcal{N}(A+A) \implies \text{противоречие с (e)}$$

11. $\mathcal{N}(M) = \max\limits_{i,j=1\ldots N} m_j^i$

$$\text{Пусть: } A_N^N : \forall i,j : a_j^i < 0 \implies \max_{i,j=1\ldots N} a_j^i < 0 \implies \text{противоречие с (b)}$$

12. $\mathcal{N}(M) = \min\limits_{i,j=1\ldots N} m_j^i$

$$\text{Пусть: } A_N^N : \forall i,j : a_j^i < 0 \implies \min_{i,j=1\ldots N} a_j^i < 0 \implies \text{противоречие с (b)}$$

13. $\mathcal{N}(M) = \max\limits_{i,j=1\ldots N} (m_j^i)^2$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; \quad \mathcal{N}(A) = \frac{1}{4}; \quad \mathcal{N}(A+A) = 1 \implies$$

$$\implies \mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(A) < \mathcal{N}(A+A) \implies \text{противоречие с (e)}$$

14. $\mathcal{N}(M) = \min\limits_{i,j=1\ldots N} (m_j^i)^2$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; \quad \mathcal{N}(A) = \frac{1}{4}; \quad \mathcal{N}(A+A) = 1 \implies$$

$$\implies \mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(A) < \mathcal{N}(A+A) \implies \text{противоречие с (e)}$$