α

Лекция 1

Аффинное пространство

Содержание лекции:
В настоящей лекции мы начинаем рассматривать геометрическую сцену и геометрические объекты. Сценой для нас будет служить аффинное пространство - множество точее, на котром действует линейное пространство. Здесь мы обсудим аксиомы аффинного пространства и их простейшие следствия.

Ключевые слова:
Аффинное пространство, аксиомы Вейля, векторизация, размерность, аффинная плоскость, точка, прямая, гиперплосоксть, аффинная оболочка, параллельность плокскостей, скрещивающиеся плоскости, пересечение аффицнных пространств.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

1.1 Аксиомы Вейля

> **Аффинным пространством** называется тройка $\mathbb{A}_{\Bbbk} = (\mathbb{S}, \mathbb{V}, +)$, где $\mathbb{S}$ - множество (элементы которого мы будем называть "точками"), $\mathbb{V}$ - векторное пространство над полем $\Bbbk$ и отображение
> $$+ \quad : \quad \mathbb{S} \times \mathbb{V} \to \mathbb{S},$$
> сопоставляющее каждой паре $(P, \vec{v}) \in \mathbb{S} \times \mathbb{V}$ элемент $P + \vec{v}$ множества $\mathbb{S}$.

Nota bene Свойства композиции $+$ (аксиомы Вейля):

1. для любой точки $P \in \mathbb{S}$ имеет место
$$P + \vec{0} = P,$$
2. для любой точки $P \in \mathbb{S}$ и для любых $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}$ имеет место:
$$P + (\vec{v} + \vec{w}) = (P + \vec{v}) + \vec{w},$$
3. для любой упорядоченной пары точек $(P, Q) \in \mathbb{S} \times \mathbb{S}$ существует единственный элемент из $\vec{v} \in \mathbb{V}$, такой что:
$$Q = P + \vec{v}.$$

Nota bene Если $P + \vec{v} = Q$, то будем обозначать элемент $\vec{v} \in \mathbb{V}$ посредством $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$.

Лемма 1.1. *Пусть P, Q, R - произвольные точки аффинного пространства $\mathbb{A}_{\Bbbk}$, тогда*
$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

►
Введем обозначения $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ и $\vec{w} = \overrightarrow{QR}$, тогда аксиома (2) дает
$$P + \left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}\right) = \left(P + \overrightarrow{PQ}\right) + \overrightarrow{QR} = Q + \overrightarrow{QR} = R,$$
Затем из аксиомы (3) получаем требуемое.
◄

Лемма 1.2. *Имеет место равенство:*
$$\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$$

►
В случае $R = P$ будем иметь
$$P + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = P \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}.$$
◄

Nota bene Из предыдущей леммы, в частности, следует что $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$

1.2 Векторизация аффинного пространства

Векторизацией аффинного пространства $\mathbb{A}_\Bbbk$ относительно точки $O \in \mathbb{A}_\Bbbk$ называется отображение $\mathrm{vect}_O : \mathbb{A}_\Bbbk \to \mathbb{V}$, такое что

$$\mathrm{vect}_O(P) = \overrightarrow{OP} = \vec{v}_P, \quad \forall P \in \mathbb{A}_\Bbbk,$$

и при этом $P = O + \overrightarrow{OP}$ и вектор $\overrightarrow{OP}$ называется **радиусом-вектором** точки P относительно точки O.

Теорема 1.1. *Для любой точки $O \in \mathbb{A}_\Bbbk$ векторизация vect_O является взаимно-однозначным соответствием (биекцией) между $\mathbb{A}_\Bbbk$ и $\mathbb{V}$.*

►

Иньективность:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} \quad \Rightarrow \quad P = Q.$$

Действительно:

$$P = O + \overrightarrow{OP} = O + \overrightarrow{OQ} = Q.$$

Сюрьективность:

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{V} \quad \exists\, P \in \mathbb{A}_\Bbbk : \quad P = O + \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \overrightarrow{OP}.$$

◄

Размерностью аффинного пространства $\mathbb{A}_\Bbbk$ называется размерность соответствующего векторного пространства $\mathbb{V}$:

$$\dim \mathbb{A}_\Bbbk = \dim_\Bbbk \mathbb{V}.$$

1.3 Объекты аффинной геометрии

Аффинной плоскостью в пространстве $\mathbb{A}_\Bbbk$ называется подмножество вида:

$$\mathbb{P}_\Bbbk = \{P_0 + \vec{u} : \quad P_0 \in \mathbb{A}_\Bbbk, \quad \vec{u} \in \mathbb{U}\},$$

где $\mathbb{U} \leq \mathbb{V}$ - подпространство $\mathbb{V}$. Пространство $\mathbb{U}$ называется **направляющим подпространством** плоскости $\mathbb{P}_\Bbbk$.

Nota bene По определению $\mathbb{P}_\Bbbk$ - аффинное пространство и $\dim \mathbb{P}_\Bbbk = \dim_\Bbbk \mathbb{U}$.

Точкой и **прямой** называются, соответственно, плоскости размерности 0 и 1. **Гиперплоскостью** называется плоскость размерностью $n-1$, если $\dim \mathbb{A}_\Bbbk = n$.

Пример 1.1. Рассмотрим прямую $\mathbb{L}_\Bbbk$ в аффинном пространстве $\mathbb{A}_\Bbbk$ и положим $\mathbb{U} = \operatorname{span}_\Bbbk(\vec{a})$. Пусть далее $\vec{r}_0$ - образ точки P_0 при векторизации vect_O. Тогда для образа $\vec{r}$ произвольной точки $P \in \mathbb{L}_\Bbbk$ будем иметь:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \alpha\vec{u}, \quad \alpha \in \Bbbk.$$

Аналогично, для плоскости вместе с $\mathbb{U} = \operatorname{span}_\Bbbk(\vec{a}, \vec{b})$, где $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{V}$ - два неколлинеарных вектора, в результате вcase векториации получим:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{w} = \vec{r}_0 + \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \quad \alpha, \beta \in \Bbbk.$$

Теорема 1.2. *Через любые $m+1$ точек аффинного пространства $\mathbb{A}_\Bbbk$ проходит плоскость размерности меньшей или равной m. При этом, если эти точки не содержатся в плоскости размерности меньшей m, то через них проходит единственная плоскость размерности m.*

▶

Пусть $P_0, P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{A}_\Bbbk$. Тогда

$$\mathbb{P}_\Bbbk = P_0 + \operatorname{span}_\Bbbk(\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_m}),$$

есть плоскости размерности меньшей или равной m, проходящие через точки $P_0, P_1, \ldots P_m$. Если $\dim \mathbb{P}_\Bbbk = m$, то векторы $\left\{\overrightarrow{P_0P_j}\right\}_{j=1}^{m}$ линейнонезависимы и $\mathbb{P}_\Bbbk$ является единственной m-мерной плоскостью, проходящей через $P_0, P_1, \ldots P_m$.

◀

Теорема 1.3. *Всякая плоскость $\mathbb{P}_\Bbbk$ есть множество решений некоторой системы линейных уравнений.*

▶

Векторизация $\mathbb{P}_\Bbbk$ относительно некоторой точки O дает структуру линейного многообразия в $\mathbb{V}$, которое можно интерпретировать как решение некоторой неоднородной системы.

◀

> **Аффинной оболочкой** множества $M \subset \mathbb{A}_k$ называется плоскость
>
> $$\operatorname{aff} M = P_0 + \operatorname{span}_\Bbbk(\overrightarrow{P_0P} : P \in M), \quad M \subset \mathbb{A}_\Bbbk, \quad P_0 \in M.$$

Пример 1.2. Воспроизведем хорошо известные утверждения:

- $\operatorname{aff}\{P_0, P_1\} = P_0 + \operatorname{span}_\Bbbk(\overrightarrow{P_0P_1})$ - аффинная прямая;
- $\operatorname{aff}\{P_0, P_1, P_2\} = P_0 + \operatorname{span}_\Bbbk(\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2})$ - аффинная плоскость;

1.4 Взаимное расположение плоскостей

Плоскости $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^{(1)} = \{P_1 + \mathbb{U}_1\}$ и $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^{(2)} = \{P_2 + \mathbb{U}_2\}$ называются

- **параллельными**, если $\mathbb{U}_1 \leqslant \mathbb{U}_2$ или $\mathbb{U}_2 \leqslant \mathbb{U}_1$,
  при этом они **совпадают**, если $\overrightarrow{P_1P_2} \in \mathbb{U}_{1(2)}$;
- **скрещивающимися**, если $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^{(1)} \cap \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^{(2)} = \varnothing$ и $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$.
- **пересекающимимся** в остальных случаях.

Лемма 1.3. *Плоскости $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^{(1)}$ и $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^{(2)}$ пересекаются тогда и только тогда, когда*

$$\overrightarrow{P_1P_2} \in \mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2.$$

►
Плоскости $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^{(1)}$ и $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^{(2)}$ пересекаются тогда и только тогда, когда существуют векторы $\vec{u}_1 \in \mathbb{U}_1$, $\vec{u}_2 \in \mathbb{U}_2$, такие что

$$P_1 + \vec{u}_1 = P_2 + \vec{u}_2.$$

Это равенство может быть переписано в виде

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2.$$

Существование таких векторов $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ как раз означает, что $\overrightarrow{P_1P_2} \in \mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2$.
◄

Пусть $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^{(1)} = (\mathbb{S}_1, \mathbb{V}_1, +)$ и $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^{(2)} = (\mathbb{S}_2, \mathbb{V}_2, +)$ - два аффинных подпространства аффинного пространства $\mathbb{A}_{\mathbb{k}} = (\mathbb{S}, \mathbb{V}, +)$. **Пересечением** $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^{(1)}$ и $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^{(2)}$ называется тройка $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^{\cap} = (\mathbb{S}_{\cap}, \mathbb{V}_{\cap}, +)$, такая что

$$\mathbb{S}_{\cap} = \mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2, \quad \mathbb{V}_{\cap} = \mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2,$$

где первое пересечение является теоретико-множественным, а второе - пересечением линейных подпространств.

Теорема 1.4. *Пересечение аффинных подпространств - аффинное подпространство.*